Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Кузнецов Дмитрий Константинович

Теоретическое и численное исследование обратной задачи теплопроводности с финальным переопределением для краевых условий второго рода.

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
И.В. Тихонов

Москва, 2017

Оглавление

§ 1. Точная теоретическая постановка задачи

Поставим общую краевую задачу теплпроводности с классическими краевыми условиями второго рода

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + p(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T, \\ u_x(0,t) = \mu_0(t), \qquad u_x(L,t) = \mu_1(t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Функции $\mu_0(t), \mu_1(t), u_0(x)$ предполагаются заданными, правая часть $p(x)$ — неизвестной. Для восстановления функции источника $p(x)$ добавим специальное условие — финальное переопределение

$$u(x,T) = u_1(x), \qquad 0 < x < L. \tag{2}$$

В итоге полная постановка рассматриваемой обратной задачи для нахождения неизвестных функций $u(x,t)$ и $p(x)$ выглядит так

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + p(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T, \\ u_x(0,t) = \mu_0(t), \qquad u_x(L,t) = \mu_1(t), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,T) = u_1(x). \end{cases} \tag{3}$$

Функции $\mu_0(t), \mu_1(t), u_0(x), u_1(x)$ в задаче (3) считаем заданными и достаточно гладкими. Общая постановка задачи (3) легко сводится к специальному редуцированному случаю, когда задаваемая функция фигурирует только в одном финальном условии.

§ 2. Редуцированная обратная задача

Рассмотрим вспомогательную прямую задачу

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T, \\ w_x(0,t) = \mu_0(t), \qquad w_x(L,t) = \mu_1(t), \\ w(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

с функциями $\mu_0(t), \mu_1(t), u_1(x)$, взятыми из исходной обратной задачи (3). Тогда решение задачи (3) представимо в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t), \tag{5}$$

где $w(x,t)$ — решение вспомогательной задачи (4), а функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$
\begin{cases}
v_t = a^2 v_{xx} + p(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T,\\
v_x(0,t) = 0, \qquad v_x(L,t) = 0,\\
v(x,0) = 0, \qquad v(x,T) = \varphi(x),
\end{cases}
\tag{6}
$$

где

$$
\varphi(x) = u_1(x) - w(x,T). \tag{7}
$$

Поскольку функция $u_1(x)$ была задана, а функция $w(x,t)$ легко находится из стандартной системы (4), то значения $\varphi(x)$ из формулы (7) можно считать известными.

Возникшую обратную задачу (6) будем называть *редуцированной обратной задачей*, для которой и будет проводиться основное исследование.

§ 3. Теоретический алгоритм решения обратной задачи для вторых краевых условий

Теперь рассмотрим редуцированную обратную задачу для вторых краевых условий

$$
\begin{cases}
v_t = a^2 v_{xx} + p(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T,\\
v_x(0,t) = 0, \qquad v_x(L,t) = 0,\\
v(x,0) = 0, \qquad v(x,T) = \varphi(x),
\end{cases}
\tag{8}
$$

с неизвестными функциями $p(x)$, $v(x,t)$. Функцию $\varphi(x)$ считаем заданной и достаточно гладкой. Решение задачи (8) будем искать методом Фурье.

Составим задачу Штурма–Лиувилля с краевыми условиями второго рода

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0,\\
X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Спектр задачи (9) имеет вид

$$
\begin{cases}
\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{L}\right)^2, \qquad X_k(x) = \cos\left(\dfrac{\pi k x}{L}\right), \qquad k \in \mathbb{N},\\
\lambda_0 = 0, \qquad\qquad X_0(x) = 1.
\end{cases}
$$

Разложим неизвестные функции из системы (8) в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$
v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x). \tag{10}
$$

с неизвестными коэффицентами $T_k(t)$, A_k. При подстановке (10) в уравнение теплопроводности и начальное условие из задачи (8) получим соотношения

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)X_k(x) = -a^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\left(-\lambda_k X_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) \qquad 0 \le t \le T, \\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Приравнивая соответствующие коэффиценты Фурье приходим к счетному набору задач Коши

$$\begin{cases} T_0'(t) = A_0, \\ T_0(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} T_k'(t) = -a^2 \lambda_k T_k(t) + A_k, \\ T_k(0) = 0, \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$T_0(t) = A_0 t, \qquad T_k(t) = \frac{A_k}{a^2 \lambda_k}\left(1 - e^{-a^2 \lambda_k t}\right).$$

В результате

$$v(x,t) = A_0 t + \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(1 - e^{-a^2 \lambda_k t}\right) X_k(x). \tag{12}$$

В финальный момент времени $t = T$ получим

$$v(x,T) = A_0 T + \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{a^2 \lambda_k}\left(1 - e^{-a^2 \lambda_k T}\right) X_k(x) = \varphi(x). \tag{13}$$

Представим $v(x,t)$ как

$$v(x,t) = A_0 t + \tilde{v}(x,t), \tag{14}$$

где

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{a^2 \lambda_k}\left(1 - e^{-a^2 \lambda_k T}\right) X_k(x). \tag{15}$$

Разобьем поиск решения задачи (8) на две подзадачи: поиск неизвестной A_0 и поиск решения $\tilde{v}(x,t)$.

Соотношение (13) трактуем, как ряд Фурье для функции $\varphi(x)$. Коэффиценты формально находятся по формулам Фурье. Тогда

$$A_0 T = \frac{1}{L}\int_0^L \varphi(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = \frac{1}{LT}\int_0^L \varphi(x)dx. \tag{16}$$

Получившиеся значение A_0 — точное. Рассмотрим вторую сумму из (13). Применяя к ней оператор $a^2 \dfrac{d^2}{dx^2}$ и учитывая, что

$$-X_k''(x) = \lambda_k X_k(x),$$

приходим к соотношению

$$-a^2\varphi''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(1 - e^{-a^2\lambda_k T}\right) X_k(x). \tag{17}$$

Перепишем (17) в виде

$$f(x) = \tilde{p}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k T} X_k(x), \tag{18}$$

где

$$f(x) = -a^2\varphi''(x), \tilde{p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = p(x) - A_0. \tag{19}$$

Сумму ряда из (18) можно интерпретировать как значение

$$z(x,T) = z(x,T;\,\tilde{p}), \tag{20}$$

где $z(x,T;\,\tilde{p})$ получается как решение вспомогательной прямой задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T, \\ z_x(0,t) = 0, \qquad z_x(L,t) = 0, \\ z(x,0) = \tilde{p}(x), \end{cases} \tag{21}$$

где $\tilde{p}(x) = p(x) - A_0$ Действительно, решение задачи (21) имеет вид

$$z(x,t;\,\tilde{p}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k t} X_k(x), \tag{22}$$

Тогда

$$\tilde{p}(x) - z(x,T;\,\tilde{p}) = -a^2\varphi''(x). \tag{23}$$

Формула (23) дает ключевое операторное уравнение

$$\tilde{p} - B\tilde{p} = f,$$

где $f(x) = -a^2\varphi''(x)$. Оператор B определяется формулой

$$B\tilde{p} = z(x,T;\,\tilde{p}), \tag{24}$$

где $z(x,t;\,\tilde{p})$ — решение вспомогательной задачи (21). В силу экспоненциального убывания $u_0 t$ решения (22) оператор B из формулы (24) будет строго сжимающим $\|B\| < 1$ в стандартной L_2 — норме. Итак, считаем, что $\|B\| < 1$. В таком случае решение операторного уравнения (24) выражается в ряде Неймана

$$\tilde{p} = f + Bf + B^2 f + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f, \tag{25}$$

где $Bf = z(x,T;\ f)$. Аналогично с задачей для первых краевых условий: $B^k f = z(x,kT;\ f)$. Тогда, воспользуясь этим, найдем восстановленную функцию источника для различного количества итераций:

- $\tilde{p}_0(x) = f(x) = -a^2\varphi''(x)$, (нулевая итерация)
- $\tilde{p}_1(x) = f(x) + z(x,T;f)$, (первая итерация)
- $\tilde{p}_2(x) = f(x) + z(x,T;f) + z(x,2T;f)$, (вторая итерация)

и, вообще,

- $\tilde{p}_n = f + \sum_{k=1}^{n} z(x,kT;f) = f + z(x,T;f) + z(x,2T;f) + \ldots + z(x,nT;f)$.

Здесь $z(x,t)$ — вспомогательная прямая задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \\ z_x(0,t) = 0, \qquad z_x(L,t) = 0, \\ z(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{26}$$

с начальным условием

$$f(x) = -a^2\varphi''(x). \tag{27}$$

Согласно второй формуле (19) для неизвестной правой части в задаче (8) получаем выражение

$$p(x) = A_0 + \tilde{p}(x) \tag{28}$$

или в итерационном виде

$$p_n(x) = A_0 + \tilde{p}_n(x) = A_0 + f(x) + \sum_{k=1}^{n} z(x,kT;f). \tag{29}$$

Функция $v(x,t)$ восстанавливается как решение задачи (8) с найденной правой частью $p(x)$ численным решением по невной схеме.

§ 4. Краткая схема алгоритма для вторых краевых условий

Итак, рассматриваем редуцированную обратную задачу

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \le T, \\ v_x(0,t) = 0, \qquad v_x(L,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \qquad v(x,T) = \varphi(x), \end{cases} \tag{30}$$

где функция $\varphi(x)$ задается. По ней восстанавливается функция $p(x)$, а затем $v(x,t)$. Краткий алгоритм решения обратной задачи (30) выглядит так.

1. Вычисляется поправочный коэфицент $A_0 = \dfrac{1}{LT}\int_0^L \varphi(x)dx$.

2. На отрезке $[0, L]$ вычисляется функция $f(x) = -a^2\varphi''(x)$.

3. Составляется вспомогательная прямая задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \\ z_x(0,t) = 0, \qquad z_x(L,t) = 0, \\ z(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{31}$$

где

$$f(x) = -a^2\varphi''(x). \tag{32}$$

4. Выбирается значение n (номер итерации) и ищется приближенное решение

$$p_n(x) = A_0 + f(x) + z(x,T) + z(x,2T) + \ldots + z(x,nT) = A_0 + f(x) + \sum_{k=1}^{n} z(x,kT;f). \tag{33}$$

5. Составляется задача

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + p_n(x), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \leq T, \\ v(0,t) = 0, \qquad v(L,t) = 0, \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Задача (34) решается по неявной схеме. Находится решение $v = v_n(x,t)$.

6. Производится сравнение

$$\delta_n(x) = v_n(x,T) - \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

с оценкой погрешности $\delta_n = \max_{0\leq x\leq 1}|\delta_n(x)|$. Подбирая значение $n \in \mathbb{N}$, добиваемся того, чтобы величина δ_n не превосходила желаемый уровень.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1977.

2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел — 1964.

3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. —М.: Мир, 1985

4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — Учебное пособие. — М. : Изд-во МГУ, 1994.

5. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol.231). — Marcel Dekker, Inc New York, 2000. — P. 724.

6. Rundel W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data// Applicable Analysis. 1980. Vol. 10. №3. P. 231-242.

7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численный методы. — М. : Наука, 1989.