

# Badanie własności filtrów RC POPRAWA

Bartosz Kundera

24.04.2025

## STRESZCZENIE

Celem doświadczenia było wyznaczenie charakterystyki amplitudowej oraz fazowej dla odpowiedniego filtra RC. W tym celu zbudowano filtr dolnoprzepustowy RC oraz zmierzono zmiany napięcia pomiędzy sygnałem wejściowym a wyjściowym oraz przesunięcie fazowe pomiędzy tymi sygnałami. Po dokonaniu pomiarów przedstawiono graficznie zależność (Wykres 1) transmitancji od zadanej częstotliwości dla charakterystyki amplitudowej, następnie na jej podstawie obliczono częstotliwość graniczną dla filtra dolnoprzepustowego:  $\omega_{G1} = (9446 \pm 803.16) \frac{1}{s}$ , następnie analogicznie na podstawie przedstawionej charakterystyki fazowej (Wykres 2) obliczono częstotliwość graniczną wynoszącą  $\omega_{G2} = (10730.7 \pm 445.3) 1/s$ . Następnie na wejście wprowadzono sygnał prostokątny i obserwowano modyfikowany na generatorze częstotliwości aby zobaczyć zmiany zachodzące w sygnale. Na koniec przelutowano układ na filtr górnoprzepustowy oraz wykonano analogiczną procedurę z tą różnicą, że na wejście wprowadzono sygnał trójkątny.

## 1. WSTĘP TEORETYCZNY

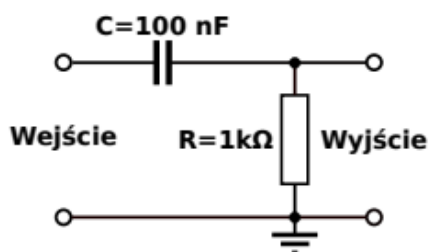
Filtry RC są układami elektrycznymi, które złożone są z kondensatorów oraz oporników. W wykonanym doświadczeniu rozpatrywaliśmy dwa różne układy, w których skład wchodził jeden opornik i jeden kondensator połączone szeregowo. W zależności od kolejności ułożenia poszczególnych elementów układu rozpatrujemy dwa rodzaje filtrów RC tj. filtr górnoprzepustowy (różniczkujący) oraz filtr dolnoprzepustowy (całkujący).

### 1.1 Filtr górnoprzepustowy (różniczkujący)

Filtr jest opisany poniższym równaniem (1):

$$u_{wy}(t) = RC \frac{d}{dt} [u_{we}(t) - u_{wy}(t)] \quad (1)$$

Gdzie  $u_{wy}$  to napięcie wyjściowe,  $u_{we}$  to napięcie wejściowe,  $R$  to rezystancja opornika, a  $C$  to pojemność kondensatora. Schemat tego filtra przedstawiono poniżej (Rysunek 1).



Rys. 1: Filtr górnoprzepustowy (różniczkujący)

[1] Rysunek 1. Filtr górnoprzepustowy (różniczkujący)

Filtr górnoprzepustowy możemy sprowadzić do dzielnika napięcia. Wtedy postać wzoru na napięcie wyjściowe przyjmie postać(2):

$$u_{wy}(t) = \frac{u_{we}(t)R}{z} \quad (2)$$

Gdzie  $z$  to impedancja układu, która w naszym przypadku będzie miała następującą postać(3):

$$z = R + \frac{1}{i\omega c} \quad (3)$$

Gdzie czynnik  $\frac{1}{i\omega c}$  reprezentują składową impedancji wytwarzaną przez kondensator.

Znając napięcie na wejściu oraz na wyjściu, można obliczyć transmitancję dla filtra górnoprzepustowego, jako stosunek tych napięć(4).

$$T = \frac{|u_{wy}|}{|u_{we}|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \quad (4)$$

Gdzie  $\omega$  to częstość napięcia zadanego na wejściu do układu.

Filtr górnoprzepustowy działa w taki sposób, że przepuszcza wszystkie częstotliwości sygnału powyżej ustalonej wartości granicznej. Niższe częstotliwości sygnału zostają tłumione oraz znajdują się w obszarze różniczkowania. Obszar różniczkujący występuje dla przesunięcia fazowego między sygnałem wejściowym, a wyjściowym w zakresie  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Sygnał wejściowy ulega różniczkowaniu co skutkuje tym, że napięcie na wyjściu jest mniejsze niż na wejściu. Częstość graniczną dla tego typu filtra opisujemy poniższym wzorem(5):

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \quad (5)$$

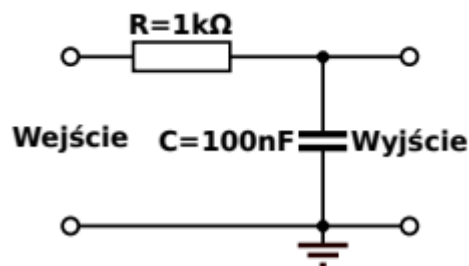
Pasmo transmisji(przenoszenia) dla filtra górnoprzepustowego w skali częstości zachodzi w zakresie od  $\omega_g$  do  $\infty$ .

## 1.2 Filtr dolnoprzepustowy(całkujący)

Filtr jest opisany poniższym równaniem(6):

$$u_{wy}(t) = \frac{1}{RC} \int [u_{we}(t) - u_{wy}(t)] dt \quad (6)$$

Schemat tego filtra przedstawiono poniżej(Rysunek 2).



Rys. 2: Filtr dolnoprzepustowy (całkujący)

[1]Rysunek 2. Filtr dolnoprzepustowy(całkujący)

Podobnie jak filtr górnoprzepustowy, możemy go sprowadzić do dzielnika napięcia. Wzór będzie przyjmował wtedy następującą postać(7):

$$u_{wy}(t) = \frac{u_{we}(t)z_c}{z} \quad (7)$$

Gdzie  $z_c$  to składowa impedancji dla kondensatora tj.  $z_c = \frac{1}{i\omega C}$ . Cała impedancja układu będzie opisana tym samym wzorem(3) jak w przypadku filtra górnoprzepustowego. Podobnie postąpić można w przypadku transmitancji, która w przypadku tego filtra będzie miała następującą postać(8):

$$T = \frac{|u_{wy}|}{|u_{we}|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \quad (8)$$

Filtr dolnoprzepustowy działa odwrotnie do poprzedniego tj. przepuszcza częstotliwości sygnału poniżej ustalonej częstotliwości granicznej. Wyższe częstotliwości sygnału zostają tłumione oraz znajdują się w obszarze całkującym, który występuje dla przesunięcia fazowego między sygnałem wejściowym, a wyjściowym w zakresie  $[\frac{\pi}{4}, \infty]$ . Sygnał wejściowy jest całkowalny co skutkuje tym, że napięcie na wyjściu jest mniejsze niż na wejściu. Częstotliwość graniczna dla filtra dolnoprzepustowego opisuje ten sam wzór (5) co w przypadku filtra górnoprzepustowego. Różnica pojawia się w paśmie przenoszenia, ponieważ dla tego typu filtra zachodzi ona od 0 do  $\omega_g$ .

## 2.UKŁAD DOŚWIADCZALNY I POMIARY

Podczas doświadczenia zostały wykorzystane następujące urządzenia:

- Oscyloskop RIGOL;
- Generator funkcyjny RIGOL;
- Kondensator o pojemności 100 nF;
- Opornik o rezystancji 1kΩ;
- Miernik uniwersalny Multimetr BRYMEN BM805
- Przewody;
- Lutownica;
- Cyna;
- Płytki montażowa

W celu wykonania odpowiednich pomiarów należało zbudować układ RC, lutując poszczególne elementy tj. opornik oraz kondensator do płytki montażowej. W wykonanym doświadczeniu najpierw zbudowano filtr dolnoprzepustowy(całkujący)(Rysunek 2). Po odpowiednim przylutowaniu poszczególnych elementów, wejście układu połączono do generatora, oraz używając trójnika BNC podłączono dalszą część do oscyloskopu. Następnie za pomocą generatora funkcyjnego, który zadawał napięcie na wejściu równe 5V, oraz oscyloskopu mierzono zmiany napięcia wyjściowego oraz fazy. Przy pomocy generatora zmieniano częstotliwość napięcia zadanego na wejściu, a następnie na ekranie oscyloskopu wyświetlano przebieg zmian napięcia na wyjściu oraz odczytywano jego wartość przy pomocy funkcji pick-to-pick (różnicy między najniższą, a najwyższą wartością). Po wykonaniu odpowiedniej ilości pomiarów, na generatorze zmieniono funkcję z sinusoidalnej na prostokątną w celu wyznaczenia zakresów częstotliwości, w którym układ poprawnie całkuje. Po skończeniu tej części doświadczenia przelutowano płytkę montażową, tak aby dostać filtr górnoprzepustowy(różniczkujący)(Rysunek 1). Po ponownym połączeniu obwodu do generatora oraz oscyloskopu, na wejściu wprowadzono sygnał o napięciu 5V z funkcją sygnału trójkątnego oraz powtórzono analogiczną analizę jak w poprzednim przypadku. Dane pomiarowe zebrane podczas doświadczenia zostały zebrane w oddzielnym pliku dołączonym do raportu.

### 3. ANALIZA DANYCH

Głównym zadaniem przy analizie danych w tym doświadczeniu jest wyznaczenie charakterystyki amplitudowej oraz fazowej dla danego obwodu. Zależność między częstotliwością, a częstotliwością wyznaczono korzystając z poniższego wzoru(9):

$$\omega = 2\pi f \quad (9)$$

Gdzie  $f$  – częstotliwość. Pomiary częstotliwości przyjęto za dokładne, dlatego nie uwzględniono go w analizie.

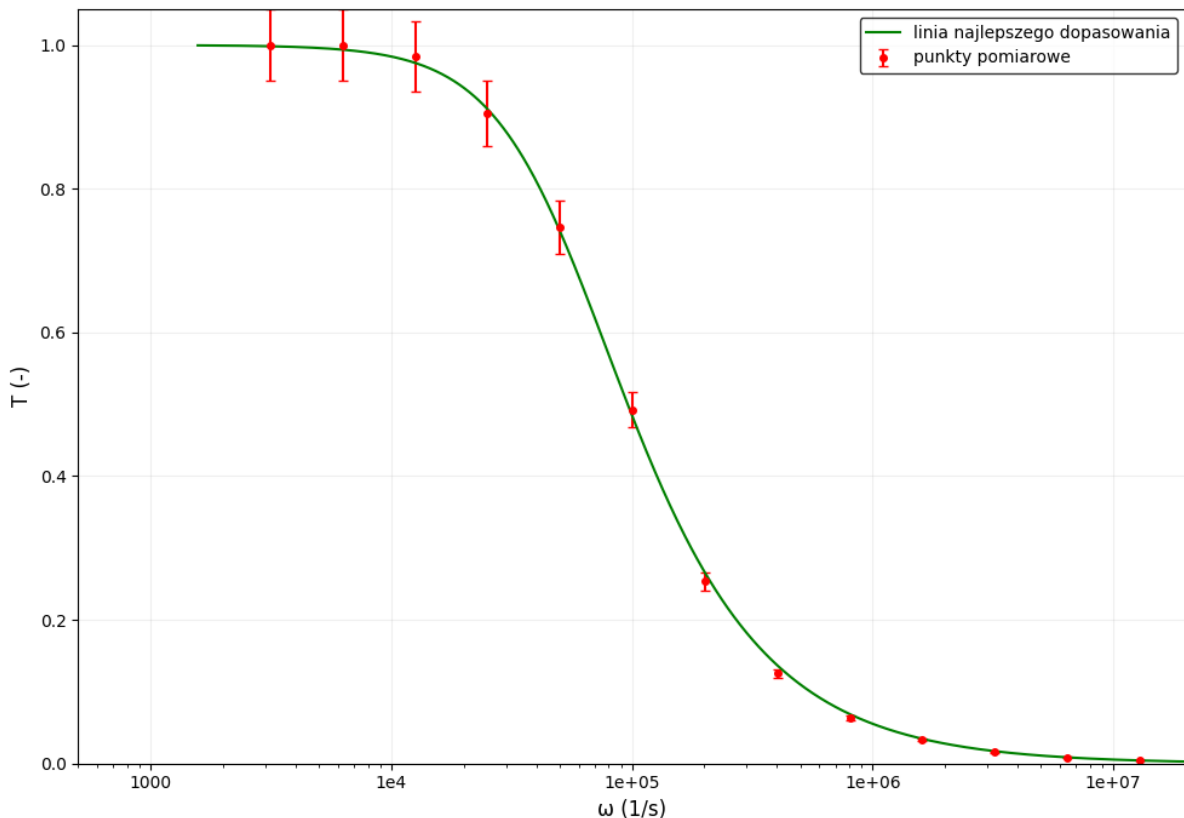
Dokładność pomiaru napięcia wyjściowego obliczono korzystając ze znanego wzoru na niepewność pomiarową(10):

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

Do policzenia charakterystyki amplitudowej należy przekształcić wzór(8) do następującej postaci(11):

$$T = \frac{|u_{wy}|}{|u_{we}|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 A^2 + 1}} \quad (11)$$

Gdzie  $A$  to współczynnik proporcjonalności. Korzystając z powyższego wzoru można przedstawić zebrane dane oraz dopasować do nich najlepiej opisującą je funkcję. Tą zależność przedstawiono na poniższym wykresie (Wykres 1)



Wykres 1. Transmitancja układu od częstotliwości napięcia dla filtra dolnoprzepustowego

Używając metody najmniejszych kwadratów obliczono wartość współczynnika  $A$  oraz jego niepewność. Wartość współczynnika  $A = (0.000081 \pm 0.00000029)$  s.

Aby zweryfikować czy funkcja przedstawiona na wykresie prawidłowo odzwierciedla zebrane pomiary,

przeprowadzono test  $\chi^2$  Pearsona. Wartość  $\chi^2$  dla poziomu zgodności  $\alpha = 0.05$ , wynosi  $\chi^2 = 5.72$ . Następnie wyznaczono wartość  $p = 0.9841$ , która spełnia wymóg  $p > 0.05$ , zatem mamy prawo do stwierdzenia że model został prawidłowo dobrany. W celu wyznaczenia granicznej częstości dla filtra dolnoprzepustowego, przekształcono wzór(11) do następującej postaci(12):

$$\omega_{G1} = \frac{\sqrt{1 - T(\omega_g)}}{AT(\omega_g)} \quad (12)$$

Gdzie  $T(\omega_g)$  to wartość transmitancji dla częstości granicznej, która jest równa  $T(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Następnie po podstawieniu  $T(\omega_g)$  oraz współczynnika A, do równania (12), otrzymano następującą wartość:  $\omega_{G1} = (9446 \pm 803.16) \frac{1}{s}$ , zamieniając jednostki otrzymamy wartość równą  $f = (1503 \pm 127.8) \text{ Hz}$

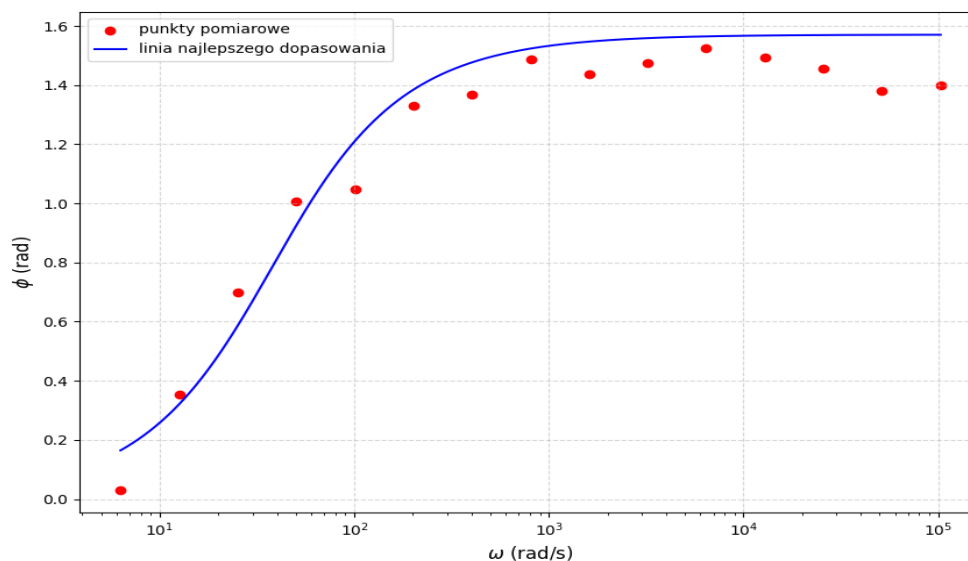
Następnie, aby wyznaczyć charakterystykę fazową należy zamienić wartości przesunięcia fazowego zapisane w stopniach na radiany, korzystając z poniższego wzoru(13):

$$\phi = \frac{2\pi\varphi}{360^\circ} \quad (13)$$

Gdzie  $\varphi$  to przesunięcie fazowe mierzone w stopniach. Niepewność pomiaru uwzględniono i policzono korzystając ze wzoru(10), a wyniki zostały przedstawione w dołączonej do raportu karcie pomiarowej. Następnie, aby dokonać charakterystyki fazową, należy skorzystać ze wzoru przedstawiającego przesunięcie fazowe pomiędzy sygnałem wejściowym, a wyjściowym w filtrze dolnoprzepustowym. Wzór ten jest przedstawiony poniżej(14):

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega A) \quad (14)$$

Gdzie A to współczynnik proporcjonalności. Korzystając z powyższego wzoru można dokonać analogiczną analizę jak w przypadku charakterystyki amplitudowej. Wyniki pomiarów oraz dopasowana do nich funkcja zostały przedstawione na wykresie poniżej(Wykres 2): nich funkcja zostały przedstawione na wykresie poniżej(Wykres 2):



Wykres 2. Charakterystyka fazowa dla filtra dolnoprzepustowego

Używając metody najmniejszych kwadratów obliczono współczynnik A oraz jego niepewność, który wynoszą:  $A = (0,0000932 \pm 0.00000387)s$ . W celu sprawdzenia czy model został dobrze dopasowany wykonano test  $\chi^2$  Pearsona. Wartość  $\chi^2$  dla poziomu zgodności  $\alpha = 0.05$ , wynosi  $\chi^2 = 16.45$ . Następnie wyznaczono wartość  $p = 0.3515$ , która spełnia wymóg  $p > 0.05$ , zatem mamy prawo do stwierdzenia, że model został prawidłowo dobrany.

W celu wyznaczenia wartości granicznej częstotliwości  $\omega_G$  dla charakterystyki fazowej, należy odpowiednio przekształcić wzór(14) do następującej postaci(15):

$$\omega_G = -\frac{tg(\phi(\omega_g))}{D} \quad (15)$$

Gdzie  $\phi(\omega_g)$  to wartość transmitancji dla częstotliwości granicznej, która dla filtra dolnoprzepustowego będzie równa  $\phi(\omega_g) = -\frac{\pi}{4}$ . Następnie podstawiając odpowiednie wartości otrzymano następującą wartość:  $\omega_G = (10730.7 \pm 445.3) \frac{1}{s}$ , zamieniając na częstotść otrzymamy  $f = (1707.5 \pm 70.9) Hz$

Po przeprowadzeniu analizy pomiarów zebranych przy użyciu filtra dolnoprzepustowego, zmieniono sygnał na wejściu na prostokątny aby wyznaczyć obszar całkowania. Przy pomocy generatora funkcyjnego modyfikowano częstotliwość sygnału, a na ekranie oscyloskopu obserwowano zmiany kształtu sygnału na wejściu i na wyjściu. Na rysunkach poniżej (Rysunek 3), (Rysunek 4), (Rysunek 5) przedstawiono odczyty z oscylatora, gdzie kolor żółty – sygnał wejściowy, sygnał niebieski – sygnał wyjściowy.

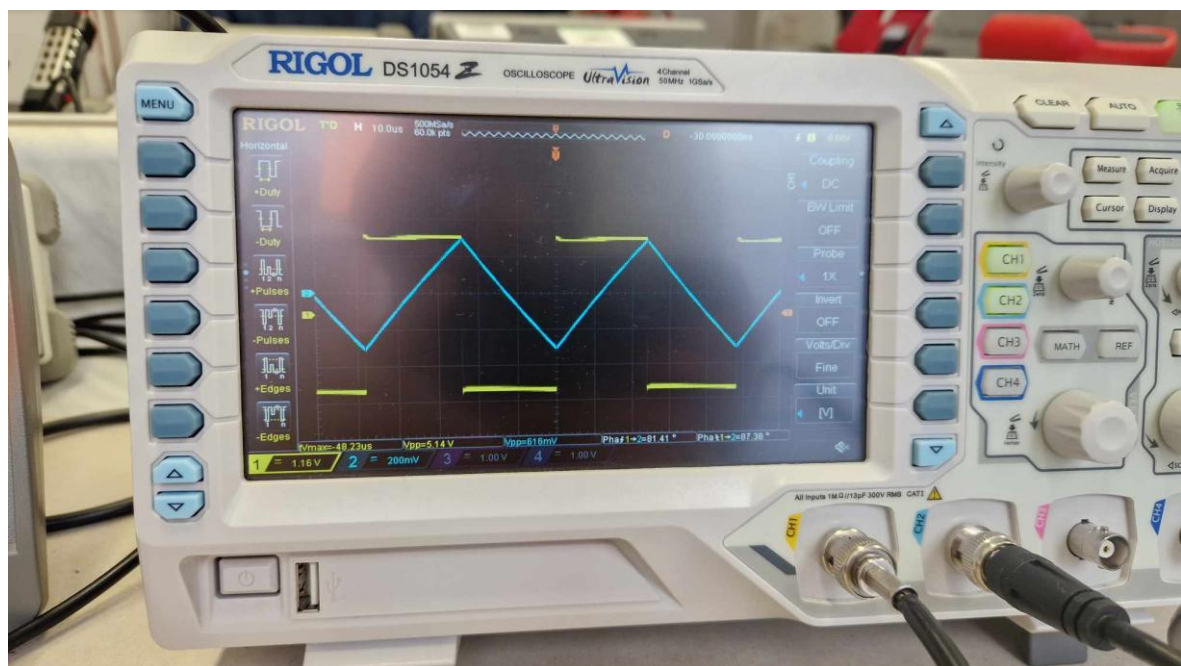


Rysunek 3. Sygnał prostokątny dla częstotliwości 10kHz dla filtra dolnoprzepustowego





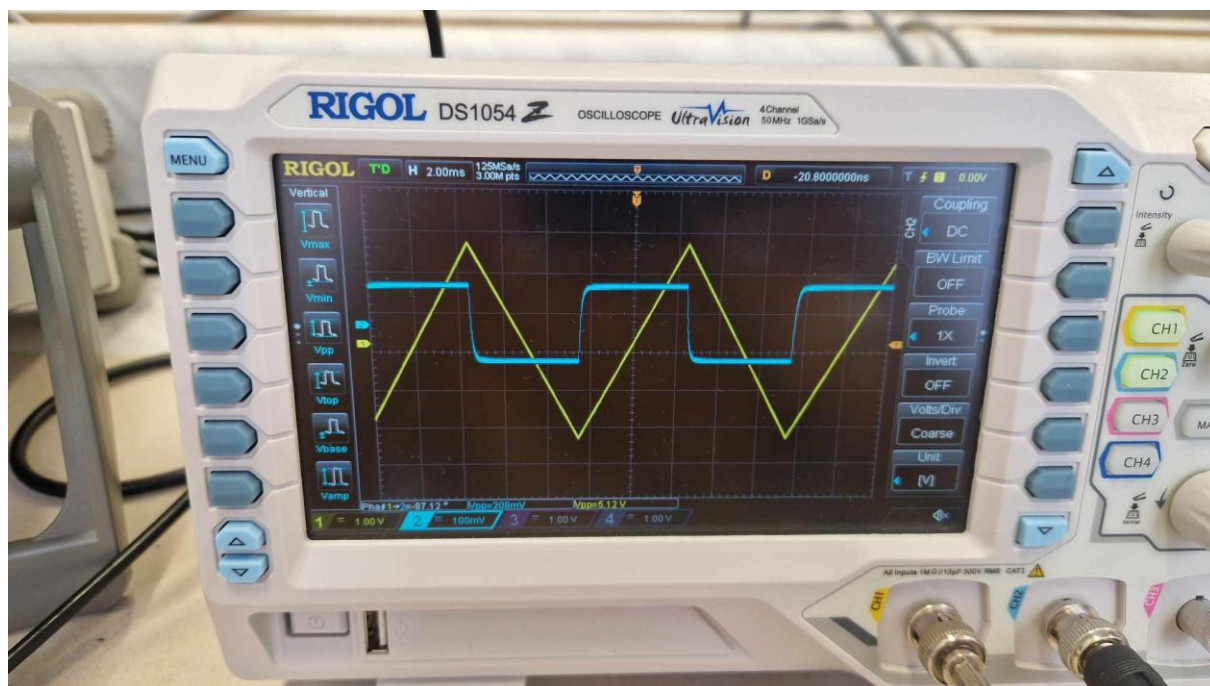
Rysunek 4. Sygnał prostokątny dla częstotliwości 15kHz dla filtra dolnoprzepustowego



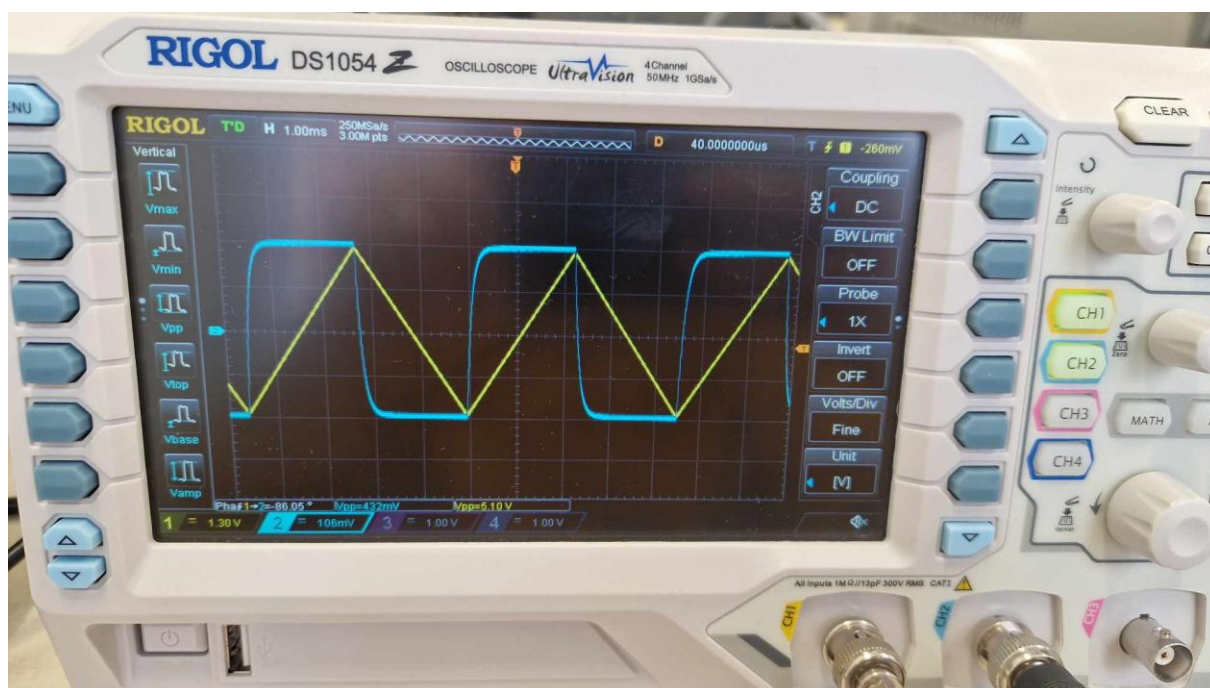
Rysunek 5. Sygnał prostokątny dla częstotliwości 20,8 kHz dla filtra dolnoprzepustowego

Analizując odczyty z oscyloskopów widać lekkie zmiany wraz ze zmianą częstotliwości na wejściu. Pasma przenoszenia zaczyna się według wzorcowej wartości częstotliwości  $\omega = 10000 \frac{1}{s}$ , co odpowiada przybliżonej wartości  $f = 1600 \text{ Hz}$ , zatem wszystkie trzy rysunki przedstawiają sygnały w obszarze przenoszenia.

W dalszej części doświadczenia, po przelutowaniu układu do filtra górnoprzepustowego RC, przeprowadzono analogiczną analizę, z tą różnicą że na wejście sygnał trójkątny. Przy pomocy generatora funkcyjnego modyfikowano częstotliwość sygnału, a na ekranie oscyloskopu obserwowano zmiany kształtu sygnału na wejściu i na wyjściu. Na rysunkach poniżej przedstawiono odczyty z oscylatora, gdzie kolor żółty – sygnał wejściowy, sygnał niebieski sygnał wyjściowy.

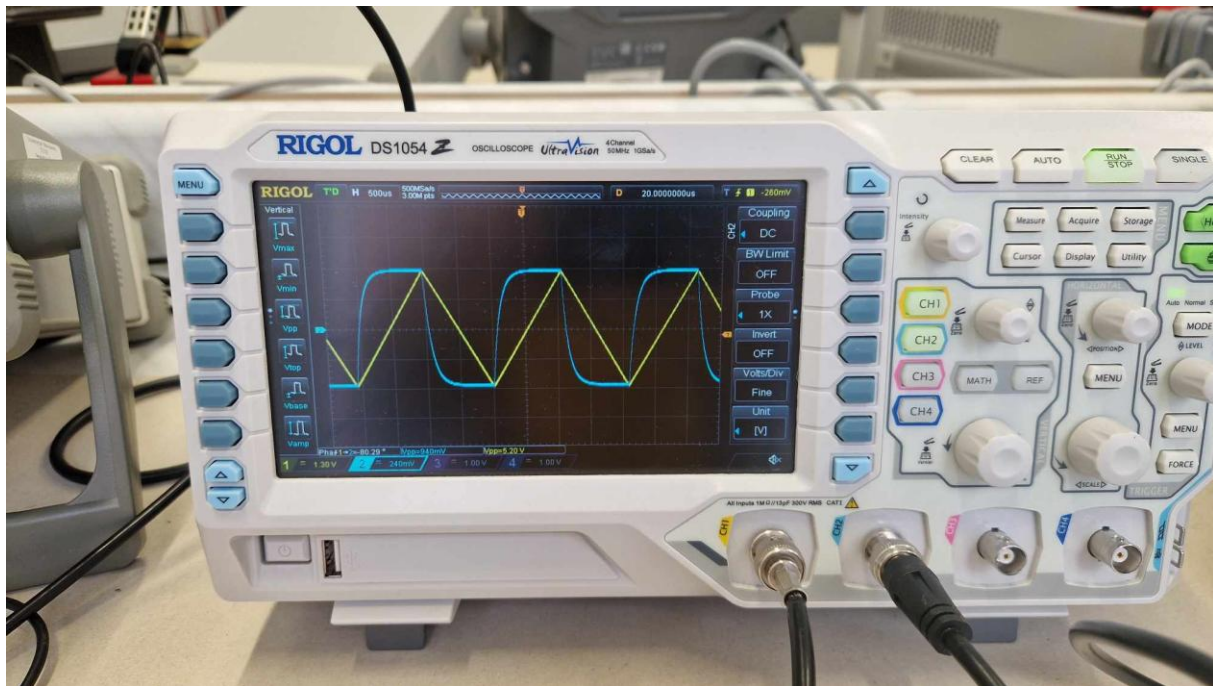


Rysunek 6. Sygnał trójkątny dla częstotliwości 100 kHz dla filtra górnoprzepustowego



Rysunek 7. Sygnał trójkątny dla częstotliwości 200 kHz dla filtra górnoprzepustowego





Rysunek 8. Sygnał trójkątny dla częstotliwości 480 kHz dla filtra górnoprzepustowego

Analizując odczyty z oscyloskopów widać zmiany wraz ze zmianą częstotliwości na wejściu. Pasma przenoszenia zaczyna się według wzorcowej wartości częstotliwości  $\omega = 10000 \frac{1}{s}$ , co odpowiada przybliżonej wartości  $f = 1600 \text{ Hz}$ , zatem wszystkie trzy rysunki przedstawiają sygnały poza obszarem przenoszenia.

#### 4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzenie analizy własności filtrów RC pozwala na zapoznanie się z charakterystykami amplitudowymi i fazowymi filtrów RC. Podczas doświadczenia zbudowano filtr zarówno dolnoprzepustowy jak i górnoprzepustowy. Obliczono teoretyczną wartość częstotliwości granicznej, która wynosi  $\omega = 10000 \frac{1}{s}$ . Na podstawie zebranych danych stworzono charakterystykę amplitudową i fazową w zależności od napięcia wejściowego i wyjściowego oraz wyznaczono częstotliwość graniczną zarówno dla charakterystyki amplitudowej:  $\omega_{G1} = (9446 \pm 803.16) \frac{1}{s}$  jak i fazowej  $\omega_G = (10730.7 \pm 445.3) \frac{1}{s}$ . Analizy działania filtra całkującego i różniczkującego potwierdzają przypuszczany zakres pasma przenoszenia (Rysunki 3-8).

#### LITERATURA

[1] Wykład 1 - Obwody prądu stałego i zmiennego

#### SUPLEMENT

Wszystkie dane pomiarowe zostały zawarte w dołączonej do raportu karcie pomiarowej.