

I. 基本说明

背包问题泛指具有这一特征的问题：在约束条件下，确定一个选取物品方案，最大化（或最小化）某一个参数（如总价值和）。

基本思路为动态规划。

II. 符号约定

符号	含义
N	物品数（或分组数）
V	背包体积上限
M	背包质量上限
v_i	第 i 个物品的体积
m_i	第 i 个物品的质量
w_i	第 i 个物品的价值
s_i	第 i 个物品的个数
S_i	第 i 个组包含的物品数
p_i	第 i 个物品依赖的物品编号

1. 01背包

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

每件物品最多只能选一次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 1000$

时间复杂度 $O(NV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(V)$

2. 完全背包

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

每件物品可以选取任意次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 1000$

时间复杂度 $O(NV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(V)$

3. 多重背包（朴素）

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

物品 i 最多可以选取 s_i 次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 100, V \leq 100, s_i \leq 100$

时间复杂度 $O(NsV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(V)$

4. 多重背包（二进制拆分）

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

物品 i 最多可以选取 s_i 次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 2000, s_i \leq 1000$ （注意数据量变化）

时间复杂度 $O(NV \log s) \sim 1e7$

空间复杂度 $O(V)$

5. 多重背包（单调队列优化）

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

物品 i 最多可以选取 s_i 次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 20000, s_i \leq 20000$ （注意数据量变化）

时间复杂度 $O(kNV) \sim k * 1e7$ （ k 是一个极小的常数，取决于队列的效率和具体数据排布，不可估计）

空间复杂度 $O(V)$

6. 混合背包

综合以上三种背包。

有的物品最多取一次，有的物品最多取大于一次，有的物品能取无限次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 1000$

时间复杂度

空间复杂度 $O(V)$

7. 二维费用背包

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、质量为 m_i 、价值为 w_i 。

每件物品最多只能选一次，求背包体积为 V 、质量为 M 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 1000, V \leq 100, M \leq 100$

时间复杂度 $O(NVM) \sim 1e7$

空间复杂度 $O(VM)$

8. 分组背包

有 N 组物品，第 i 组物品有 S_i 个，第 ij 个物品的体积为 v_{ij} 、价值为 w_{ij} 。

每个组内的物品最多取一个，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 100, V \leq 100, S_i \leq 100$

时间复杂度 $O(NSV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(V)$

9. 依赖背包

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 、前置物品编号为 p_i （保证依赖关系为树且根唯一）。

每件物品只有在前置物品已经被选取的情况下，才能被选取，且最多选取一次，求背包体积为 V 情况下，选取物品价值总和的最大值。

$N \leq 100, V \leq 100$

时间复杂度 $O(NV^2) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(NV)$

10. 背包问题方案数

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

每件物品最多只能选一次，求背包体积为 V 情况下，**有多少种方案（对 $1e9+7$ 取模）**，能使选取物品价值总和最大。

$N \leq 1000, V \leq 1000$

时间复杂度 $O(NV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(V)$

11. 背包问题具体方案

有 N 个物品，第 i 件物品的体积为 v_i 、价值为 w_i 。

每件物品最多只能选一次，求背包体积为 V 情况下，**给出选取的物品序列（字典序）**，使选取物品总和最大。

$N \leq 1000, V \leq 1000$

时间复杂度 $O(NV) \sim 1e6$

空间复杂度 $O(NV)$