Теоретическое задание №11.1

Артём Левашов, 792

Для численного решения краевой задачи

$$u''(x) = f(x), u(0) = a, u(1) = b$$

используется конечно-разностная аппроксимация

$$U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} = \frac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1})$$

Найдите порядок аппроксимации разностной схемы.

Заметим, что система уравнений представляется в виде

$$\frac{12}{h^2}AU = BF,$$

где A — трёхдиагональная матрица, на главной диагонали которой стоит число -2, а слева и справа от неё единицы. B — трёхдиагональная матрица с 10 на главной диагонали и единицами слева и справа от неё, F — вектор значений функции $f(x)$ в узлах сетки. По определению, разностная задача имеет порядок аппроксимации p, если норма вектора невязки $||r|| = \mathcal{O}(h^p)$. При этом, вектор невязки равен $\frac{12}{h^2}A\hat{U} - BF$, где $\hat{U}$ — вектор значений истинного решения дифференциального уравнения в узлах сетки. Заметим, что в такой постановке векторы U и $\hat{U}$ имеет размерность $m+2$ и первая и последняя компоненты нам известны, однако на порядок нормы вектора невязки это не влияет. Тогда рассмотрим произвольную компоненту вектора невязки:

$$
\begin{gathered}
r_j = \left(\frac{12}{h^2} A\hat{U} - BF\right)_j = \\
= \frac{12}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - \left(f(x_{j-1}) + 10f(x_j) + f(x_{j+1})\right) = \\
= \frac{12}{h^2}\left(u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)\right) - \left(f(x_j - h) + 10f(x_j) + f(x_j + h)\right) = \\
= \frac{12}{h^2}\Bigg(u(x_j) - u'(x_j)h + \frac{u''(x_j)h^2}{2} - \frac{u'''(x_j)h^3}{6} + \frac{u^{(4)}h^4}{24} - \frac{u^{(5)}h^5}{120} + \frac{u^{(6)}h^6}{720} - \\
- 2u(x_j) + \\
+ u(x_j) + u'(x_j)h + \frac{u''(x_j)h^2}{2} + \frac{u'''(x_j)h^3}{6} + \frac{u^{(4)}h^4}{24} + \frac{u^{(5)}h^5}{120} + \frac{u^{(6)}h^6}{720}\Bigg) - \\
- \Bigg(f(x_j) - f'(x_j)h + \frac{f''(x_j)h^2}{2} - \frac{f'''(x_j)h^3}{6} + \frac{f^{(4)}(x_j)h^4}{24} + \\
+ 10f(x_j) + \\
+ f(x_j) + f'(x_j)h + \frac{f''(x_j)h^2}{2} + \frac{f'''(x_j)h^3}{6} + \frac{f^{(4)}(x_j)h^4}{24}\Bigg) + \mathcal{O}(h^6)
\end{gathered}
$$

Заметим, что в каждой скобке слагаемые с множителем h в нечётной степени взаимно уничтожаются, в первой уничтожаются слагаемые вида $k \cdot u(x_j)$, а также воспользуемся равенством $u''(x) = f(x)$:

$$
\begin{gathered}
r_j = \frac{12}{h^2}\left(u''(x_j)h^2 + \frac{u^{(4)}(x_j)h^4}{12} + \frac{u^{(6)}(x_j)h^6}{360}\right) - \\
- \left(12u''(x_j) + u^{(4)}(x_j)h^2 + \frac{u^{(6)}(x_j)h^4}{12}\right) + \mathcal{O}(h^6) = \\
= -\frac{u^{(6)}(x_j)h^4}{20} + \mathcal{O}(h^6) = \mathcal{O}(h^4).
\end{gathered}
$$

Таким образом, $||r|| = \mathcal{O}(h^4)$, а значит порядок аппроксимации равен 4.