

Решения

Задача № 1.

Ответ: 4.

Центр вписанной в треугольник окружности и три центра внеписанных окружностей.

Задача № 2. (Автор: [Москвитин Н.А.](#))

Опустим перпендикуляры DE , DF и DG к прямым, содержащим стороны AB , BC и AC $\triangle ABC$.

Тогда $\angle DBE = \angle DBC = \angle ACB$.

$\triangle EBD = \triangle FBD$ (по гипотенузе и острому углу) \Rightarrow

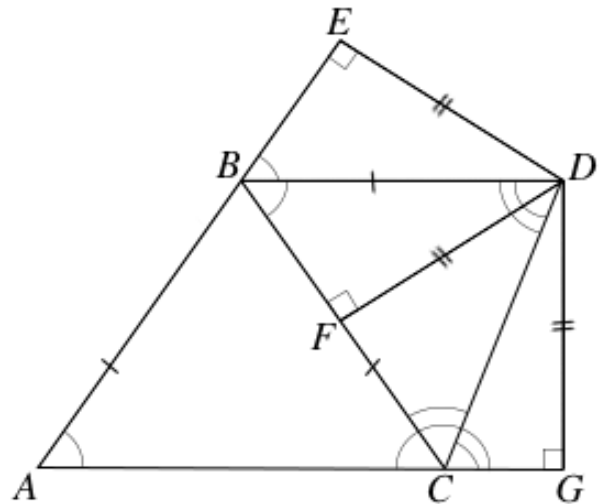
$DE = DF$.

$\angle BDC = \angle BCD$ ($\triangle CBD$ - равнобедренный).

$\angle BDC = \angle DCG$ (накрест лежащие при секущей CD).

Следовательно, $\angle BCD = \angle DCG$.

Тогда $DF = DG$, но это и значит, что D является центром внеписанной окружности треугольника.



Задача № 3.

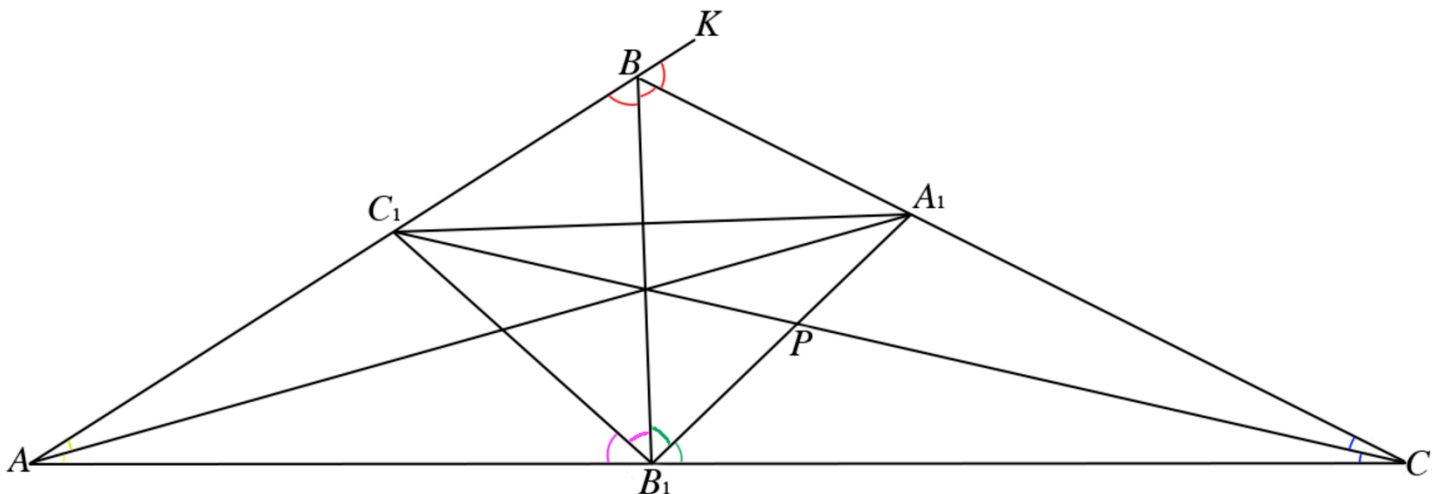
а) Ответ: 90° .

$\angle CBK = 60^\circ$ (как внешний угол при вершине B),

$\angle CBB_1 = 60^\circ$ (т.к. BB_1 — биссектриса $\angle ABC = 120^\circ$). Поэтому, BC — биссектриса $\angle B_1BK$.

A_1 — точка пересечения биссектрисы BC внешнего угла B_1BK и внутреннего угла A треугольника ABB_1 значит A_1 — центр внеписанной окружности треугольника ABB_1 .

Аналогично, C_1 — центр внеписанной окружности треугольника BCB_1 . Следовательно, B_1A_1 и B_1C_1 — биссектрисы смежных углов, а значит, угол между ними равен 90 . Итак, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$



б) Ответ: 30° .

Из доказанного следует, что точка P пересечения CC_1 и B_1A_1 является пересечением биссектрис $\triangle BCB_1$.

Следовательно, $\angle B_1PC = 180^\circ - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) = 180^\circ - \frac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120^\circ$.

Так как $\angle B_1PC$ — внешний для прямоугольного треугольника PB_1C_1 , то

$\angle B_1C_1C = \angle B_1PC - 90^\circ = 30^\circ$.

Задача № 4.

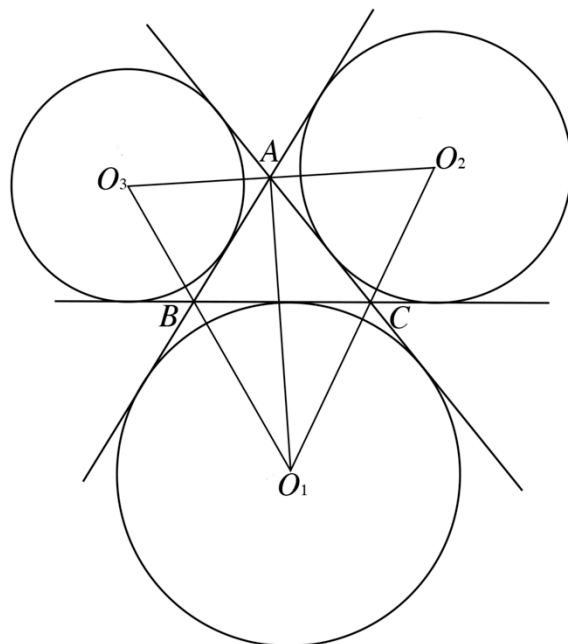
$\angle O_1 A O_3$ — угол между биссектрисами смежных углов.

Следовательно, $O_1 A \perp O_3 A$.

Аналогично, $O_1 A \perp O_2 A$.

Поэтому, $O_1 A$ — высота $\triangle O_1 O_2 O_3$.

Точно так же докажем, что $O_2 B$ и $O_3 C$ — высоты $\triangle O_1 O_2 O_3$.

**Задача № 5.** (воспользоваться результатом задачи № 4)

Построение:

1. $\triangle O_1 O_2 O_3$.
2. $O_1 A, O_2 B, O_3 C$ — высоты $\triangle O_1 O_2 O_3$.
3. $\triangle ABC$ — искомый.

Задача № 6. (воспользоваться рисунком задачи № 4)

Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC , является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C .

Поэтому, $\angle O_1 C B = \frac{180^\circ - \angle C}{2} < 90^\circ$, $\angle O_1 B C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} < 90^\circ$, $\angle B O_1 C = \frac{180^\circ - \angle A}{2} < 90^\circ$.

$\triangle O_1 O_2 O_3$ — остроугольный.

Задача № 7.

Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Известно, что $AP = BQ = p$, где p — полупериметр треугольника.

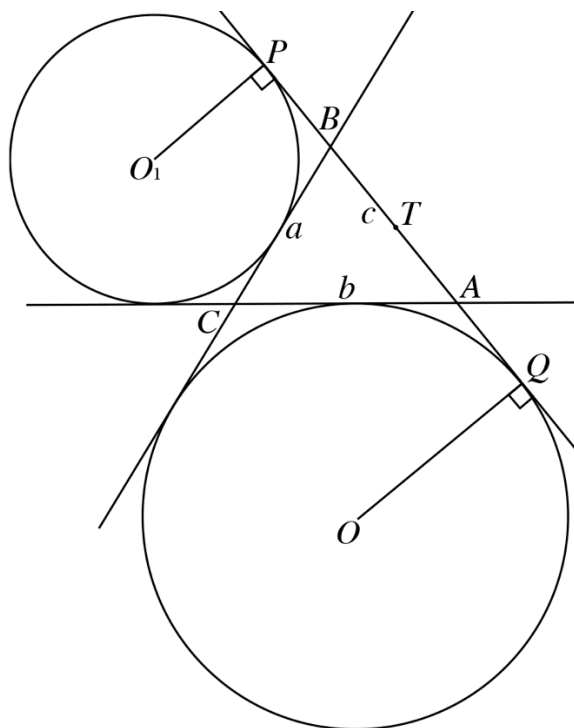
Тогда, если T — середина PQ , то

$$PT = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} (QA + AB + BP) = \frac{1}{2} ((p - c) + c + (p - c)) =$$

$$= \frac{1}{2} (2p - c) = \frac{1}{2} (a + b + c - c) = \frac{a + b}{2} \text{ значит,}$$

$$BT = PT - BP = \frac{a + b}{2} - (p - c) = \frac{a + b}{2} - \frac{a + b - c}{2} = \frac{c}{2}, \text{ т.е.}$$

T — середина AB .

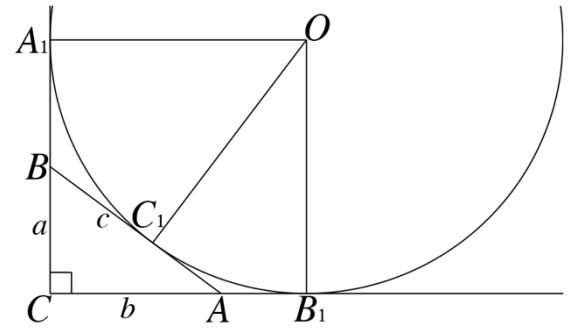


Задача № 8.

Обозначим вершины треугольника, противолежащие сторонам a, b, c , через A, B, C (C — вершина прямого угла), а точки касания — через A_1, B_1, C_1 соответственно. Если O — центр данной окружности, то OA_1CB_1 — квадрат со стороной, равной r .

Поэтому $CA_1 = r$, $BC_1 = BA_1 = r - a$, $AC_1 = AB_1 = r - b$, $c = AB = AC_1 + C_1B = 2r - a - b$.

Следовательно, $r = \frac{a+b+c}{2}$.



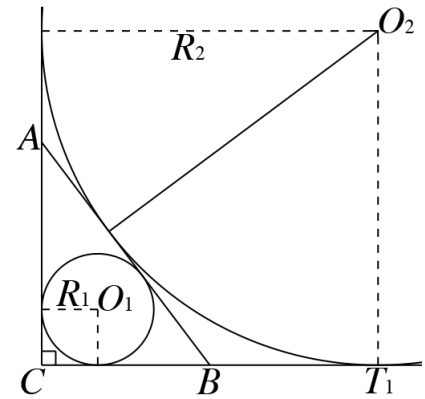
Задача № 9.

Ответ: R_1R_1 .

Отрезок CT_1 (T_1 — точка касания прямой CB и окружности радиуса R_2) равен R_2 .

Окружность радиуса R_2 является внеписанной окружностью $\triangle ABC$, значит, $R_2 = p$.

Площадь треугольника находим как произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр: $S = rp = R_1R_2$.



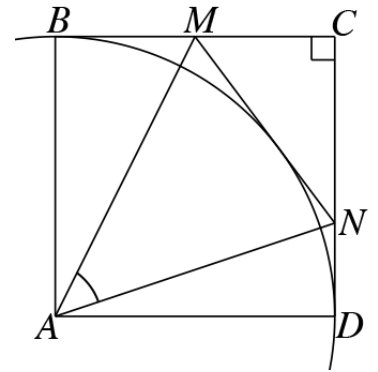
Задача № 10.

Ответ: 45° .

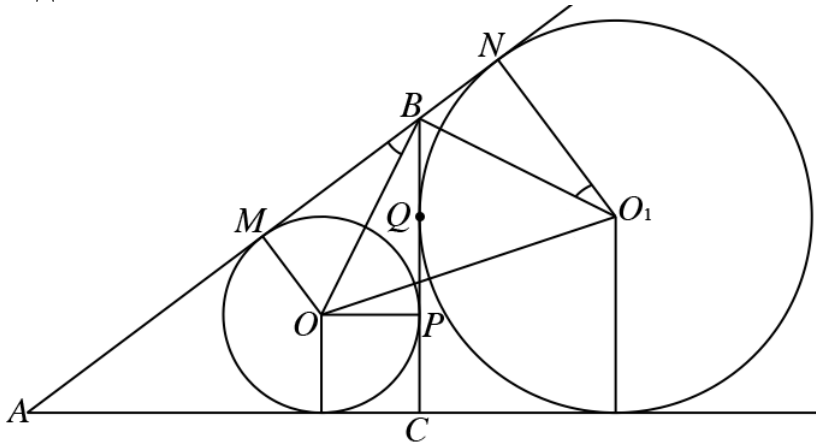
Расстояния от вершины C $\triangle CMN$ до точек B и D равны его полупериметру. Значит, B и D — точки касания внеписанной окружности, центр которой находится в вершине A квадрата $ABCD$. Тогда, AM и AN — биссектрисы $\angle BMN$ и $\angle MND$ соответственно. $\angle CMN + \angle CNM = 90^\circ$,

значит, $\angle AMN + \angle MNA = 180^\circ - \frac{\angle CMN + \angle CNM}{2} = 135^\circ$.

Откуда, $\angle MAN = 180^\circ - (\angle AMN + \angle MNA) = 45^\circ$.

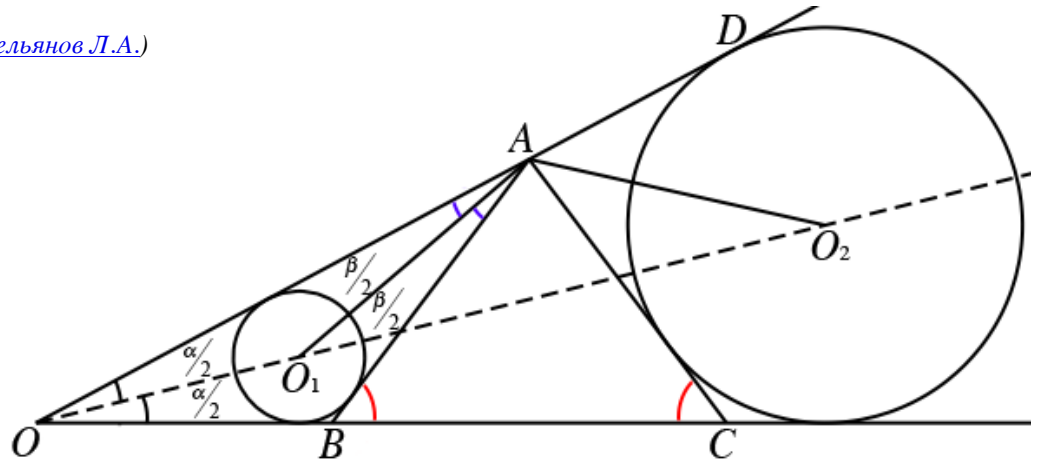


Задача № 11.



Пусть O — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC , P — точка касания этой окружности с катетом BC , r — радиус этой окружности. Пусть также окружность с центром в точке O_1 и радиусом R касается катета BC в точке Q и, кроме того, касается продолжений катета AC и гипотенузы AB . Отрезок OO_1 виден из точек C и B под прямым углом. Поэтому точки B и C лежат на окружности с диаметром OO_1 . Следовательно, $\angle BOO_1 = \angle BCO_1 = 45^\circ$. Тогда $OB = O_1B$. Пусть M и N точки касания окружностей с прямой AB ($AM < AN$). Тогда $\triangle OMB$ и $\triangle BNO_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $BM = O_1N = R$. Следовательно, $BC = BP + PC = BM + PC = R + r$.

Задача №12. (Автор: [Емельянов Л.А.](#))



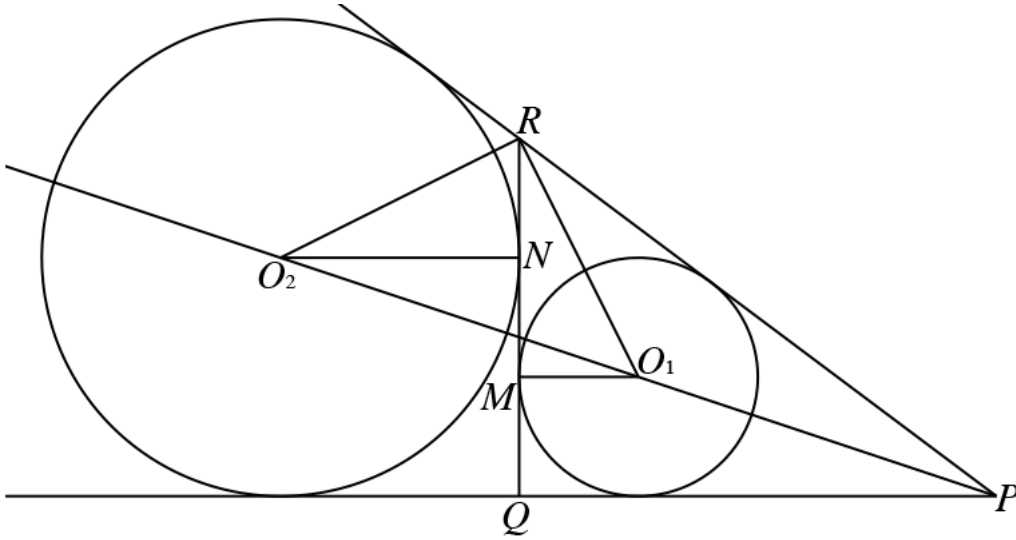
Поскольку центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, то точки O , O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Пусть углы при вершинах O и A $\triangle OAB$ равны соответственно α и β . По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle AO_1O_2 = \angle AOO_1 + \angle OAO_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle OAB) = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Пусть угол при вершине A треугольника OAC равен β' , а окружность с центром O_2 касается луча OA в точке D . Тогда

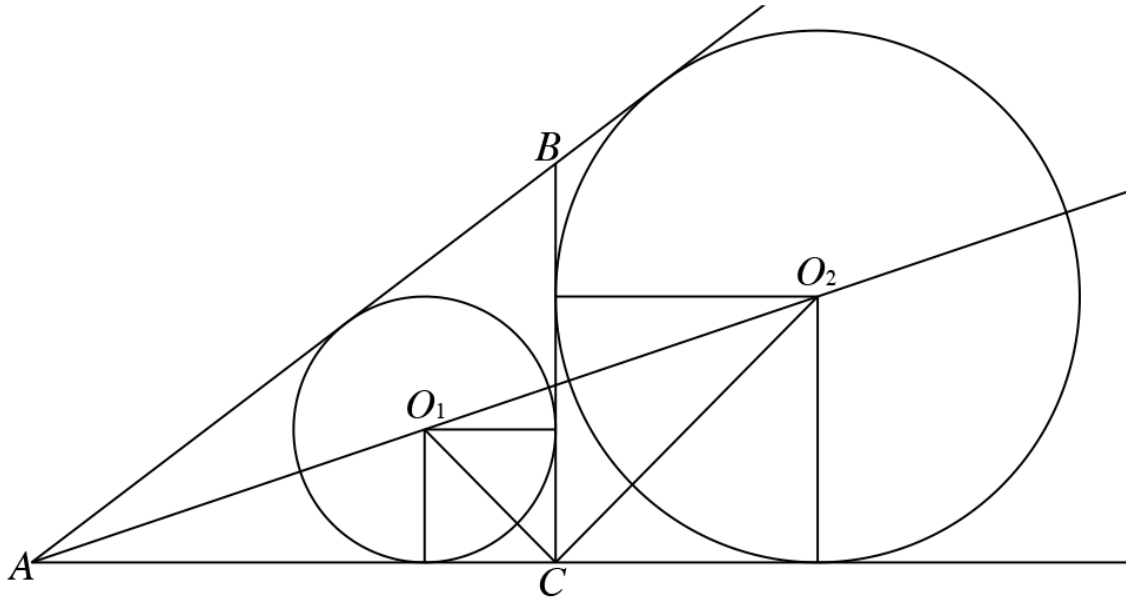
$$\angle AO_2O_1 = \angle DAO_2 - \angle AOO_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta') - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta' - \alpha) = \frac{1}{2}\angle ACO = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Из условия задачи следует, что $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1$, значит, $\angle ABC = \angle ACB$. Следовательно, $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Задача № 13.*Ответ:* $\sqrt{3}$.

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов 2 и 3 соответственно, M и N — их точки касания со стороной RQ . Тогда, $RM = \frac{O_1M}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}$, $RN = \frac{O_2N}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Поэтому, $MN = RM - RN = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Задача № 14. (смотрите решение задачи № 13)*Ответ:* $3\sqrt{3}$.**Задача № 15.***Ответ:* $2R\sqrt{2}$.

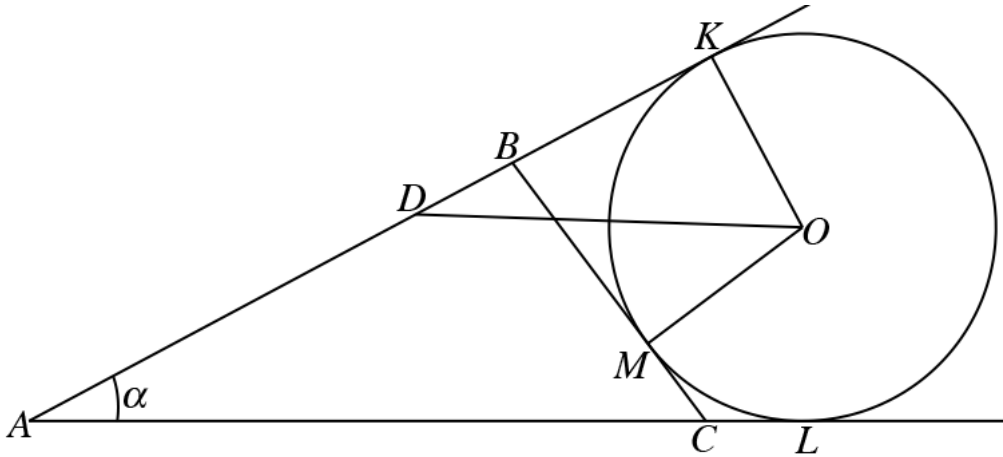
Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (R — радиус первой), C — вершина прямого угла. Тогда треугольник O_1CO_2 — прямоугольный. Поскольку точки O_1 и O_2 расположены на биссектрисе угла A , то $\angle O_1O_2C = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

O_1C — диагональ квадрата со стороной R , значит $O_1C = R\sqrt{2}$.

Следовательно, $O_1O_2 = 2O_1C = 2R\sqrt{2}$.

Задача № 16.

Ответ: $\frac{1}{2}p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.



1 способ:

Пусть M — точка касания данной окружности со стороной BC . Тогда $KB = BM$, $LC = CM$, $2p = AB + BC + AC = AK + AL$, а т.к. $AK = AL$, то $AK = p$.

Поэтому, $OK = AK \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = p \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $S_{\text{ДОК}} = \frac{1}{2}DK \cdot OK = \frac{1}{2}p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

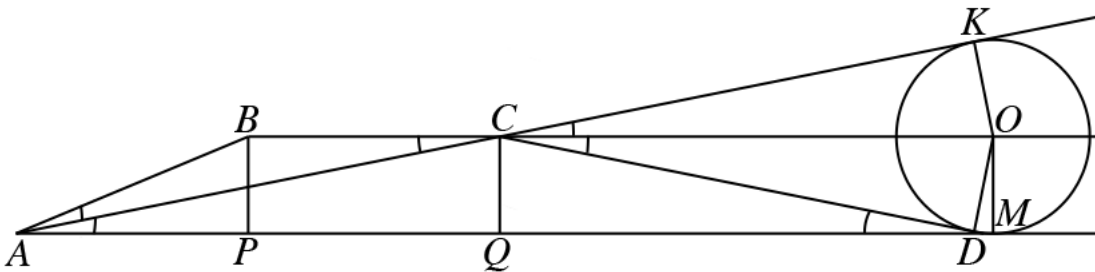
2 способ:

$AK = p$ (теорема о касательной к вневписанной окружности), $OK = p \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (соотношение между радиусом вневписанной окружности и периметром треугольника).

$S_{\text{ДОК}} = \frac{1}{2}DK \cdot OK = \frac{1}{2}p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Задача № 17.

Ответ: $\frac{315}{2}$.



Данная окружность — вневписанная окружность треугольника CAD , касающаяся стороны CD и продолжений сторон AC и AD . Пусть

$\angle ADC = \alpha$, $\angle BAD = 2\alpha$. O — центр окружности, P и Q — проекции вершин B и C меньшего основания трапеции на AD , M — точка касания с прямой AD , K — с прямой AC . Поскольку CO — биссектриса угла KCD , то

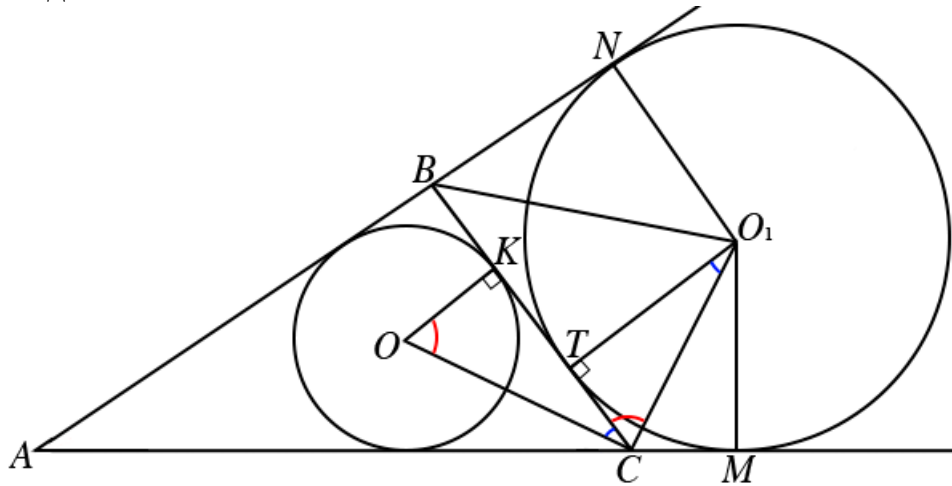
$\angle BCA = \angle KCO = \angle OCD = \angle CDA = \angle CAD = \angle BAC = \alpha$, $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ — равнобедренные.

Тогда $AB = BC = 13$, $BP = OM = 5$, $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

$$AD = AP + PQ + QD = 12 + 13 + 25 = 50.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + DC) \cdot BP = \frac{1}{2}(50 + 13) \cdot 5 = \frac{315}{2}$.

Задача № 18.



Пусть R — радиус внеписанной окружности, r — радиус вписанной. $\triangle CMO_1 \sim \triangle CKO$,

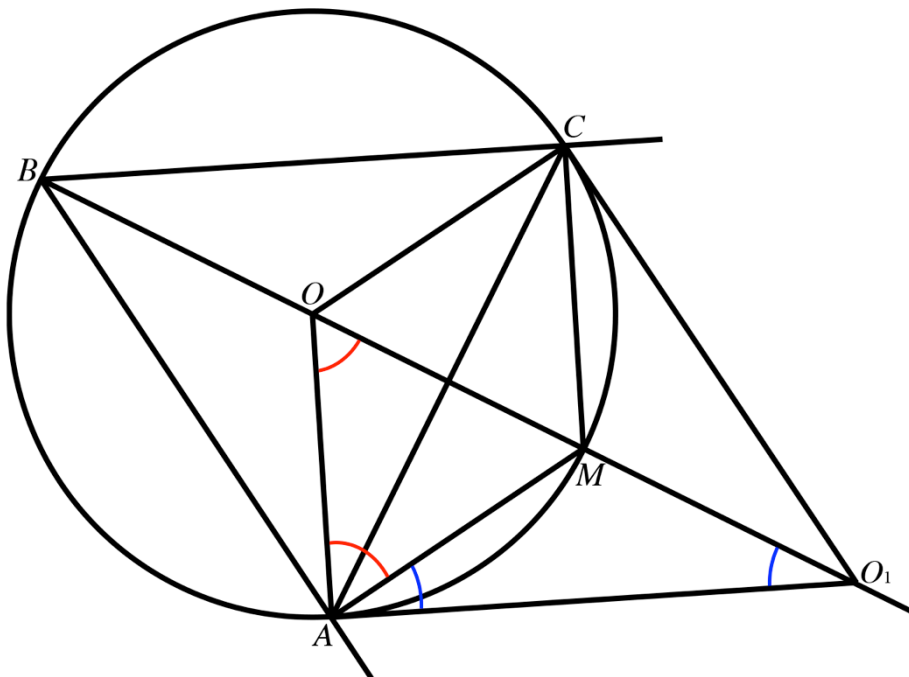
значит, $\frac{CM}{R} = \frac{r}{CK}$, $CK = p - c$, $CM = p - AC = p - b$.

Откуда, $\frac{p-b}{R} = \frac{r}{p-c}$ или $rR = (p-c)(p-b)$.

$$\text{Но } R = \frac{S}{p-a}, r = \frac{S}{p}, \text{ значит } rR = \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p} = (p-c)(p-b).$$

Отсюда следует формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Задача № 19.



Поскольку, $\angle AOM = \angle ABO + \angle OAB = \angle ACM + \angle OAB = \angle CAM + \angle OAC = \angle OAM$, то $\triangle OMA$ — равнобедренный, $MO = MA$. Аналогично докажем, что $MO = MC$.

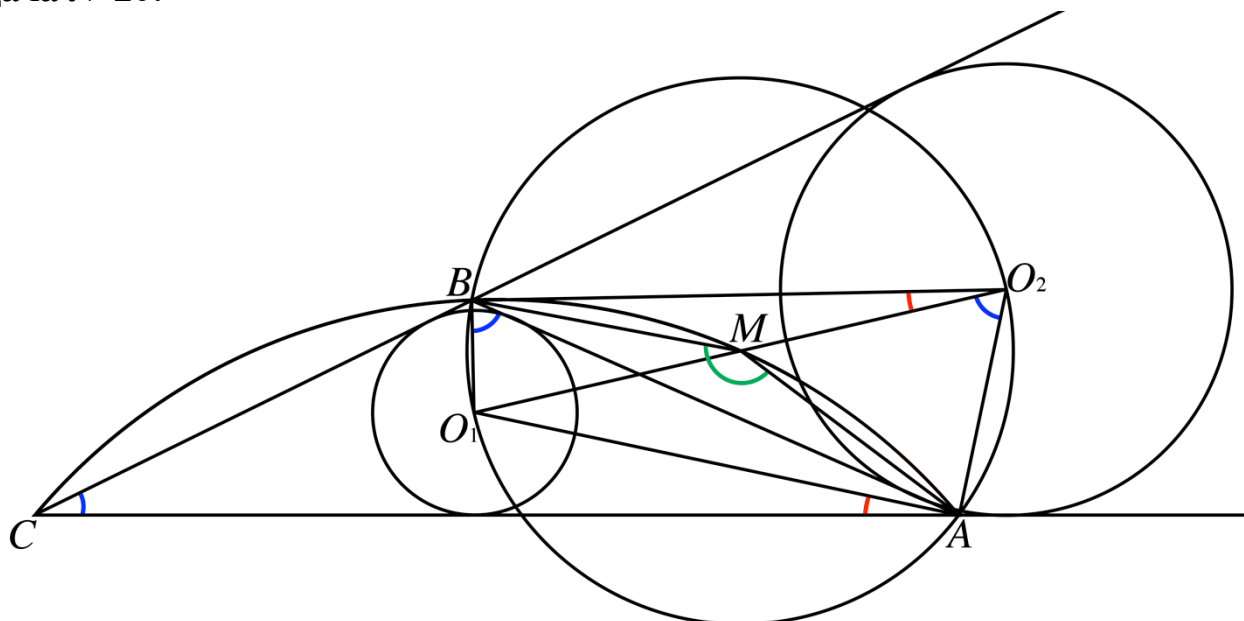
$\angle OAO_1$ — прямой как угол между биссектрисами смежных углов.

Обозначим $\angle AOM = \angle OAM = \varphi$, тогда $\angle MAO_1 = 90^\circ - \varphi$

Поэтому $\triangle AMO_1$ — равнобедренный и $MA = MO_1$. Следовательно, $MA = MO = MC = MO_1$.

Поэтому точки A, O, C, O_1 лежат на окружности с центром в точке M .

Задача № 20.



Пусть вневписанная окружность касается стороны AB $\triangle ABC$;

$\angle ABC = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle CBA = \gamma$.

O_1, O_2 — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно,

M — середина O_1O_2 . Поскольку отрезок O_1O_2 виден из точек A и B под прямым углом, то

M — центр окружности, описанной около четырёхугольника AO_1BO_2 . Тогда

$$\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 = \angle O_1BA + \angle O_1AB = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle AMB = 2\angle AO_2B = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно, точки A, C, B и M лежат на одной окружности, т.е. на окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача № 21.

Ответ: 5460.

Применяя соотношение 2: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, имеем $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} = \frac{1}{r}$, $r = \frac{14}{3}$.

Используя соотношение 6: $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$, получаем $S = \sqrt{9 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \frac{14}{3}} = 126$.

Ответ на вопрос задачи получим, воспользовавшись соотношением 1: $r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S}$,

то есть $abc = (r_a + r_b + r_c - r) \cdot S$. Итак, $abc = (9 + 18 + 21 - \frac{14}{3}) \cdot 126 = 5460$.

Задача № 22.

a) выразим все радиусы через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S}, r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \\ &= S \cdot \frac{p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= S \cdot \frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R \Rightarrow r_a + r_b + r_c = r + 4R. \end{aligned}$$

b) воспользуемся формулами $r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}$, имеем

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} = \frac{3p - 2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

c) из $r_a r_b r_c = rp^2 = rp \cdot p = Sp$.

$$\text{Следовательно } S = \frac{r_a r_b r_c}{p}.$$

d) используя формулы (b), (c) и $S = pr$ имеем:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c}{r_a r_b r_c} = \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c}{Sp} = \frac{p}{S}.$$

$$\text{Следовательно } r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = p^2.$$

e) используя формулу (c) и $S = pr$, имеем $r_a r_b r_c = Sp = rp^2$.

$$\text{f) используя формулу (c) и } S = pr, \text{ имеем } S = \frac{r_a r_b r_c}{p} = \frac{r_a r_b r_c}{\frac{S}{p}} \text{ или } S^2 = r_a r_b r_c r.$$

$$\text{Следовательно } S = \sqrt{r_a r_b r_c r}.$$

g) воспользуемся формулами $r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}$

$$\text{Значит, } \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{2p-b-c}{S} = \frac{a+b+c-b-c}{S} = \frac{a}{S} = \frac{a}{\frac{1}{2}ah_a} = \frac{2}{h_a},$$

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right).$$