Теоретическая задача №2.2

Артём Левашов, 792

Пусть B — действительная квадратная невырожденная матрица. Используя сингулярное разложение, выразите число обусловленности матрицы $A = B^T B$ в 2-норме через число обусловленности матрицы B в 2-норме.

Выпишем число обусловленности матрицы B через определение 2-нормы (т.е. через сингулярные числа матрицы B):

$$cond_2(B) = \|B^{-1}\|_2 \|B\|_2 = \frac{1}{\min\limits_k \sigma_k} \max_k \sigma_k = \frac{\max \sigma_k}{\min \sigma_k}.$$

Число обусловленности матрицы A:

$$cond_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \|(B^T B)^{-1}\|_2 \|B^T B\|_2.$$

Воспользуемся *сингулярным разложением* для матрицы B и посмотрим, как оно будет выглядеть для матриц $(B^T B)^{-1}$ и $B^T B$:

$$\begin{gathered}
\text{Пусть } B = U\Sigma V^*, \text{тогда} \\
B^T = V^{*T} \Sigma U^T, \\
B^T B = V^{*T} \Sigma U^T U \Sigma V^* = V^{*T} \Sigma^2 V^*, \\
(B^T B)^{-1} = V (\Sigma^2)^{-1} V^T.
\end{gathered}$$

Мы пользовались тем, что столбцы матрицы U являются ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^n$, а значит $U^T U = E$.

Так как матрицы V, V^*, V^{*T} и V^T являются унитарными, мы получили сингулярные разложения матриц A и A^{-1}, а значит, можем выписать их 2-норму:

$$\begin{gathered}
\|A\|_2 = \|B^T B\|_2 = \max \sigma_k^2 = (\max \sigma_k)^2, \\
\|A^{-1}\|_2 = \|(B^T B)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min \sigma_k^2} = \left(\frac{1}{\min \sigma_k}\right)^2.
\end{gathered}$$

Последние равенства каждой строчки верны, так как сингулярные числа являются вещественными и неотрицательными.

Теперь мы можем выписать требуемое от нас выражение числа обусловленности матрицы A через число обусловленности матрицы B:

$$cond_2(A) = \|(B^TB)^{-1}\|_2\|B^TB\|_2 = (\max\sigma_k)^2\left(\frac{1}{\min\sigma_k}\right)^2 = \\ = \left(\frac{\max\sigma_k}{\min\sigma_k}\right)^2 = cond_2^2(B).$$