3.5.4. • Vis at -2 er en rot i $P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 2$

Nok å regne ut

$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2$$
$$= -8 + 8 - 2 + 2$$
$$= 0$$

• Finn reell og komplekse faktorisering

$n = 3$

– Vet at $(z - (-2)) = (z+2)$ er en faktor i $P(z)$.

– POLYNOMDIVISJON

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 : z + 2 = z^2 + 1$$
$$-(z^3 + 2z^2)$$
$$0 + 0 + z + 2$$
$$-(z+2)$$
$$0$$

– $z^3 + 2z^2 + z + 2 = (z+2)(z^2+1)$

– Finne røtter til $z^2 + 1$

$$z^2 + 1 = 0$$
$$z^2 = -1$$
$$z = \pm i$$

$z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$

Reelle faktorisering: $P(z) = (z+2)(z^2+1)$

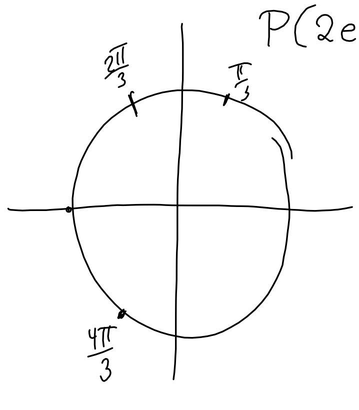
Komplekse faktorisering: $P(z) = (z+2)(z-i)(z+i)$

3.5.8. Skal vise at $1+i\sqrt{3}$ er rot i $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$

- Hvis $1+i\sqrt{3}$ er rot, så er $1-i\sqrt{3}$ også en rot. iz^2
- $P(1+i\sqrt{3})$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \qquad 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\theta: \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$



$$P(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^4 + 4(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 + 16$$

$$= 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} + 4 \cdot 2^2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} + 16$$

$$= 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + 1\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} + \cancel{i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + 1\right)$$

$$= 0$$

- $1+i\sqrt{3}$ og $1-i\sqrt{3}$ er røtter

$w \cdot \bar{w} = |w|^2$

$$\underline{(z-(1+i\sqrt{3}))}(z-(1-i\sqrt{3})) = z^2 - z(1-i\sqrt{3}) - z(1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$$

$$= z^2 - z + \underline{zi\sqrt{3}} - z - \underline{zi\sqrt{3}} + 4$$

$$= \underline{z^2 - 2z + 4}$$ er en faktor i $P(z)$

- Polynomdivisjon:

$$z^4 + 4z^2 + 16 : (z^2 - 2z + 4) = \underline{\underline{z^2 + 2z + 4}}$$

$$-(z^4 - 2z^3 + 4z^2)$$

$$0 + 2z^3 + 0 + 16$$

$$-(2z^3 - 4z^2 + 8z)$$

$$0 + 4z^2 - 8z + 16$$

$$-(4z^2 - 8z + 16)$$

$$0$$

- abc på z^2+2z+4:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$z = -1 \pm \frac{\sqrt{-12}}{2}$$

$$z = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\underline{z = -1 \pm i\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{(-1) \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt{(-1)} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \underline{i \cdot 2\sqrt{3}}$$

- Reell faktorisering: $P(z) = \underline{(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 2z + 4)}$
- Kompleks faktorisering: $P(z) = \underline{(z - (1+i\sqrt{3}))(z - (1-i\sqrt{3}))(z - (-1+i\sqrt{3}))(z - (-1-i\sqrt{3}))}$

ikke på sirkel.

$z^n = w$ $\qquad$ $z^n - w = 0$

Røttene jevnt fordelt på sirkel

<u>Spesialtilfelle!</u>