Теоретическое задание №10.2

Артём Левашов, 792

Выписать формулу Ньютона для поиска корня нелинейного уравнения. Начальное приближение к корню определить графически. Оценить априорно число итераций, необходимое для достижения точности $\varepsilon = 0.00001$.

а) $\ln(x+2) - x^2 = 0$;

б) $e^x - 2x - 2 = 0$;

Начнём с пункта (а). Найдём производную функции $f(x)$ и выпишем шаг по методу Ньютона:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 2x,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\ln(x_k+2) - x_k^2}{\frac{1}{x_k+2} - 2x_k} = x_k - \frac{(\ln(x_k+2) - x_k^2)(x_k+2)}{1 - 2x_k^2 - 4x_k}.$$

Оценим начальное приближение к корню. Данное уравнение имеет два корня — в точках пересечения параболы x^2 и сдвинутого логарифма $\ln(x+2)$. По графику видно, что первый корень лежит на отрезке $[-1, -0.5]$, а второй — на $[1, 2]$. На этих отрезках $f'(x) \neq 0$, поэтому можем пользоваться теоремой о сходимости метода Ньютона. Учитывая, что ошибка

e_k должна быть меньше заданного ε, для первого корня:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - 2,$$

$$\gamma = \frac{\max\limits_{[-1,-0.5]} |f''(x)|}{2 \min\limits_{[-1,-0.5]} |f'(x)|} = 0.9 \neq 0$$

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{0.9} \left(0.9|e_0|\right)^{2k} = \frac{1}{0.9} \left(0.45\right)^{2k}$$

$$\ln(0.9\varepsilon) \geqslant 2k \ln(0.45)$$

$$2k \geqslant \frac{\ln(0.9 \cdot 10^{-5})}{\ln(0.45)}$$

$$k \geqslant 7.27.$$

Т.е. для поиска первого корня понадобится не меньше 8 итераций с начальным приближением в отрезке $[-1, -0.5]$. Аналогично найдём количество итераций для второго корня (учитывая, что начальная ошибка на отрезке $[1, 2]$ может достигать 1.):

$$\gamma = \frac{\max\limits_{[1,2]} |f''(x)|}{2 \min\limits_{[1,2]} |f'(x)|} = \frac{19}{9} \cdot \frac{3}{10} \approx 0.63 \neq 0$$

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{0.63} \left(0.63|e_0|\right)^{2k} = \left(0.63\right)^{2k-1}$$

$$\ln(\varepsilon) \geqslant (2k-1) \ln(0.63)$$

$$2k \geqslant \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0.63)} + 1$$

$$k \geqslant 13.$$

Т.е. для поиска второго корня понадобится не меньше 13 итераций с начальным приближением в отрезке $[1, 2]$.

Перейдём к пункту (б). Выпишем формулу Ньютона:

$$f'(x) =$$