Сборник задач

Задача № 1.
Сколько существует точек, равноудаленных от трех попарно пересекающихся прямых?

Задача № 2.
Дан равнобедренный ΔABC с основанием AC. Доказать, что конец D отрезка BD, выходящего из вершины B, параллельного основанию и равного боковой стороне треугольника, является центром вневписанной окружности треугольника.

Задача № 3.
В ΔABC $\angle B = 120^\circ$. AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисы углов треугольника.

a) Найти $\angle A_1B_1C_1$.

b) Найти $\angle B_1C_1C$.

Подсказка: доказать, что A_1 — центр вневписанной в ΔAB_1C_1 окружности,
C_1 — центр вневписанной в ΔA_1B_1C окружности.

Задача № 4.
Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей ΔABC, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A, B и C — основания высот $\Delta O_1O_2O_3$.
Подсказка: угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

Задача № 5.
Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей ΔABC, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно. Постройте ΔABC.

Задача № 6.
Дан ΔABC. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что $\Delta O_1O_2O_3$ — остроугольный.

Задача № 7.
Пусть вневписанные окружности треугольника, касающиеся сторон AC и BC, касаются прямой AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина стороны AB совпадает с серединой отрезка PQ.

Задача № 8.
Пусть r — радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжения катетов прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c.

Докажите, что $r = \dfrac{a+b+c}{2} = p$.

Подсказка: четырёхугольник, образованный прямыми, содержащими катеты и радиусами, проведёнными в точки касания с продолжениями катетов, —квадрат.

Задача № 9.
В прямой угол с вершиной C вписаны две окружности, которые не пересекаются. К этим окружностям проведена общая касательная, которая пересекает угол в точках A и B. Найдите площадь ΔABC, если радиусы окружностей равны R_1 и R_2.

Задача № 10.
Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. На сторонах BC и CD даны точки M и N такие, что периметр ΔCMN равен $2a$. Найдите $\angle MAN$.

Задача № 11.
Докажите, что катет прямоугольного треугольника равен сумме радиуса вписанной окружности и радиуса вневписанной окружности, касающейся этого катета.
Подсказка: Пусть BC — катет прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$).
Докажите, что расстояние от вершины B до точки касания гипотенузы с вписанной окружностью равно радиусу вневписанной окружности, касающейся катета BC.

Задача № 12.
На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой – точки B и C, причём точка B лежит между O и C . Проведена окружность с центром O_1, вписанная в ΔOAB , и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC ΔAOC.
Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то ΔABC – равнобедренный.
Подсказка: Докажите, что $\angle AO_1O_2 = \dfrac{1}{2}\angle ABC$ и $\angle AO_2O_1 = \dfrac{1}{2}\angle ACB$

Задача № 13.
В ΔPQR $\angle QRP = 60°$. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.
Подсказка: центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Задача № 14.
Окружность радиуса 3, вписанная в ΔABC, касается стороны BC в точке D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC и касается стороны BC в точке E. Найдите ED, если $\angle BCA = 120°$.

Задача № 15.
В ΔABC с $\angle C = 90°$ и $\angle A = 30°$, вписана окружность радиуса R. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
Подсказка: пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, C — вершина прямого угла ΔABC. Тогда ΔO_1CO_2 — прямоугольный. Найдите его углы.

Задача № 16.
В ΔABC с периметром $2p$ острый угол BAC равен α. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжения сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Точка D лежит внутри отрезка AK, $AD = a$. Найдите площадь ΔDOK.
Подсказка: отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны между собой.

Задача № 17.
В трапеции $ABCD$ основание BC равно 13, а $\angle BAD$ острый и вдвое больше $\angle ADC$. Окружность с центром на прямой BC касается прямых AC, AD и отрезка CD. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что радиус окружности равен 5.
Подсказка: докажите, что AC — биссектриса $\angle BAD$ и найдите $\cos\angle BAD$.

Задача № 18.
Докажите формулу Герона для площади треугольника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Задача № 19.
Продолжение биссектрисы $\angle B$ ΔABC пересекает описанную окружность в точке M; O — центр вписанной окружности, O_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, O и O_1 лежат на окружности с центром в точке M.
Подсказка: докажите, что ΔOMA и ΔAMO_1 — равнобедренные.

Задача № 20.
Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.
Подсказка: пусть вневписанная окружность касается стороны AB ΔABC. Точки A, B и центры O_1 и O_2 вписанной и вневписанной окружностей лежат на окружности с центром в середине отрезка O_1O_2

Задача № 21.
Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его вневписанных окружностей равны 9,18 и 21.

Задача №22.
Доказать соотношения:

a) сумма радиусов вневписанных окружностей равна сумме радиуса вписанной окружности и удвоенному и удвоенного диаметра описанной окружности: $r_a + r_b + r_c = r + 4R$;

b) сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вневписанной окружности: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$;

c) площадь треугольника равна отношению произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей к полупериметру треугольника: $S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$;

d) сумма всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей равна квадрату полупериметра треугольника: $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$;

e) произведение всех трех радиусов вневписанных окружностей равно произведению радиуса вписанной окружности на квадрат полупериметра треугольника: $r_a r_b r_c = rp^2$;

f) площадь треугольника равна квадратному корню из произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей и радиуса вписанной окружности: $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$;

g) величина, обратная высоте треугольника, опущенной на его данную сторону, равна полусумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right), \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a}\right), \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right);$$