Теоретическое задание № 10.1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

1 декабря 2019 г.

Теоретическая задача 10.1

1. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень z неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция.

   а) Построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости.

   б) Предложить способ численной оценки кратности корня.

   Указание. Исследовать кратность корня z функции $g(x) \equiv \frac{f(x)}{f'(x)}$.
   Решение.
   а) Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Производная данной функции равна $\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.
   Если корень z имеет кратность $p > 1$, то

$$f(x) = a(x-z)^p + \mathcal{O}((x-z)^{p+1}),$$
$$f'(x) = ap(x-z)^{p-1} + \mathcal{O}((x-z)^p),$$
$$f''(x) = ap(p-1)(x-z)^{p-2} + \mathcal{O}((x-z)^{p-1}).$$

   Тогда для $\varphi'(x)$ получим

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} &= \frac{a^2p(p-1)(x-z)^{2p-2} + \mathcal{O}((x-z)^{2p-1})}{p^2a^2(x-z)^{2p-2} + \mathcal{O}((x-z)^{2p-1})} = \\ &= \frac{p-1}{p} + \mathcal{O}(x-z).\end{aligned} \tag{1}$$

   В малой окрестности z будет выполнено условие сходимости метода: $|\varphi'(x)| < 1$. Метод Ньютона будет в таком случае сходиться со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = (p-1)/p < 1$. Для достижения квадратичной скорости сходимости модифицируем метод Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha\frac{f(x_k)}{f'(x_k}.$$

   Найдем значение параметра α, обеспечивающее квадратичную скорость сходимости метода. Имеем

$$\varphi(x) = x - \alpha\frac{f(x)}{f'(x)},$$
$$\varphi'(x) = 1 - \alpha\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = (1-\alpha) + \alpha\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

   Учитывая соотношение (1), имеем

$$\varphi'(x) = (1-\alpha) + \alpha\left(\frac{p-1}{p} + \mathcal{O}(x-z)\right) = 1 - \alpha + \alpha\frac{p-1}{p} + \mathcal{O}(x-z).$$

   Выберем α из условия, что $\varphi'(z) = 0$. Тогда $\alpha = p$. Таким образом, модифицированный метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

   б)