Теоретическое задание №9.1

Артём Левашов, 792

Табличная функция $\{f_i\}$ есть проекция на равномерную сетку с шагом h бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$. Используется приближенный метод вычисления первой производной:

$$f'(x_2) \approx \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h}.$$

Каков порядок аппроксимации этой формулы? Указать оптимальный шаг численного дифференцирования и максимальную точность, с которой может быть найдено значение производной.

Распишем значения функции в точках x_0, x_1 и x_3 через формулу Тейлора в окрестности точки x_2, в которой мы ищем значение производной:

$$f'(x_2) \approx \frac{f(x_2 - 2h) - 6f(x_2 - h) + 3f(x_2) + 2f(x_2 + h)}{6h} =$$
$$= \frac{f(x_2) - 2f'(x_2)h - 6f(x_2) + 6f'(x_2)h + 3f(x_2) + 2f(x_2) + 2f'(x_2)h}{6h} +$$
$$+ \frac{4f''(x_2)h^2/2 - 6f''(x_2)h^2/2 + 2f''(x_2)h^2/2}{6h} +$$
$$+ \frac{-8f'''(x_2)h^3/6 + 6f'''(x_2)h^3/6 + 2f'''(x_2)h^3/6}{6h} +$$
$$+ \frac{16f^{(4)}(x_2)h^4/24 - 6f^{(4)}(x_2)h^4/24 + 2f^{(4)}(x_2)h^4/24}{6h} + \mathcal{O}(h^4) =$$
$$= f'(x_2) + \frac{f^{(4)}(x_2)h^3}{12} + \mathcal{O}(h^4) = f'(x_2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^3 = f'(x_2) + \mathcal{O}(h^3),\ \xi \in [x_0, x_3]$$

Соответственно, ответ на первый вопрос - **порядок аппроксимации равен $\mathbf{h^3}$**.

Найдём оптимальный шаг дифференцирования, т.е. такое значение h^*, при котором полная ошибка минимальна. Для этого сначала нужно получить оценку для полной ошибки.

В точной арифметике:

$$|f'(x_2) - \hat{f}'| \leqslant E(h) = \frac{M_4 h^3}{12},\ M_4 = \max_{[x_0, x_3]} |f^{(4)}(x)|.$$

В машинной арифметике (полная ошибка):

$$|f'(x_2) - \hat{f}'| \leqslant \frac{M_4 h^3}{12} + \left| \frac{f_0 \epsilon_0 - 6 f_1 \epsilon_1 + 3 f_2 \epsilon_2 + 2 f_3 \epsilon_3}{6h} \right| \leqslant \frac{M_4 h^3}{12} + \frac{2 M_0 \epsilon}{h};$$
$$M_0 = \max_{[x_0, x_3]} |f(x)|,\ \epsilon_k \leqslant \epsilon.$$

Возьмём производную, чтобы найти точку минимума этой ошибки:

$$E'(h) = \frac{M_4 h^2}{4} - \frac{2 M_0 \epsilon}{h^2} = 0 \Rightarrow h^* = \sqrt[4]{\frac{8 M_0 \epsilon}{M_4}}.$$

Также найдём само минимальное значение ошибки:

$$E(h^*) = \frac{M_4}{12} \left(\frac{8 M_0 \epsilon}{M_4} \right)^{\frac{3}{4}} + 2 M_0 \epsilon \sqrt[4]{\frac{M_4}{8 M_0 \epsilon}} = \frac{M_4^{\frac{1}{4}}}{12} \left(8 M_0 \epsilon\right)^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} M_4^{\frac{1}{4}} \left(8 M_0 \epsilon\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} M_4^{\frac{1}{4}} \left(8 M_0 \epsilon\right)^{\frac{3}{4}}$$