

## 4 Теория приближения функций

### 4.1 Алгоритм Ремеза

Написать программу для вычисления многочлена наилучшего приближения для функции  $f$  в норме  $C[a, b]$ .

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход функцию  $f$ , отрезок  $[a, b]$  и степень многочлена  $n$ , и возвращает многочлен (в любом удобном виде, например, набор коэффициентов), а также  $C[a, b]$ -норму ошибки, оцененную на подробной сетке (10000 узлов) на отрезке  $[a, b]$ .
2. Функция должна вычислять многочлен наилучшего приближения итерационно, с помощью алгоритма Ремеза.
3. Программа должна вычислять многочлен для какой-то тестовой функции, и выводить 2 рисунка:
  - (а) на одном рисунке – график ошибки  $e = f(x) - p_n(x)$  и график ошибки  $f(x) - L_n(x)$  при интерполяции многочленом степени  $n$  по значениям  $f$  в узлах Чебышёва (для интерполяции можно использовать готовую функцию, например [BarycentricInterpolator](#))
  - (б) на одном рисунке график функции  $f$  и график многочлена наилучшего приближения  $p_n$ .
4. Убедитесь, что алгоритм работает правильно: ошибка должна иметь  $n + 2$  точки альтернанса.

### 4.2 $L_2$ - приближение функций

Даны коэффициенты  $a_k$  обобщенного многочлена  $f = \sum_k a_k \phi_k$ , по набору функций  $1, \ln(x), x^{-2}, x^{-1}, x, x^2, x^3$  на отрезке  $[0.1, 1]$ . написать программу для вычисления коэффициентов  $b_k$  наилучшего  $L_2$  приближения  $\sum_k b_k \psi_k$  по набору функций  $1, x, x^2, x^3, x^4, x^6, x^7$ .

Требования к программе:

1. Программа должна вычислять коэффициенты путем решения линейной системы с матрицей Грамма для данной системы функций.  
Можно либо вычислять скалярные произведения с использованием готовых функций для символьного или численного интегрирования, либо вывести на бумаге готовые формулы и подставить их в код.
2. Программа должна выводить коэффициенты  $b_k$  и строить на одном рисунке графики исходной функции и полученного приближения.
3. Для проверки нужно выполнить расчет для

$$a = [198.22, 14.05, 0.039, -1.33, 10.33, -0.125, -0.337]$$

### 4.3 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Написать программу для вычисления интерполяционного многочлена в форме Ньютона и его производной.

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход массив с координатами узлов  $[x_0, \dots, x_n]$ , и массив значений функции в этих узлах.
2. Функция должна вычислять таблицу разделенных разностей.
3. Программа должна содержать ещё одну функцию, которая вычисляет значение интерполяционного многочлена в любой точке  $x$  за  $O(n)$ .
4. Программа должна содержать функцию, которая вычисляет значение 1-й производной интерполяционного многочлена в любой точке  $x$ .
5. Программа должна вызывать реализованные функции для равномерной и чебышёвских сеток и выводить 2 рисунка:
  - (а) на одном рисунке: график функции, многочлена (разными цветами) (по значениям на очень подробной сетке), и значения в узлах интерполяции (маркерами)
  - (б) графики производной  $f'$  и производной интерполяционного многочлена  $L'_n$  (на очень подробной сетке)

### 4.4 Кубический свободный сплайн

Написать программу для построения свободного кубического сплайна (2-е производные на концах равны 0) по табличным данным.

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход: массив с координатами узлов  $[x_0, \dots, x_n]$ , массив значений функции  $f$  в этих узлах.
2. Функция должна вычислять коэффициенты свободного кубического сплайна на каждом из отрезков. Для решения линейной системы нужно написать функцию, которая реализует метод прогонки для 3-х диагональной матрицы
3. Программа должна содержать функцию, которая вычисляет значение кубического сплайна в заданной точке.
4. Программа должна вызывать реализованную функцию для равномерной и неравномерных сеток и какой-то тестовой функции и строить на 1-м рисунке график исходной функции, интерполяционного сплайна (разными цветами), и значения в точках интерполяции (маркерами).