Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Кузнецов Дмитрий Константинович

Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем второго порядка. Построение параметрического портрета системы. Автоколебания и множественность стационарных решений

Отчет по практическому заданию №1

Выполнил
студент 601 группы
Кузнецов Дмитрий

Москва, 2017

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается автокаталитическая химическая реакция, происходящая на поверхности катализатора и основанная на кинетической схеме Ленгмюра-Хиншельвуда:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 z - k_{-1}x - k_3^0(1-y)^\alpha xy \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 z^2 - k_{-2}y^2 - k_3^0(1-y)^\alpha xy \tag{2}$$

Здесь $z = 1 - x - y$ — концентрация свободных мест.

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x + y \le 1 \tag{3}$$

Базовый набор параметров: $\alpha = 16, k_1 = 0.03, k_{-1} = 0.01, k_2 = 0.05, k_{-2} = 0.01, k_3^0 = 10.$

§ 2. Однопараметрический анализ по k_2

Стационарные состояния удовлетворяют системе уравнений:

$$k_1 z - k_{-1}x - k_3^0(1-y)^\alpha xy = 0,$$

$$k_1 z^2 - k_{-2}y^2 - k_3^0(1-y)^\alpha xy = 0,$$

Из первого уравнения выразим переменную x через переменную y и подставим во второе уравнение. Из получившегося уравнения выразим параметр k_2 через остальные параметры и переменную y. Пробегая с некоторым шагом весь диапозон значений переменной от 0 до 1, по полученным формулам найдем соотвествующие значения переменной x и параметра k_2. Для исследования устойчивости стационарных решений, найдем элементы матрицы Якоби и вычислим ее след и определитель на стационаре. Отслеживая смены знака якобиана системы на стационарном решении, мы находим точки бифуркации. Для найденных точек бифуркации определяем их тип: седло-узловая бифуркация или бифуркация Хопфа.

§ 3. Двухпараметрический анализ по (k_1,k_2)

На плоскости параметров (k_1, k_2) построим параметрический портрет системы:проведем линии крастности и нейтральности. Дописав для системы стационаров условие вырожденности матрицы Якоби, получим линию кратности. А если допишем к системе стационаров условие равенства нулю следа матрицы Якоби, получим линию нейтральности.

§ 4. Результаты однопараметрического анализа

Зеленым отмечены точки седло-узловой бифуркации, черным точки бифуркации Хопфа

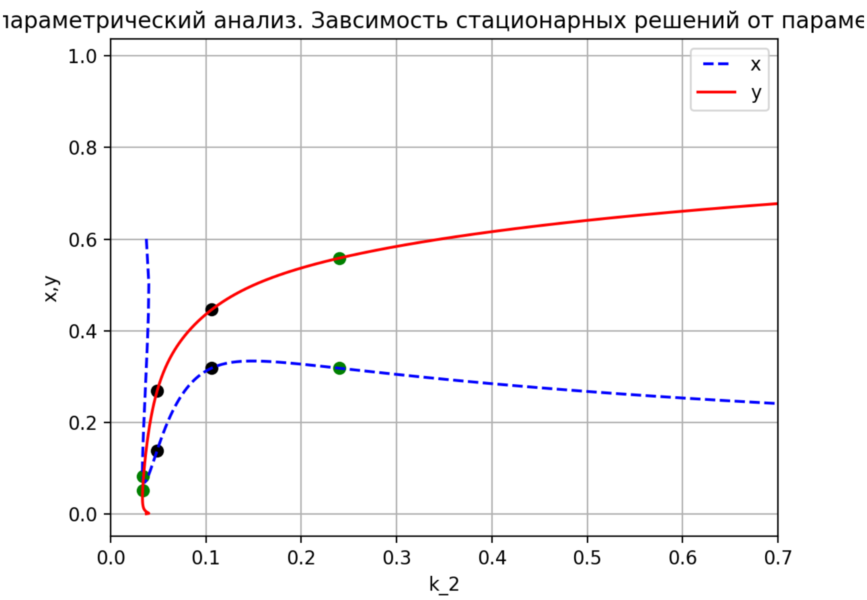

Рис. 1. Однопараметрический анализ при $\alpha = 10$

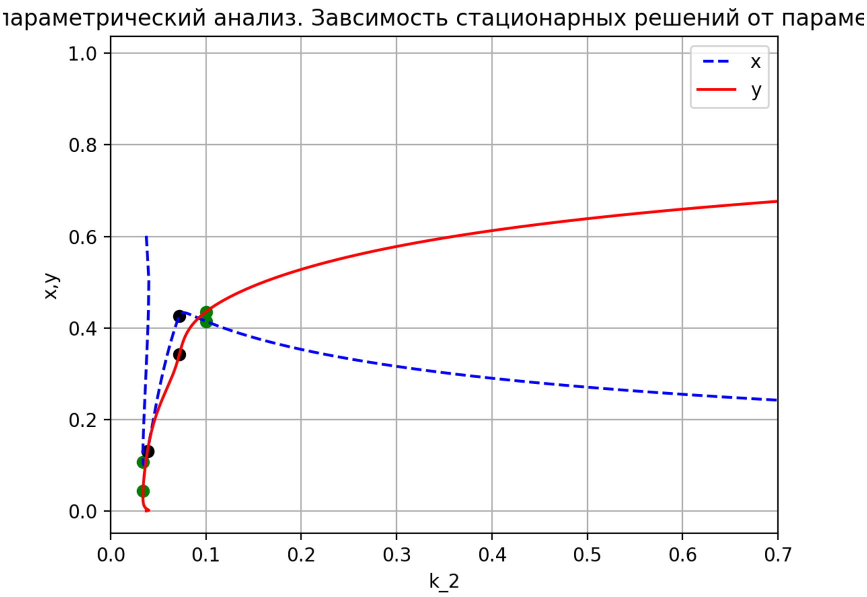

Рис. 2. Однопараметрический анализ при $\alpha = 15$

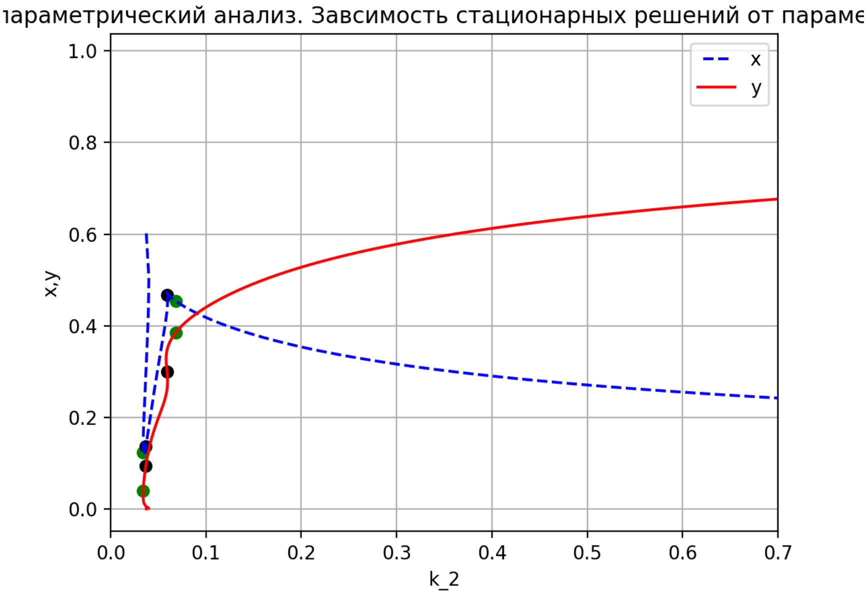

Рис. 3. Однопараметрический анализ при $\alpha = 18$

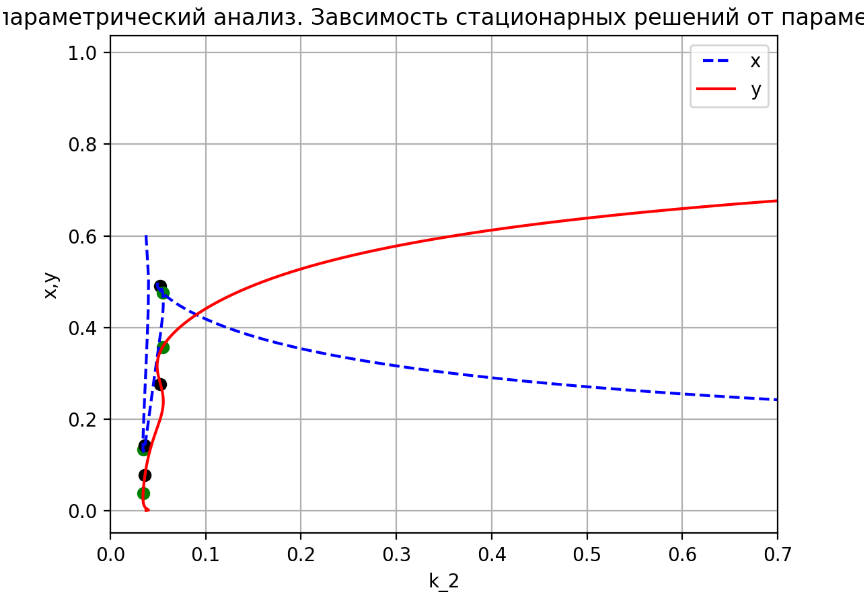

Рис. 4. Однопараметрический анализ при $\alpha = 20$

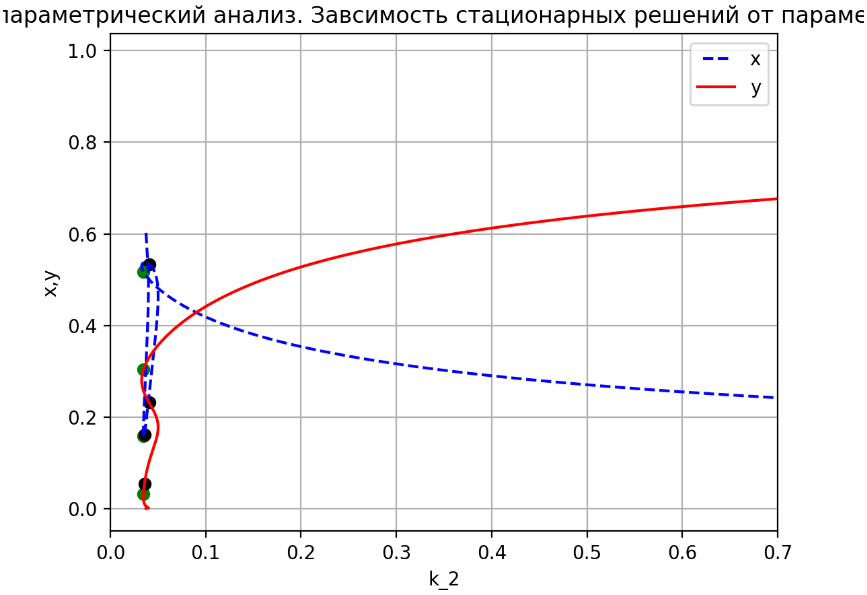

Рис. 5. Однопараметрический анализ при $\alpha = 25$

Однопараметрический анализ для коэффицента k_3

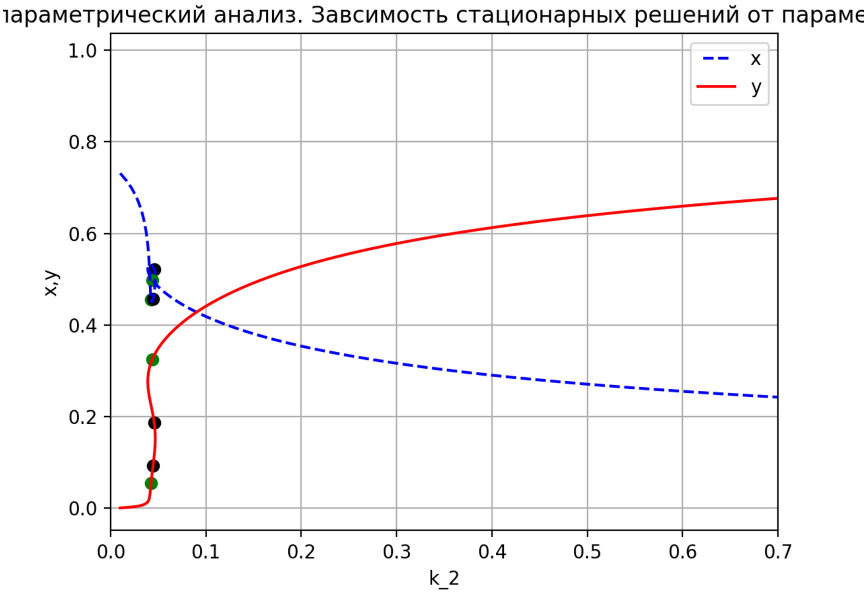

Рис. 6. Однопараметрический анализ при $k_3 = 1$

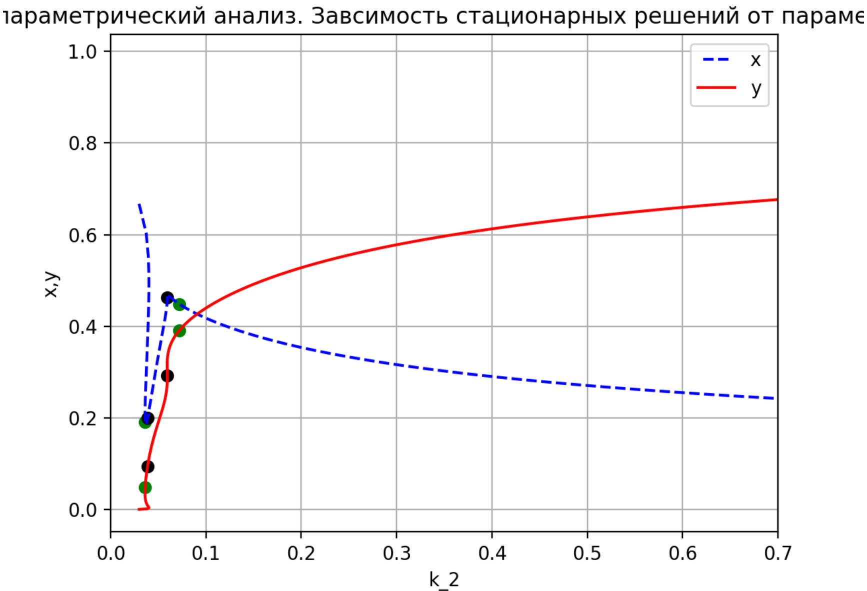

Рис. 7. Однопараметрический анализ при $k_3 = 5$

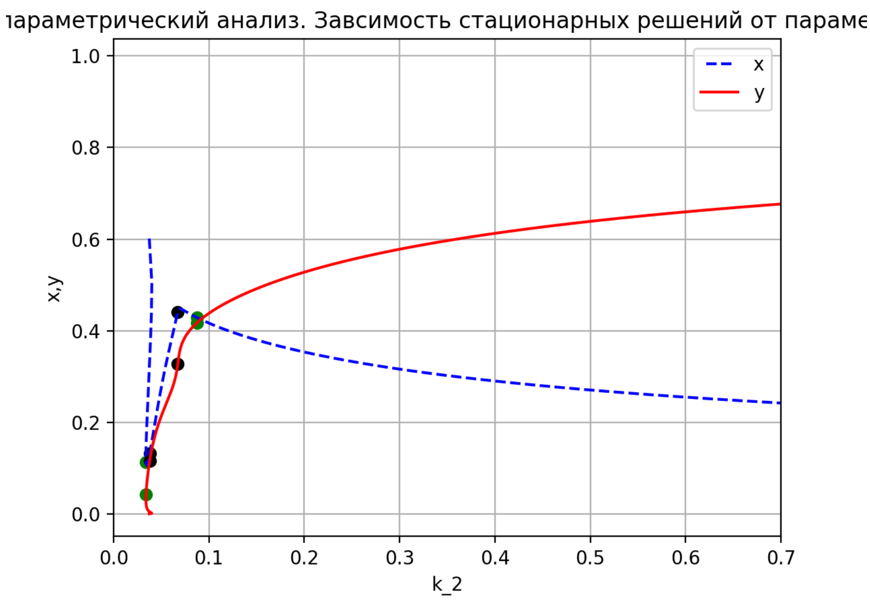

Рис. 8. Однопараметрический анализ при $k_3 = 10$

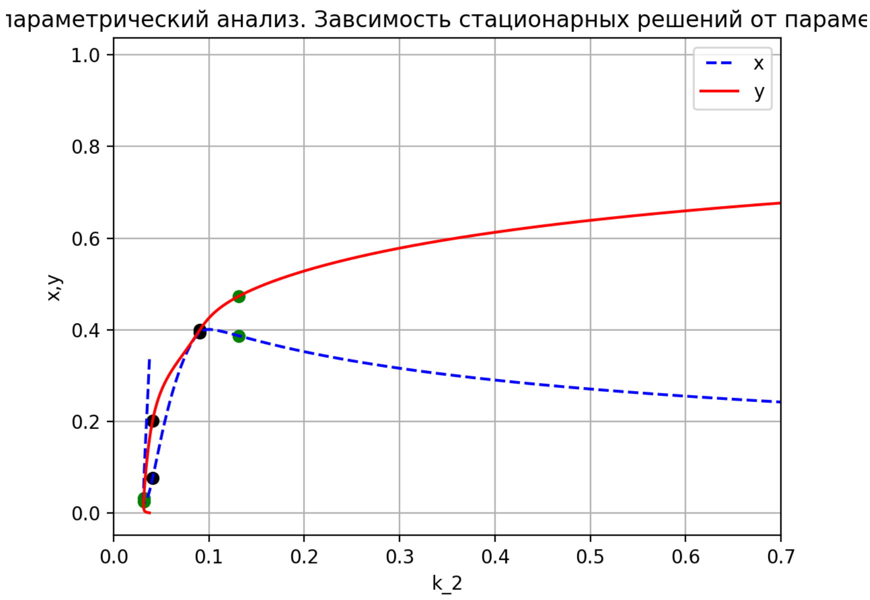

Рис. 9. Однопараметрический анализ при $k_3 = 50$

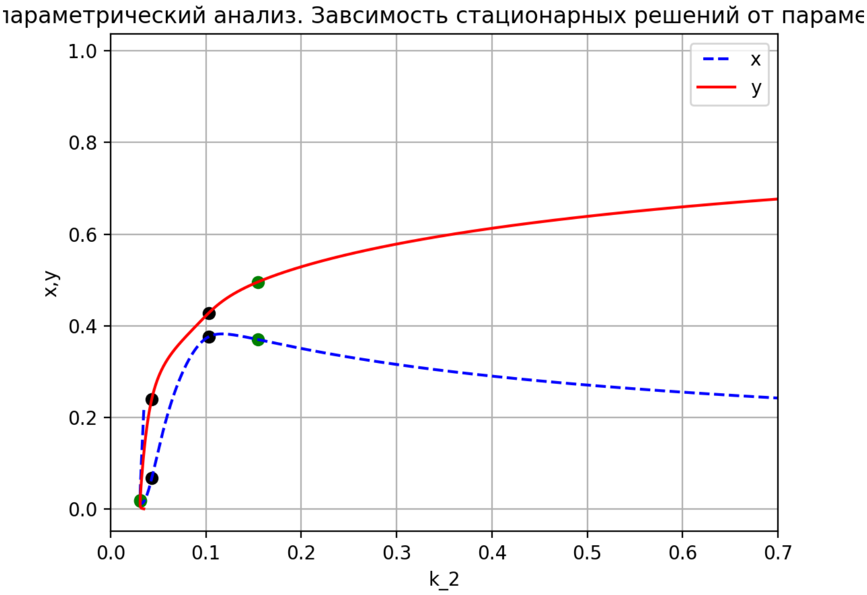

Рис. 10. Однопараметрический анализ при $k_3 = 100$

§ 5. Результаты двухпараметрического анализа

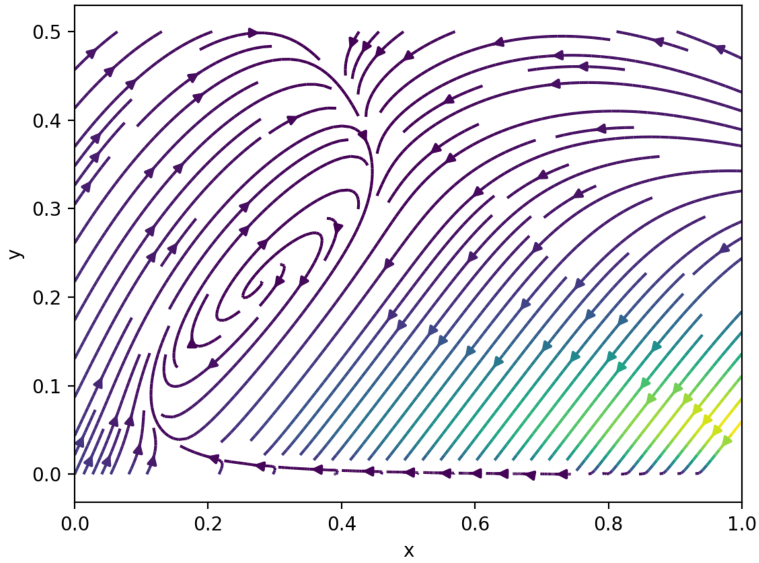

Рис. 11. Двухпараметрический анализ. Фазовая плоскость

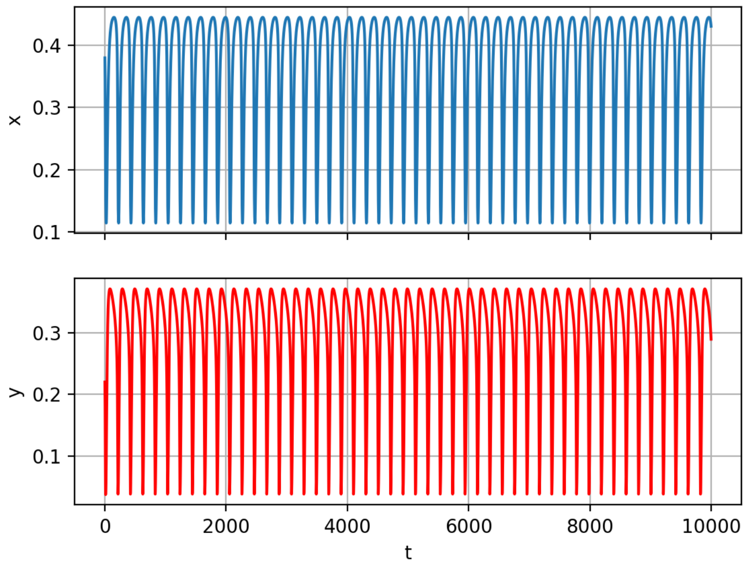

Рис. 12. Двухпараметрический анализ. Автоколебания $x(t)$ и $y(t)$