

Badanie szeregowego filtra rezonansowego RLC

Bartosz Kundera

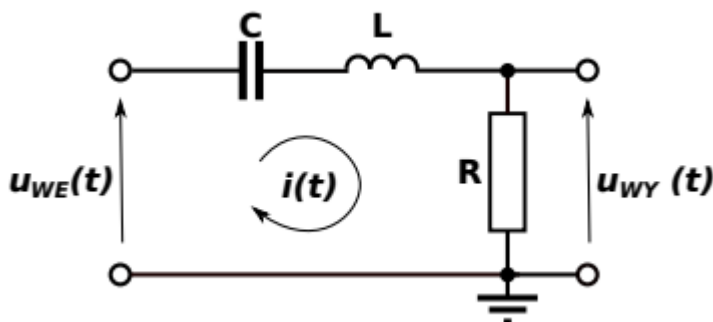
24.03.2025

STRESZCZENIE

Celem doświadczenia było wyznaczenie charakterystyki amplitudowej oraz fazowej dla konkretnych szeregowych układów RLC. W tym celu zbudowano dwa obwody szeregowe RLC, różniące się wartością rezystancji opornika tj. raz użyto opornika o rezystancji 510Ω , a drugi raz opornika o rezystancji 50Ω . W każdym z przypadków zmierzono, zmiany napięcia pomiędzy sygnałem wejściowym, a wyjściowym oraz przesunięcie fazowe. Po dokonaniu pomiarów przedstawiono graficznie zależności transmitancji (Wykres 1), (Wykres 3) od zadanej częstotliwości dla charakterystyki amplitudowej, a następnie na jej podstawie wyznaczono częstotliwości rezonansowe dla obu układów: $\omega_1 = 1054909 \text{ rad/s}$, $f_1 = 167894 \text{ Hz}$, $\omega_2 = (1002712 \text{ rad/s})$, $f_2 = 159587 \text{ Hz}$. Obliczono również długości pasma przenoszenia, które wynosiły dla obu układów odpowiednio: $d_1 = 84025 \text{ Hz}$, $d_2 = 10229 \text{ Hz}$. Następnie, analogicznie przedstawiono graficznie zależność przesunięcia fazowego od częstotliwości dla charakterystyki fazowej, oraz wyznaczono częstotliwości rezonansowe: $\omega_{f2} = (1086676.5478 \text{ rad/s})$, $\omega_{f1} = (1108935 \text{ rad/s})$, (Wykres 2), (Wykres 4). Na sam koniec, tworząc łącznie cztery układy RLC: zamieniając raz jeden kondensator, dwoma kondensatorami łącząc je raz szeregowo i równolegle oraz postępując identycznie w przypadku cewki podczas tworzenia kolejnych dwóch układów, eksperymentalnie wyznaczono częstotliwości rezonansowe w obu przypadkach, które wynoszą odpowiednio: dla kondensatorów $f_R = 118000 \text{ Hz}$, $f_{sz} = 232000 \text{ Hz}$, dla cewek: $f_R = 232000 \text{ Hz}$, $f_{sz} = 116000 \text{ Hz}$. Warto również wspomnieć, że pomiary częstotliwości były wykonywane dla opornika 50Ω .

1.WSTĘP TEORETYCZNY

Filtry RLC są układami elektrycznymi, które składają się z oporników, cewek oraz kondensatorów. W wykonanym doświadczeniu wykonano wiele kombinacji tego układu, natomiast kolejność łączenia kolejnym elementów jest zawsze taki sam, najpierw kondensatory, następnie cewki, a na koniec oporniki. Przy pierwszych pomiarach analizowano szeregowo połączony filtr RLC. Schemat takiego filtra przedstawiono poniżej (Rysunek 1):



Rysunek 1. Schemat filtra szeregowego RLC

Gdzie C - pojemność kondensatora, L – indukcyjność cewki, R - rezystancja, $u_{we}(t)$ to napięcie wejściowe, $u_{wy}(t)$ to napięcie wyjściowe. Korzystając z drugiego prawa Kircchoffa, napięcie wyjściowe jest równe(1):

$$u_{we}(t) = u_c(t) + u_L(t) + u_{wy}(t) \quad (1)$$

Gdzie $u_c(t)$ to spadek napięcie na kondensatorze, a $u_L(t)$ to spadek napięcia na cewce. Z dzielnika napięcia otrzymujemy(2):

$$\frac{u_{we}(t)}{z} = \frac{u_{wy}(t)}{R} \quad (2)$$

Gdzie z to impedancja w naszym przypadku wyrażona poniższym wzorem(3):

$$z = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \quad (3)$$

Przekształcając (2) wzór dostajemy następującą zależność(4):

$$u_{wy} = \frac{R}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} u_{we} \quad (4)$$

Mając wyrażenie na napięcie wyjściowe u_{wy} możemy policzyć transmitancję, czyli stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego dla omawianego filtra RLC. Przyjmuje wtedy następującą postać(5):

$$T(\omega) = \frac{|u_{wy}|}{|u_{we}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5)$$

Gdzie ω to częstość napięcia zadanego na wejściu układu. Wiedząc ile wynosi transmitancja, możliwe jest policzenie charakterystyki amplitudowej, która jest jednym z celów wykonywanego doświadczenia. Kolejnym celem jest wyznaczenie charakterystyki fazowej, którą możemy opisywać znajdując przesunięcie fazowe pomiędzy sygnałem wejściowym, a wyjściowym. Poniższy wzór(6) przedstawia tę relację:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}\right) \quad (6)$$

Znając już wzory na transmitancję oraz przesunięcie fazowe, można opisać częstość rezonansową układu RLC. Kiedy transmitancja układu jest równa $T = 1$, a przesunięcie fazowe $\varphi = 0$, otrzymujemy częstość rezonansową układu wyrażoną poniższym wzorem(7):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (7)$$

Przy rozpatrywaniu układu RLC należy również wspomnieć o paśmie przenoszenia układu, które występuje w zakresie pomiędzy dwoma częstościami granicznymi, które w zależności od charakterystyki są zdefiniowane następująco: (8),(9)

$$T_g(\omega_g) = \frac{|u_{wy}|}{|u_{we}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (8)$$

$$|\varphi_g(\omega_g)| = \frac{\pi}{4} \quad (9)$$

Przesunięcie fazowe między sygnałem wejściowym, a wyjściowym dla pasma przenoszenia zawiera się w przedziale $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a dla całego układu $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Takie pojęcia jak indukcyjność, pojemność czy rezystancja to pojęcia czysto teoretyczne. W praktyce rozważając powyższe zagadnienia powinniśmy uwzględnić fakt, że te wielkości posiadają wielkości pasożytnicze. Podczas wykonywania doświadczenia ma to dość spore znaczenie ponieważ, transmitancja obwodu dla częstości rezonansowej nie będzie równa, a mniejsza od 1. Efekt ten zwiększa się przy wyborze opornika o mniejszej rezystancji. Z tego względu wielkości pasożytnicze

należy wziąć pod uwagę. W takim wypadku poszczególne wzory będą miały następującą postać:
Transmitancja będzie się wyrażać(10):

$$T(\omega) = \frac{R}{\sqrt{(R + R_p)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (10)$$

Gdzie R_p to opór pasożytniczy. Przesunięcie fazowe będzie przybierało następującą postać(11):

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega(R + R_p)C}\right) \quad (11)$$

2.UKŁAD DOŚWIADCZALNY I POMIARY

Podczas doświadczenia zostały wykorzystane następujące urządzenia:

- Oscyloskop RIGOL;
- Generator funkcyjny RIGOL;
- Kondensator o pojemności 1 nF;
- Oporniki o rezystancji 510Ω, 50Ω;
- Miernik uniwersalny Multimetr BRYMEN BM805
- Przewody;
- Cewka;
- Lutownica;
- Cyna;
- Płytki montażowa.

W celu wykonania doświadczenia, na samym początku przy pomocy lutownicy, opornika o rezystancji 510Ω, kondensatora i cewki, na płytce montażowej zbudowano szeregowy układ RLC. Przy odpowiednim podłączeniu obwodu do generatora i oscyloskopu, przeprowadzono serie pomiarów zmian napięć oraz fazy sygnału wejściowego oraz sygnału wyjściowego. Przy pomocy generatora funkcyjnego na wejściu zadano funkcje sinus, a kolejne pomiary były dokonywane poprzez zmianę częstotliwości na generatorze. Po wykonaniu odpowiednich pomiarów, przebudowano obwód, podmieniając rezystor, na nowy o rezystancji 50Ω. Następnie przeprowadzono identyczne pomiary jak dla poprzedniego rezystora. Po skończeniu tej części doświadczenia przebudowano obwód, zostawiając cewkę oraz rezystor z poprzednich pomiarów oraz zamieniając jeden kondensator, raz dwoma kondensatorami podłączonymi równolegle, drugi raz dwoma kondensatorami podłączonymi szeregowo. Dla każdego z tych wartości zaczęto szukać częstotliwości rezonansowej, na podstawie przedstawionych sygnałów na ekranie oscylatora. Po znalezieniu szukanej wartości, znowu przebudowano układ, tym razem zostawiając jeden kondensator razem z opornikiem, a zamieniając cewkę dwoma cewkami, raz połączonymi równolegle, drugi raz szeregowo. Po przebudowaniu układu przeprowadzono analogiczną analizę tj. zaczęto szukać częstotliwości rezonansowej dla każdego z obwodów. Analogicznie, powyższą wielkość znaleziono, zadając na generatorze konkretną częstotliwość oraz obserwując przedstawione sygnały na ekranie oscylatora. Wszystkie pomiary zebrane podczas doświadczenia zostały zebrane w oddzielnym pliku dołączonym do raportu.

3. ANALIZA DANYCH

Głównym zadaniem analizy danych układów RLC jest wyznaczenie charakterystyki amplitudowej oraz fazowej danego obwodu. Zależność między częstotliwością, a częstotliwością wyznaczono korzystając z poniższego wzoru(12):

$$\omega = 2\pi f \quad (12)$$

Gdzie f – częstotliwość zadana na generatorze. Pomiary częstotliwości przyjęto za dokładne, dlatego nie uwzględniono go w analizie niepewności pomiarowych.

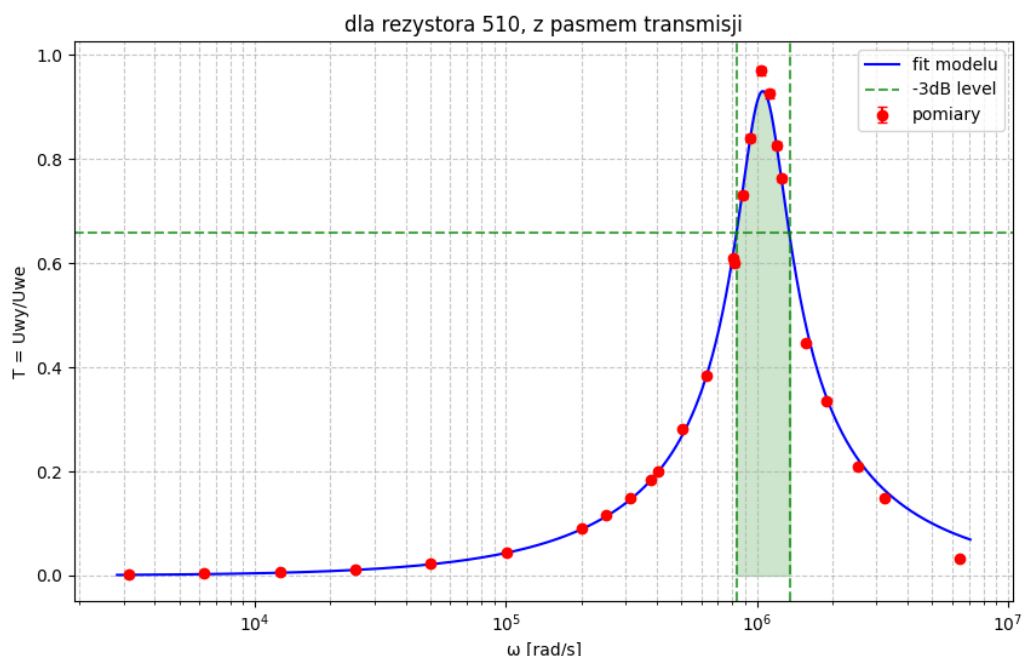
Dokładność pomiaru napięcia wyjściowego obliczono korzystając ze znanego wzoru na niepewność pomiarową (13):

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

Następnie, aby dokonać charakterystyki amplitudowej obwodu przekształcono wzór(10) do następującej postaci(14):

$$T(\omega) = \frac{A}{\sqrt{(A+B)^2 + \left(\omega D - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (14)$$

Gdzie odpowiednio A to opór na rezystorze (w tym przypadku równy 510 Ω), B to opór pasożytniczy, a D to indukcyjność cewki. Korzystając z powyższego wzoru, na poniższym wykresie (Wykres1) przedstawiono zależność transmitancji od częstotliwości, oraz dopasowano do zebranych danych opisującą ją funkcję.



Wykres 1. Zależność transmitancji (dla rezystora 510 Ω) od częstotliwości, wraz z szerokością pasma transmisji

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczono wartości współczynników B,C i D oraz ich niepewności odczytując wartości dla dopasowania modelu funkcji. Wartości współczynników są następujące: $B = (38.47 \pm 6.34) \Omega$, $C = (0.8438 \pm 0.1418) \text{ nF}$, $D = (1062.51 \pm 10.50) \mu\text{H}$. Jak widać

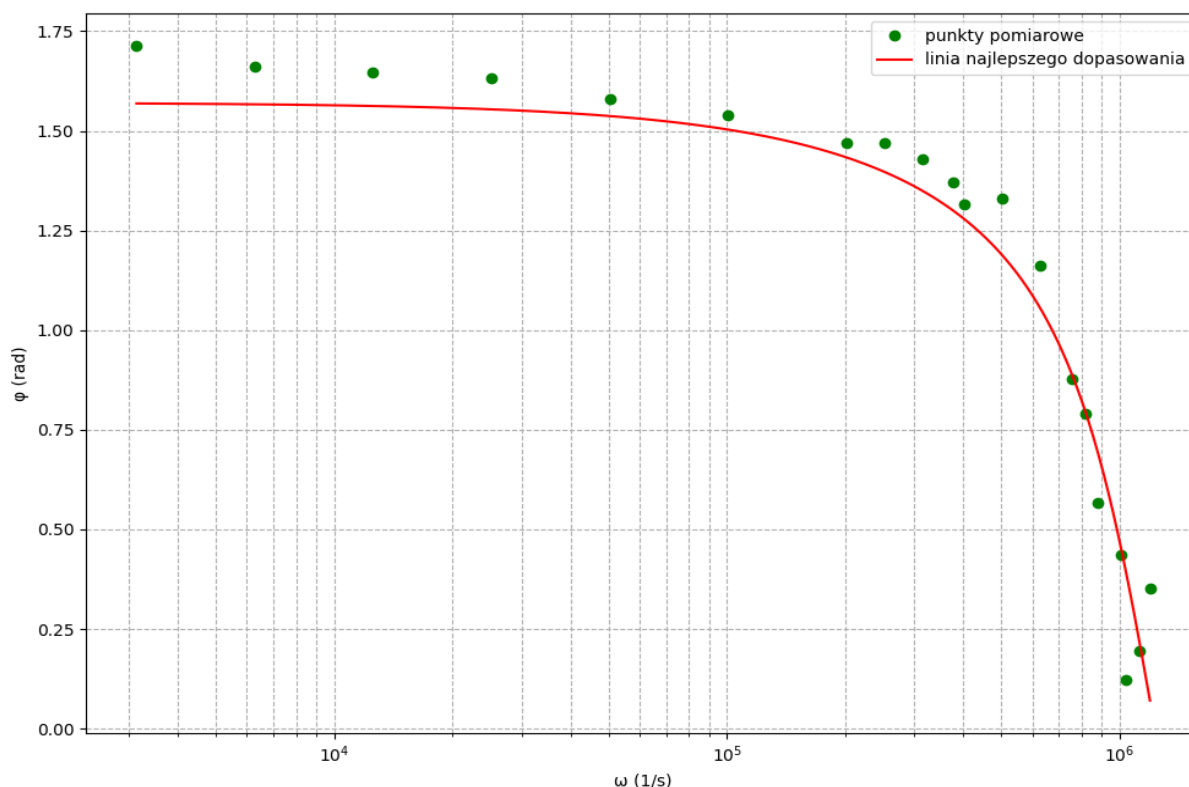
potraktowano również pojemność kondensatora jako współczynnik w celu dokładnego sprawdzenia jego wartości. W teoretycznym modelu zakładaliśmy, że jego wartość wynosi 1nF, natomiast podczas doświadczenia zmierzono odpowiednim miernikiem pojemność tego kondensatora, a wynosiła ona odpowiednio $C = 0.874$ nF, zatem możemy stwierdzić, że nasz współczynnik został odpowiednio dobrany. Aby sprawdzić model, przeprowadzono test χ^2 Pearsona. Ze względu na bardzo duże wyniki przy pierwotnym wykonywaniu testu, zdecydowano się na przeskalowanie niepewności transmitancji o 1,5 co spowodowało, że test $\chi^2 = 20,61$.

Następnie, korzystając z (7) wzoru, obliczono częstotliwość rezonansową korzystając z wyznaczonych wartości pojemności kondensatora C oraz indukcyjności cewki L . Podstawiając odpowiednie wartości dostaliśmy wartość $\omega_{t1} = (1054909 \text{ rad/s})$, co w przeliczeniu na Hz daje nam wielkość $f_{t1} = 167894$ Hz. Następnie wyznaczono szerokość pasma przenoszenia, która wynosi, $\omega_{tp1} = [827\ 057,16; 1\ 354\ 740,44] \text{ rad/s}$, co w przeliczeniu na Hz daje, $f_{tp1} = [131697; 215723] \text{ Hz}$. Długość pasma przenoszenia wynosi w takim razie: $d_1 = 84025 \text{ Hz}$.

Drugim głównym zadaniem w analizie danych było wyznaczenie charakterystyki fazowej. Podobnie jak w poprzedniej charakterystyce, korzystamy z opornika o rezystancji 510Ω i korzystając z zebranych danych wyznaczamy przesunięcie fazowe. Wszystkie wartości przesunięcia w stopniach przekonwertowano na radiany. Aby dokonać poprawnie charakterystyki fazowej obwodu, przekształcono wzór(11) do następującej postaci (15):

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 DC}{\omega(A + B)C}\right) \quad (15)$$

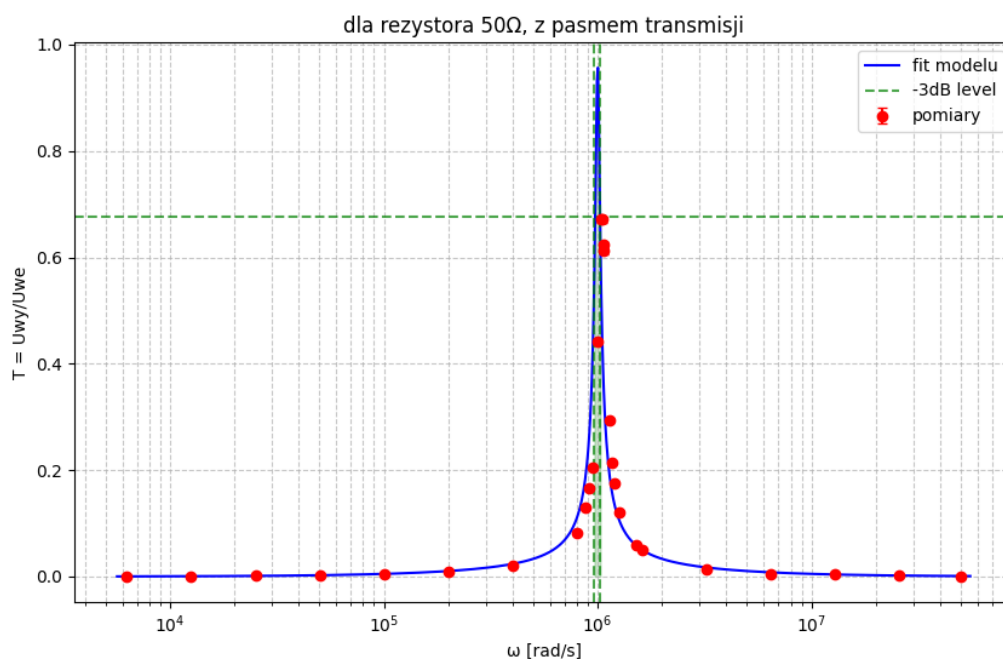
Gdzie A to opór na rezystorze równy 510Ω , B to opór pasożytniczy, C to pojemność kondensatora, a D to indukcyjność cewki. Korzystając z powyższego wzoru na wykresie poniżej(Wykres 2) przedstawiono zależność przesunięcia czasowego od częstotliwości i dopasowano do danych odpowiedni model teoretyczny.



Wykres 2. Charakterystyka fazowa dla układu z rezystorem 510Ω

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczono wartości współczynników B,C,D które wynoszą odpowiednio: $B = (43.14 \pm 2.95) \Omega$, $C = (0.85 \pm 0.32) \text{ nF}$, $D = (887.78 \pm 110.15) \mu\text{H}$. Jak widać potraktowano również pojemność kondensatora jako współczynnik w celu dokładnego sprawdzenia jego wartości. W teoretycznym modelu zakładaliśmy, że jego wartość wynosi 1nF, natomiast podczas doświadczenia zmierzono odpowiednim miernikiem pojemność tego kondensatora, a wynosiła ona odpowiednio $C = 0.874 \text{ nF}$, zatem możemy stwierdzić, że nasz współczynnik został odpowiednio dobrany. Aby sprawdzić model, przeprowadzono test χ^2 Pearsona. Po wykonywaniu testu, dostaliśmy wartość $\chi^2 = 24,92$. Następnie, korzystając z (15) wzoru, obliczono częstotliwość rezonansową korzystając z wyznaczonych wartości pojemności kondensatora C oraz indukcyjności cewki L. Podstawiając odpowiednie wartości dostaliśmy wartość $\omega_{f1} = (1108935 \text{ rad/s})$, co w przeliczeniu na Hz daje nam wielkość $f_{f1} = 176582 \text{ Hz}$.

Po skończeniu tej części analizy dla układu szeregowego RLC z opornikiem o rezystancji 510 Ω , przeprowadzoną identyczną analizę danych dla opornika o rezystancji 50 Ω , tak samo wyznaczając charakterystykę amplitudową oraz charakterystykę fazową. Ponownie, korzystając ze wzoru (14) wyznaczono transmitancję układu oraz przedstawiono na wykresie poniżej (Wykres 3) zależność transmitancji od częstotliwości oraz dopasowano do zebranych danych opisującą ją funkcję.

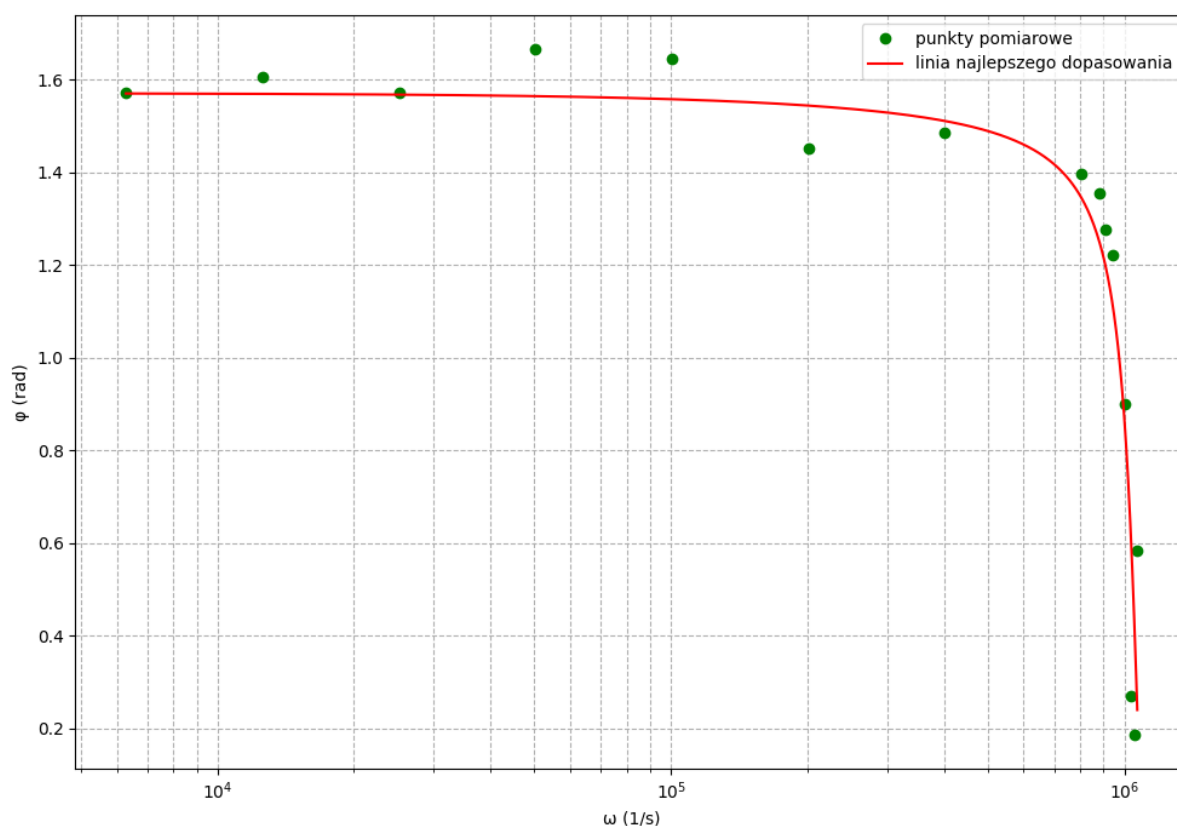


Wykres 3. Zależność transmitancji (dla rezystora 50 Ω) od częstotliwości, wraz z szerokością pasma transmisji

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczono wartości współczynników B,C i D oraz ich niepewności odczytując wartości dla dopasowania modelu funkcji. Wartości współczynników są następujące: $B = (2.00 \pm 1.58) \Omega$, $C = (0.8736 \pm 0.1176) \text{ nF}$, $D = (1000.00 \pm 23.28) \mu\text{H}$. Jak widać potraktowano również pojemność kondensatora jako współczynnik w celu dokładnego sprawdzenia jego wartości. W teoretycznym modelu zakładaliśmy, że jego wartość wynosi 1nF, natomiast podczas doświadczenia zmierzono odpowiednim miernikiem pojemność tego kondensatora, a wynosiła ona odpowiednio $C = 0.874 \text{ nF}$, zatem możemy stwierdzić, że nasz współczynnik został odpowiednio dobrany. Aby sprawdzić model, przeprowadzono test χ^2 Pearsona. W wyniku przeprowadzenia testu otrzymano wartość $\chi^2 = 20,98$.

Następnie, korzystając z (7) wzoru, obliczono częstotliwość rezonansową korzystając z wyznaczonych wartości pojemności kondensatora C oraz indukcyjności cewki L. Podstawiając odpowiednie wartości dostaliśmy wartość $\omega_2 = (1002712 \text{ rad/s})$, co w przeliczeniu na Hz daje nam wielkość $f_2 = 159587 \text{ Hz}$. Następnie wyznaczono szerokość pasma przenoszenia, która wynosi, $\omega_{p2} = [966\ 002,16; 1\ 030\ 240,28] \text{ rad/s}$, co w przeliczeniu na Hz daje, $f_{p2} = [153822; 164051] \text{ Hz}$. Długość pasma przenoszenia wynosi w takim razie: $d_2 = 10229 \text{ Hz}$.

Analogicznie jak dla rezystora o oporze 50Ω , przeprowadzono również charakterystykę fazową. Przekształcając stopnie na radiany oraz korzystając ze wzoru (15) przedstawiono zależność przesunięcia czasowego od częstotliwości i dopasowano do danych odpowiedni model teoretyczny.



Wykres 4. Charakterystyka fazowa dla układu z rezystorem 50Ω

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczono wartości współczynników B, C, D które wynoszą odpowiednio: $B = (4.9 \pm 1.95) \Omega$, $C = (0.81 \pm 0.152) \text{ nF}$, $D = (1001.35 \pm 301.17) \mu\text{H}$. Jak widać potraktowano również pojemność kondensatora jako współczynnik w celu dokładnego sprawdzenia jego wartości. W teoretycznym modelu zakładaliśmy, że jego wartość wynosi 1nF, natomiast podczas doświadczenia zmierzono odpowiednim miernikiem pojemność tego kondensatora, a wynosiła ona odpowiednio $C = 0.874 \text{ nF}$, zatem możemy stwierdzić, że nasz współczynnik został odpowiednio dobrany. Aby sprawdzić model, przeprowadzono test χ^2 Pearsona. Po wykonywaniu testu, dostaliśmy wartość $\chi^2 = 46,92$. Następnie, korzystając z (15) wzoru, obliczono częstotliwość rezonansową korzystając z wyznaczonych wartości pojemności kondensatora C oraz indukcyjności cewki L. Podstawiając odpowiednie wartości dostaliśmy wartość $\omega_{f2} = (1086676.5478 \text{ rad/s})$, co w przeliczeniu na Hz daje nam wielkość $f_{f2} = 172949.9441 \text{ Hz}$.

4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzenie analizy własności filtrów RLC pozwala na zapoznanie się z charakterystykami fazowymi oraz amplitudowymi. Podczas doświadczenia zbudowano różne, szeregowo obwody RLC i na ich podstawie obliczono częstotliwości rezonansowe dla charakterystyki amplitudowej oraz fazowej: $\omega_1 = 1054909 \text{ rad/s}$, $f_1 = 167894 \text{ Hz}$, $\omega_2 = (1002712 \text{ rad/s})$, $f_2 = 159587 \text{ Hz}$, $\omega_{f_2} = (1086676.5478 \text{ rad/s})$, $\omega_{f_1} = (1108935 \text{ rad/s})$. Sprawdzono również doświadczalnie, jak zmieniają się częstotliwości rezonansowe dla układów z szeregowym i równoległym połączeniem cewek i kondensatorów, które wynoszą odpowiednio: : dla kondensatorów $f_R = 118000 \text{ Hz}$, $f_{sz} = 232000 \text{ Hz}$, dla cewek: $f_R = 232000 \text{ Hz}$, $f_{sz} = 116000 \text{ Hz}$. Można zatem zauważyć, że pomiędzy tymi częstotliwościami zachodzi relacja odwrotna.