Теоретическое задание №6.1

Артём Левашов, 792

1. Функция e^x приближается на $[0, 1]$ интерполяционным многочленом степени 3 с чебышёвским набором узлов интерполяции. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит 10^{-3}.

   Так как порядок многочлена, которым мы приближаем функцию равен 3, то нам понадобится 4 узла, чтобы система, составляемая для интерполяции имела единственное решение. Из лекции вспомним оценку сверху для погрешности интерполяционного многочлена:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$
$$\text{где } \xi(x) \in [\min(x, x_0, \dots, x_n), \max(x, x_0, \dots, x_n)].$$

   В нашем случае:

$$|e^x - L_3(x)| \leqslant \frac{e^{\xi(x)}}{4!} \max_{[0,1]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right|, \text{ где } \xi(x) \in [0, 1].$$

   Известно, что значение последнего множителя на чебышёвской сетке равно многочлену Чебышева порядка $n + 1$, делённому на старший коэффициент. При этом максимум этого многочлена будет равен единице, делённой на тот же самый коэффициент.

   Так как изначально многочлены Чебышёва определяются для отрезка $[-1, 1]$, сделаем операцию линейного сдвига на отрезок $[0, 1]$

и только потом отнормируем первый коэффициент:

$$T_4(x) = 8t^4 - 8t^2 + 1, t \in [-1, 1]$$
$$\text{Замена: } t = 2x - 1, x \in [0, 1]$$
$$T_4(x) = 8(2x-1)^4 - 8(2x-1)^2 + 1 = 128\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - 32(2x-1)^2 + 1$$

Видим, что после линейного сдвига коэффициент при старшей степени многочлена равен 128. Так как наибольшее значение этого многочлена на отрезке $[0, 1]$ равно 1, то, отнормировав его, мы получим оценку для последнего множителя:

$$\max_{[0,1]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right| \leqslant \frac{1}{128}.$$

Продолжим оценку погрешности интерполяционного многочлена:

$$|e^x - L_3(x)| = \frac{e^{\xi(x)}}{4!} \max_{[0,1]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right| \leqslant \frac{e}{6 \cdot 4} \cdot \frac{1}{128} < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{128} = 2^{-10} < 10^{-3}.$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано.

2. Оцените погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа L_2 по узлам $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2$ в точках 0.05 и 0.15.

   Вспомним формулу для погрешности:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$
$$\text{где } \xi(x) \in [\min(x, x_0, \ldots, x_n), \max(x, x_0, \ldots, x_n)].$$

   В нашем случае:

$$|e^x - L_2(x)| = \frac{e^{\xi(x)}}{3!} \left| \prod_{i=0}^{2} (x - x_i) \right| \leqslant \frac{e^{0.2}}{6} |x||x - 0.1||x - 0.2| =$$
$$= \frac{e^{0.2}}{6} \cdot 0.05^2 \cdot 0.15 \approx 7.6 \cdot 10^{-5}.$$

Заметим, что для обеих точек 0.05 и 0.15 ошибка будет одинаковой, так как они расположены симметрично относительно центральной точки сетки, т.е. $|0.05-0.1| = |0.15-0.1|$, $|0.05| = |0.15-0.2|$ и $|0.15| = |0.05-2|$.

3. Задана табличная функция:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(x)$	0	0.5	0.71	0.87

С какой точностью можно восстановить значение в точке $x = \pi/5$, если известно, что функция в узлах задана с абсолютной погрешностью, не превосходящей 10^{-2}.

Будем считать, что таблично задана некоторая функция $\sin_t$, отличная от синуса не более, чем на 10^{-2}. Тогда, интерполяционный многочлен будет приближать именно эту функцию. Оценим погрешность, с которой этот же многочлен приближает обычный синус:

$$|\sin(x) - L_3(x)| \leqslant |\sin(x) - \sin_t(x)| + |\sin_t(x) - L_3(x)|$$

$$|\sin_t(x) - L_3(x)| = \frac{|\sin(\xi(x))|}{4!}\left|\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)\right|, \text{ где } \xi(x) \in [0, \pi/3]$$

Для точки $x = \pi/5$:

$$|\sin_t(x) - L_3(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{48}\cdot\frac{\pi}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{48}\cdot\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\pi}{30}\cdot\frac{\pi}{20}\cdot\frac{2\pi}{15} = \frac{\sqrt{3}\pi^4}{1080000} \approx 1.6\cdot 10^{-4}$$

Итого, погрешность в оценке таким способом значения $\sin\frac{\pi}{5}$ оценивается сверху числом $10^{-2} + 1.6\cdot 10^{-4} \approx 10^{-2}$.

4. Про функцию известно, что она имеет максимум при $x = 1$ и ее значение в этой точке равно 1. В точке $x = 2$ ее значение равно 0, а первая производная равна 3. Приблизить функцию интерполяционным полиномом 3-й степени на отрезке $[1, 2]$.

Чтобы решить задачу интерполяции многочленом третьей степени нам необходимо иметь четыре точки, в которых мы знаем значение функции. Однако в условии задачи даны значения только в двух точках, а также значения производных в этих точках. Поэтому, подберём такой интерполяционный многочлен, чтобы его значения и значения его производной совпадали с оными у функции в заданных точках.

Так как кубический многочлен, который мы строим, имеет максимум в точке 1 и положительную производную в точке 2, мы можем сделать вывод, что на промежутке $[1, 2]$ многочлен имеет два корня и один локальный минимум. Так как в точках локальных максимума и минимума производная многочлена должна обращаться в ноль, мы можем сделать вывод о виде производной этого многочлена:

$$f'(x) = a(x-1)(x-x_0) = a(x^2 - x(1+x_0) + x_0),$$

где x_0 — точка локального минимума на промежутке $[1, 2]$. Проинтегрируем полученное выражение, чтобы получить выражение для интерполяционного многочлена:

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2(1+x_0)}{2} + ax_0x + b.$$

Всего имеем три неизвестных: a, x_0, b. Составим по условию систему уравнений — значения многочлена в узлах и значение производной в $x = 2:$

$$\begin{cases} f'(2) = 2a - ax_0 = 3 \\ f(1) = \frac{a}{3} - \frac{a(1+x_0)}{2} + ax_0 + b = 1 \\ f(2) = \frac{8}{3}a - 2a(1+x_0) + 2ax_0 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - ax_0 = 3 \\ -\frac{a}{6} + \frac{ax_0}{2} + b = 1 \\ \frac{2}{3}a + b = 0 \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе:

$$\begin{cases} 2a - ax_0 = 3 \\ \frac{2}{3}a + b = 0 \\ \frac{5}{6}a - \frac{ax_0}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - ax_0 = 3 \\ \frac{5}{3}a - ax_0 = -2 \\ \frac{2}{3}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = 5 & \Rightarrow a = 15 \\ b = -10 \\ 15(2 - x_0) = 3 & \Rightarrow x_0 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Итоговый интерполяционный многочлен:

$$P_3(x) = 5x^3 - 21x^2 + 27x - 10.$$