UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	10. januar 2008
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x, y) = y\cos(xy)$?

☐ $-\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - y\sin(xy)$
☐ $-x\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - xy\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - y^2\sin(xy) + xy\sin(xy)$

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x, y, z) = xz + y^2$ raskest i punktet $(1, 2, -3)$?

☐ $(1, 4, -3)$
☐ $(-3, 4, 1)$
☐ $(2, -3, 1)$
☐ $(6, 2, -1)$
☐ $(1, 3, -4)$

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ til $f(x, y) = x\ln(xy)$ når $\mathbf{a} = (e, 1)$ og $\mathbf{r} = (-1, 2)$?

☐ $-2 + 2e$
☐ $2e + \ln 2$
☐ 1
☐ $\ln 2 - 2$
☐ $e - 2\ln 2$

(Fortsettes på side 2.)

4. (3 poeng) Hvis $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, så er $A\mathbf{x}$ lik:

☐ $\begin{pmatrix} 14 & -20 \\ -7 & -15 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ -22 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 42 \\ -10 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -15 \end{pmatrix}$

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ er:

☐ 19

☐ 16

☐ 20

☐ $\frac{37}{2}$

☐ 17

6. (3 poeng) En pyramide har hjørner i punktene $(2,1,3)$, $(4,2,2)$, $(3,4,2)$ og $(3,2,6)$. Volumet er:

☐ 3

☐ $\frac{19}{6}$

☐ $\frac{7}{2}$

☐ 4

☐ $\frac{5}{2}$

7. (3 poeng) Jacobi-matrisen til funksjonen $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ e^{xy^2} \end{pmatrix}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{xy^2} & e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy + x^2 \\ e^{xy^2} + e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ xy^2e^{xy^2} & xy^2e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y^2e^{xy^2} & e^{xy^2} \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

8. (3 poeng) Når vi skal delbrøkoppspalte $\frac{2x^2-3}{(x-1)(x^2+3x+10)^2}$, setter vi uttrykket lik:

☐ $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2+3x+10}+\frac{D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{Ax+B}{x-1}+\frac{C}{x^2+3x+10}+\frac{D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3x+10}$

☐ $\frac{Ax+B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3x+10}+\frac{Dx+E}{(x^2+3x+10)^2}$

9. (3 poeng) Volumet til omdreiningslegemet vi får når vi dreier $f(x)=\sin x$, $0\leq x\leq \pi$, om y-aksen, er:

☐ $7\pi-2$

☐ 20

☐ $6\pi+1$

☐ 4π

☐ $2\pi^2$

10. (3 poeng) Funksjonen F er definert ved $F(x)=\int_0^{x^3}\cos(x^2)\,dx$. Da er $F'(x)$ lik:

☐ $\cos(x^5)$

☐ $2x\cos(x^2)$

☐ $2x\cos(x^6)$

☐ $3x^2\cos(x^6)$

☐ $3x^2\cos(x^5)$

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn den reelle og den komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^3 + 8$.

b) (10 poeng) Finn konstanter A, B og C slik at

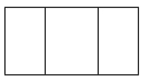
$$\frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

c) (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx$$

Oppgave 2 (10 poeng)

En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på 1m^2 og være formet som et rektangel. Speilene blir delt i tre deler av to loddrette lister (se figur). Rundt hele speilet skal det også være lister. Hvor høye må speilene være for at den totale lengden av lister skal bli så kort som mulig?



Et speil

Oppgave 3 (10 poeng)

I denne oppgaven er $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Vis at den inverse matrisen er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bruk dette til å finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ slik at $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Oppgave 4 (10 poeng)

Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x\,dx$$

konvergerer eller divergerer. Finn verdien til integralet dersom det konvergerer.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 5 (10 poeng)

I denne oppgaven er a og b to reelle tall, $a < b$, og $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon. Vis at dersom den deriverte f' er begrenset, så er f det også.

SLUTT