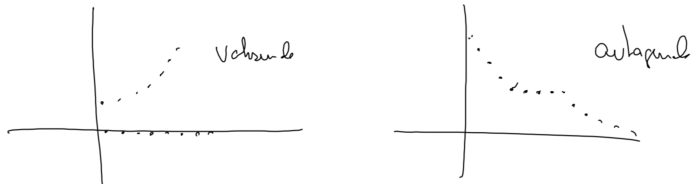
Følger

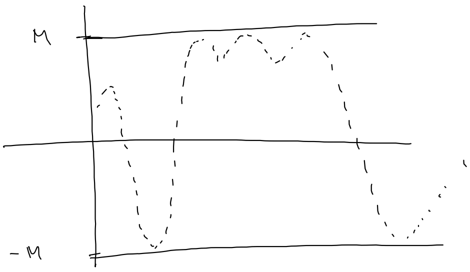
En følge $\{a_n\}$ er <u>voksende</u> dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n.

—||— <u>avtagende</u> dersom $a_{n+1} \leq a_n$ —||—

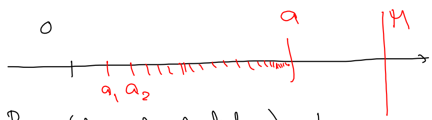


En følge er <u>monoton</u> dersom den er enten voksende eller avtagende.

—||— $\{a_n\}$ er <u>begrenset</u> dersom det finnes et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.



<u>Teorem</u>: Enhver begrenset, monoton følge konvergerer.

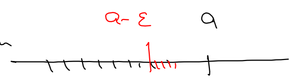


<u>Bevis</u> (for voksende følger): La

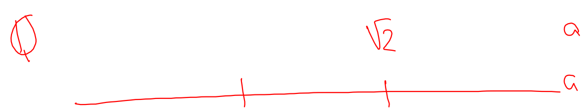
$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Da er A en ikke-tom, begrenset mengde. Ifølge kompletthetsprinsippet har A en minste øvre skranke a. Vi ønsker å vise at $\{a_n\}$ konvergerer mot a. For enhver $\varepsilon > 0$ må vi vise at det finnes en N slik at når $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \varepsilon$. Siden $a_n \leq a$, så er det nok å vise at $a_n > a - \varepsilon$.

Siden a er den minste øvre skranken til A, så er $a - \varepsilon$ <u>ikke</u> en øvre skranke. Dermed finnes det et element i A, a_N, slik at $a_N > a - \varepsilon$. Siden $\{a_n\}$ er voksende, er dermed $a_n > a - \varepsilon$ for alle $n \geq N$. $\square$ HURRA!



QED



$a_1 = 1.4 = \frac{14}{10}$

$a_2 = 1.41 = \frac{141}{100}$

$a_3 = 1.414 = \frac{1414}{1000}$

$\vdots$