

Mat 1100 Obligatorisk oppgave 1

Høsten 2012

Innleveringsfrist: *Torsdag 27. september kl. 14.30.*

Sted for innlevering: *7. etasje, Niels Henrik Abels hus. Det blir ofte kødannelse ved innleveringstidspunktet, så det kan være lurt å ikke komme rett før kl. 14.30. Husk å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk.*

Instruksjoner: *Studenter som ikke får oppgaven godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60 % score. Det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle delspørsmål (punktene a, b osv) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til riktig svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Oppgaven skal leveres med en egen forside, som du finner på

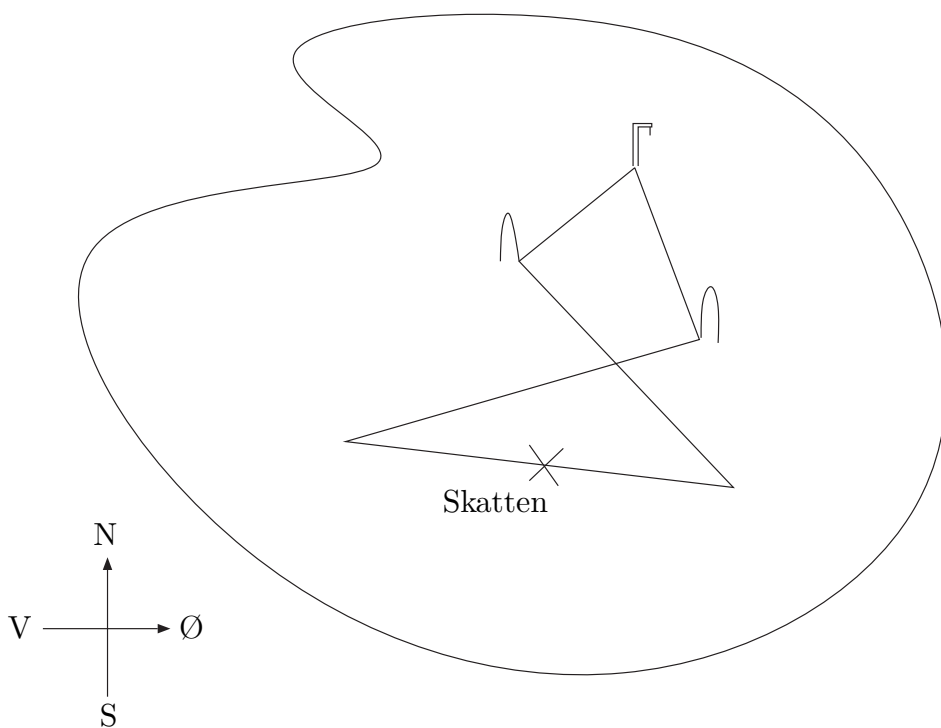
www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/obligforside.pdf

LYKKE TIL!

Oppgave 1

Du har funnet et gammelt sjørøverkart som viser en skatt begravet på en øde øy. På baksiden av kartet står det hvor øya ligger, og det står også:

Start ved galgen og gå til den østligste gravsteinen mens du teller antall skritt. Drei så 90 grader med klokken, og gå dobbelt så mange skritt. Sett merke der du nå er. Start ved galgen igjen, og gå til den vestligste gravsteinen mens du igjen teller antall skritt. Drei 90 grader mot klokken, og gå dobbelt så mange skritt som du gikk fra galgen denne gangen. Skatten ligger begravd midt mellom stedet du er nå og stedet der du satte merke i sted.



Du drar til øya for å finne skatten, og de to gamle gravsteiene står der fortsatt. Men galgen er borte! Som Mat1100-student har du imidlertid kjennskap til komplekse tall, og ved hjelp av dette kan du finne skatten likevel.

- Skriv de to komplekse tallene i og $-i$ på eksponentiell form.
- La $z = re^{i\theta}$ være et komplekst tall, der $r \neq 0$. Skriv de to tallene iz og $-iz$ på eksponentiell form. Lag en illustrasjon som viser hvordan z , iz og $-iz$ ligger i det komplekse plan. Hvis du tenker på z som en vektor, hva skjer med vektoren når z ganges med i ? Med $-i$?

- c) Vi skal nå legge kartet over øya inn i det komplekse plan. Vi velger origo som galgen. La z og w være posisjonene til henholdsvis vestligste og østligste gravstein. Vis at skattens posisjon da kan skrives

$$\frac{1}{2}[(z + 2iz) + (w - 2iw)].$$

- d) Vis at skattens posisjon også kan skrives

$$w + \frac{1}{2}(z - w) + i(z - w).$$

Forklar hvordan dette uttrykket kan brukes til å lage en oppskrift for å finne skatten, uten at man vet hvor galgen lå på øya.

Oppgave 2

- a) Finn den reelle, positive løsningen av likningen

$$x = 1 + \sqrt{x}.$$

Illustrer løsningen ved en figur som viser grafene til de to funksjonene $f(x) = x$ og $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ for $x \geq 0$.

- b) Betrakt følgen definert ved at $x_1 = 4$ og

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Anta at $x_n > 1 + \sqrt{x_n}$ for en gitt $n \geq 1$. Vis at i så fall er

$$x_{n+1} < x_n \quad \text{og} \quad x_{n+1} > 1 + \sqrt{x_{n+1}}.$$

Bruk dette til å vise at følgen er avtakende og nedad begrenset.

- c) Vis at følgen fra b) konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

Oppgave 3

- a) Finn alle komplekse løsninger av likningen

$$z^5 + 16z = 0.$$

- b) Skriv løsningene fra a) på rektangulær form. Finn den komplekse og den reelle faktoriseringen av polynomet $P(z) = z^5 + 16z$.

SLUTT