Теоретическая задача №4.1

Артём Левашов, 792

Итерационный метод Якоби применяется для решения линейной системы с трехдиагональной матрицей A. Диагональные элементы ($i = j$) равны 4, элементы на двух ближайших диагоналях ($|i-j| = 1$) равны 1.

Найдите число итераций, нужное для достижения точности 10^{-6} в ∞ норме, если известно, что для начального приближения $\|x-x_0\|_\infty < 10$, где x — точное решение системы.

Известно, что вектор разницы решения полученного на k-ом шаге связан с начальным вектором разности следующим образом:

$$e^k = (x^k - x) = S(x^{k-1} - x) = S^k(x^0 - x) = S^k e^0.$$

Это следует из общей идеи итерационного метода:

$$x = Sx + f,\ x^{k+1} = Sx^k + f.$$

Тогда, оценим норму e^k :

$$\|e^k\| = \|S^k e^0\| \leqslant \|S\|^k \|e^0\| < 10\|S\|^k.$$

Таким образом, нам нужно найти ∞ норму матрицы S. В итерационном методе Якоби $S = -D^{-1}(L+U)$, а в нашей задаче

$$D^{-1} = \frac{1}{4}E,\ L = L^T,\ L + L^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$\|S\|_\infty = \left\|-D^{-1}(L+L^T)\right\|_\infty = \left\|-\frac{1}{4}(L+L^T)\right\|_\infty = \frac{1}{2}$$
$$10\,\|S\|_\infty^k < 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{2^k} < 10^{-7} \Rightarrow 2^k > 10^7.$$

Так как $2^{23} > 8 \cdot 10^6$, а $2^{24} > 16 \cdot 10^6$, то нам подходит $k = 24$.

Ответ: для решения системы с заданной точностью понадобится 24 итерации.