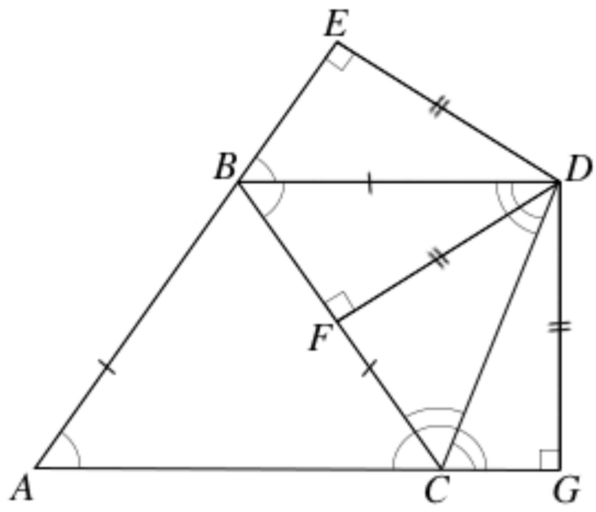
Решения

Задача № 1.

Ответ: 4.

Центр вписанной в треугольник окружности и три центра вневписанных окружностей.

Задача № 2. *(Автор: Москвитин Н.А.)*



Опустим перпендикуляры DE, DF и DG к прямым, содержащим стороны AB, BC и AC ΔABC.

Тогда $\angle DBE = \angle DBC = \angle ACB$.

$\Delta EBD = \Delta FBD$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow$ $DE = DF$.

$\angle BDC = \angle BCD$ (ΔCBD - равнобедренный).

$\angle BDC = \angle DCG$ (накрест лежащие при секущей CD).

Следовательно, $\angle BCD = \angle DCG$.

Тогда $DF = DG$, но это и значит, что D является центром вневписанной окружности треугольника.

Задача № 3.

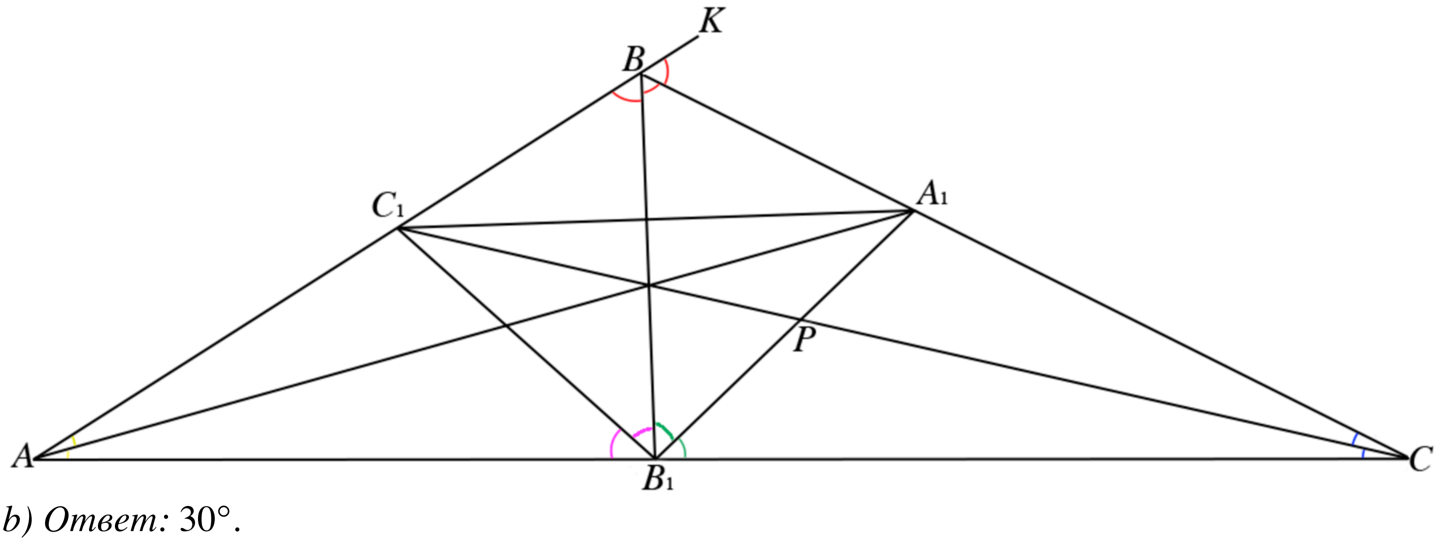
а) Ответ: 90°.

$\angle CBK = 60°$ (как внешний угол при вершине B),

$\angle CBB_1 = 60°$ (т.к. BB_1 — биссектриса $\angle ABC = 120°$). Поэтому, BC — биссектриса $\angle B_1BK$.

A_1 — точка пересечения биссектрисы BC внешнего угла B_1BK и внутреннего угла A треугольника ABB_1 значит A_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABB_1.

Аналогично, C_1 —центр вневписанной окружности треугольника BCB_1. Следовательно, B_1A_1 и B_1C_1 —биссектрисы смежных углов, а значит, угол между ними равен 90. Итак, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$



b) Ответ: 30°.

Из доказанного следует, что точка P пересечения CC_1 и B_1A_1 является пересечением биссектрис ΔBCB_1.

Следовательно, $\angle B_1PC = 180^\circ - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) = 180^\circ - \dfrac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120^\circ$.

Так как $\angle B_1PC$ — внешний для прямоугольного треугольника PB_1C_1, то $\angle B_1C_1C = \angle B_1PC$ - 90° = 30°.

Задача № 4.

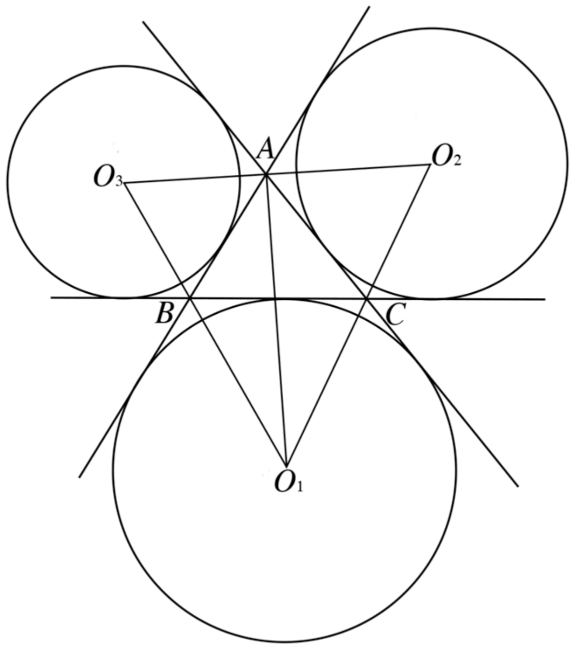
$\angle O_1AO_3$ — угол между биссектрисами смежных углов.

Следовательно, $O_1A \perp O_3A$.

Аналогично, $O_1A \perp O_2A$.

Поэтому, O_1A — высота $\Delta O_1O_2O_3$.

Точно так же докажем, что O_2B и O_3C — высоты $\Delta O_1O_2O_3$.



Задача № 5. (воспользоваться результатом задачи № 4)

Построение:

1. $\Delta O_1O_2O_3$.
2. O_1A, O_2B, O_3C — высоты $\Delta O_1O_2O_3$.
3. ΔABC — искомый.

Задача № 6. (воспользоваться рисунком задачи № 4)

Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC, является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C.

Поэтому, $\angle O_1CB=\dfrac{180^\circ-\angle C}{2}<90^\circ$, $\angle O_1BC=\dfrac{180^\circ-\angle B}{2}<90^\circ$, $\angle BO_1C=\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}<90^\circ$.

$\Delta O_1O_2O_3$ — остроугольный.

Задача № 7.

Обозначим $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Известно, что $AP = BQ = p$, где p – полупериметр треугольника.

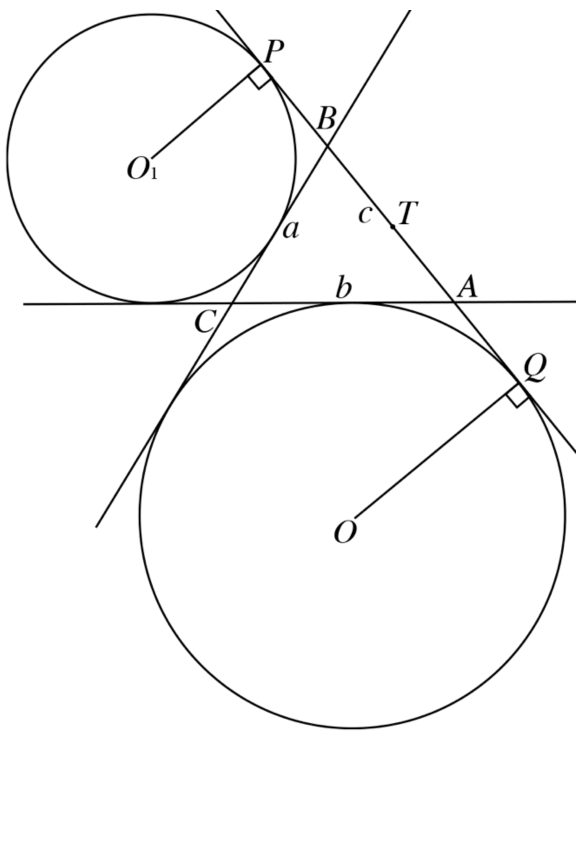
Тогда, если T – середина PQ, то

$$PT=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}(QA+AB+BP)=\frac{1}{2}((p-c)+c+(p-c))=$$

$$=\frac{1}{2}(2p-c)=\frac{1}{2}(a+b+c-c)=\frac{a+b}{2}$$ значит,

$$BT=PT-BP=\frac{a+b}{2}-(p-c)=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b-c}{2}=\frac{c}{2},$$ т.е.

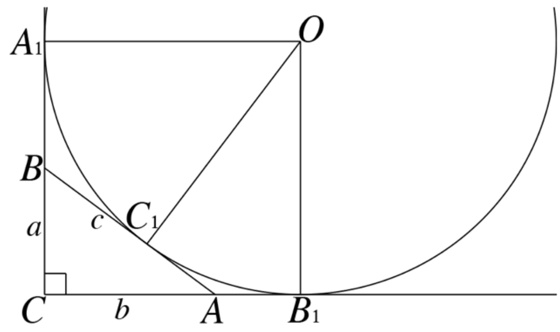
T — середина AB.



Задача № 8.

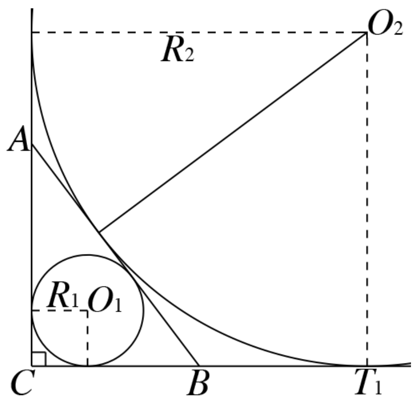
Обозначим вершины треугольника, противолежащие сторонам a, b, c, через A, B, C (C — вершина прямого угла), а точки касания — через A_1, B_1, C_1 соответственно. Если O — центр данной окружности, то OA_1CB_1 — квадрат со стороной, равной r.
Поэтому $CA_1 = r$, $BC_1 = BA_1 = r - a$, $AC_1 = AB_1 = r - b$, $c = AB = AC_1 + C_1B = 2r - a - b$.

Следовательно, $r = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Задача № 9.

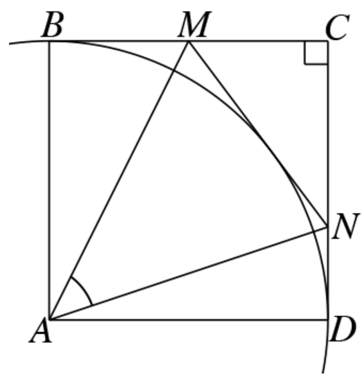
Ответ: R_1R_1.



Отрезок CT_1 (T_1 — точка касания прямой CB и окружности радиуса R_2) равен R_2.
Окружность радиуса R_2 является вневписанной окружностью ΔABC, значит, $R_2 = p$.
Площадь треугольника находим как произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр: $S = rp = R_1R_2$.

Задача № 10.

Ответ: 45°.

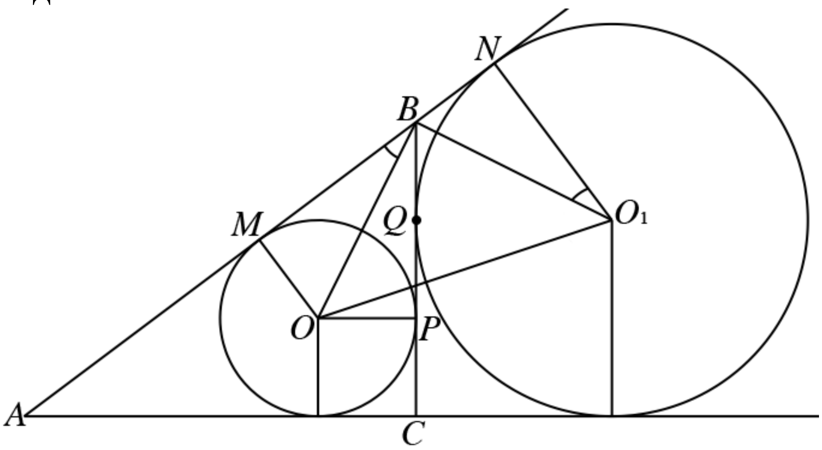


Расстояния от вершины C ΔCMN до точек B и D равны его полупериметру. Значит, B и D — точки касания вневписанной окружности , центр которой находится в вершине A квадрата $ABCD$. Тогда, AM и AN – биссектрисы $\angle BMN$ и $\angle MND$ соответственно. $\angle CMN + \angle CNM = 90°$,

значит, $\angle AMN + \angle MNA = 180^\circ - \dfrac{\angle CMN + \angle CNM}{2} = 135^\circ$.

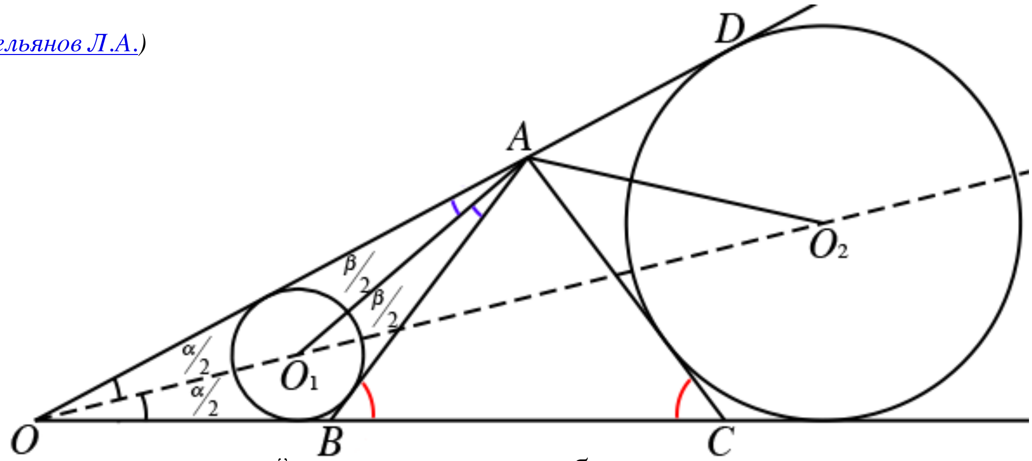
Откуда, $\angle MAN = 180° - (\angle AMN + \angle MNA) = 45°$.

Задача № 11.



Пусть O — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC,
P — точка касания этой окружности с катетом BC, r — радиус этой окружности.
Пусть также окружность с центром в точке O_1 и радиусом R касается катета BC в точке Q и, кроме того, касается продолжений катета AC и гипотенузы AB.
Отрезок OO_1 виден из точек C и B под прямым углом. Поэтому точки B и C лежат на окружности с диаметром OO_1.
Следовательно, $\angle BOO_1 = \angle BCO_1 = 45°$.
Тогда $OB = O_1B$.
Пусть M и N точки касания окружностей с прямой AB ($AM < AN$).
Тогда ΔOMB и ΔBNO_1 равны по гипотенузе и острому углу.
Поэтому $BM = O_1N = R$.
Следовательно, $BC = BP + PC = BM + PC = R + r$.

Задача №12. *(Автор:. Емельянов Л.А.)*



Поскольку центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, то точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Пусть углы при вершинах O и A ΔOAB равны соответственно α и β . По теореме о внешнем угле треугольника

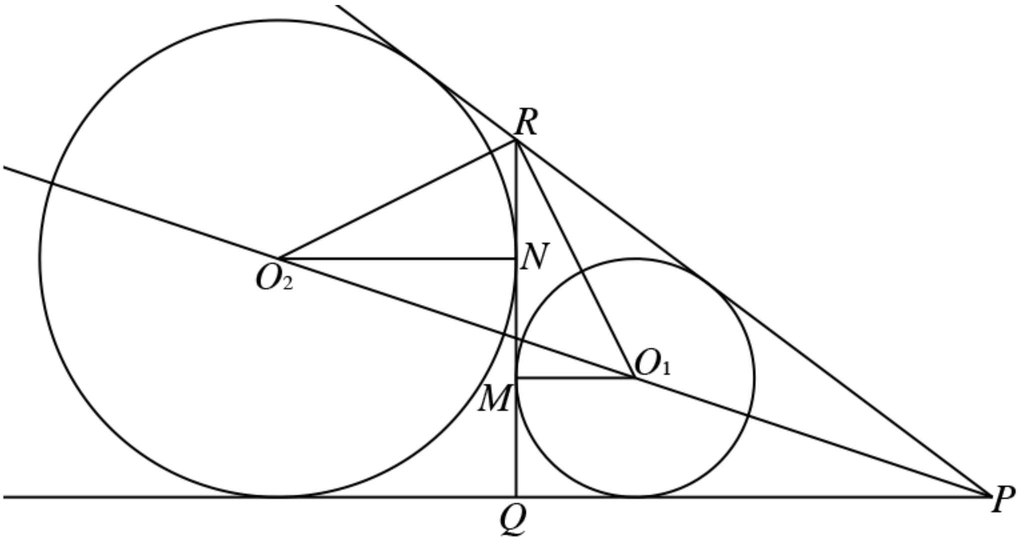
$$\angle AO_1O_2=\angle AOO_1+\angle OAO_1=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle OAB)=\frac{1}{2}\angle ABC .$$

Пусть угол при вершине A треугольника OAC равен β', а окружность с центром O_2 касается луча OA в точке D. Тогда

$$\angle AO_2O_1=\angle DAO_2-\angle AOO_2=\frac{1}{2}(180^\circ-\beta')-\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(180^\circ-\beta'-\alpha)=\frac{1}{2}\angle ACO=\frac{1}{2}\angle ACB .$$

Из условия задачи следует, что $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1$, значит, $\angle ABC = \angle ACB$.
Следовательно, ΔABC – равнобедренный.

Задача № 13.
Ответ: $\sqrt{3}$.

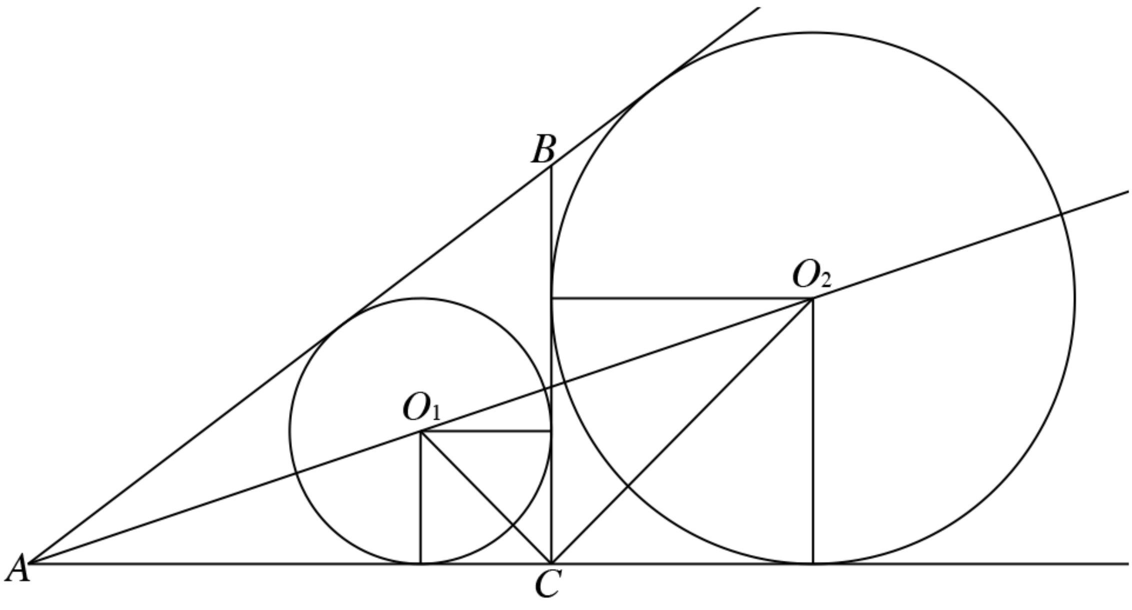


Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов 2 и 3 соответственно, M и N — их точки касания со стороной RQ. Тогда, $RM = \frac{O_1M}{tg30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}$, $RN = \frac{O_2N}{tg60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Поэтому, $MN = RM - RN = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Задача № 14. (смотрите решение задачи № 13)
Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача № 15.
Ответ: $2R\sqrt{2}$.



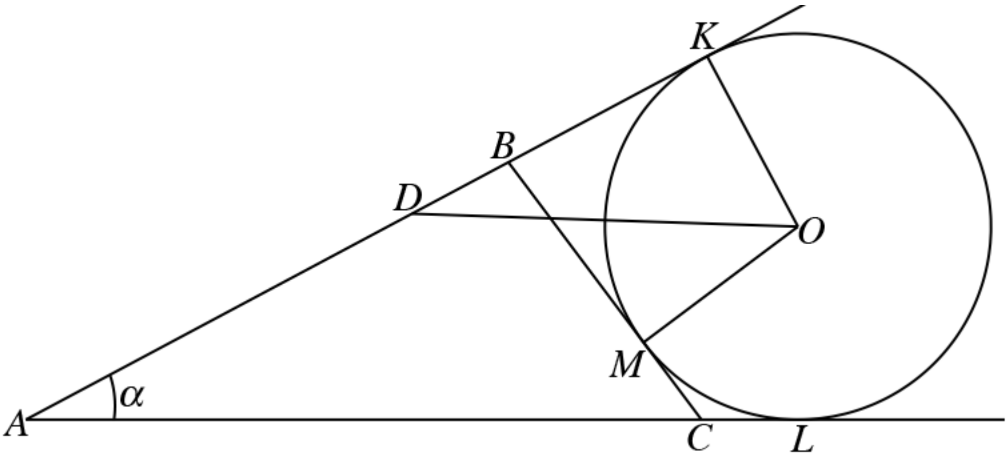
Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (R — радиус первой), C — вершина прямого угла. Тогда треугольник O_1CO_2 — прямоугольный. Поскольку точки O_1 и O_2 расположены на биссектрисе угла A, то $\angle O_1O_2C$ = 75° - 45° = 30°.

O_1C — диагональ квадрата со стороной R, значит $O_1C = R\sqrt{2}$.

Следовательно, $O_1O_2 = 2O_1C = 2R\sqrt{2}$.

Задача № 16.

Ответ: $\frac{1}{2}p(p-a)tg\frac{\alpha}{2}$.



1 способ:

Пусть M — точка касания данной окружности со стороной BC. Тогда $KB = BM$, $LC = CM$, $2p = AB + BC + AC = AK + AL$, а т.к. $AK = AL$, то $AK = p$.

Поэтому, $OK = AK\cdot tg\frac{\alpha}{2} = p\cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $S_{DOK} = \frac{1}{2}DK\cdot OK = \frac{1}{2}p(p-a)tg\frac{\alpha}{2}$.

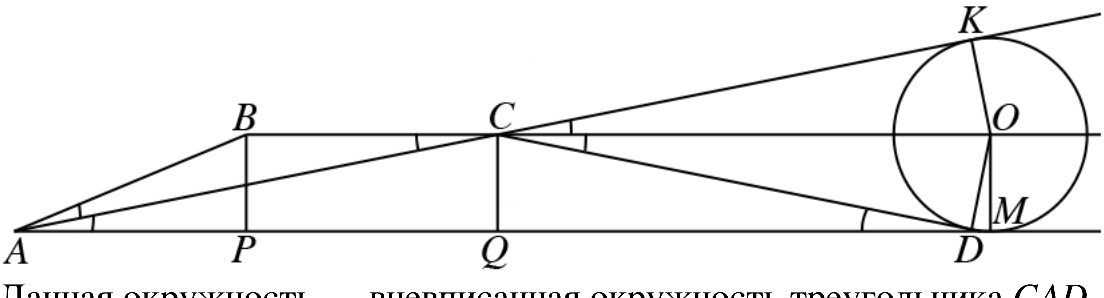
2 способ:

$AK = p$ (теорема о касательной к вневписанной окружности), $OK = p\cdot tg\frac{\alpha}{2}$ (соотношение между радиусом вневписанной окружности и периметром треугольника).

$S_{DOK} = \frac{1}{2}DK\cdot OK = \frac{1}{2}p(p-a)tg\frac{\alpha}{2}$.

Задача № 17.

Ответ: $\frac{315}{2}$.



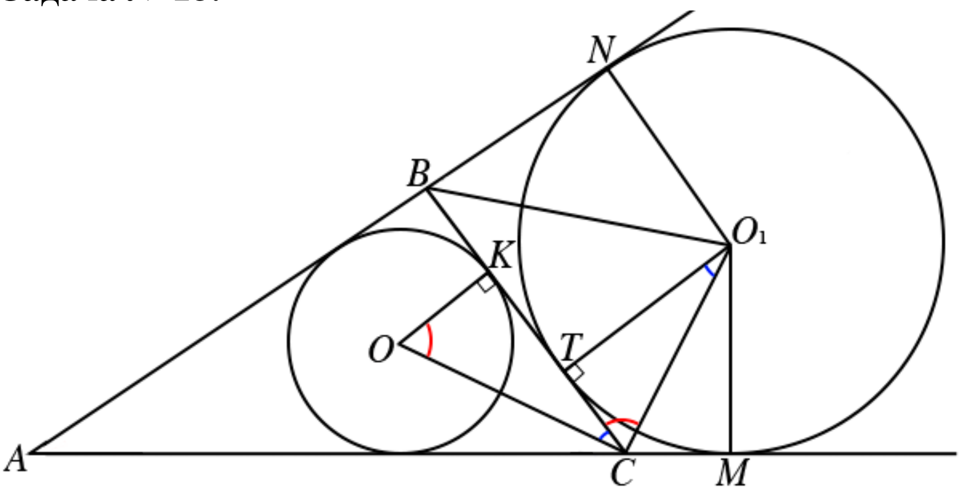
Данная окружность — вневписанная окружность треугольника CAD, касающаяся стороны CD и продолжений сторон AC и AD. Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle BAD = 2\alpha$. O — центр окружности, P и Q — проекции вершин B и C меньшего основания трапеции на AD, M — точка касания с прямой AD, K — с прямой AC. Поскольку CO — биссектриса угла KCD, то $\angle BCA = \angle KCO = \angle OCD = \angle CDA = \angle CAD = \angle BAC = \alpha$, ΔABC и ΔACD — равнобедренные.

Тогда $AB = BC = 13$, $BP = OM = 5$, $AP=\sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$,

$\cos 2\alpha = \cos\angle BAP = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{12}{13}$, $tg\angle CDA = tg\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \dfrac{1}{5}$, $DQ = CO \cdot ctg\alpha = 5 \cdot 5 = 25$,
$AD = AP + PQ + QD = 12 + 13 + 25 = 50$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + DC)\cdot BP = \dfrac{1}{2}(50+13)\cdot 5 = \dfrac{315}{2}$.

Задача № 18.



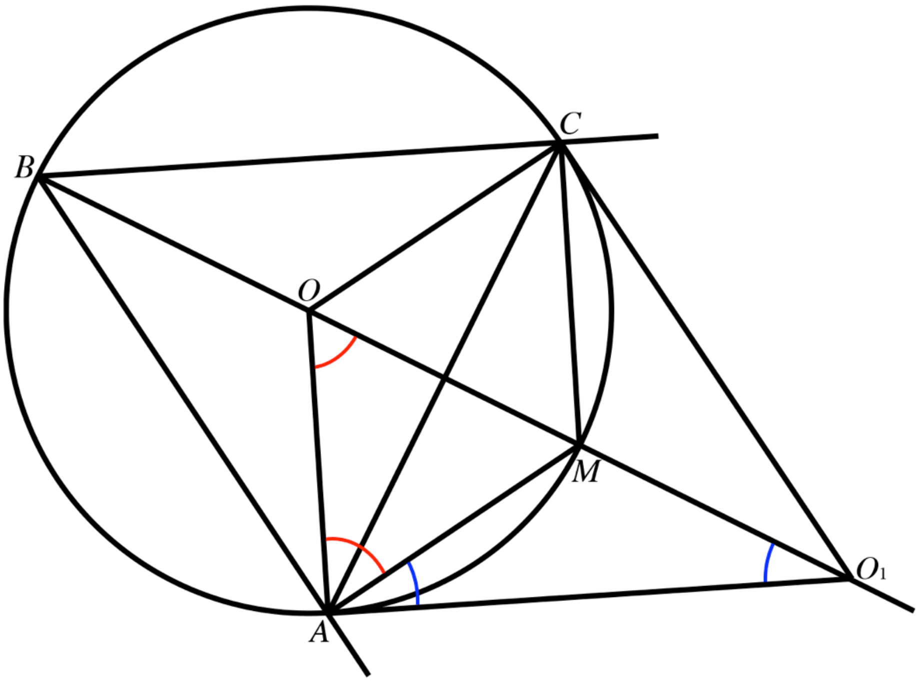
Пусть R — радиус вневписанной окружности, r — радиус вписанной. $\Delta CMO_1 \sim \Delta CKO$,
значит, $\dfrac{CM}{R} = \dfrac{r}{CK}$, $CK = p - c$, $CM = p - AC = p - b$.

Откуда, $\dfrac{p-b}{R} = \dfrac{r}{p-c}$ или $rR = (p - c)(p - b)$.

Но $R = \dfrac{S}{p-a}$, $r = \dfrac{S}{p}$, значит $rR = \dfrac{S}{p-a}\cdot\dfrac{S}{p} = (p-c)(p-b)$.

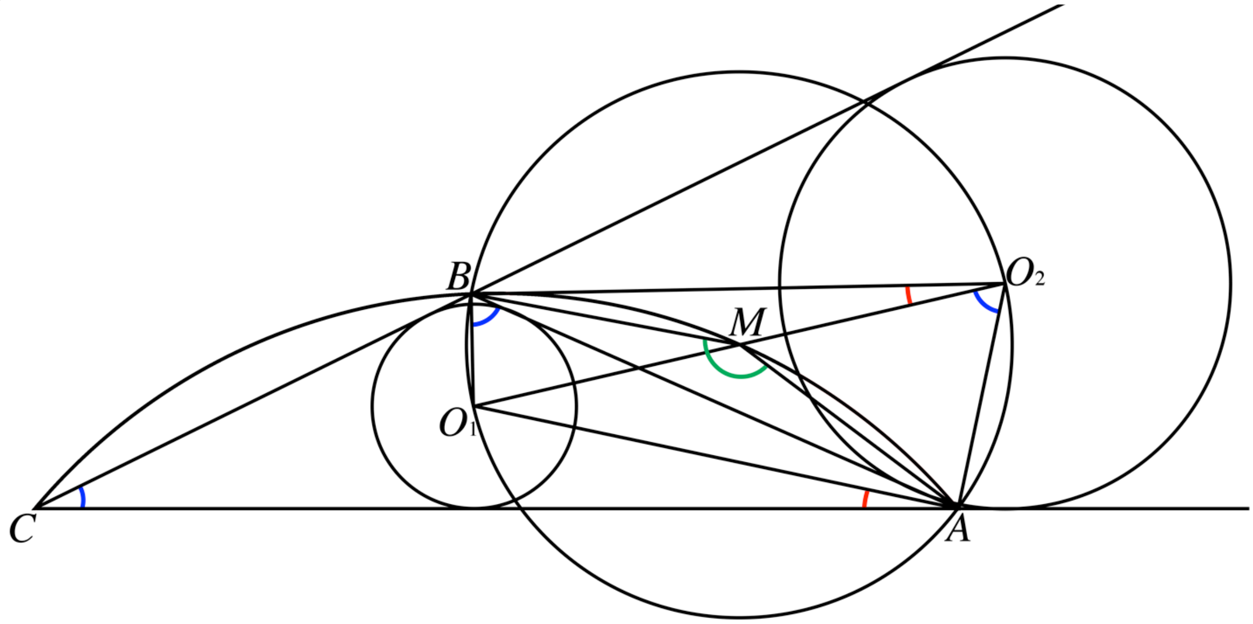
Отсюда следует формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Задача № 19.



Поскольку, $\angle AOM = \angle ABO + \angle OAB = \angle ACM + \angle OAB = \angle CAM + \angle OAC = \angle OAM$, то ΔOMA — равнобедренный, $MO = MA$. Аналогично докажем, что $MO = MC$.
$\angle OAO_1$ — прямой как угол между биссектрисами смежных углов.
Обозначим $\angle AOM = \angle OAM = \varphi$, тогда $\angle MAO_1 = 90° - \varphi$
Поэтому ΔAMO_1 — равнобедренный и $MA = MO_1$. Следовательно, $MA = MO = MC = MO_1$.
Поэтому точки A, O, C, O_1 лежат на окружности с центром в точке M.

Задача № 20.



Пусть вневписанная окружность касается стороны AB ΔABC;
$\angle ABC = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle CBA = \gamma$.
O_1, O_2 — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно,
M — середина O_1O_2. Поскольку отрезок O_1O_2 виден из точек A и B под прямым углом, то M — центр окружности, описанной около четырёхугольника AO_1BO_2. Тогда

$$\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 = \angle O_1BA + \angle O_1AB = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle AMB = 2\angle AO_2B = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно, точки A, C, B и M лежат на одной окружности, т.е. на окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача № 21.
Ответ: 5460.

Применяя соотношение 2: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, имеем $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} = \frac{1}{r}$, $r = \frac{14}{3}$.

Используя соотношение 6: $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$, получаем $S = \sqrt{9 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \frac{14}{3}} = 126$.

Ответ на вопрос задачи получим, воспользовавшись соотношением 1: $r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S}$,

то есть $abc = (r_a + r_b + r_c - r) \cdot S$. Итак, $abc = (9 + 18 + 21 - \frac{14}{3}) \cdot 126 = 5460$.

Задача № 22.

a) выразим все радиусы через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$$r=\frac{S}{p}, R=\frac{abc}{4S}, r_a=\frac{S}{p-a}, r_b=\frac{S}{p-b}, r_c=\frac{S}{p-c}.$$

Значит, $r_a+r_b+r_c-r=\dfrac{S}{p-a}+\dfrac{S}{p-b}+\dfrac{S}{p-c}-\dfrac{S}{p}=$

$$=S\cdot\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=S\cdot\frac{abc}{S^2}=\frac{abc}{S}=4R\Rightarrow r_a+r_b+r_c=r+4R.$$

b) воспользуемся формулами $r_a=\dfrac{S}{p-a}, r_b=\dfrac{S}{p-b}, r_c=\dfrac{S}{p-c}$, имеем

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

Итак, $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$.

c) из $r_ar_br_c=rp^2=rp\cdot p=Sp$.

Следовательно $S=\dfrac{r_ar_br_c}{p}$.

d) используя формулы (b), (c) и $S=pr$ имеем:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{r_ar_b+r_br_c+r_ar_c}{r_ar_br_c}=\frac{r_ar_b+r_br_c+r_ar_c}{Sp}=\frac{p}{S}.$$

Следовательно $r_ar_b+r_br_c+r_ar_c=p^2$.

e) используя формулу (c) и $S=pr$, имеем $r_ar_br_c=Sp=rp^2$.

f) используя формулу (c) и $S=pr$, имеем $S=\dfrac{r_ar_br_c}{p}=\dfrac{r_ar_br_c}{\frac{S}{p}}$ или $S^2=r_ar_br_cr$.

Следовательно $S=\sqrt{r_ar_br_cr}$.

g) воспользуемся формулами $r_b=\dfrac{S}{p-b}, r_c=\dfrac{S}{p-c}$

Значит, $\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{p-b}{S}+\dfrac{p-c}{S}=\dfrac{2p-b-c}{S}=\dfrac{a+b+c-b-c}{S}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{a}{\frac{1}{2}ah_a}=\dfrac{2}{h_a}$,

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right).$$