Теоретическое задание №9.3

Артём Левашов, 792

Предложить способ вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \cos(\frac{\pi}{x})dx$ с точностью $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Для начала сделаем замену $t = \frac{\pi}{x}$ и разобьём наш интеграл на два:

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)dx = \pi \int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt = \pi \int\limits_\pi^{M} \frac{\cos(t)}{t^2}dt + \pi \int\limits_M^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Попробуем приблизить подынтегральную функцию во втором интеграле функцией $1/t^2$ и подберём границу разбиения M так, чтобы второй интеграл оказался меньше, чем $\varepsilon/2$:

$$\pi \left| \int\limits_M^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt - \int\limits_M^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \right| = \pi \left| \int\limits_M^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2}dt \right| \leqslant 2\pi \int\limits_M^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \frac{2\pi}{M};$$

$$\frac{2\pi}{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} = 2.5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow M \geqslant \frac{2\pi}{2.5} \cdot 10^5 = 251327.41$$

Выберем $M = 251327 + \pi$. Теперь найдём разбиение для отрезка $[\pi, M]$ такое, чтобы приблизить составной формулой прямоугольников первый интеграл с ошибкой $\frac{\varepsilon}{2}$. Ошибка для составной формулы прямоугольников:

$$N \cdot \frac{1}{24} M_2 h^3.$$

Оценим модуль второй производной подынтегральной функции M_2:

$$\pi \left(\frac{\cos(t)}{t^2}\right)'' = \pi \left(-\frac{\sin(t)}{t^2} - 2\frac{\cos(t)}{t^3}\right)' = \pi \left(-\frac{\cos(t)}{t^2} + 2\frac{\sin(t)}{t^3} + 2\frac{\sin(t)}{t^3} + 6\frac{\cos(t)}{t^4}\right),$$

$$\pi \left| \left(\frac{\cos(t)}{t^2}\right)'' \right| \leqslant \frac{\pi}{t^2} + \frac{4\pi}{t^3} + \frac{6\pi}{t^4}, \text{ на отрезке от } \pi \text{ до } M: \ M_2 = \frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{6}{\pi^3} \leqslant 0.918.$$

Тогда, ошибка для составной формулы прямоугольников:

$$N \cdot \frac{1}{24} M_2 h^3 = \frac{M-\pi}{h} \cdot \frac{1}{24} M_2 h^3 = \frac{251327 \cdot 0.918}{24} h^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} = 2.5 \cdot 10^{-5};$$
$$h \leqslant \sqrt{\frac{24 \cdot 2.5 \cdot 10^{-5}}{251327 \cdot 0.918}} \approx 5.1 \cdot 10^{-5}.$$

Возьмём $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Пусть $t_k = \pi + k \cdot h,\ k = 0, \ldots \frac{M-\pi}{h} - 1 = 5026539999$. Тогда итоговая формула для интеграла:

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) dx \approx \sum_{k=0}^{5026539999} \frac{\cos(t_k + h/2)}{(t_k + h/2)^2} h + \frac{\pi}{M}.$$

Так как каждый из интегралов суммы вносит ошибку не более чем $\varepsilon/2$, то суммарно ошибка не превосходит ε