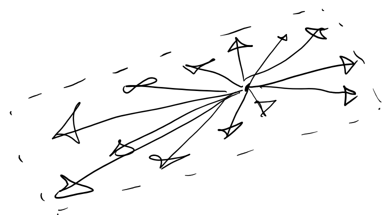
Bevis for massetetthetsfunksjon

lørdag 7. juli 2018 23:31

ØNSKER EN FUNKSJON $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ FOR MASSETETTHETEN AV ET REKTANGULÆRT PRISME, MED VARIERENDE MASSETETTHET ρ SLIK AT ρ MINKER PROPOSJONALT MED AVSTANDEN FRA ORIGO,

SOM ILLUSTRERT I FØLGENDE SKISSE



DETTE KAN REPRESENTERES MED FAKTOREN $\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}$ SOM KUN ER α I ORIGO. α REPRESENTERER DERMED STØRSTE MASSETETTHET.

LA VOLUMET VÆRE REPRESENTERT VED $V = a \cdot b \cdot c$, MED ENHET m^3 HVOR a, b, c ER SIDEKANTENE TIL PRISMET, OG LA m VÆRE DEN TOTALE MASSEN, MED ENHET kg.

VI HAR

$$z \in [nL_z, oL_z]$$

$$y \in [nL_y, oL_y]$$

$$x \in [nL_x, oL_x]$$

MÅ DA BESTEMME α SLIK AT $\frac{1}{m} \int\int\int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} \, dx\,dy\,dz = \frac{1}{V}$ DA $\frac{1}{\cancel{kg}} \cdot \frac{\cancel{kg}}{m^3} = \frac{1}{m^3}$

SIDEN α, V OG m ER KONSTANTER HAR VI

$$\frac{\alpha}{m} \int\int\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} \, dx\,dy\,dz = \frac{1}{V}$$

SÅ

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{V}{m} \int\int\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} \, dx\,dy\,dz$$

SOM MÅ STEMME DA

$$\frac{kg}{m^3} \cdot m^3 = kg$$

$$m = \iiint \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} \cdot V \, dx\,dy\,dz$$

$$m = \alpha\, a\, b\, c \int_{-dz}^{dz}\int_{-dy}^{dy}\int_{-dx}^{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}\, dx\,dy\,dz$$

OG DERMED KAN MAN BESTEMME α FOR HVER LINK SLIK AT FUNKSJONEN f GITT VED

$$f(x,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}$$

ER EN OK TILNÆRMING TIL FORDELINGEN AV MASSETETTHETEN. DET ER VERDT Å MERKE SEG AT MASSESENTERET IKKE NØDVENDIGVIS LIGGER PÅ LIKEVEKTS/BALANSE-PUNKTET FOR LINKEN. DETTE ER IKKE TATT HØYDE FOR I UTREGNINGENE, MAN HAR ANTATT AT BALANSEPUNKT == MASSESENTER. DETTE KUNNE FORØVRIG BLITT LØST VED Å INTRODUSERE ET KRAFTBEGREP SOM TOK HØYDE FOR LENGDEN. FORØVRIG ANTAS DET AT FUNKSJONEN f OVER ER EN GOD NOK TILNÆRMING. OM IKKE, KAN POENGET OVER UNDERSØKES.

MAN KUNNE PRØVD NOE I DENNE DUREN:

I ET GITT PUNKT

I ET ANNET GITT PUNKT

$$\underbrace{m_1 \cdot L_1}_{} = \underbrace{m_2 \cdot L_2}_{}$$

$$\frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot \cancel{m^3}$$

$$\frac{\alpha \cdot a \cdot b \cdot c \sqrt{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}}{\sqrt{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}+1} = \underbrace{\frac{\alpha \cdot a \cdot b \cdot c \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}}_{\text{MASSE} \cdot \text{AVSTAND}}$$

HVIS SUMMEN AV PRODUKTENE AV MASSE · AVSTAND ER SYMETRISK OM ORIGO, NÅR MAN TAR HØYDE FOR FORSKJELLIG AVSTAND PÅ NEGATIV OG POSITIV AKSE, LANGS ALLE AKSER, SÅ ER ORIGO ET BALANSEPUNKT.

MAO

$$\int_{-L_z}^{0}\int_{-L_y}^{0}\int_{-L_x}^{0} \frac{\alpha \cdot a \cdot b \cdot c\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}\,dx\,dy\,dz$$

$$\parallel$$

$$\int_{0}^{L_z}\int_{0}^{L_y}\int_{0}^{L_x} \frac{\alpha \cdot a \cdot b \cdot c\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}\,dx\,dy\,dz$$

MEN HER ER FUNKSJONEN 0 I ORIGO, SÅ KANSKJE

$$\frac{\alpha\left(1+abc\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}$$

ER EN BEDRE REPRESENTASJON. FORØVRIG ENDER MAN OPP MED TO FORSKJELLIGE α, DA GRENSENE ER ULIKE. DERMED VIL FUNKSJONEN SE NOE LIGNENDE UT

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1\left(1+abc\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\alpha_2\left(1+abc\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1} & x < 0 \end{cases}$$

NÅR $\alpha_1 > \alpha_2$. OG DERMED BLIR INTEGRALENE LITT KOMPLISERT, OG NEPPE VERDT BRYET.