ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЮ СТОИМОСТИ (МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ ТАРИФОВ)

Начальный план составляется ***методом минимальных тарифов***, который заключается в следующем:

1) выбирается наименьший тариф c_{ij}, если имеются два или более одинаковых наименьших тарифов, то заполняемая клетка берется произвольно среди них;

2) клетке (i, j) этого тарифа (в правом нижнем углу) записывается максимально возможная поставка с учетом ограничений этой строки и этого столбца: $x_{ij}= min(a_i, b_j)$;

3) этой поставкой либо обеспечивается потребность одного потребителя, и тогда этот потребитель (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения, либо от одного поставщика забирается весь груз, и тогда этот поставщик (строка) исключается из дальнейшего рассмотрения;

4) исключаемый столбец (или строка) нумеруется, и этот номер записывается на краю этого столбца (или строки). Исключаемые одновременно строка и столбец отмечаются одним номером.

5) описанная операция повторяется до тех пор, пока не будут зачеркнуты все столбцы и строки.

На последнем шаге одновременно освобождаются строка и столбец, а следовательно, в благоприятном случае должно быть m+n-1 заполненных клеток. Полученный такой план является ***невырожденным***.

Если при одновременном зачеркивании строки и столбца (кроме последнего шага) число заполненных клеток меньше, чем m+n-1, и такой план является ***вырожденным.*** Его надо дополнить до невырожденного плана нулями: нули надо записать в клетки, расположенные в строке или в столбце, которые одновременно исключены из рассмотрения, т.е. имеют один номер. При этом, клетки, заполненные нулями, не должны составлять цикл с прочими заполненными клетками.

Циклом с начальной вершиной в данной клетке называется замкнутая ломаная, обладающая следующими свойствами:

1) все ее вершины, кроме начальной, расположены в занятых клетках;

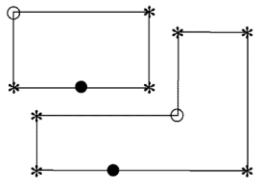
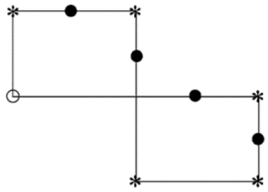
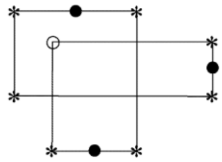
2) звенья (стороны) цикла расположены в строках и столбцах таблицы;

3) в каждой вершине звенья соединяются под прямым углом;

4) на звеньях цикла могут быть занятые клетки, но они не являются вершинами цикла;

5) два звена могут пересекаться в какой-либо клетке, но эта клетка не должна быть занятой (иначе она является вершиной).

Рассмотрим несколько циклов с началом в незанятой клетке. Приняты обозначения: О – незанятая клетка (начало цикла), * – занятая клетка; возможные места расположения занятых клеток отмечены черным кружком на звеньях.

Пример невырожденного плана: m+n-1=3+4-1=6.

	70	60	80	70	u_i
90	1 70	5	6	1 20	0
100	4	1 60	3	4 40	3
90	3	3	5 80	4 10	3
v_j	1	−2	2	1	

Количество заполненных клеток – 6. Следовательно, план невырожденный.

Пример вырожденного плана: m+n-1=3+4-1=6.

	70	60	80	70
90	1 70	5	6	1 20
100	4 *	1 60	3 *	4 50
80	3	3	5 80	6 *

Количество заполненных клеток – 5. Следовательно, план вырожденный.

При заполнении таблицы одновременно зачеркнуты вторая строка и четвертый столбец. Отмеченная уголком и звездочкой клетка должна заполняться нулем.

После получения первого (начального) плана следует определить стоимость его реализации:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

Затем план проверяется на оптимальность ***методом потенциалов***. Потенциалами данного плана называется набор из m+n действительных чисел u_i $(i = \overline{1,m})$ и v_j $(j = \overline{1,n})$ удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$, где c_{ij} – тариф занятой клетки. Поскольку число занятых клеток равно m+n-1, то для однозначного определения потенциалов один из них можно брать произвольно, например, u_1. Потенциалы записываются в дополнительных строке и столбце.

Полученная система потенциалов позволяет проверить полученный план на оптимальность. Составляем разности $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, для всех клеток таблицы. Поскольку для занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$ (по определению), то остается найти Δ_{ij} для незанятых клеток. Эти числа называются оценками клеток плана.

Теорема оптимальности. Опорный план X оптимален в том и только в том случае, если среди оценок Δ_{ij} этого плана нет отрицательных.

Если среди оценок Δ_{ij} есть отрицательные, то план неоптимален и его улучшают методом перераспределения поставок по циклу. Для этого отмечаем клетку с наименьшей отрицательной оценкой и построим цикл с начальной вершиной в этой клетке.

Примечание. Для того чтобы вырожденный план стал невырожденным, надо занять одну клетку нулем (иначе нельзя определить потенциалы, а значит, нельзя проверить на оптимальность полученный план).

Итак, построен цикл с вершиной в отмеченной клетке с наименьшей отрицательной оценкой. Если таких клеток несколько, то следует брать одну из них произвольно, или клетку с меньшим тарифом.

В любом порядке перенумеруем вершины цикла. Тем самым вершины разбиваются на две группы – с нечетными (отмеченная считается первой, т.е. нечетной) и четными номерами. Найдем наименьшую из величин поставок четных вершин. Эту величину прибавим ко всем вершинам с нечетными номерами и отнимем от вершин с четными номерами. Новое распределение поставок присоединяется к остальным занятым клеткам; таким образом, составляется новый опорный план X_2 с $L(X_2) < L(X_1)$.

Этот план заносится в новую таблицу и проверяется на оптимальность методом потенциалов.

Улучшение новых планов проводят до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. Для него все оценки клеток должны быть неотрицательными.

Пример 1. Решить транспортную задачу.

A_i \ ***B_j***	**70**	**60**	**80**	**70**
90	1	5	6	1
100	4	1	3	4
90	3	3	5	4

A_i \ B_j	**70**	**60**	**80**	**70**
90	1 $\boxed{70}$	5	6	1 $\boxed{20}$
100	4	1 $\boxed{60}$	3	4 $\boxed{40}$
90	3	3	5 $\boxed{80}$	4 $\boxed{10}$

Потенциалы находятся последовательно следующим образом:

$$u_1 + v_1 = 1, \qquad u_1 + v_4 = 1,$$
$$u_2 + v_2 = 1, \qquad u_2 + v_4 = 4,$$
$$u_3 + v_3 = 5, \qquad u_3 + v_4 = 4,$$

Таким образом, $u_1 = 0, u_2 = 3,\ u_3 = 3, v_1 = 1, v_2 = -2, v_3 = 2, v_4 = 1.$

Для определения оптимальности полученного плана, вычисляем оценки всех клеток таблицы.

$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 + 2 = 7$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 2 = 4$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 3 - 1 = 0$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 2 - 3 = -2$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 1 - 3 = -1$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - 3 + 2 = 2$$

Получили две клетки с отрицательными оценками: $\Delta_{23} = -2, \Delta_{31} = -1.$

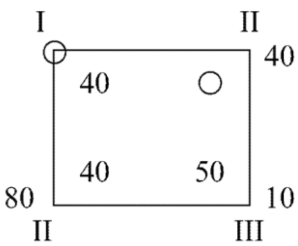
Таким образом, полученный план неоптимален, поэтому будем его улучшать.

Определим стоимость реализации этого плана:

$L(X_1) = 70 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 750.$

Построим цикл с началом в отмеченной клетке (2, 3) с минимальной оценкой $\Delta_{23} = -2$.

B_j / A_i	**70**	**60**	**80**	**70**
90	1 $\boxed{70}$	5	6	1 $\boxed{20}$
100	4	1 $\boxed{60}$	3 ○	4 $\boxed{40}$
90	3	3	5 $\boxed{80}$	4 $\boxed{10}$



Выносим цикл для его пересчета отдельно. Минимальная поставка по четным вершинам равна 40. Эту величину вычтем из вершин с четными номерами и прибавим к вершинам с нечетными номерами. Старые поставки записаны вне цикла, а новые – внутри него. Клетка (2, 3) была свободной, сейчас стала свободной клетка (2, 4).

Строим новую таблицу, в которую заносим новый план, состоящий из старых поставок, не вовлеченных в цикл, и новых – в вершинах рассмотренного цикла.

Потенциалы находятся последовательно следующим образом:

$$u_1 + v_1 = 1, \qquad u_1 + v_4 = 1,$$
$$u_2 + v_2 = 1, \qquad u_2 + v_3 = 3,$$
$$u_3 + v_3 = 5, \qquad u_3 + v_4 = 4,$$

Таким образом, $u_1 = 0, u_2 = 1,\ u_3 = 3, v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 2, v_4 = 1.$

Для определения оптимальности полученного плана, вычисляем оценки всех клеток таблицы.

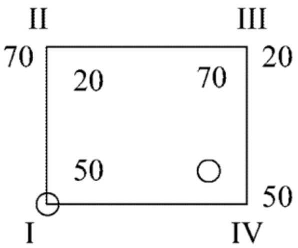
$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 - 0 = 5$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 2 = 4$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 1 - 1 = 2$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 4 - 1 - 1 = 2$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 3 - 1 = -1$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - 3 + 0 = 0.$$

Наличие одной отрицательной оценки Δ_{31} означает, что этот новый план еще не оптимальный.

Определим стоимость реализации этого плана:
$L(X_1) = 70 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 50 \cdot 4 = 670.$

Замкнутый цикл с вершиной в клетке (3, 1).

B_j / A_i	**70**	**60**	**80**	**70**
90	1 70	5	6	1 20
100	4	1 60	3 40	4
90	3	3	5 40	4 50



На этот раз перераспределяем поставку равную 50, это приводит к следующим поставкам, обозначенным внутри цикла.

Составляем новый план, заносим его в новую таблицу.

B_j / A_i	**70**	**60**	**80**	**70**
90	1 20	5	6	1 70
100	4	1 60	3 40	4
90	3 50	3	5 40	4

Определяем новые потенциалы, новые оценки

$$u_1 + v_1 = 1, \qquad u_1 + v_4 = 1,$$
$$u_2 + v_2 = 1, \qquad u_2 + v_3 = 3,$$
$$u_3 + v_1 = 3, \qquad u_3 + v_3 = 5,$$

Таким образом, $u_1 = 0, u_2 = 0,\ u_3 = 2, v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 3, v_4 = 1$.

Для определения оптимальности полученного плана, вычисляем оценки всех клеток таблицы.

$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 - 1 = 4$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 3 = 3$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 0 - 1 = 3$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 4 - 0 - 1 = 3$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - 2 - 1 = 0$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Отрицательных оценок нет, следовательно, полученный план оптимален. Его стоимость равна:

$$L(X_1) = 20 \cdot 1 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 4 = 620.$$

Примечание. При пересчете стоимости нового плана можно ограничиться пересчетом только тех поставок, которые участвовали в цикле. Экономия на цикле переносится на весь план. Это важно, когда задачи, а значит, и таблицы, громоздкие.

Пример 2. Решить задачу

B_j / A_i	**40**	**20**	**30**	**60**
40	3	2	3	4
30	5	6	7	5
90	3	4	1	2

Проверяем задачу на условие правильности баланса:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 30 + 90 = 160$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_j = 40 + 20 + 30 + 60 = 150.$$

Задача в такой постановке неразрешима, поэтому вводим «фиктивного» потребителя с потребностью b=10 и принимаем c_{i5}=0, $i = \overline{1,3}$

Составляем распределительную (транспортную) таблицу для новой закрытой задачи, строим первоначальный план. «Фиктивный» потребитель («отправитель»), рассматривается в последнюю очередь.

Далее определяем его стоимость, вычисляем потенциалы и проверяем план на оптимальность по изложенной выше схеме, рассмотренной в примере 1.

B_j / A_i	**40**	**20**	**30**	**60**	**10**
40	3 $\boxed{20}$	2 20	3	4	0
30	5 20	6	7	5	0 10
90	3 0	4	1 $\boxed{30}$	2 $\boxed{60}$	0

Первоначальный план, в котором «фиктивный» потребитель участвует, является оптимальным, и стоимость этого плана равна:

$$F(X) = 20 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = 350.$$

Исключаем «фиктивного» потребителя, не влияющего на стоимость оптимального плана задачи. Получаем:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 350.$$