Теоретическое задание №12.1

Артём Левашов, 792

Рассматривается следующее параметрическое семейство методов Рунге-Кутты:

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2},\ c_1 = \gamma, c_2 = 1-\gamma,\ a_{11} = a_{22} = \gamma, a_{21} = 1-2\gamma, a_{12} = 0.$$

Найдите все значения параметра, при которых метод имеет третий порядок аппроксимации.

Заметим, что упрощающие условия и условия для второго порядка аппроксимации выполняются:

$$a_{11} + a_{12} = \gamma + 0 = c_1$$
$$a_{21} + a_{22} = 1 - 2\gamma + \gamma = 1 - \gamma = c_2$$
$$b_1 + b_2 = 1$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для третьего порядка аппроксимации необходимо выполнение двух условий. Найдем значения параметра, при которых выполняется первое из них:

$$b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{\gamma^2}{2} + \frac{(1-\gamma)^2}{2} = \frac{2\gamma^2 - 2\gamma + 1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0$$
$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Теперь рассмотрим второе условие:

$$b_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + b_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{\gamma^2 + (1-2\gamma)\gamma + \gamma(1-\gamma)}{2} = \frac{1}{6}$$
$$6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0.$$

Получили такое же квадратное уравнение, как и в первом условии, значит, найденные значения параметра удовлетворяют и второму условию тоже.

Ответ:

$$\gamma = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}.$$