# Uegentlig integraler

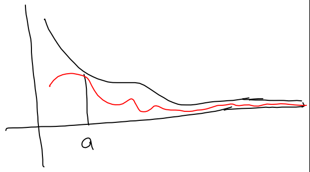
$f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ kontinuerlig:

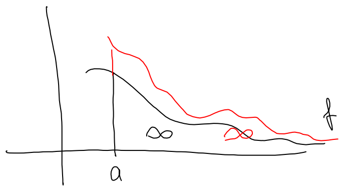
$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ forutsatt at denne grensen eksisterer. I så fall sier vi at $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, hvis ikke divergerer det.

**Setning:** $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer for $p>1$ og divergerer for $p \le 1$.

**Observasjon:** a) Hvis $0 \le g(x) \le f(x)$ og $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, så konvergerer også $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

b) Hvis $0 \le f(x) \le g(x)$ og $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerer, så divergerer også $\int g(x)\,dx$.




Sammenligningstest.

**Grensesammenligningskriteriet:** Anta at $f, g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ er positive og kontinuerlig.

(i) Anta at $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerer og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

så konvergerer også $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

(ii) Anta at $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerer og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

så divergerer også $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

**Eksempel:** Avgjør om $\int_1^\infty \frac{2x}{x^3+2x+1}\,dx$ konvergerer eller divergerer.
$- f(x)$

Hva skjer med brøken når $x$ blir stor: $\frac{2x}{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \underbrace{\frac{2}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}$

Samme størrelsesorden som $\frac{1}{x^2}$

Vet at $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerer?
$- g(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}{\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 2 < \infty$$

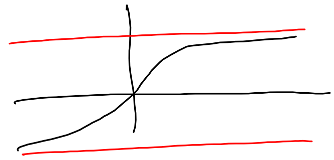
I følge grensesammenligningskriteriet betyr dette at

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^3+2x+1}\,dx \text{ konvergerer.}$$

**Eksempel:** Konvergerer eller divergerer $\int_1^\infty \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}^{f(x)}}_{\downarrow\, 0} dx$

Sammenligner med $g(x) = \frac{1}{x}$

Vet at $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \underline{1} > 0$$

Siden $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer, gjør $\int\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)dx$ det også!

Hvorfor akkurat $\frac{1}{x}$? Og ikke $\frac{1}{x^2}$ eller $\frac{1}{x^{1/2}}$ eller ...

**Triks:** Sammenligner med en generell $\frac{1}{x^p}$ og finner ut hvilken $p$ som er best etterpå.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-p}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-p\,x^{-p-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{p\,\frac{1}{x^{p+1}}} = \frac{1}{p} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}}{1+x^2}$$

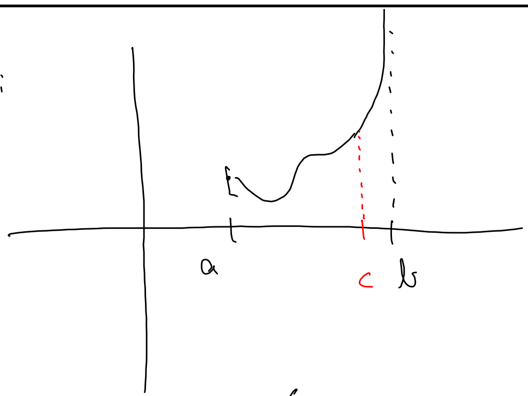
Haha, lurt å bruke $p = \underline{1}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

PANIKKHJELP 16 $\longrightarrow \infty$

okt 28-12:38

Tilfellet:

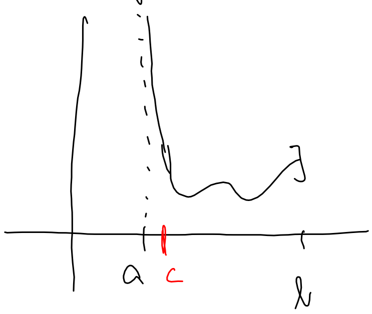



$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

forutsatt at denne grensen eksisterer. I så fall sier vi at integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer; hvis ikke sier vi at det divergerer.

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$



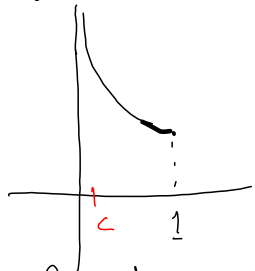

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

forutsatt at grensen eksisterer osv.....

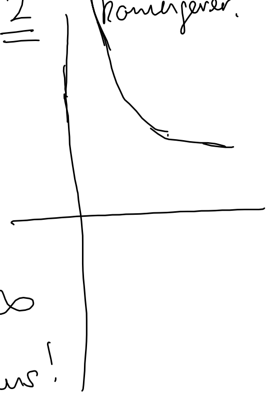
Eksempel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left[2-2\sqrt{c}\right] = \underline{\underline{2}}$$




konvergerer.



Eksempel:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{c}\right] = \infty$$

divergerer!

Slutning: Integralet $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer for $p<1$ og divergerer for $p\geq 1$.