Granice ciągów

Witold Obłoza

18 lipca 2019

Ciągi monotoniczne, arytmetyczne i geometryczne

Definicja 1 Ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ nazywamy rosnącym (odpowiednio malejącym, nierosnącym, niemalejącym) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall k \in \mathbb{N}^\star \quad a_{k+1} > a_k$ (odpowiednio $a_{k+1} < a_k$, $a_{k+1} \leq a_k$, $a_{k+1} \geq a_k$).

Definicja 2 Ciąg liczbowy nazywamy arytmetycznym (geometrycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad a_{n+1} - a_n = r$ (odpowiednio $\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$).

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Uwaga 3 Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ jest arytmetyczny (geometryczny), to $a_n = a_1 + (n-1)r$ (odpowiednio $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$).

Jeżeli $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, to

dla ciągu arytmetycznego $S_n = n\dfrac{a_1 + a_n}{2} = n\dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2}$,

zaś dla ciągu geometrycznego $S_n = a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Ciągi ograniczone

Definicja 4 Ciąg liczbowy nazywamy ograniczonym z dołu (z góry) jeżeli istnieje takie m (odpowiednio M), że dla każdego $n \in \mathbb{N}^*$ zachodzi nierówność $a_n \geq m$ (odpowiednio $a_n \leq M$).

Jeżeli ciąg jest ograniczony z góry i z dołu, to mówimy, że jest ograniczony.

Uwaga 5 Ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}^*$ zachodzi nierówność $|a_n| \leq M$.

GRANICE CIĄGÓW

Definicja 6 Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę właściwą $g \in \mathbb{R}$ przy n zmierzającym do nieskończoności i zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; \forall n > n_0 \quad |a_n - g| < \varepsilon$.

Przykład 7 Pokazać, że $\lim \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

GRANICE CIĄGÓW

Uwaga 8 Warunki poniższe są warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, aby liczba g była granicą ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ przy n zmierzającym do nieskończoności:

a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - g| < \varepsilon,$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - g| \leq \varepsilon,$

c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |a_n - g| \leq \varepsilon.$

Definicja 9 Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$ ($-\infty$) przy n zmierzającym do nieskończoności i zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall M \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \quad a_n > M$ (odpowiednio $a_n < M$).

GRANICE CIĄGÓW

Przykład 10 Pokazać, że $\lim \frac{n^2-1}{3n+1} = \infty$.

Twierdzenie 11 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|a_n|} = \infty$.

(Przy założeniu, że $\forall n \in \mathbb{N}^\star \; a_n \neq 0.$)

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie.

GRANICE CIĄGÓW

Twierdzenie 12 Jeśli ciąg ma granicę, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie

Twierdzenie 13 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ zaś ciąg $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie.

TWIERDZENIA O GRANICACH

Twierdzenie 14 Jeżeli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to istnieją granice
$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$,
$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$,
$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$.
Ponadto $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,
$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
Jeżeli $b \neq 0$ i $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0$ istnieje też
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

TWIERDZENIA O GRANICACH

Twierdzenie 15 (o trzech ciągach)
Jeżeli $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \ a_n \geq b_n \geq c_n$ oraz istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

DOWÓD. Z definicji granicy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n > n_1 \ a + \varepsilon > a_n$

oraz
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \ \forall n > n_2 \ a - \varepsilon < c_n.$

Wówczas dla $n > n_3 = max\{n_0, n_1, n_2\}$

$a - \varepsilon < c_n \leq b_n \leq a_n < a + \varepsilon.$

Stąd istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

TWIERDZENIA O GRANICACH

Twierdzenie 16 (o monotoni)
Jeżeli $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \ a_n \geq b_n$ oraz istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to $a \geq b$.

Jeżeli $b = \infty$, to $a = \infty$.

Jeżeli $a = -\infty$, to $b = -\infty$.

Dowód: Przypuśćmy, że $a < b$ wówczas dla $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ z definicji granicy mamy $\exists n_1 \ \forall n > n_1 \ |a_n - a| < \varepsilon$ oraz $\exists n_2 \ \forall n > n_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$.

Dla $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ zachodzą nierówności $a_n > b_n$ oraz $a_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < b_n$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a \geq b$.

GRANICE SPECJALNE

Twierdzenie 17 Zachodzą następujące równości:

0) Granica ciągu stałego $\{a_n\}$ takiego, że $\forall n \in \mathbb{N}^\star \; a_n = c$ jest równa c.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{gdy } \alpha > 0, \\ 1 & \text{gdy } \alpha = 0, \\ 0 & \text{gdy } \alpha < 0 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1$, gdzie $A > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } q > 1, \\ 1 & \text{gdy } q = 1, \\ 0 & \text{gdy } |q| < 1, \\ \textit{nie istnieje} & \text{gdy } q \leq -1. \end{cases}$

GRANICE SPECJALNE

5) Istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$

Ponadto

6) jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich jest ograniczony przez liczby dodatnie, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$

w szczególności, jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = g \in (0,\infty)$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$

7) jeżeli $\forall n\ a_n \neq 0$ i $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, to

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$

GRANICE SPECJALNE - PRZYKŁADY

Przykład 18 Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n^2+2n+1}{2n^3+3n^2+n+4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+4n+1}{3n^2+2n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n+1}{n^3+n+2}.$$

Przykład 19 Uzasadnić twierdzenie: Jeżeli $a_m \neq 0$ i $b_k \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{p=0}^{m} a_p \cdot n^p}{\sum\limits_{p=0}^{k} b_p \cdot n^p} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_k} & gdy \quad m = k \\ sign(\frac{a_m}{b_k}) \cdot \infty & gdy \quad m > k \\ 0 & gdy \quad m < k \end{cases}$$

GRANICE SPECJALNE - PRZYKŁADY

Przykład 20 Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n), \qquad \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{8n^3+12n^2+4n+1}-2n),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+6)!}{(3n^3+3)^3\cdot(2n-3)!}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{65\cdot 4^{2n-3}+31\cdot 2^{3n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-7n}{4n^2-1}\right)^{-7n-6} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{216^{n+1}+61^{n-12}}{(2^{3n}+3^{19})\cdot(3^{3n+1}-7)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4\sqrt{n+1}+3)^8\cdot(n^3+1)}{(4n+4)^7}.$$

GRANICE CIĄGÓW

Definicja 21 Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall m, n > n_0 \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$.

Twierdzenie 22 Każdy ciąg zbieżny do granicy właściwej jest ciągiem Cauchy'ego.

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie 23 W zbiorze liczb rzeczywistych każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę właściwą bedącą liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 24 Ciąg niemalejący (nierosnący) i ograniczony z góry (odpowiednio z dołu) jest zbieżny do granicy właściwej.

GRANICE CIĄGÓW

Definicja 25 Dla danego $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciągu liczbowego i ciągu rosnącego $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ o wyrazach naturalnych różnych od zera ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definicja 26 Jeżeli $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podciąg ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę właściwą g przy k zmierzającym do nieskończoności, to liczbę g nazywamy punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = -\infty$), to mówimy, że ∞ (odpowiednio $-\infty$) jest niewłaściwym punktem skupienia ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

TWIERDZENIA O GRANICACH

Twierdzenie 27 Każdy ciąg ograniczony posiada właściwy punkt skupienia należący do $[\inf\{a_n\}, \sup\{a_n\}]$.

Twierdzenie 28 Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy g jest jedynym punktem skupienia tego ciągu.

Twierdzenie 29 Każdy ciąg mający granicę właściwą jest ograniczony.

SYMBOLE OZNACZONE

Definicja 30 Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zmierza do 0 po wartościach dodatnich (ujemnych) wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n > 0$ (odpowiednio $\exists n_0 \forall n > n_0 \ a_n < 0$) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^+$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^-$).

Twierdzenie 31 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0^-$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = -\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_n} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{b_n} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{a_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{b_n} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{a_n} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{b_n} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n \cdot c_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} p_n \cdot d_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} q_n \cdot c_n = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n \cdot d_n = \infty.$$

SYMBOLE OZNACZONE

DOWÓD. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^+ \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists n_1 :\ \forall n \geq n_1\ 0 < a_n < \frac{c}{2M}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c > 0 \Rightarrow \exists n_2 :\ \forall n \geq n_2\ c_n > \frac{c}{2}$.

Dla $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}\ \frac{c_n}{a_n} > \frac{c}{2} \cdot \frac{2M}{c} = M$.

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = \infty$.

Twierdzenie 32 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, gdzie $c > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, to $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{h_n} = c^h$.

SYMBOLE OZNACZONE

Twierdzenie 33 Jeżeli $\lim_{n\to\infty} c_n = c \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} q_n = -\infty$ i $c < 1$, to
$\lim_{n\to\infty} c_n^{p_n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n^{q_n} = \infty$,
gdy $c > 1$, to
$\lim_{n\to\infty} c_n^{q_n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n^{p_n} = \infty$.

Twierdzenie 34 Jeżeli
$\lim_{n\to 0} a_n = a$, $\lim_{n\to 0} b_n = b$,
gdzie $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ $a_n, a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ i $b_n, b \in (0,\infty)$, to istnieje $\lim_{n\to\infty} \log_{a_n} b_n$ i ponadto $\lim_{n\to\infty} \log_{a_n} b_n = \log_a b$.

Uwaga 35 Na mocy powyższych twierdzeń symbole
$\frac{a}{0^+}$, $\frac{a}{0^-}$, $\frac{\pm\infty}{0^+}$, $\frac{\pm\infty}{0^-}$, $\pm\infty \cdot a$ oraz $c^{\pm\infty}$ dla $c \neq 1$ i $a \neq 0$ są symbolami oznaczonymi.

SYMBOLE NIEOZNACZONE

Twierdzenie 33 Symbolami nieoznaczonymi są
$"0 \cdot (\pm\infty)"$, $"\dfrac{0}{0}"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$, $"\infty - \infty"$, $"0^0"$, $"\infty^0"$, $"1^{\pm\infty}"$.

Uzasadnienie: $"0 \cdot (\pm\infty)"$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

Dla $a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Dla $a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Kryteria zbieżności ciągów liczbowych do zera

Twierdzenie 34 Załóżmy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$.
Jeżeli $g < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie 35
Załóżmy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = g$.
Jeżeli $g < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie.

Wnioski z kryteriów zbieżności ciągów liczbowych do zera

Przykład 36 Pokazać, że dla $a > 1, k \in \mathbb{R}$ ciągi $\frac{n^k}{a^n}$, $\frac{a^n}{n!}$, $\frac{n!}{n^n}$ mają granice równe zero.

Uwaga 37 Możemy napisać, że dla $a > 1, k \in \mathbb{R}$ mamy $n^k << a^n << n! << n^n$ rozumiejąc, że następny ciąg zmierza szybciej do nieskończoności niż poprzedni.

Przykład 38 Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+1} + 4^{n-7}}{(2^{n-3} + n^{20}) \cdot (3^{n-3} - 8)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^{2n+5} n^7 - 10^{n-14} n^3}$$

andobn 32