Problemsett 9, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. (Eksamen 2006) I denne oppgava er $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen $h(x) = f(x)/g(x)$ er strengt voksende, så er også funksjonen
$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}$$
definert for $x > 0$ strengt voksende. (Hint: La $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved F, G, f og g. Du kan få bruk for dette resultatet fra Kalkulus:

   Cauchys middelverdisetning: Anta at $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Dersom $G(b) \neq G(a)$, finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at
$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$
   (Vi kan få en formel som også gjelder når $G(b) = G(a)$ ved å bruke den litt mindre oversiktlige skrivemåten $(F(b) - F(a))G'(c) = (G(b) - G(a))F'(c)$.))

2. (Konteeksamen 2007) I denne oppgava er a og b to reelle tall, $a < b$ og $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon. Vis at dersom den deriverte f' er begrensa, så er f det også.

3. La $f : [0, 1] \to [0, 1]$ være kontinuerlig. Vis at f må ha et fikspunkt. (Et fikspunkt for en funksjon f er et punkt x så $f(x) = x$.) Gjelder nødvendigvis det samme for en kontinuerlig $g : (0, 1) \to (0, 1)$?

4. La $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ være 2 kontinuerlige funksjoner slik at $f(g(x)) = g(f(x))$ for alle $x \in [0, 1]$. Vis at det finnes en $y \in [0, 1]$ slik at $f(y) = g(y)$.

5. La $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig, og anta at $f(q) = 0$ for alle $q \in \mathbb{Q}$. Vis at $f(x) = 0$ for alle $x \in [0, 1]$.

6. Definer en reell funksjon f på $(0, 1)$ ved
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for irrasjonale } x \in (0,1) \\ \frac{1}{q} & \text{for } x = p/q \text{ hvor } p \text{ og } q \text{ der } p < q \text{ er naturlige tall uten felles faktorer}. \end{cases}$$
   Finn, med bevis, alle kontinuitetspunkter for f.

7. (Bonusnøtt) La $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ slik at $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Vis at $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq -abn$.