



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической физики

Кузнецов Дмитрий Константинович

**Теоретическое и численное исследование некоторых
обратных задач теплопроводности с финальным
переопределением**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

И.В. Тихонов

Москва, 2017

Оглавление

Введение	3
§ 1. Точная теоретическая постановка задачи	4
§ 2. Редуцированная обратная задача	4
§ 3. Теоретический алгоритм решения обратной задачи	5
§ 4. Теоретический алгоритм решения обратной задачи для вторых краевых условий	8
§ 5. Краткая схема алгоритма	11
§ 6. Программная реализация алгоритма	12
§ 7. Примеры расчетов	14
Заключение	35
Литература	36

Введение

В настоящей работе рассматривается специальная задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + p(x), \quad u = u(x, t). \quad (1)$$

Уравнение (??) описывает процесс распространения тепла в одномерных, однородных и изотропных средах (см. [?] – [?]). Коэффициент температуропроводности $a^2 > 0$ считается постоянным. Пространственная переменная x и временная переменная t предполагаются ограниченными

$$0 < x < L, \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Функция $p(x)$ не зависит от t и выражает плотность дополнительных стационарных источников тепла, поэтому ее часто называют *функцией источников* (source function).

В классической прямой задаче мы осуществляем поиск решения $u(x, t)$ по выбранным начальным и краевым условиям при заданной функции источника. Но на практике значения $p(x)$ часто бывают неизвестны, и тогда приходится рассматривать *обратную задачу* восстановления источника (inverse source problem) (см. [?], [?]). Для решения обратной задачи, помимо стандартных начальных и краевых условий, используем дополнительное *финальное переопределение*

$$u(x, T) = \varphi(x) \quad (3)$$

с заданной функцией $\varphi(x)$.

Обратные задачи с финальным переопределением активно изучались ранее для различных эволюционных уравнений (см. [?]). В частности, в простом модельном случае задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + p, & 0 < t \leq T, \\ u(0) = 0, & u(T) = \varphi, \end{cases}$$

в работе Ранделла [?] был предложен конструктивный алгоритм для нахождения неизвестного элемента p . Элемент p соответствует функции $p(x)$ из дифференциального уравнения (??).

В настоящей выпускной квалификационной работе (ВКР) общая схема алгоритма Ранделла кратко изложена методом Фурье на примере одномерного уравнения теплопроводности. Получено операторное уравнение вида

$$p - Bp = f \quad (4)$$

для нахождения неизвестного источника. Показана сжимаемость оператора В.

На основе отмеченных теоретических соображений разработан практический алгоритм решения поставленной обратной задачи теплопроводности. Дана компьютерная реализация указанного алгоритма. Проведены численные эксперименты, подтвердившие эффективность метода Ранделла и высокую надежность восстановления функции источника.

§ 1. Точная теоретическая постановка задачи

Для уравнения (??) в области (??) поставим общую краевую задачу с классическими краевыми условиями первого рода

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = \mu_0(t), & u(L, t) = \mu_1(t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5)$$

Функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $u_0(x)$ предполагаются заданными, правая часть $p(x)$ — неизвестной. Для восстановления функции источника $p(x)$ добавим финальное переопределение типа (??), записав его сейчас в виде

$$u(x, T) = u_1(x), \quad 0 < x < L. \quad (6)$$

В итоге полная постановка рассматриваемой обратной задачи для нахождения неизвестных функций $u(x, t)$ и $p(x)$ выглядит так

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = \mu_0(t), & u(L, t) = \mu_1(t), \\ u(x, 0) = u_0(x), & u(x, T) = u_1(x). \end{cases} \quad (7)$$

Функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ в задаче (??) считаем заданными и достаточно гладкими. Общая постановка задачи (??) легко сводится к специальному редуцированному случаю, когда задаваемая функция фигурирует только в одном финальном условии.

§ 2. Редуцированная обратная задача

Рассмотрим вспомогательную прямую задачу

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ w(0, t) = \mu_0(t), & w(L, t) = \mu_1(t), \\ w(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (8)$$

с функциями $\mu_0(t), \mu_1(t), u_1(x)$, взятыми из исходной обратной задачи (??). Тогда решение задачи (??) представимо в виде

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (9)$$

где $w(x, t)$ — решение вспомогательной задачи (??), а функция $v(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ v(0, t) = 0, & v(L, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, & v(x, T) = \varphi(x), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\varphi(x) = u_1(x) - w(x, T). \quad (11)$$

Поскольку функция $u_1(x)$ была задана, а функция $w(x, t)$ легко находится из стандартной системы (??), то значения $\varphi(x)$ из формулы (??) можно считать известными.

Возникшую обратную задачу (??) будем называть *редуцированной обратной задачей*, для которой и будет проводиться основное исследование.

§ 3. Теоретический алгоритм решения обратной задачи

Итак, согласно предыдущему, рассматриваем обратную задачу

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ v(0, t) = 0, & v(L, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, & v(x, T) = \varphi(x), \end{cases} \quad (12)$$

с неизвестными функциями $p(x), v(x, t)$. Функцию $\varphi(x)$ считаем заданной и достаточно гладкой. Решение задачи (??) будем искать методом Фурье.

Составим задачу Штурма–Лиувилля с краевыми условиями первого рода

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, & X(L) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Спектр задачи (??) имеет вид

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right), \quad k \in \mathbb{N} \quad (14)$$

Разложим неизвестные функции из системы (??) в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x). \quad (15)$$

с неизвестными коэффициентами $T_k(t)$, A_k . При подстановке (??) в уравнение теплопроводности из задачи (??) и начальное условие $v(x, 0) = 0$ получаем следующие задачи Коши для коэффициентов Фурье

$$\begin{cases} T'_k(t) = -a^2 \lambda_k T_k(t) + A_k & 0 \leq t \leq T, \\ T_k(0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Из системы (??) следует, что

$$T_k(t) = \frac{A_k}{a^2 \lambda_k} \left(1 - e^{-a^2 \lambda_k t} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ряд Фурье для функции $v(x, t)$ принимает вид

$$v(x, t) = \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k} \left(1 - e^{-a^2 \lambda_k t} \right) X_k(x).$$

При подстановке в финальное условие получаем

$$\frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k} \left(1 - e^{-a^2 \lambda_k T} \right) X_k(x) = \varphi(x). \quad (17)$$

Применяя к равенству (??) оператор $(-d^2/dx^2)$ и учитывая, что

$$-X''_k(x) = \lambda_k X_k(x), \quad (18)$$

приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k (1 - e^{-a^2 \lambda_k T}) X_k(x) = -a^2 \varphi''(x). \quad (19)$$

Согласно (??) замечаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = p(x).$$

Вторую сумму в (??) вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k T} X_k(x) \quad (20)$$

можно интерпретировать, как значение

$$z(x, T) = z(x, T; p), \quad (21)$$

где $z(x, t; p)$ получается, как решение вспомогательной прямой задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ z(0, t) = 0, & z(L, t) = 0, \\ z(x, 0) = p(x). \end{cases} \quad (22)$$

Действительно, решение задачи (??), зависящее от начальной функции $p(x)$, имеет вид

$$z(x, t; p) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k T} X_k(x), \quad (23)$$

давая при подстановке (??) выражение (??).

В результате соотношение (??) допускает запись

$$p(x) - z(x, T; p) = -a^2 w_1''(x). \quad (24)$$

Формула (??) дает ключевое операторное уравнение

$$p - Bp = f,$$

где $f(x) = -a^2 \varphi''(x)$. Оператор B определяется формулой

$$Bp = z(x, T; p), \quad (25)$$

где $z(x, t; p)$ — решение вспомогательной прямой задачи (??). В силу экспоненциального убывания решений уравнения теплопроводности (см. (??)) оператор B из формулы (??) будет строго сжимающим $\|B\| < 1$ в стандартной L_2 — норме.

Тем самым решение операторного уравнения (??) выражается в виде ряда Неймана

$$p = f + Bf + B^2f + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f, \quad (26)$$

где $Bf = z(x, T; f)$. Найдем значение для B^2f

$$B^2f = B(Bf) = z(x, T; Bf) = z(x, 2T; f).$$

Проводя аналогичные рассуждения для $B^3f, \dots, B^n f$ получаем общую формулу для $B^k f$

$$B^k f = z(x, kT; f). \quad (27)$$

Воспользуясь (??) найдем восстановленную функцию источника при различном количестве итераций:

- $p_0(x) = f(x) = -a^2 \varphi''(x)$, (нулевая итерация)

- $p_1(x) = f(x) + z(x, T; f)$, (первая итерация)
- $p_2(x) = f(x) + z(x, T; f) + z(x, 2T; f)$, (вторая итерация)

и, вообще,

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} z(x, kT; f) = f + z(x, T; f) + z(x, 2T; f) + \dots$$

Здесь $z(x, t)$ — вспомогательная прямая задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ z(0, t) = 0, & z(L, t) = 0, \\ z(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (28)$$

где

$$f(x) = -a^2 \varphi''(x). \quad (29)$$

§ 4. Теоретический алгоритм решения обратной задачи для вторых краевых условий

Теперь рассмотрим редуцированную обратную задачу для вторых краевых условий

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ v_x(0, t) = 0, & v_x(L, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, & v(x, T) = \varphi(x), \end{cases} \quad (30)$$

с неизвестными функциями $p(x)$, $v(x, t)$. Функцию $\varphi(x)$ считаем заданной и достаточно гладкой. Решение задачи (1) будем искать методом Фурье.

Составим задачу Штурма–Лиувилля с краевыми условиями второго рода

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, & X'(L) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Спектр задачи (2) имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, & X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right), & k \in \mathbb{N} \\ \lambda_0 = 0, & X_0(x) = 1. \end{cases}$$

Разложим неизвестные функции из системы (1) в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x). \quad (32)$$

с неизвестными коэффициентами $T_k(t)$, A_k . При подстановке (3) в уравнение теплопроводности и начальное условие из задачи (1) получим соотношения

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t) X_k(x) = -a^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) (-\lambda X_k(x)) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) & 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты Фурье приходим к счетному набору задач Коши

$$\begin{cases} T'_0(t) = A_0 \\ T_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T'_k(t) - a^2 \lambda_k T_k(t) + A_k \\ T_k(0) = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$T_0(t) = A_0 t \quad T_k(t) = \frac{A_k}{a^2 \lambda_k} (1 - e^{-a^2 \lambda_k t})$$

В результате

$$v(x, t) = A_0 t + \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k} (1 - e^{-a^2 \lambda_k t}) X_k(x), \quad (34)$$

Возьмем конечный момент времени $t = T$

$$v(x, T) = A_0 T + \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{a^2 \lambda_k} (1 - e^{-a^2 \lambda_k T}) X_k(x) = \varphi(x). \quad (35)$$

Представим $v(x, t)$ как

$$v(x, t) = A_0 t + \tilde{v}(x, t), \quad (36)$$

где

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{a^2 \lambda_k} (1 - e^{-a^2 \lambda_k T}) X_k(x). \quad (37)$$

Разобьем поиск решения задачи (1) $v(x, t)$ на две подзадачи: поиск неизвестной A_0 и поиск решения $\tilde{v}(x, t)$.

Уравнение (6) — ряд Фурье для функции $\varphi(x)$. Коэффициенты формально находятся по формулам Фурье. Тогда

$$A_0 T = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x) dx \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{LT} \int_0^L \varphi(x) dx \quad (38)$$

Получившиеся значение A_0 — точное. Рассмотрим вторую сумму из (6). Применяя к ней оператор $a^2 \frac{d^2}{dx^2}$ и учитывая, что

$$-X''_k(x) = \lambda_k X_k(x),$$

приходим к соотношению

$$-a^2\varphi''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(1 - e^{-a^2\lambda_k T}\right) X_k(x). \quad (39)$$

$$f(x) = \tilde{p}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k T} X_k(x), \quad (40)$$

где $f(x) = -a^2\varphi(x)$, а $\tilde{p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = p(x) - A_0$. Сумму ряда из (11) можно интерпретировать как значение

$$z(x, T) = z(x, T; \tilde{p}), \quad (41)$$

где $z(x, T; \tilde{p})$ получается как решение вспомогательной прямой задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ z_x(0, t) = 0, & z_x(L, t) = 0, \\ z(x, 0) = \tilde{p}(x), \end{cases} \quad (42)$$

где $\tilde{p}(x) = p(x) - A_0$. Действительно, решение задачи (13)

$$z(x, t; \tilde{p}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k T} X_k(x), \quad (43)$$

Тогда

$$\tilde{p}(x) - z(x, T; \tilde{p}) = -a^2\varphi(x). \quad (44)$$

Формула (15) дает ключевое операторное уравнение

$$\tilde{p} - B\tilde{p} = f,$$

где $f(x) = -a^2\varphi''(x)$. Оператор B определяется формулой

$$B\tilde{p} = z(x, T; \tilde{p}), \quad (45)$$

где $z(x, t; \tilde{p})$ — решение вспомогательной задачи (13). В силу экспоненциального убывания решения уравнения теплопроводности (см. ((14))) оператор B из формулы ((16)) будет строго сжимающим $\|B\| < 1$ в стандартной L_2 — норме.

В таком случае решение операторного уравнения ((16)) выражается в ряде Неймана

$$\tilde{p} = f + Bf + B^2f + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f, \quad (46)$$

где $Bf = z(x, T; f)$. Аналогично с задачей для первых краевых условий: $B^k f = z(x, kT; f)$.

Тогда воспользуясь этим найдем восстановленную функцию источника для различного количества итераций:

- $\tilde{p}_0(x) = f(x) = -a^2 \varphi''(x)$, (нулевая итерация)
- $\tilde{p}_1(x) = f(x) + z(x, T; f)$, (первая итерация)
- $\tilde{p}_2(x) = f(x) + z(x, T; f) + z(x, 2T; f)$, (вторая итерация)

и, вообще,

$$\bullet \tilde{p} = \sum_{k=1}^{\infty} z(x, kT; f) = f + z(x, T; f) + z(x, 2T; f) + \dots$$

Здесь $z(x, t)$ — вспомогательная прямая задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ z(0, t) = 0, & z(L, t) = 0, \\ z(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (47)$$

где

$$f(x) = -a^2 \varphi''(x). \quad (48)$$

Возвращаясь к (7) получаем решение уравнения $v(x, t)$ с помощью восстановленной функции источника и нулевого коэффициента фурье.

$$v(x, t) = A_0 t + \tilde{v}(x, t),$$

§ 5. Краткая схема алгоритма

Итак, рассматриваем редуцированную обратную задачу

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ v(0, t) = 0, & v(L, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, & v(x, T) = \varphi(x), \end{cases} \quad (49)$$

где функция $\varphi(x)$ задается. По ней восстанавливается функция $p(x)$, а затем $v(x, t)$.

Краткий алгоритм решения обратной задачи (??) выглядит так.

1. На отрезке $[0, L]$ вычисляется функция $f(x) = -a^2 \varphi''(x)$.
2. Составляется вспомогательная прямая задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ z(0, t) = 0, & z(L, t) = 0, \\ z(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (50)$$

где

$$f(x) = -a^2 \varphi''(x). \quad (51)$$

3. Ищется приближенное решение

$$\tilde{p}(x) = f(x) + z(x, T) + z(x, 2T) + \dots + z(x, nT) = f(x) + \sum_{k=1}^n z(x, kT; f). \quad (52)$$

4. Составляется задача

$$\begin{cases} \tilde{v}_t = a^2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{p}(x), & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ \tilde{v}(0, t) = 0, & \tilde{v}(L, t) = 0, \\ \tilde{v}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Решением задачи (??) является восстановленное решение задачи (??) по восстановленной функции (??).

§ 6. Программная реализация алгоритма

Для реализации алгоритма необходимо вычислять вторую разностную производную для формулы $f(x) = -a^2 \varphi''(x)$. При первой попытке реализации выбрана разностная производная по 3 узлам второго порядка точности

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + O(h^2), \quad (54)$$

но ее оказалось недостаточно, так как возникала сильная погрешность при восстановлении функции источника на краях стержня. Поэтому воспользуемся второй разностной производной по 5 узлам четвертого порядка точности

$$\varphi''(x) = \frac{-\varphi(x+2h) + 16\varphi(x+h) - 30\varphi(x) + 16\varphi(x-h) - \varphi(x-2h)}{12h^2} + O(h^4). \quad (55)$$

Для вычисления значения $\varphi''(x)$ на краях отрезка используются нечетные продолжения функции $\varphi(x)$ по схеме

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq L \\ -\varphi(-x), & x < 0 \\ -\varphi(2L-x), & x > L \end{cases} \quad (56)$$

Также для программной реализации алгоритма необходимо численно решать прямую задачу (??). Запишем ее через неявную разностную схему

$$\begin{cases} \frac{z_i^{j+1} - z_i^j}{\tau} = a^2 \frac{z_{i+1}^{j+1} - 2z_i^{j+1} + z_{i-1}^{j+1}}{h^2}, & 0 \leq j\tau \leq T, \quad 0 \leq ih \leq L, \\ z_i^0 = f(x_i), \\ z_0^{n+1} = 0, \\ z_N^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (57)$$

которая решалась классическим методом прогонки (см. [?]). С помощью решений задачи (??) в n различных моментов времени восстанавливаем функцию источников (??).

С помощью полученного приближенного решения для функции $\tilde{p}(x)$ составим неявную разностную схему для задачи (??)

$$\begin{cases} \frac{\tilde{v}_i^{j+1} - \tilde{v}_i^j}{\tau} = a^2 \frac{\tilde{v}_{i+1}^{j+1} - 2\tilde{v}_i^{j+1} + \tilde{v}_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \tilde{p}(x_i), & 0 \leq j\tau \leq T, \quad 0 \leq ih \leq L, \\ \tilde{v}_i^0 = 0, \\ \tilde{v}_0^{n+1} = 0, \\ \tilde{v}_N^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (58)$$

Найденное восстановленное решение задачи (??) в финальный момент с точностью до какой то $\varepsilon > 0$ в каждой точке разностной схемы совпадает с заданной изначально функцией $\varphi(x)$.

Реализация численных методов производилась на языке C#. Была написана программа Solver. Она состояла из модулей в которых

- численно вычислялась вторая производная $\varphi''(x)$ по 5 узлам (??) с нечетными продолжениями (??);
- находилось решение задачи (??) n раз методом прогонки, для восстановления функции $\tilde{p}(x)$;
- с помощью восстановленной функции $\tilde{p}(x)$ находилось методом прогонки восстановленное решение задачи (??);
- используя значение восстановленного решения $\tilde{u}(x, t)$ в финальный момент времени и заданную изначально функцию $\varphi(x)$ находится погрешность ε восстановления решения $u(x, t)$;
- с помощью вспомогательной библиотеки DataSet Viewer производилась визуализация полученных функций и решений.

§ 7. Примеры расчетов

В качестве стандартного шаблона рассматривается основная обратная задача (??), параметры которой вместе с задаваемой функцией $\varphi(x)$ в каждом примере выбираются отдельно.

Пример №1.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 10, \quad T = 6.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = x^5(L - x)^3, \quad 0 \leq x \leq L = 10. \quad (59)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{150}, \quad \tau = \frac{1}{150}.$$

График функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 10$, дан на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. Здесь видно, как с приближением времени к финальному, график восстановленной функции все сильнее напоминает график для $\varphi(x)$. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

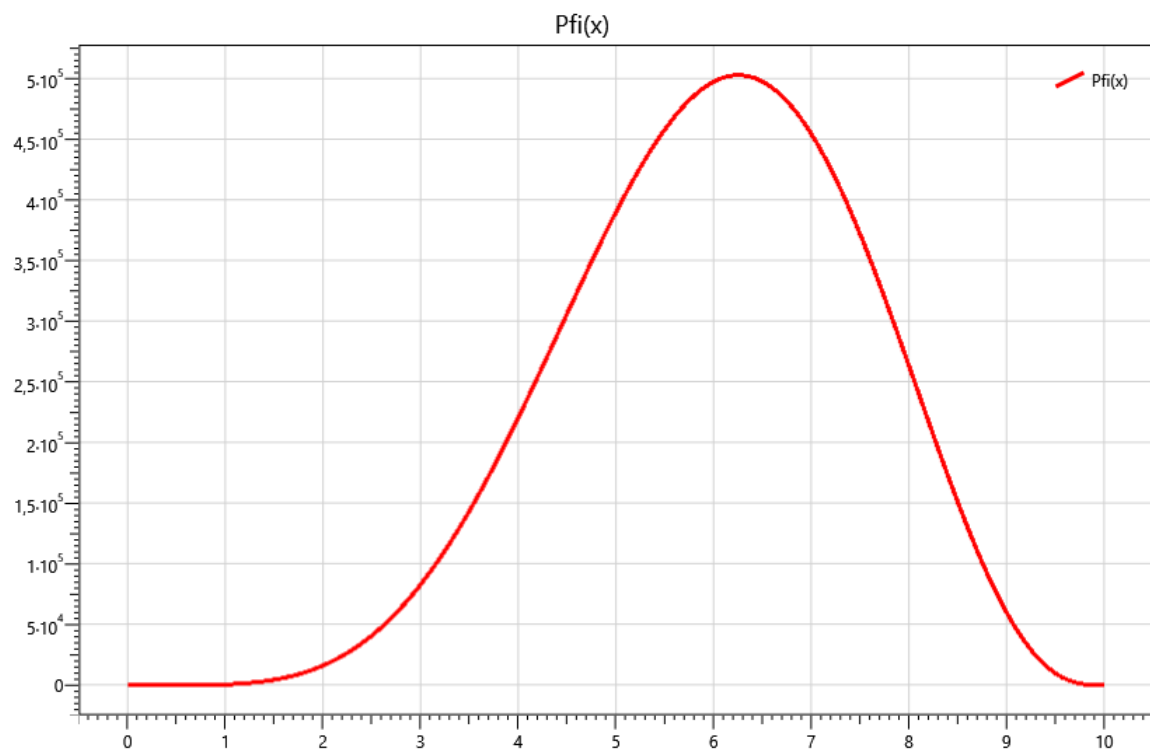


Рис. 1. Финальное условие

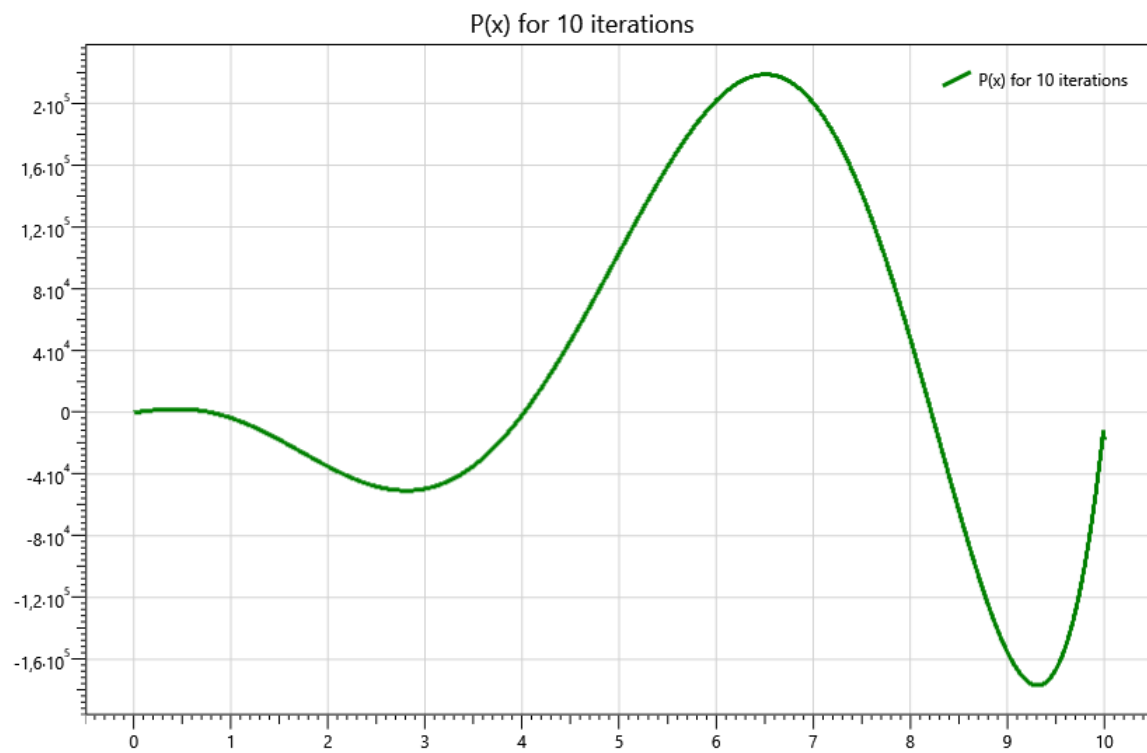


Рис. 2. Восстановленная функция источников

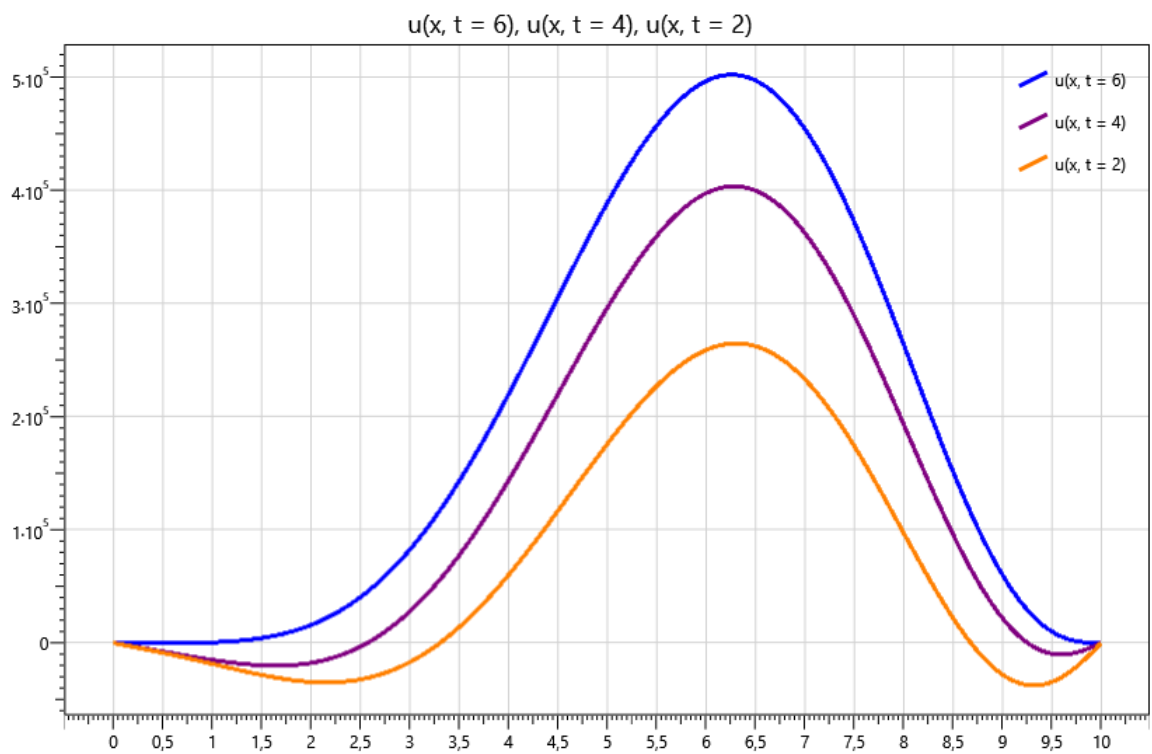


Рис. 3. Значение температуры в различные моменты времени

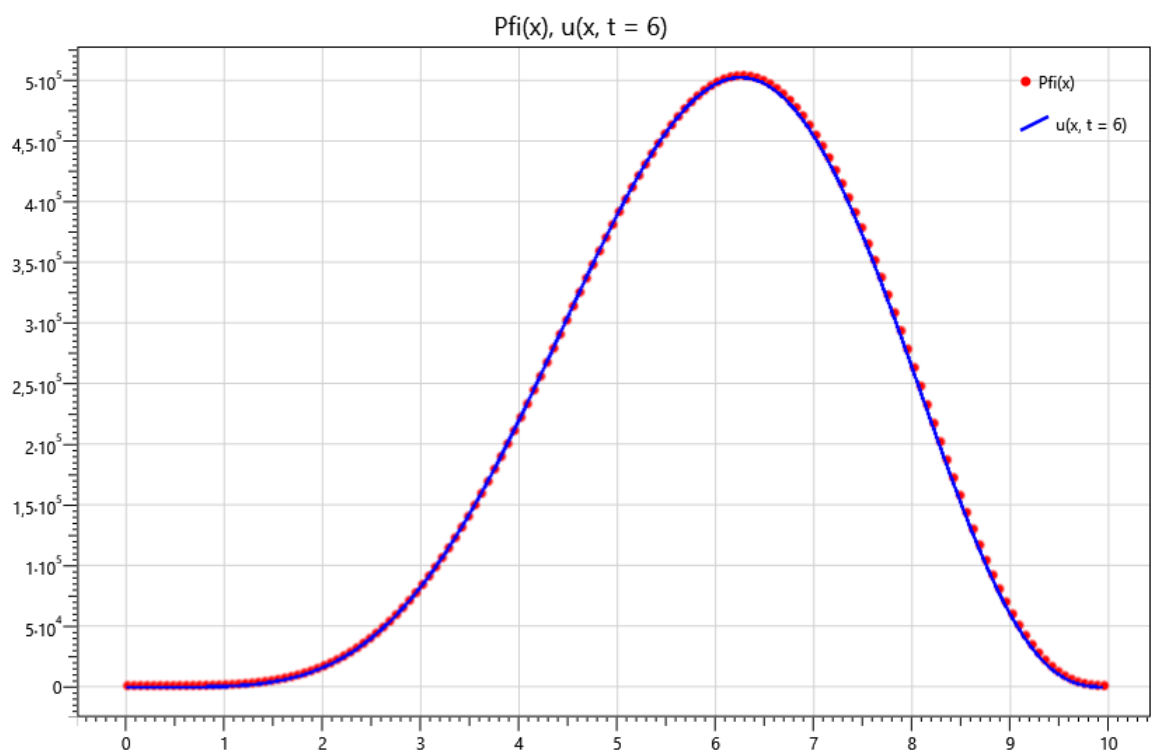


Рис. 4. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №2.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 6, \quad T = 3.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = \sin(\pi x) + 0,2 \sin(10\pi x), \quad 0 \leq x \leq L = 6. \quad (60)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{1000}, \quad \tau = \frac{1}{1000}.$$

График функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 7$, дан на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. В этом примере происходит быстрое приближение графика функции $\tilde{u}(x, t)$ к графику $\varphi(x)$ в начальные, близкие к нулю моменты времени. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

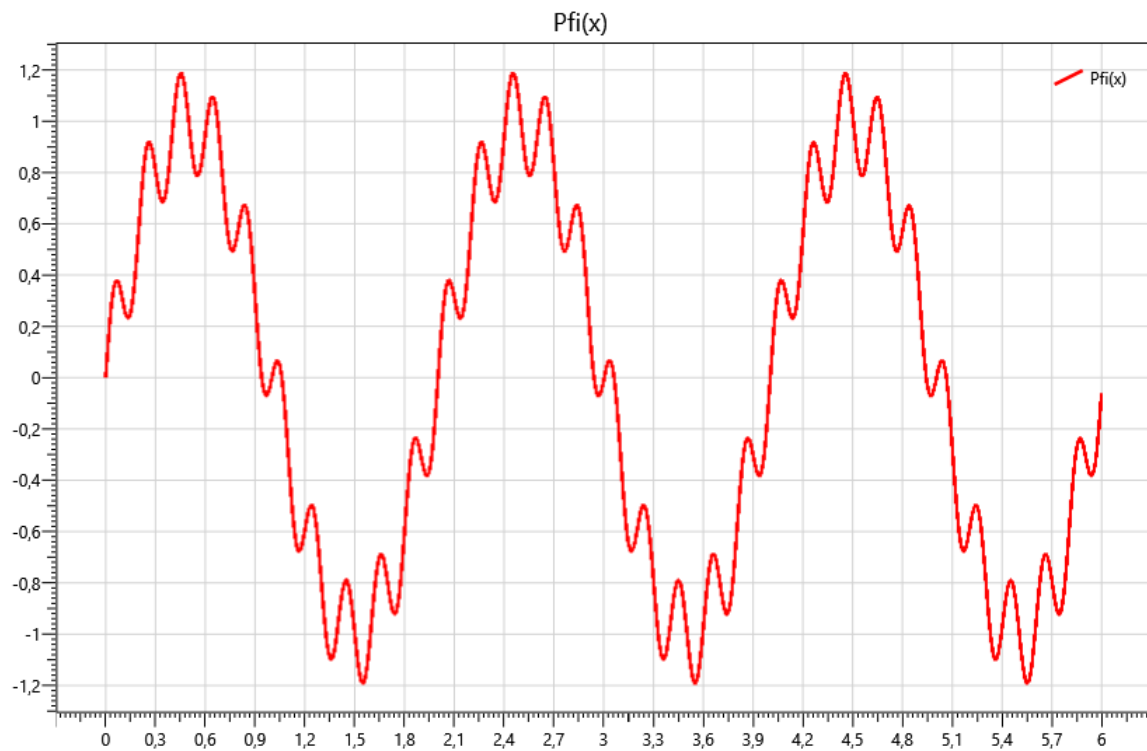


Рис. 5. Финальное условие

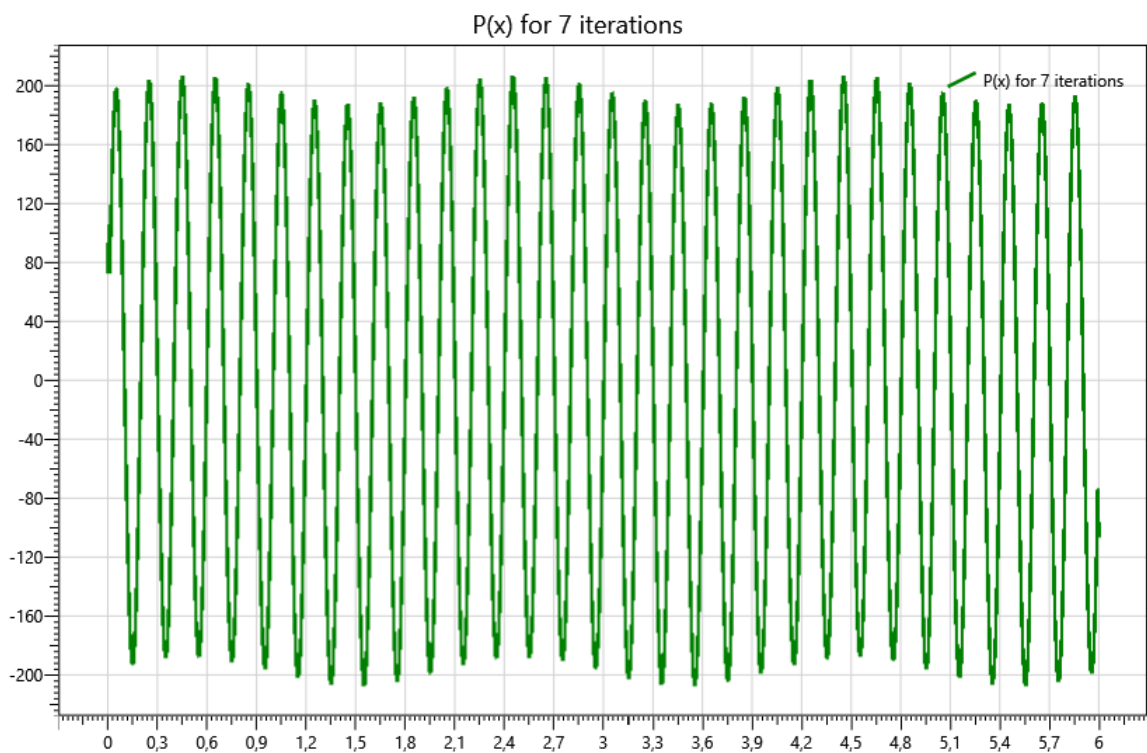


Рис. 6. Восстановленная функция источников

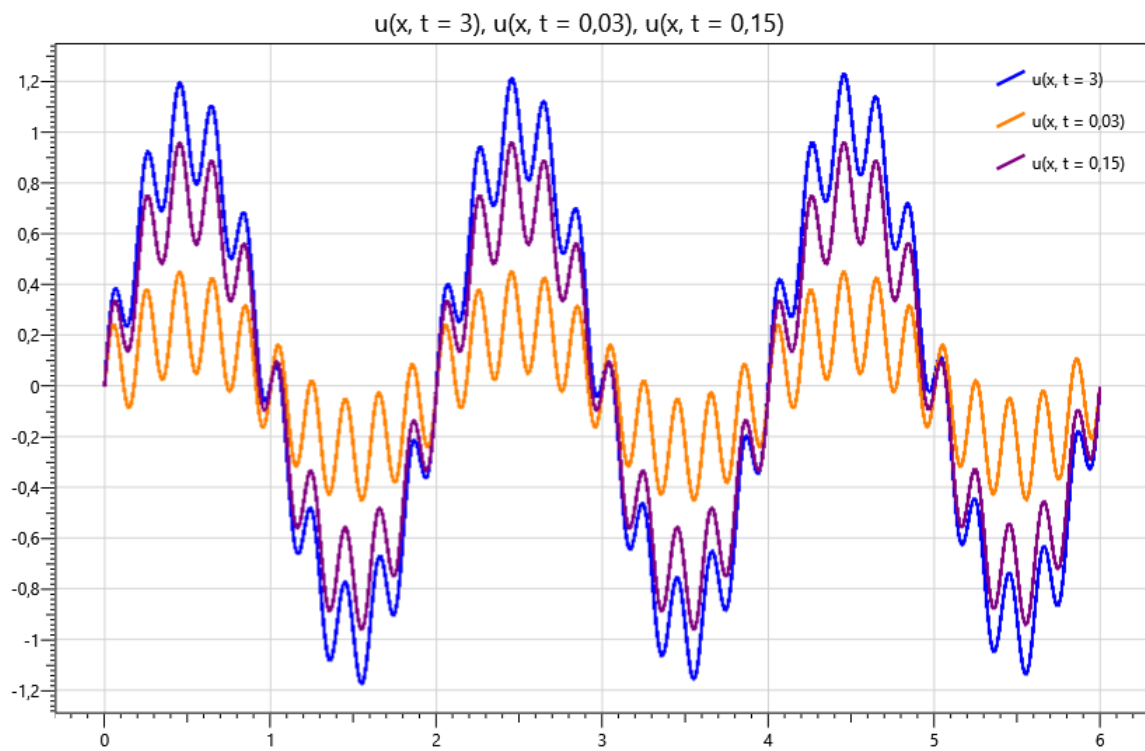


Рис. 7. Значение температуры в различные моменты времени

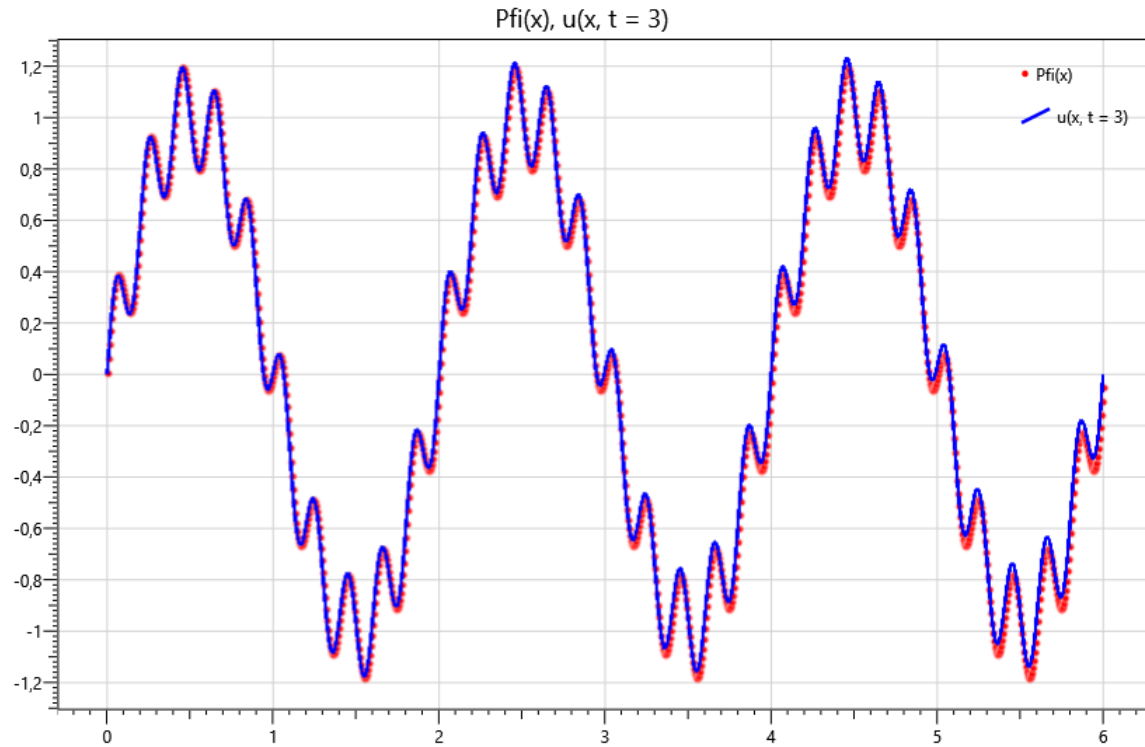


Рис. 8. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №3.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 10, \quad T = 3.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = (L - x)^2 \sin(x) - \frac{(L - x)^2}{100} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L = 10. \quad (61)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{150}, \quad \tau = \frac{1}{150}.$$

График функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 10$, дан на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

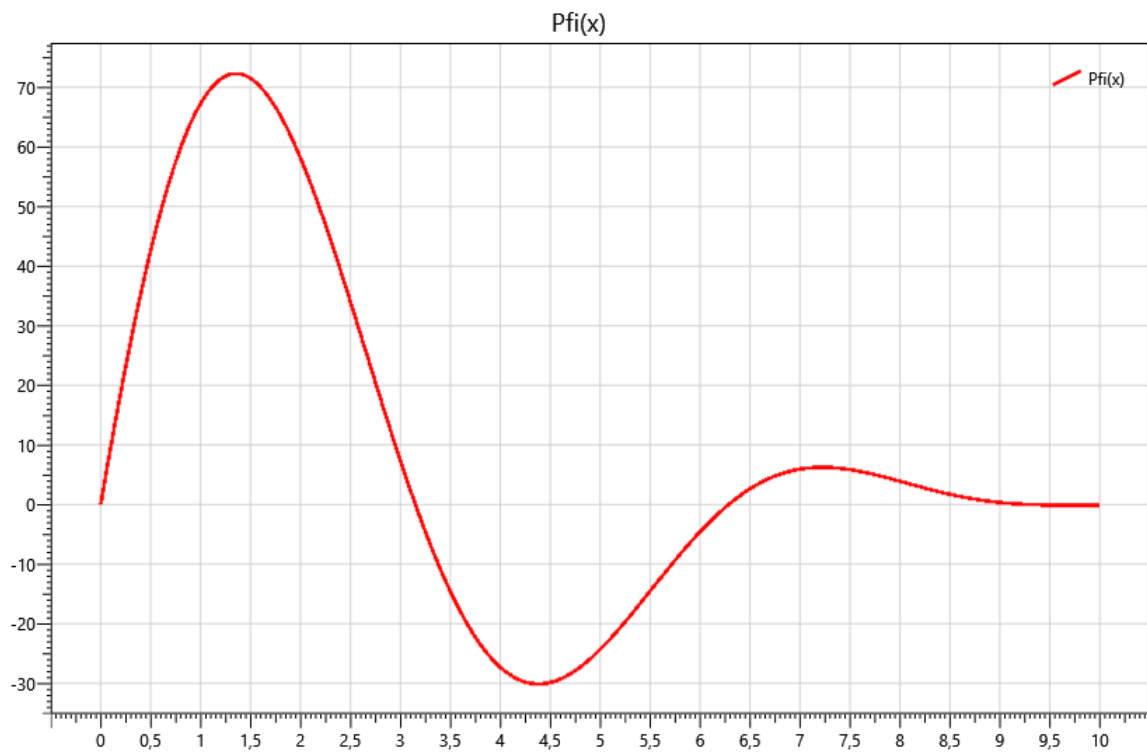


Рис. 9. Финальное условие

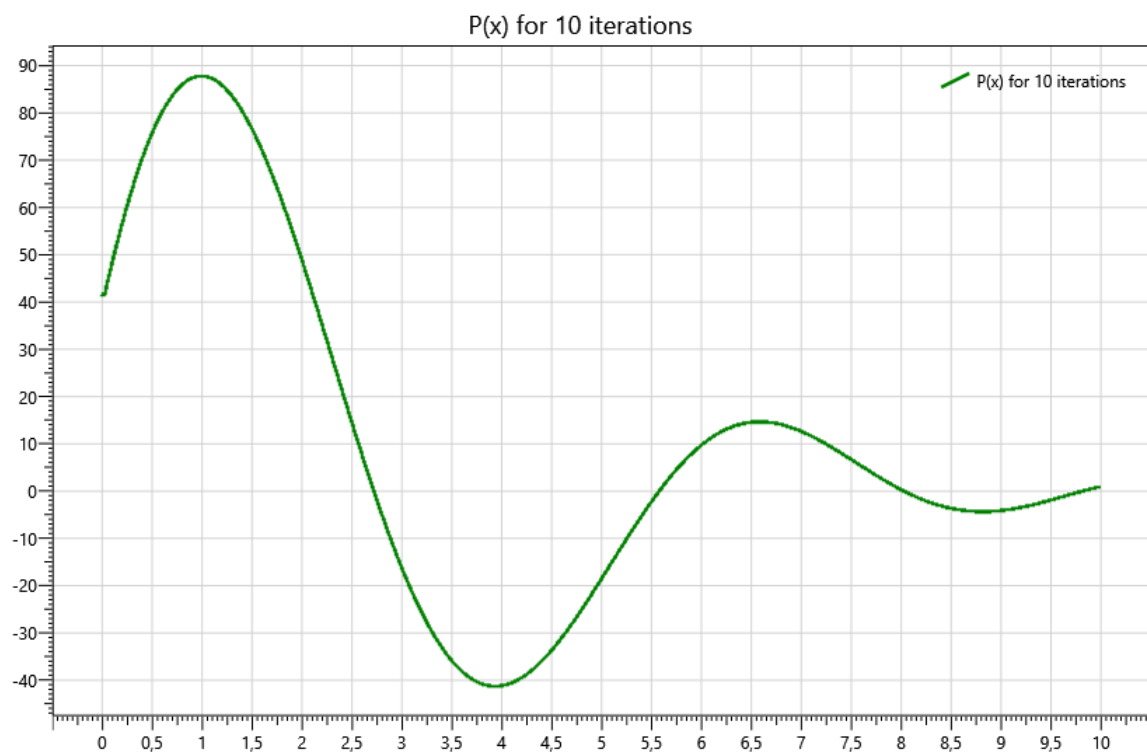


Рис. 10. Восстановленная функция источников

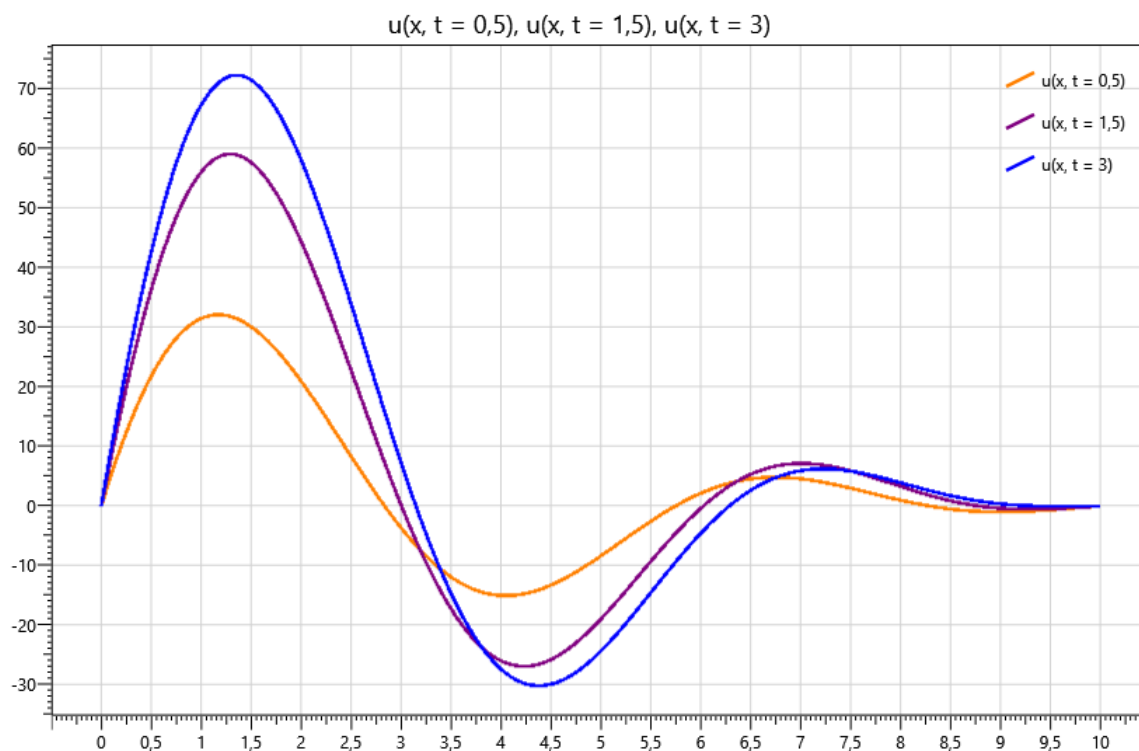


Рис. 11. Значение температуры в различные моменты времени

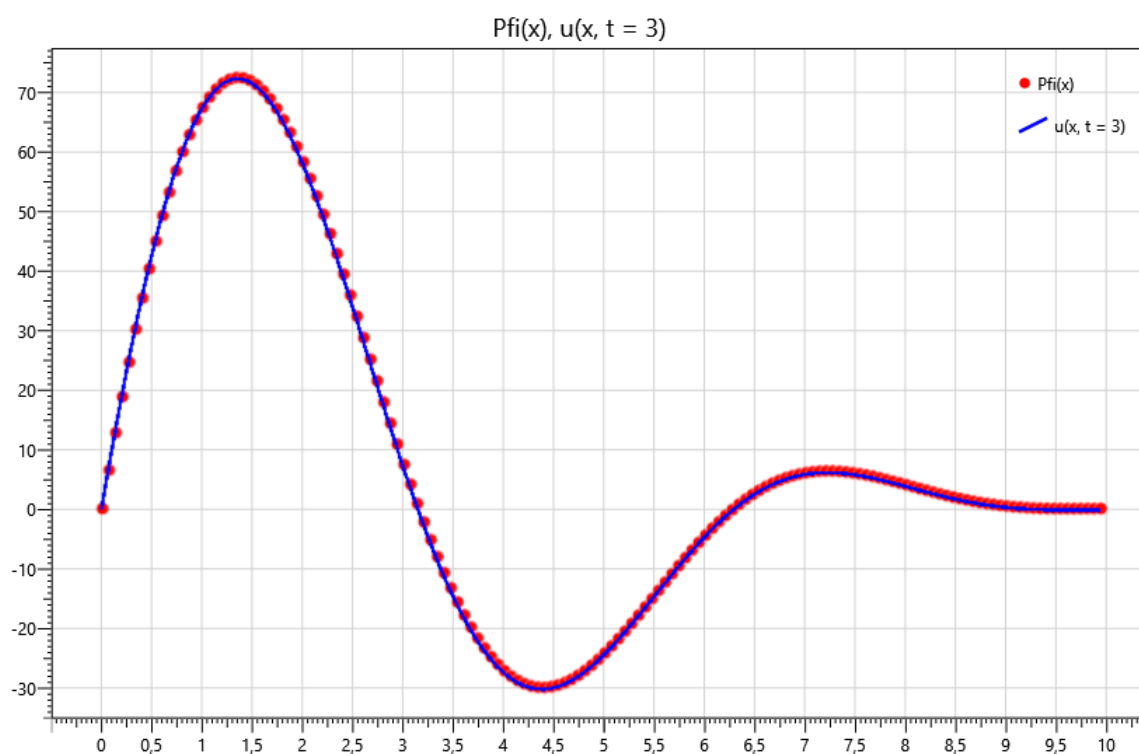


Рис. 12. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №4.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 10, \quad T = 4.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = 15x^2(L-x)^2e^{-3(x-4)^2} - 5x^2(L-x)^2e^{-3(x-8)^2}, \quad 0 \leq x \leq L = 10. \quad (62)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{250}, \quad \tau = \frac{1}{250}.$$

График функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 10$, дан на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. Посмотрев на него, можно увидеть, что в начальные моменты времени восстановленное решение больше напоминает восстановленную функцию источника, но с течением времени, решение все больше напоминает функцию $\varphi(x)$, которая является решением задачи в конечный момент времени. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

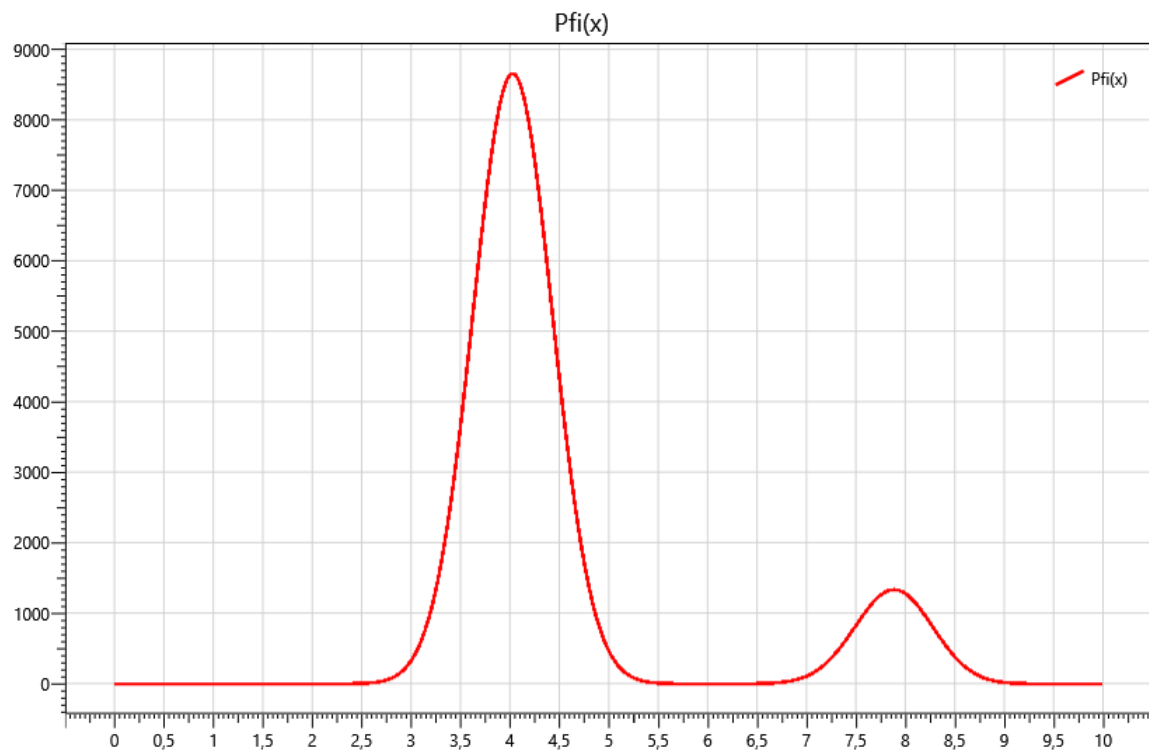


РИС. 13. Финальное условие

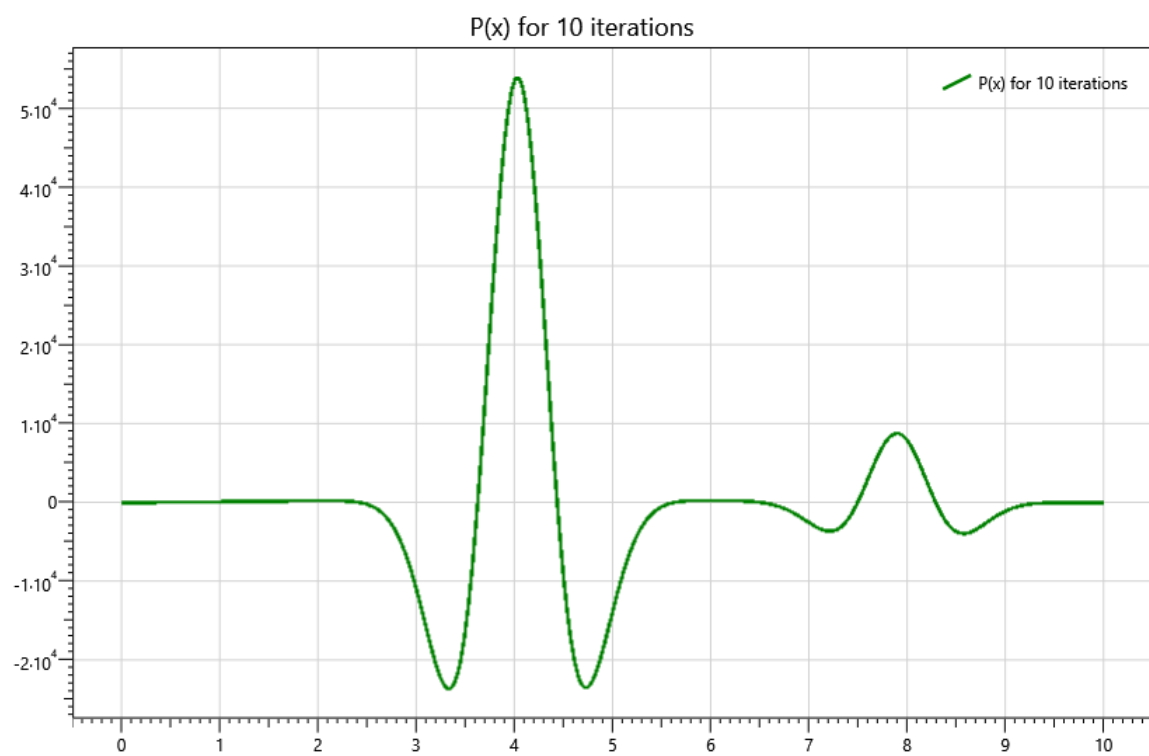


РИС. 14. Восстановленная функция источников

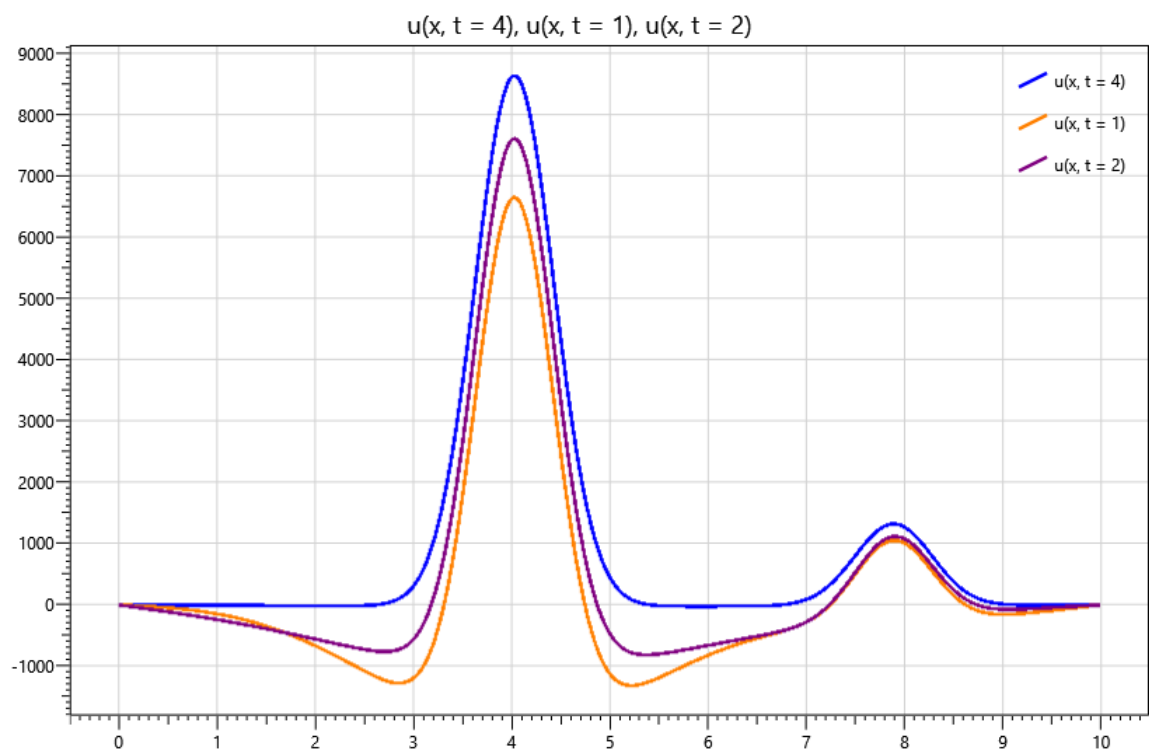


Рис. 15. Значение температуры в различные моменты времени

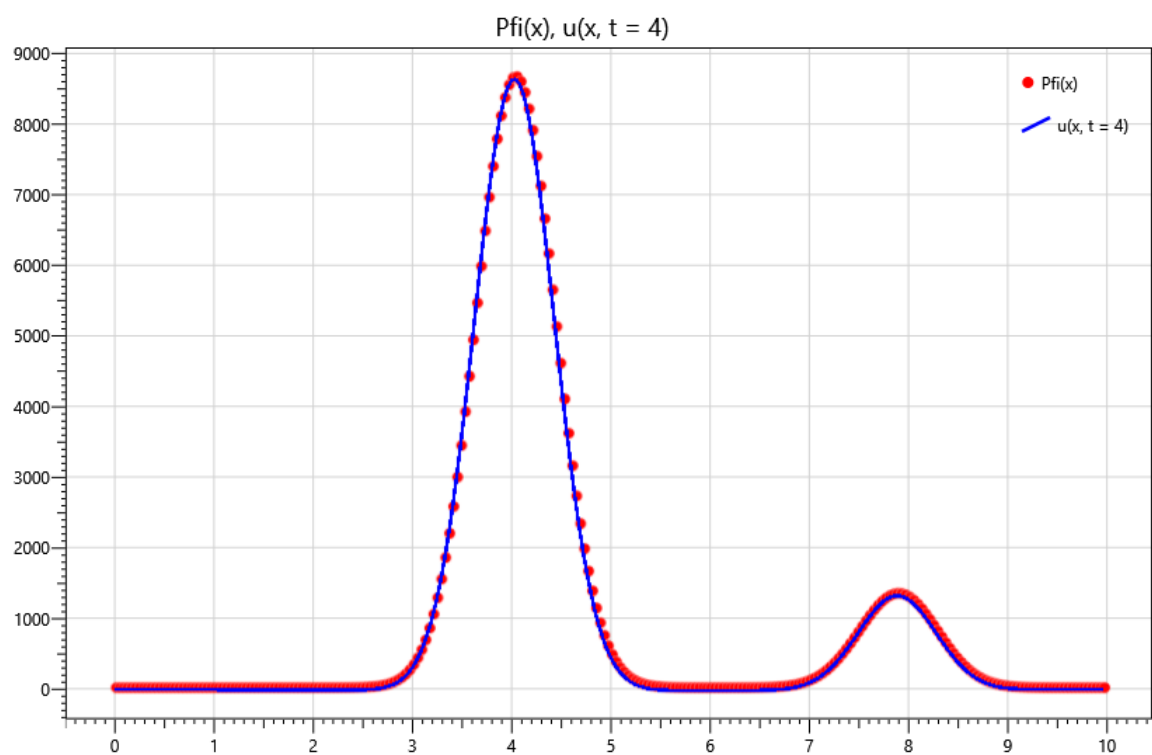


Рис. 16. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №5.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 16, \quad T = 6.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = 15x^2(L-x)^2e^{-3(x-8)^2} - 5x^2(L-x)^2e^{-3(x-12)^2} - 10x^2(L-x)^2e^{-3(x-4)^2}, \quad 0 \leq x \leq L = 16. \quad (63)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{300}, \quad \tau = \frac{1}{300}.$$

График функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 15$, дан на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

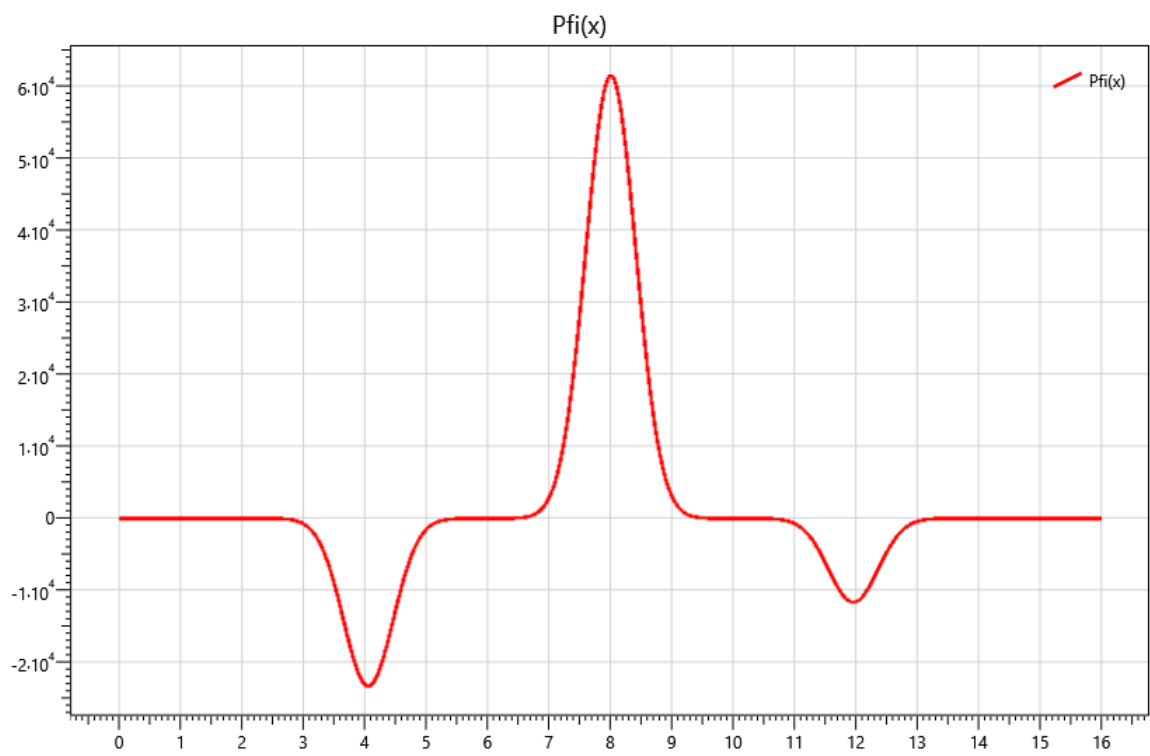


Рис. 17. Финальное условие

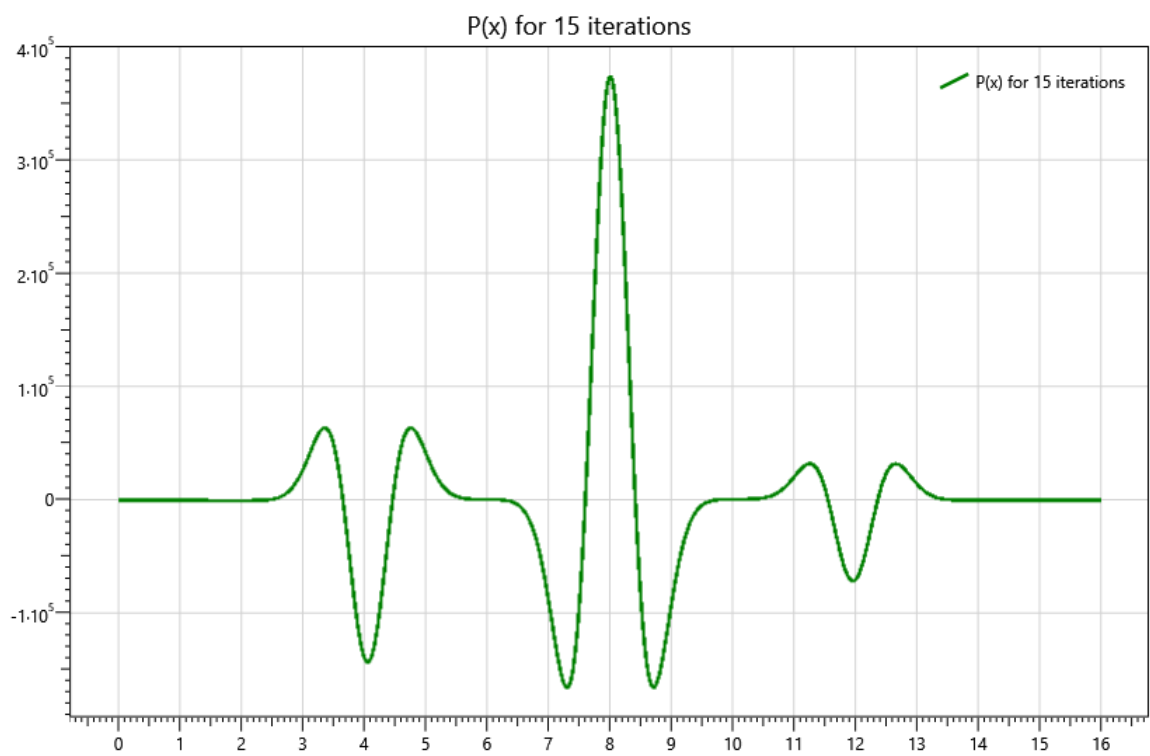


Рис. 18. Восстановленная функция источников

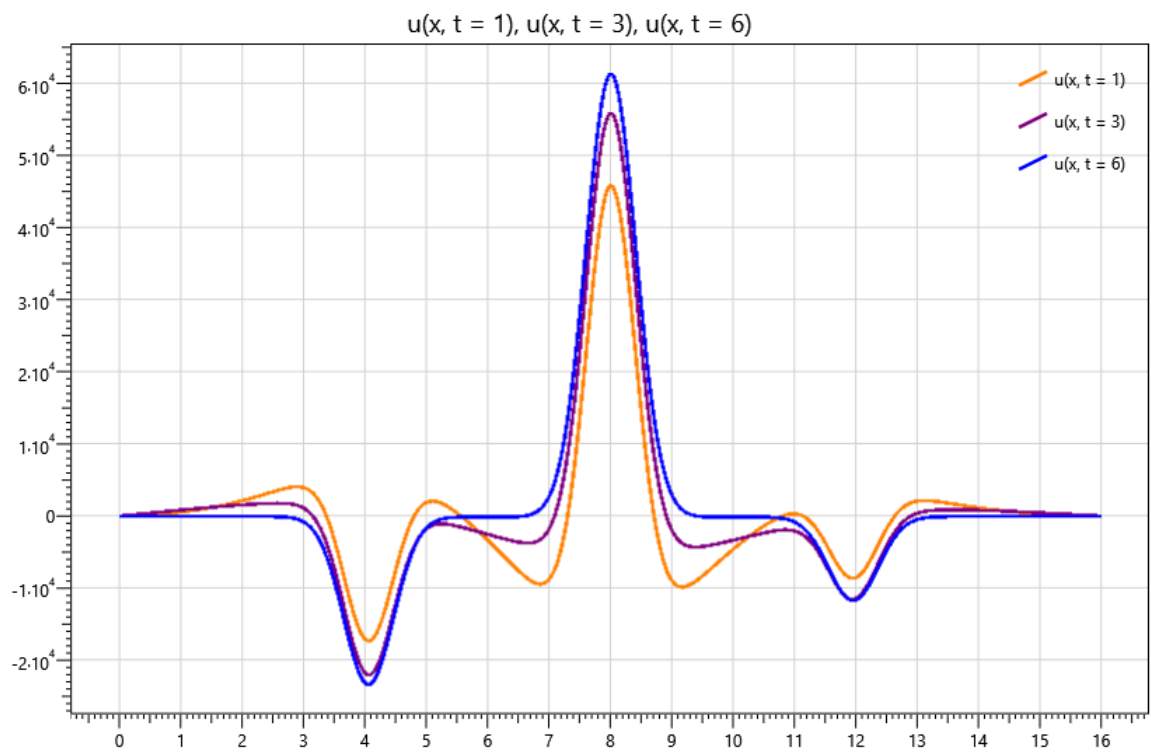


Рис. 19. Значение температуры в различные моменты времени

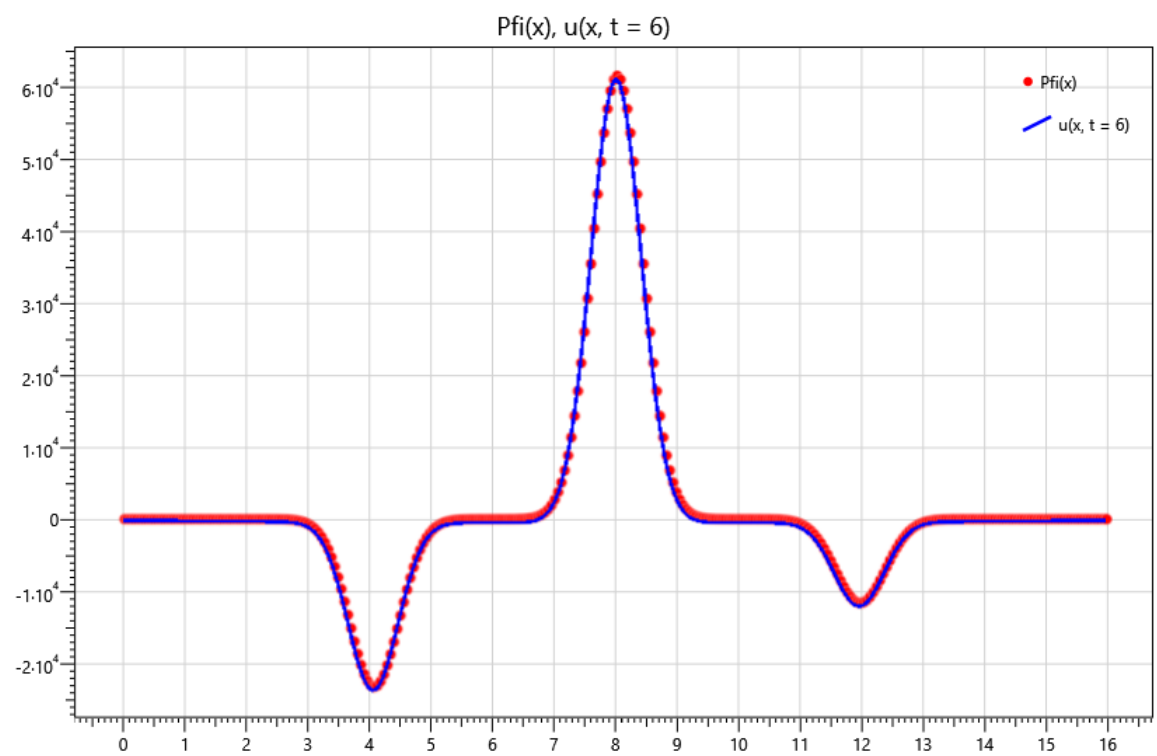


Рис. 20. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №6.

Не вполне корректный пример (не выполняются условия гладкости), но несмотря на это с небольшими искажениями в точках разрыва происходит восстановление нужных функций.

Пусть

$$\alpha^2 = 1, \quad L = 1, \quad T = 3.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & x \in \left(\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right) \\ 0, & x \in \left[0, \frac{L}{4}\right] \cap \left[\frac{3L}{4}, L\right] \end{cases} \quad (64)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{1000}, \quad \tau = \frac{1}{1000}.$$

Приближенная часть (около точки $x = 0.25$ и около точки $x = 0.75$) графика функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 10$, дана на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. Можно заметить, что при восстановлении в точках, где температура резко меняет свое значение, график восстановленного решения начинает колебаться, но с куда меньшими амплитудами, чем восстановленная функция источника. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

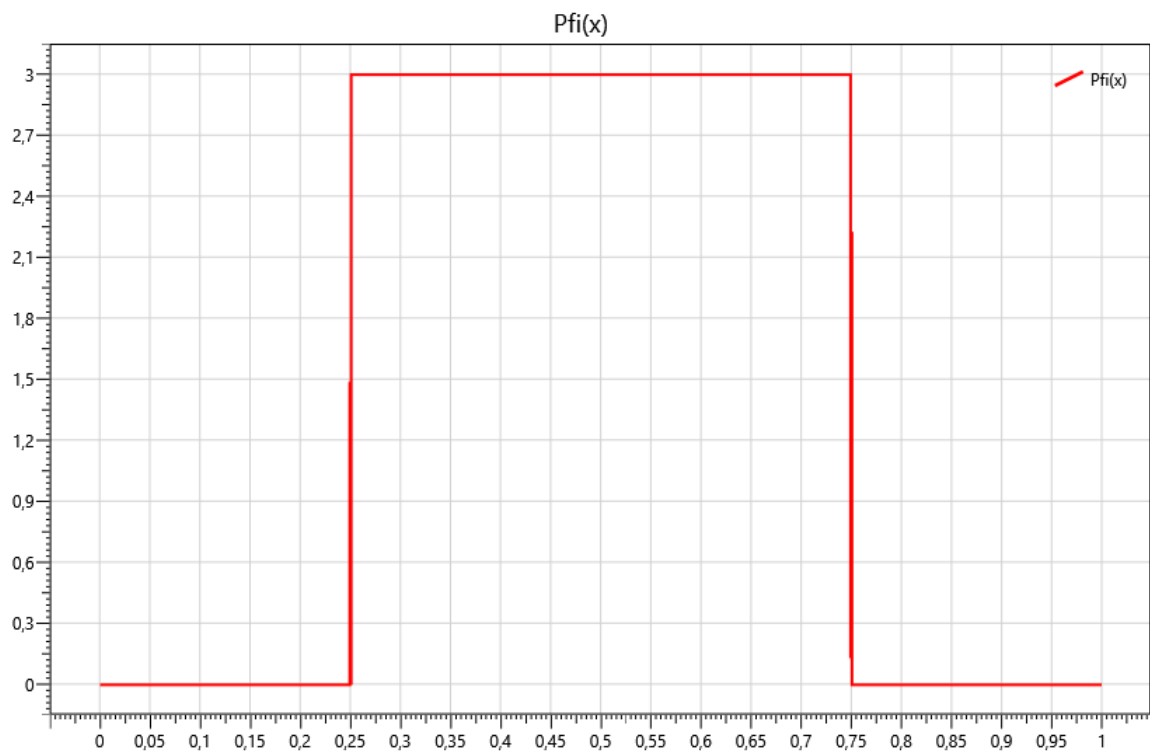


Рис. 21. Финальное условие

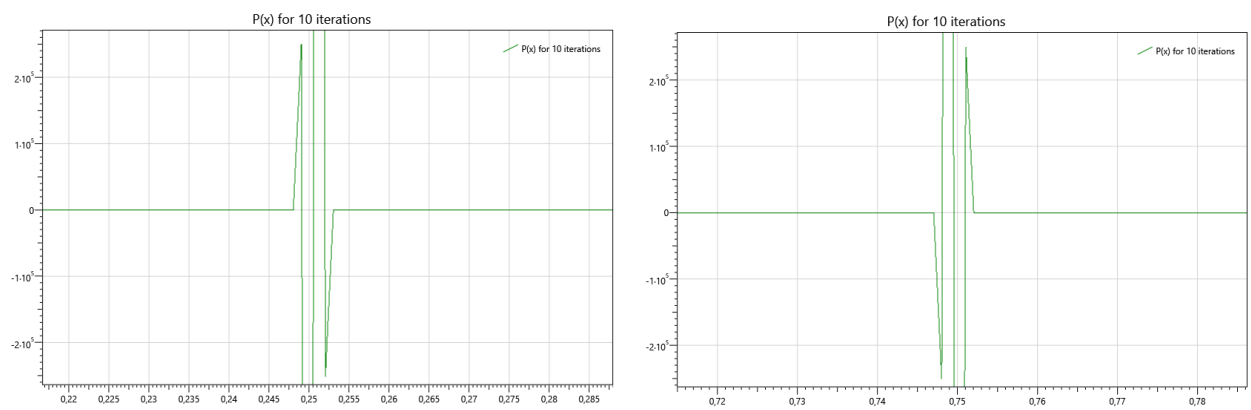


Рис. 22. Ключевые фрагменты восстановленной функции источников

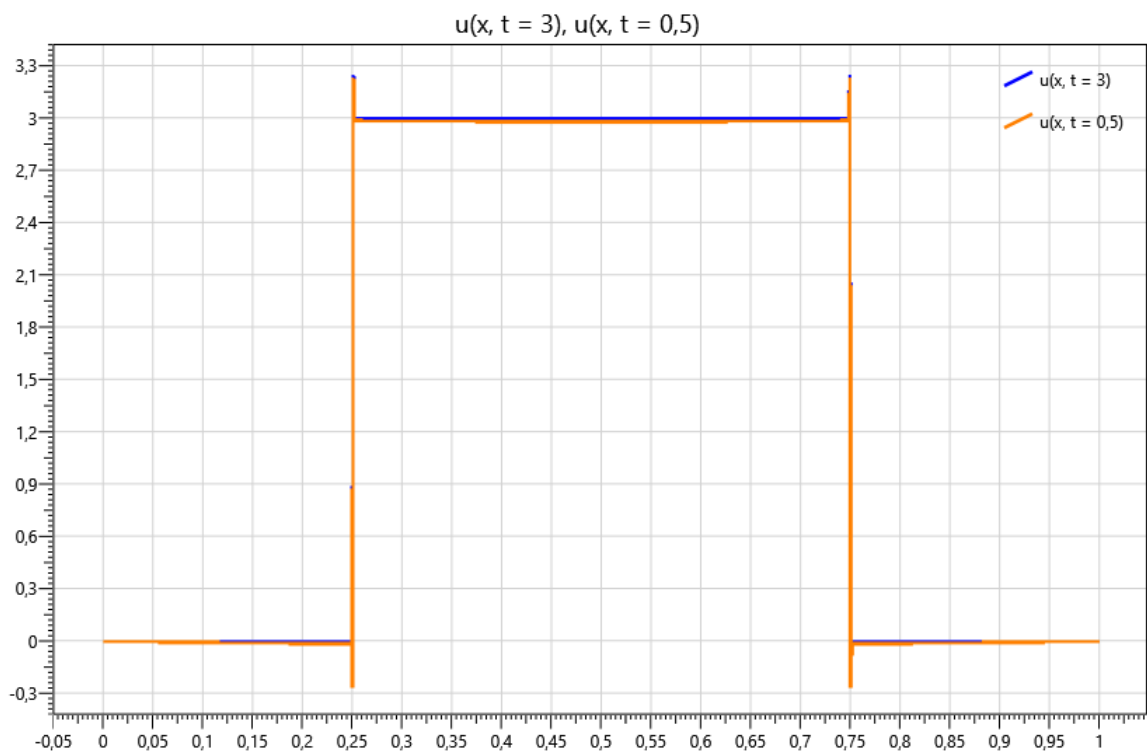


Рис. 23. Значение температуры в различные моменты времени

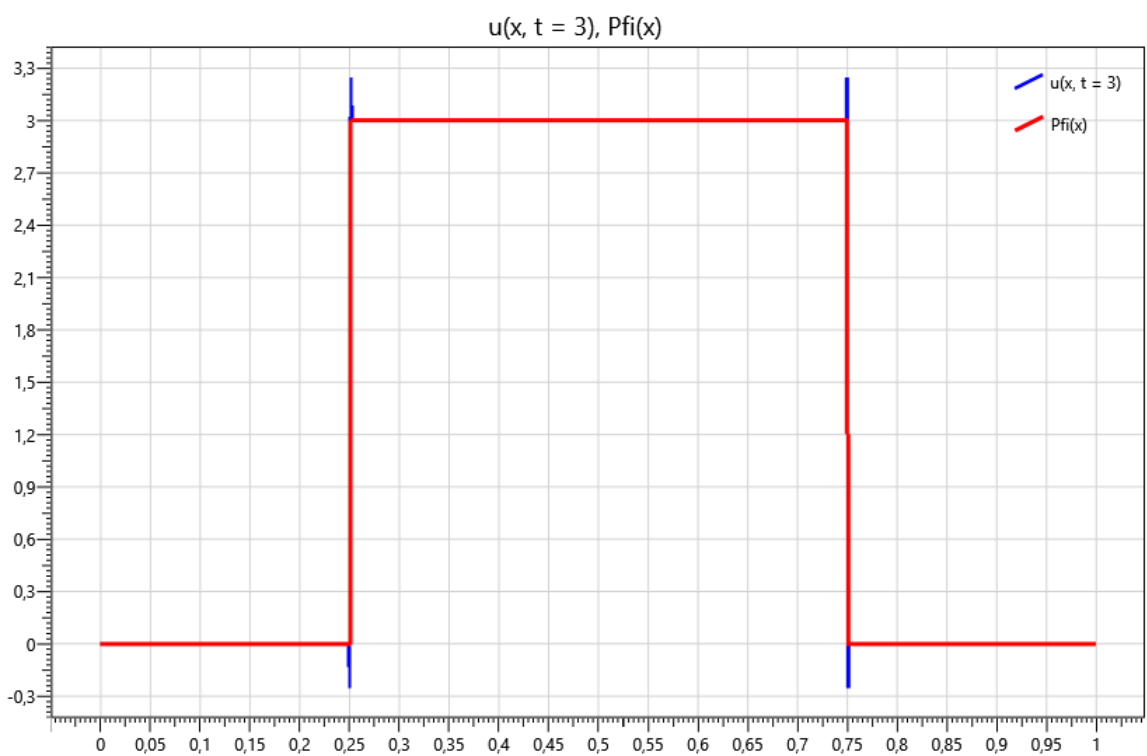


Рис. 24. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Пример №7.

Не вполне корректный пример (не выполняются условия гладкости), но несмотря на это с небольшими искажениями в точках разрыва происходит восстановление нужных функций.

Пусть

$$a^2 = 1, \quad L = 10, \quad T = 2.$$

Выберем финальную функцию

$$\varphi(x) = 2e^{-2|x-2|} - 6e^{-2|x-6|}, \quad 0 \leq x \leq L = 10. \quad (65)$$

График функции (??) представлен на рис. ??. Для работы программы были выбраны шаги по сетке

$$h = \frac{1}{250}, \quad \tau = \frac{1}{250}.$$

Приближенная часть (около точки $x = 2$ и около точки $x = 6$) графика функции $\tilde{p}(x)$, восстановленной согласно алгоритму, при числе итераций для восстановления $n = 10$, дана на рис. ??. Восстановленное решение задачи (??) в различные моменты времени, при $\varphi(x)$ равном (??) и восстановленном $\tilde{p}(x)$ дано на рис. ??. На рис. ?? приведено сравнение изначально заданной финальной функции $\varphi(x)$ и восстановленного решения $\tilde{v}(x, t)$ в финальный момент времени.

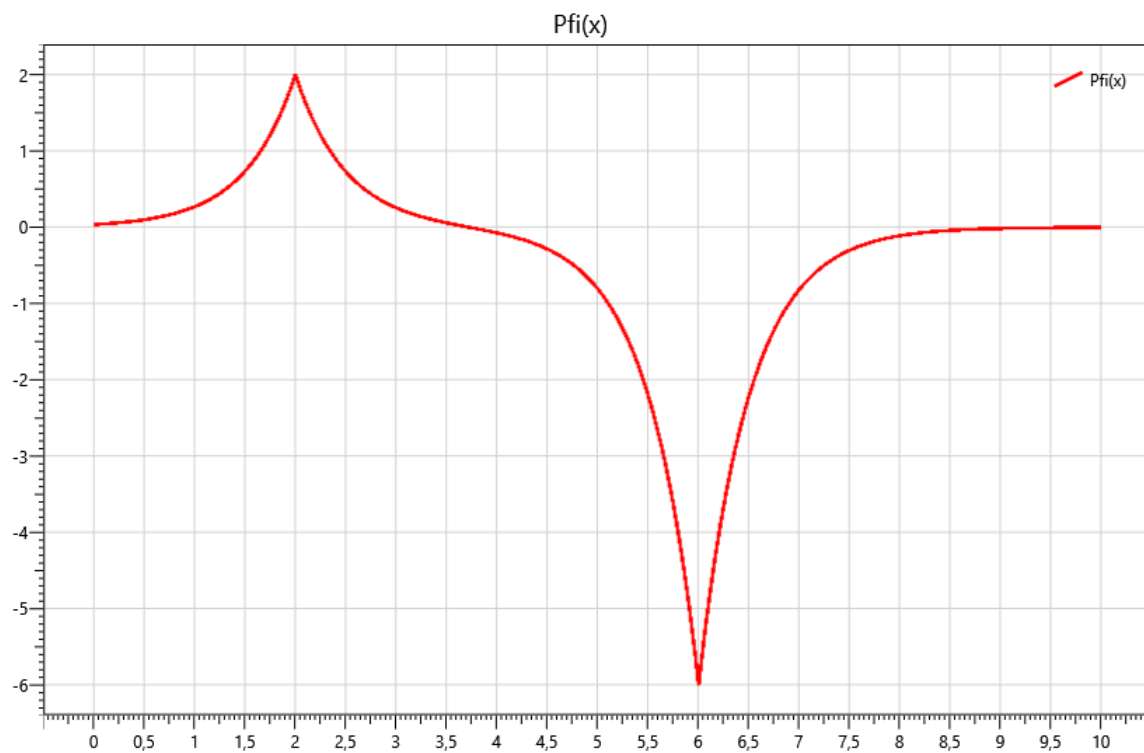


Рис. 25. Финальное условие

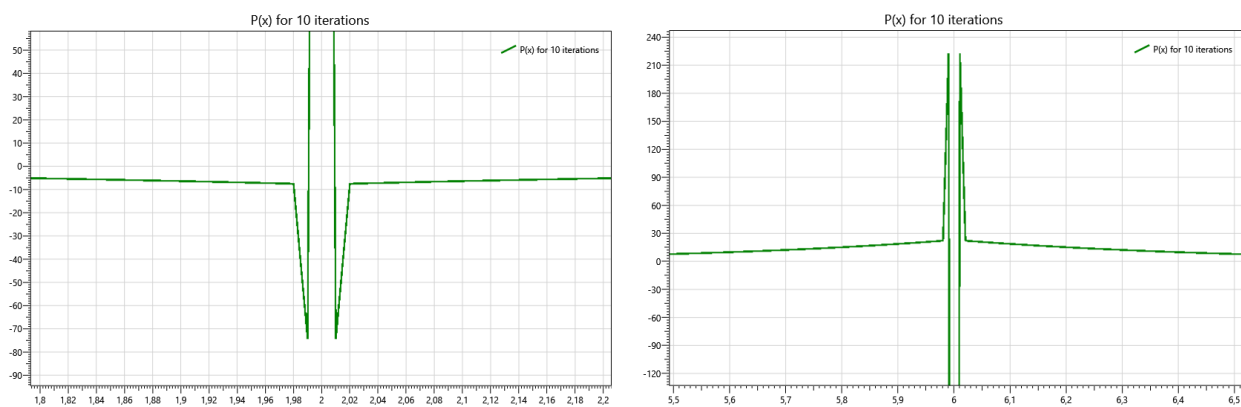


Рис. 26. Ключевые фрагменты восстановленной функции источников

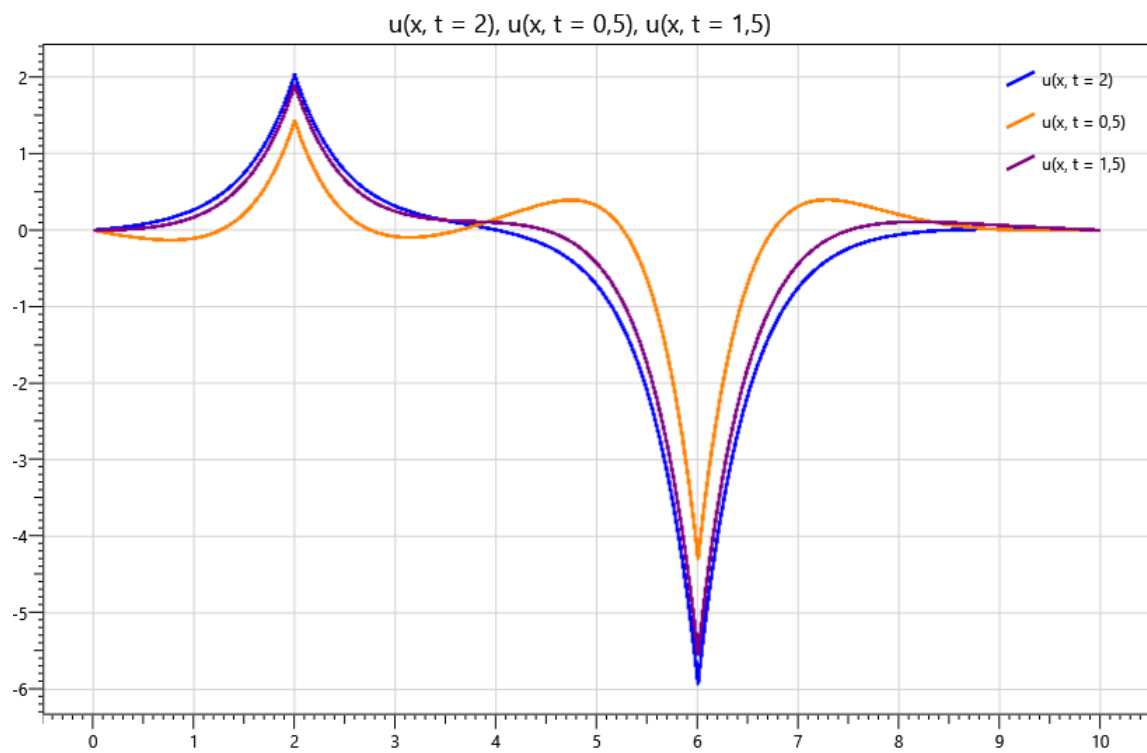


Рис. 27. Значение температуры в различные моменты времени

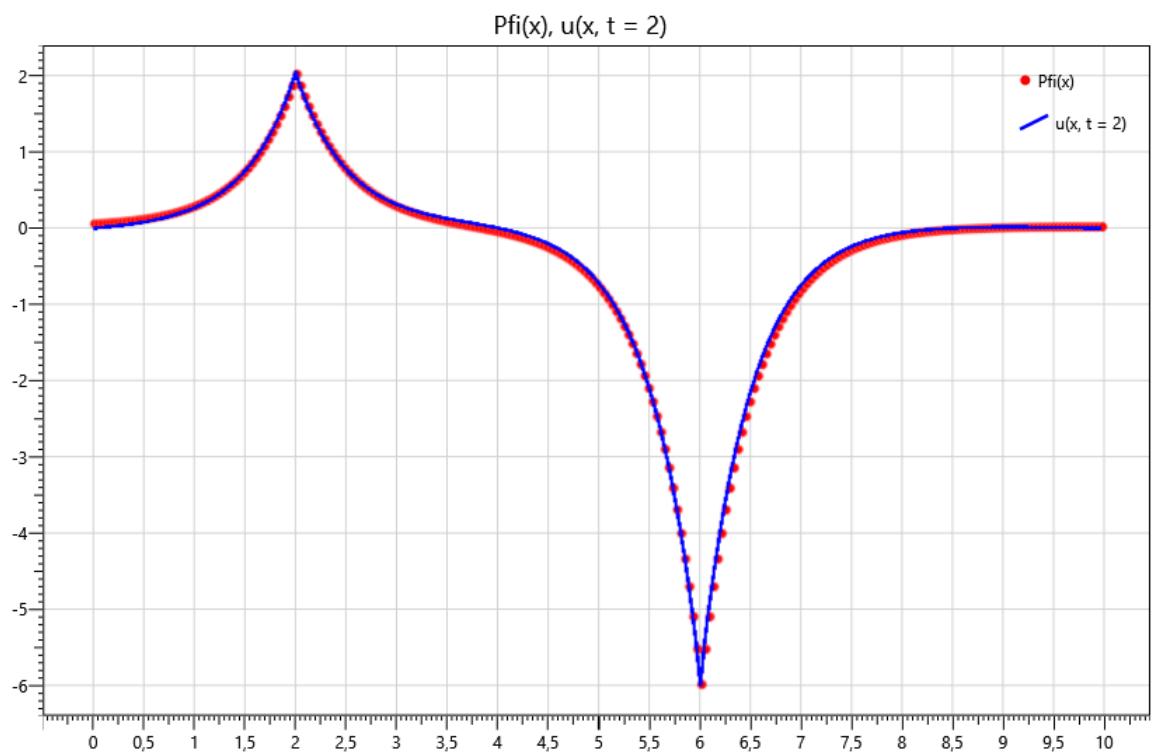


Рис. 28. Значение температуры в финальный момент времени вместе с заданным финальным условием

Заключение

В настоящей работе рассмотрен вопрос о конструктивном нахождении решения обратной задачи с финальным переопределением для однородного уравнения теплопроводности.

1. Проведён теоретический анализ поставленной задачи. Установлена ее однозначная разрешимость и исследован вопрос о ее корректности.
2. Составлен формальный теоретический алгоритм решения поставленной обратной задачи; алгоритм основан на методе итераций.
3. Написаны отдельные блоки для компьютерного вычисления основных необходимых элементов алгоритма.
4. Разработана общая компьютерная программа, реализующая теоретический алгоритм.
5. Проведена большая выборка вычислительных экспериментов, подтвердившая высокую эффективность и устойчивость восстановления решений при соответствующем выборе достаточно гладких данных задачи.

В результате проделанной работы все поставленные цели были достигнуты и исследование можно считать завершённым.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1977.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел — 1964.
3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — Учебное пособие. — М. : Изд-во МГУ, 1994.
5. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol.231). — Marcel Dekker, Inc New York, 2000. — P. 724.
6. Rundel W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data// Applicable Analysis. 1980. Vol. 10. №3. P. 231-242.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М. : Наука, 1989.