Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической физики

Кузнецов Дмитрий Константинович

Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем второго порядка. Построение параметрического портрета системы. Автоколебания и множественность стационарных решений

Отчет по практическому заданию №1

Выполнил

студент 601 группы

Кузнецов Дмитрий

Москва, 2017

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается автокаталитическая химическая реакция, происходящая на поверхности катализатора и основанная на кинетической схеме Ленгмюра-Хиншельвуда:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 z - k_{-1} x - k_3^0 (1-y)^\alpha xy \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 z^2 - k_{-2} y^2 - k_3^0 (1-y)^\alpha xy \tag{2}$$

Здесь $z = 1 - x - y$ — концентрация свободных мест.

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x + y \le 1 \tag{3}$$

Базовый набор параметров: $\alpha = 16, k_1 = 0.03, k_{-1} = 0.01, k_2 = 0.05, k_{-2} = 0.01, k_3^0 = 10.$

§ 2. Однопараметрический анализ по k_2

Стационарные состояния удовлетворяют системе уравнений:

$$k_1 z - k_{-1} x - k_3^0 (1-y)^\alpha xy = 0,$$

$$k_1 z^2 - k_{-2} y^2 - k_3^0 (1-y)^\alpha xy = 0,$$

Из первого уравнения выразим переменную x через переменную y и подставим во второе уравнение. Из получившегося уравнения выразим параметр k_2 через остальные параметры и переменную y. Пробегая с некоторым шагом весь диапозон значений переменной от 0 до 1, по полученным формулам найдем соотвествующие значения переменной x и параметра k_2. Для исследования устойчивости стационарных решений, найдем элементы матрицы Якоби и вычислим ее след и определитель на стационаре. Отслеживая смены знака якобиана системы на стационарном решении, мы находим точки бифуркации. Для найденных точек бифуркации определяем их тип: седло-узловая бифуркация или бифуркация Хопфа.

§ 3. Двухпараметрический анализ по (k_1,k_2)

На плоскости параметров (k_1, k_2) построим параметрический портрет системы:проведем линии крастности и нейтральности. Дописав для системы стационаров условие вырожденности матрицы Якоби, получим линию кратности. А если допишем к системе стационаров условие равенства нулю следа матрицы Якоби, получим линию нейтральности.

§ 4. Результаты однопараметрического анализа

Сначала рассмотри однопараметрический анализ по параметру k_2 для различных значений α и с одними и теми же значениями коэффицентов $k_1 = 0.03$, $k_{-1} = 0.01$, $k_{-2} = 0.01$, $k_3^0 = 10$. Значение коэффицента α будем изменять: $\alpha = [10, 15, 18, 20, 25]$. Зеленым отмечены точки седло-узловой бифуркации, черным точки бифуркации Хопфа.

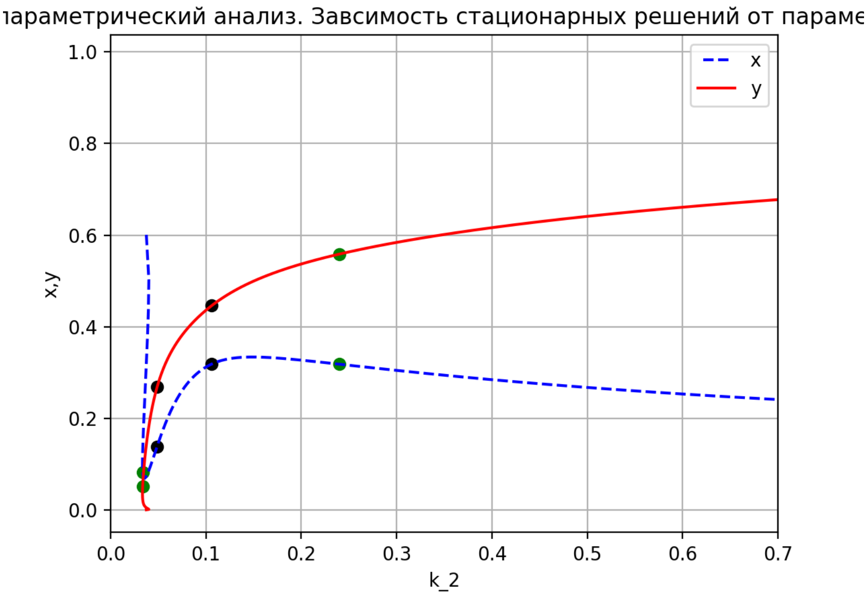

Рис. 1. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $\alpha = 10$

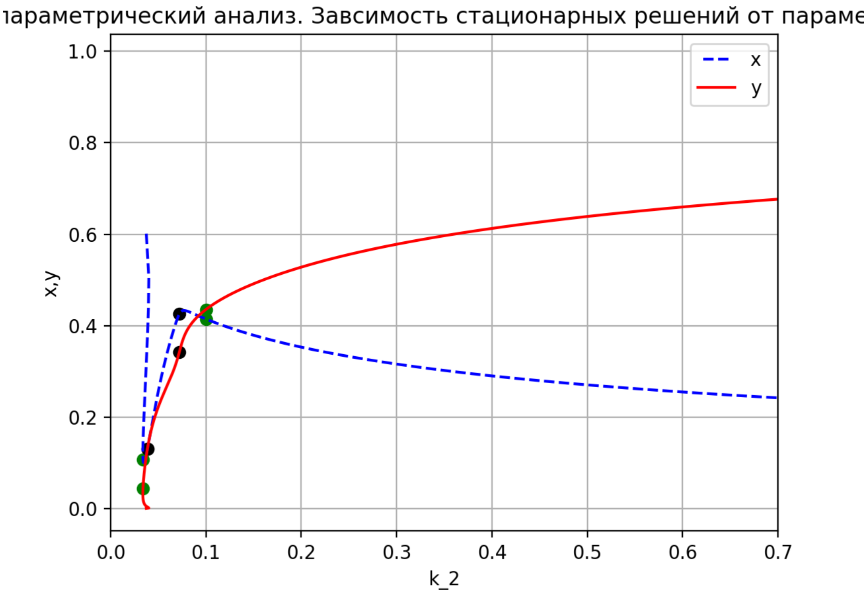

Рис. 2. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $\alpha = 15$

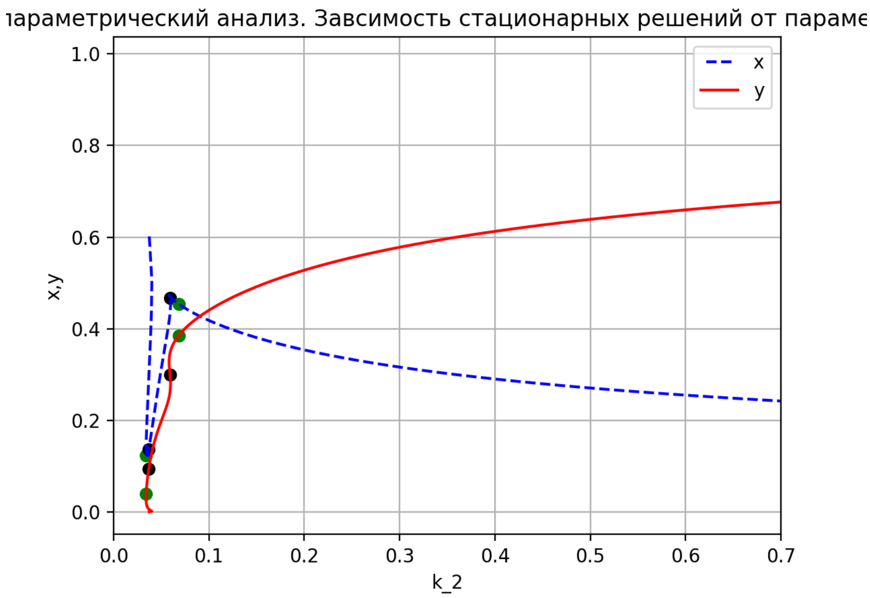

Рис. 3. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $\alpha = 18$

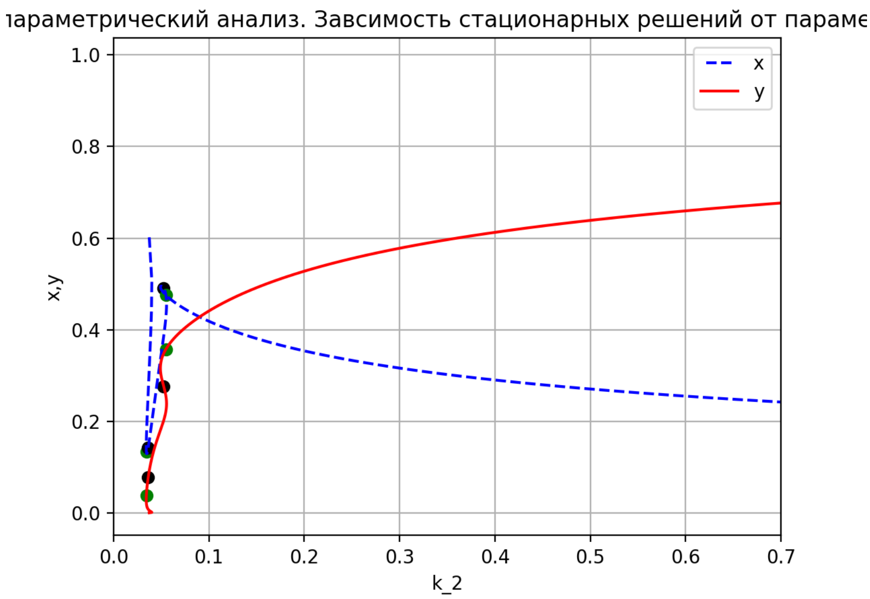

Рис. 4. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $\alpha = 20$

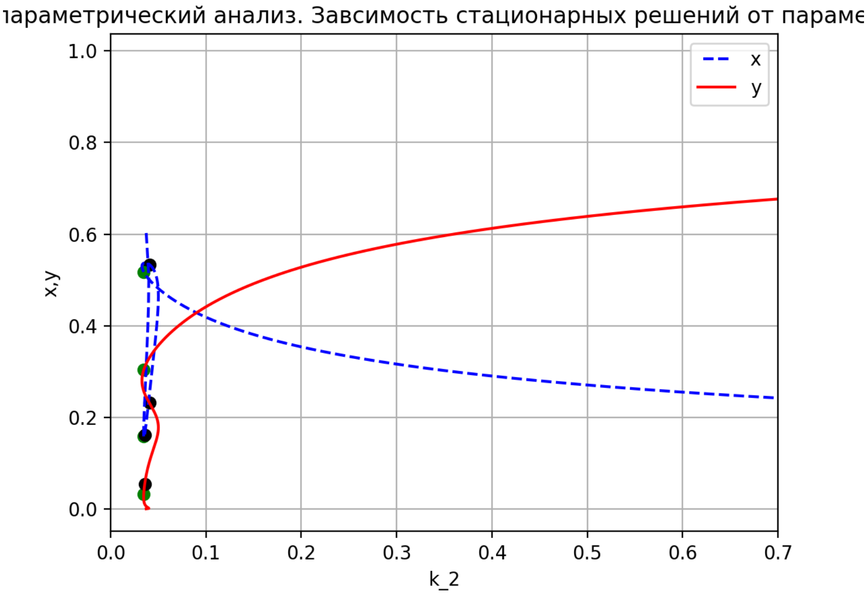

Рис. 5. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $\alpha = 25$

Однопараметрический анализ по k_2 для коэффицента k_3^0.

Значениями коэфицентов $k_1 = 0.03$, $k_{-1} = 0.01$, $k_{-2} = 0.01$, $\alpha = 16$. Значение коэффицента k_3^0 будем изменять: $k_3^0 = [1, 5, 10, 50, 100]$. Зеленым отмечены точки седлоузловой бифуркации, черным точки бифуркации Хопфа.

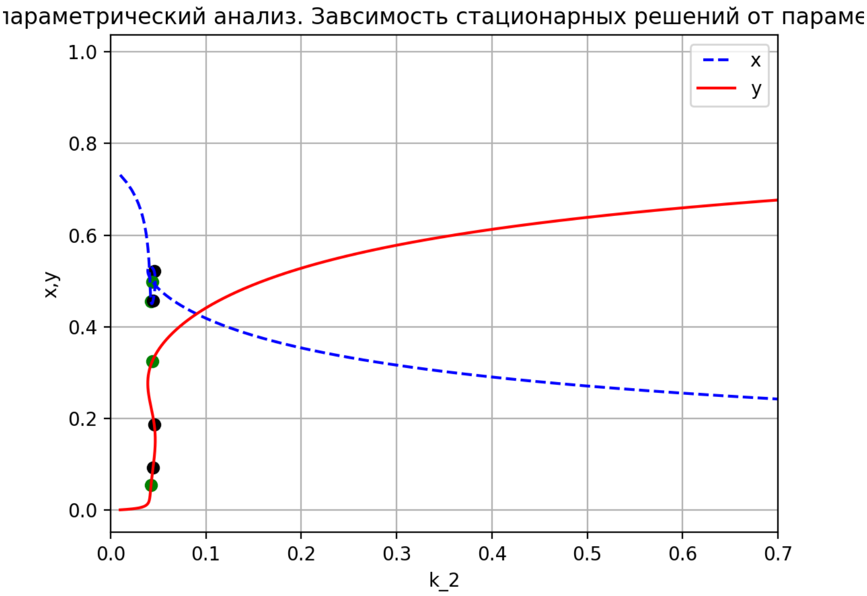

Рис. 6. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $k_3 = 1$

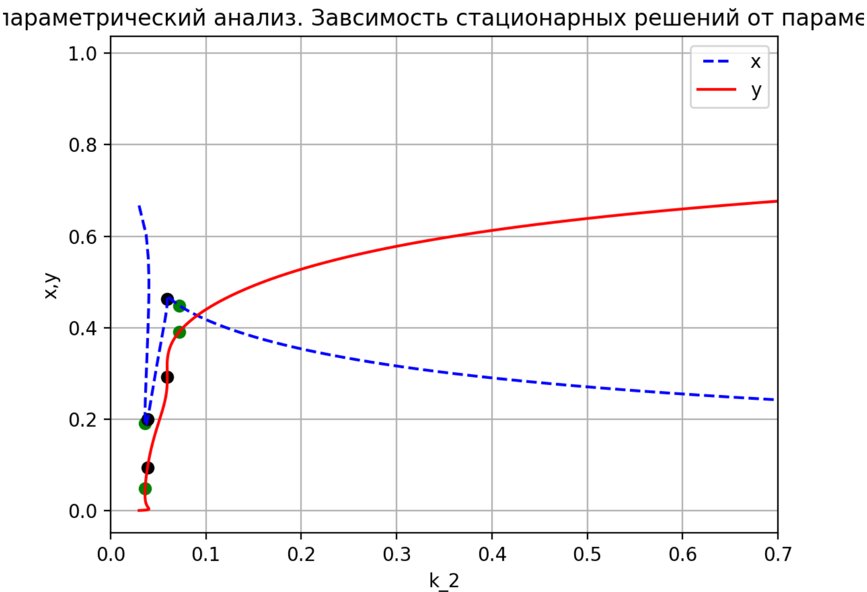

Рис. 7. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $k_3 = 5$

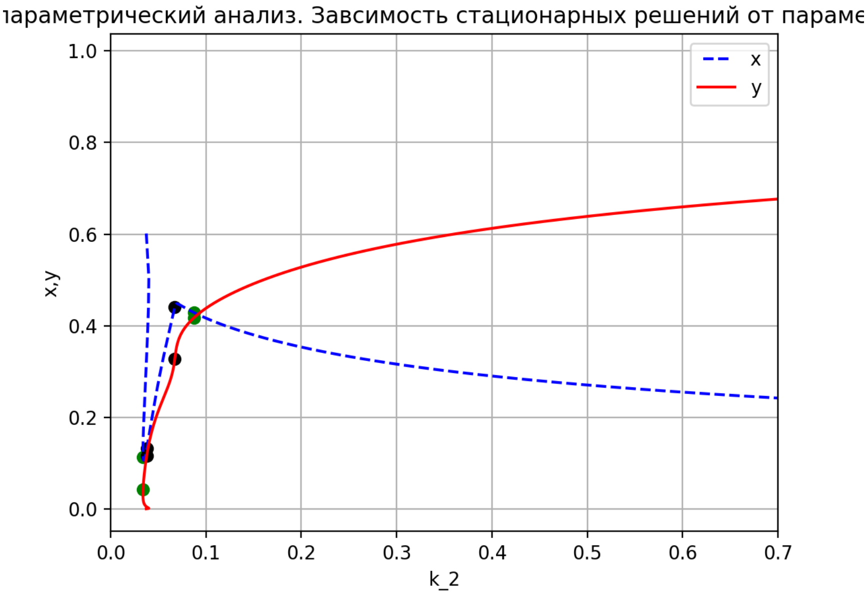

Рис. 8. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $k_3 = 10$

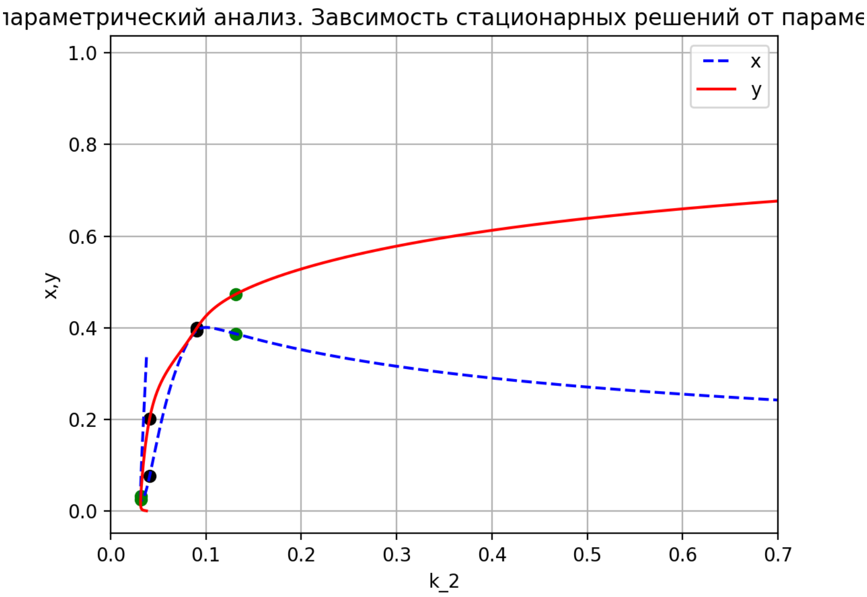

Рис. 9. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $k_3 = 50$

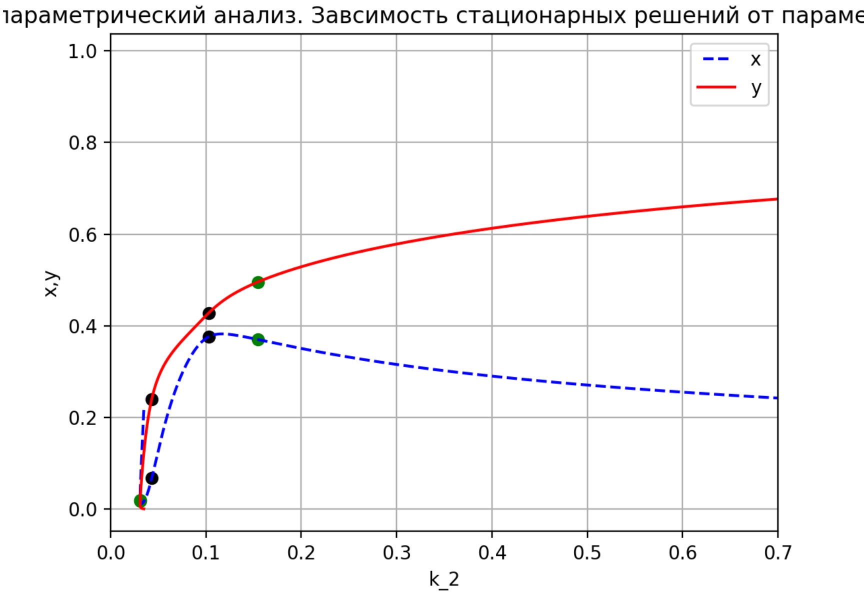

Рис. 10. Однопараметрический анализ по параметру k_2 при $k_3 = 100$

§ 5. Результаты двухпараметрического анализа

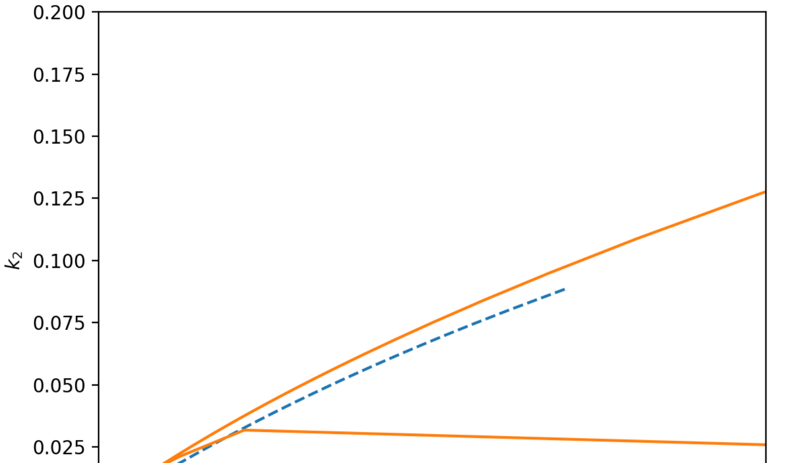

Рис. 11. Двухпараметрический анализ. Линии кратности и нейтральности

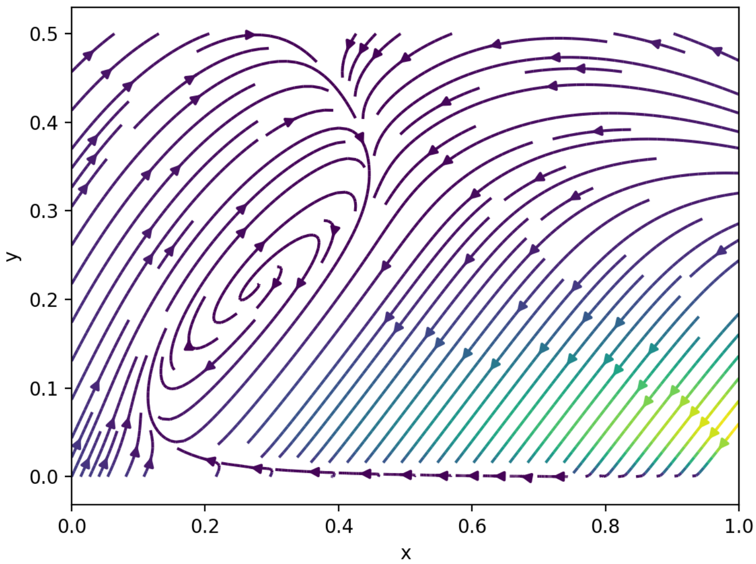

Рис. 12. Двухпараметрический анализ. Фазовая плоскость

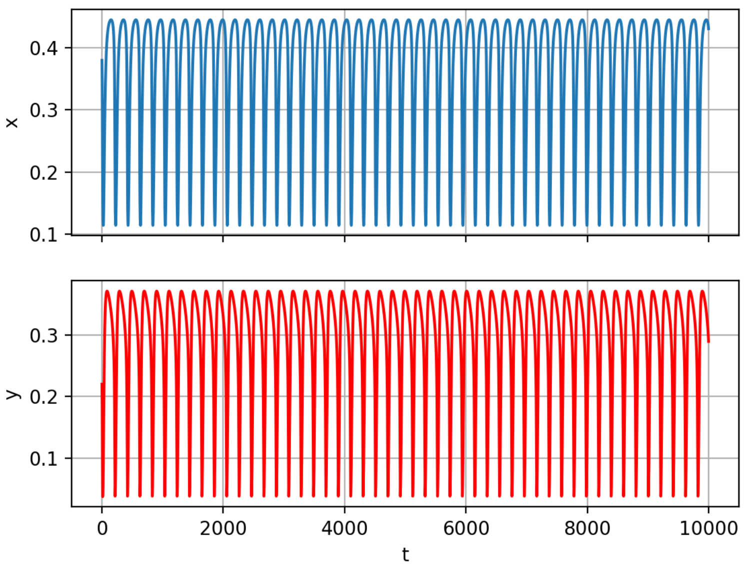

Рис. 13. Двухпараметрический анализ. Автоколебания $x(t)$ и $y(t)$