Multiplikasjon av matriser

$m \times n$-matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1\text{-matrise}}$ $\quad \vec{x} = \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{1 \times n\text{-matrise}}$

Transformasjoner:

$$\underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y}} = \underbrace{A}_{m \times n} \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Hvordan multipliserer vi matriser?

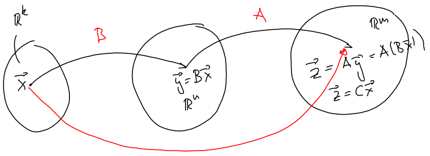
1. forsøk: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}$$

← Hadamard-produktet.

Fornuftig, men ikke så vanlig.

2. forsøk: B $n \times k$-matrise
A $m \times n$-matrise



$C = \underbrace{AB}$ produktet av A og B.

Produktet $C = AB$ av en $m \times n$-matrise A og en $n \times k$-matrise B er en $m \times k$-matrise gitt ved

$$\begin{array}{c} \text{j-te søyle} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \text{ i-te rad} = \underset{A}{\begin{pmatrix} \\ a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in} \\ \\ \end{pmatrix}} \text{ i-te rad} \quad \begin{array}{c} \text{j-te søyle} \\ \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}} \end{array}$$

Komponent c_{ij} er skalarproduktet av i-te rad i A med j-te søyle i B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Eksempel: $A = \underset{3 \times \cancel{3}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$ $\quad B = \underset{\cancel{3} \times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$

$C = 3 \times 2$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 4(-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Setning: Anta at A er en $m \times n$-matrise og B er en $n \times k$-matrise. Da er $C = AB$ $m \times k$-matrisen slik at for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$, så er

$$(AB)\vec{x} = C\vec{x} = A(B\vec{x}).$$

Regneregler for matriseprodukt: Anta at A, B, C har dimensjoner så uttrykkene gir mening.

(i) Assosiative lov: $(AB)C = A(BC)$

(ii) Distributive loven: $A(B+C) = AB + AC$

$$(A+B)C = AC + BC$$

(iii) $A(sB) = s(AB)$, $(sA)B = s(AB)$

OBS: Selv om AB er definert, så behøver ikke BA å være det.

$A = m \times n$

$B = n \times k$

BA $\quad \underbrace{(n \times k)\,(m \times n)}_{k=m}$

Selv i tilfellet hvor både AB og BA er definert, vil de normalt være forskjellige.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 4 + 3(-1) & -1\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 1(-1) & 4\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Normalt: $AB \neq BA$ matrisemultiplikasjon er ikke kommutativ.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Liten dimensjon: A ($m \times n$), $B = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k]$ ($n \times k$)

søylene i B

$$AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_k]$$

søylene i AB

Eksempel (Eksamen i 2011):

Kartongfabrikker: I, II, III

Returstasjoner: A, B

Produksjon: I (x_1), II (x_2), III (x_3)

A (y_1), B (y_2)

Fabrikk I (x_1): 40% A, 30% B, tapt

Fabrikk II (x_2): 30% A, 50% B, tapt

Fabrikk III (x_3): 60% A, 30% B, tapt

$$y_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.6x_3$$

$$y_2 = 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = C\vec{x}$$

Retur

y_1 A: 40% I, 20% II, 40% III

y_2 B: 20% I, 50% II, 30% III

Anta at y_1 og y_2 er hvor mye kartong som mottas av A og B, og z_1, z_2, z_3 er hvor mye som returneres til fabr. I, II og III

$$z_1 = 0.4y_1 + 0.2y_2$$
$$z_2 = 0.2y_1 + 0.5y_2$$
$$z_3 = 0.4y_1 + 0.3y_2$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = D\vec{y}$$

Hvis fabrikkene produserer x_1, x_2, x_3 tonn hver, hvor mange tonn vil hver av dem få i retur?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \to \underline{\vec{y} = C\vec{x}} \longrightarrow \vec{z} = D\vec{y}$$

$$\vec{z} = D\vec{y} = D(C\vec{x}) = (DC)\vec{x}$$

produkt.

Trenger DC:

$$DC = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \underbrace{3 \times \cancel{2} \quad \cancel{2} \times 3}_{3 \times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{0.4 \cdot 0.4}_{0.16} + \underbrace{0.2 \cdot 0.3}_{0.06} & \underbrace{0.4 \cdot 0.3}_{0.12} + \underbrace{0.2 \cdot 0.5}_{0.10} & \underbrace{0.4 \cdot 0.6}_{0.24} + \underbrace{0.2 \cdot 0.3}_{0.06} \\ \underbrace{0.2 \cdot 0.4}_{0.08} + \underbrace{0.5 \cdot 0.3}_{0.15} & 0.2 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.06 + 0.25 & 0.2 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.12 + 0.15 \\ \underbrace{0.4 \cdot 0.4}_{0.16} + \underbrace{0.3 \cdot 0.3}_{0.09} & \underbrace{0.4 \cdot 0.3}_{0.12} + \underbrace{0.3 \cdot 0.5}_{0.15} & \underbrace{0.4 \cdot 0.6}_{0.24} + \underbrace{0.3 \cdot 0.3}_{0.09} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = (DC)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22x_1 + 0.22x_2 + 0.3x_3 \\ 0.23x_1 + 0.31x_2 + 0.27x_3 \\ 0.25x_1 + 0.27x_2 + 0.33x_3 \end{pmatrix}$$

Alternativ: $D(C\vec{x})$

Identitetsmatriser

$n \times n$ - matriser — kvadratiske matriser.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AI_n = A, \quad I_nA = A$ $\qquad I_n$ - identitesmatrisi :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a \cdot \underline{1} = 1 \cdot a = a \qquad a \cdot a^{-1} = \underline{1}$

$$\boxed{A A^{-1} = I_n}$$