Теоретическое задание №9.2

Артём Левашов, 792

Оценить минимальное число N разбиений отрезка для вычисления заданного интеграла по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее точность 10^{-4} :

$$\text{а) } I = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx, \text{ б) } \int\limits_0^1 \sin(x^2) dx.$$

Известная оценка для ошибки квадратурной формулы трапеций на отрезке длиной h :

$$|I(f) - S(f)| \leqslant \frac{1}{12} M_2 h^3,$$

Где M_2 — оценка модуля второй производной функции на интересующем нас отрезке. Так как мы хотим найти число разбиений для составной формулы, то, вообще говоря, M_2 будет принимать своё значение на каждом из N отрезков. Оценим это значение сверху на всём отрезке $[0,1]$ для удобства;

$$\text{а) } (e^{-x^2})'' = (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$
$$||f^{(2)}||_C = \max_{[0,1]} |2e^{-x^2}(2x^2 - 1)| = 2,$$

так как экспонента убывает от 1 к $\frac{1}{e}$ а модуль второго множителя сначала уменьшается от 1 до 0, потом увеличивается от 0 до 1.

$$\text{б) } (\sin(x^2))'' = (2x\cos(x^2))' = 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$$
$$||f^{(2)}||_C = 2 \max_{[0,1]} |\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2)|.$$

Найдём производную выражения под модулем, чтобы найти максимум на отрезке:

$$(\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2))' = -2x\sin(x^2) - 4x\sin(x^2) - 4x^3\cos(x^2) =$$
$$= -2x(3\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)).$$

На отрезке $[0,1]$ второй множитель не принимает отрицательные значения, значит на этом отрезке функция имеет экстремум в точке 0 и убывает. Но, в крайней точке отрезка ($x=1$) значение функции больше, чем значение в точке 0. Таким образом, в случае (б):

$$||f^{(2)}||_C = \max_{[0,1]} 2|\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)| \leqslant 2 \cdot 1.15 = 2.3.$$

Выпишем оценку для ошибки на всём разбиваемом отрезке для случая (а) $M_2 = 2$ и $h = \frac{1}{N}$:

$$|I(f) - S(f)| \leqslant N\frac{2}{12}\frac{1}{N^3} = \frac{1}{6N^2}.$$

Хотим $|I(f) - S(f)| \leqslant 10^{-4}$. Тогда

$$\frac{1}{6N^2} \leqslant 10^{-4} \;\Rightarrow\; 6N^2 \geqslant 10^4 \;\Rightarrow\; N \geqslant \frac{100}{\sqrt{6}} \approx 40.82$$

Таким образом, для случая (а) $N \geqslant 41$.

Проведём те же вычисления для случая (б) $M_2 = 2.3$:

$$|I(f) - S(f)| \leqslant N\frac{2.3}{12}\frac{1}{N^3} \leqslant \frac{0.2}{N^2}$$

$$|I(f) - S(f)| \leqslant 10^{-4}$$

$$\frac{0.2}{N^2} \leqslant 10^{-4} \;\Rightarrow\; N^2 \geqslant 0.2 \cdot 10^4 \;\Rightarrow\; N \geqslant \sqrt{0.2} \cdot 100 \approx 44.72$$

Таким образом, для случая (б) $N \geqslant 45$.