Plenumsregning

4.3: 1, 3abd, 4 (b), 11, 13, 14, 15, 18 (b+c)

5.1: 1abc, 3ab, 5abeg, 6ab, 7 (b), 9abc

4.3: 1.) b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{-2n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^3}}$$

deler på høyeste potens oppe og nede

$$= \underline{0}$$

Teller → 0
Nevner → −2

3.) b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{(\sqrt{\sqrt{n}+n}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n})}$$

ganger med "den konjugerte" oppe og nede

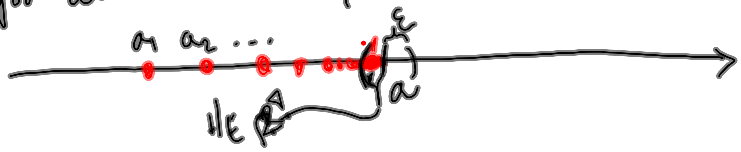
Bruk konjugatsetning!

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\cancel{n} + \sqrt{n} - \cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

4.) b) <u>Def. 4.3.1:</u> For alle $\varepsilon > 0$ fins det en $N \in \mathbb{N}$ sånn at for alle $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \varepsilon$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n} = 0 \quad :$$

La $\varepsilon > 0$. Vi vil finne $N \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N$ er:

$$\left| \frac{2\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{2\sin n}{n} \right| = \frac{2|\sin n|}{n} < \varepsilon$$

Merk at $|\sin n| \leq 1$ for alle n. Er derfor nok å finne

$N \in \mathbb{N}$ s.a. $\frac{2\cdot 1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$ $\left(\text{Fordi } \frac{2|\sin n|}{n} < \frac{2}{n} \text{ for alle } n \right)$

Velg N til å være det første heltallet større enn $\frac{2}{\varepsilon}$ $\left(\frac{2}{N} < \varepsilon \Rightarrow 2 < \varepsilon N \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < N \right)$.

Da er, for alle $n \geq N$:

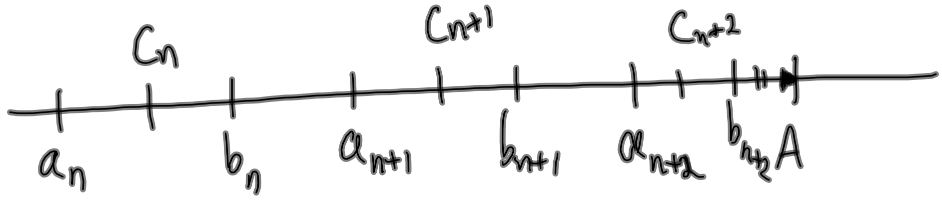
$$\left| \frac{2\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Dermed er grensen bevist.

11.) Vis at dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$ og

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ for alle } n$$

så er $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.



<u>Bruke Def. 4.3.1:</u>

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da fins, siden $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $N_a \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_a$ er $|a_n - A| < \varepsilon$.

Tilsvarende, siden $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, fins $N_b \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_b$ er $|b_n - A| < \varepsilon$.

Merk at for alle n er

$$|c_n - A| \leq \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\} \quad \left(\begin{array}{c}\text{siden} \\ a_n \leq c_n \leq b_n\end{array}\right)$$

Velg $N = \max\{N_a, N_b\}$. Da er, for alle $n \geq N$:

$$|c_n - A| \leq \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\} < \varepsilon$$

siden $|a_n - A| < \varepsilon$ <u>og</u> $|b_n - A| < \varepsilon$

Dermed vil $\lim_{n\to\infty} c_n = A$ også (fra Def. <u>4. 3. 1</u>).

18.) $\{x_n\}$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$.

a) $x_n < x_{n+1}$

b) Induksjon:

$\underline{n=1:}$ $x_1 = 1 < 2$

Hyp: Anta $x_n < 2$ for alle $1 \leq n \leq k$.

Vil vise at $x_{k+1} < 2$.

siden $x_k \geq 1$ for alle k fra a)

$$x_{k+1} = \sqrt{2}\sqrt{x_k} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \Rightarrow x_{k+1} < 2$$

Induksjons-hypotese

Så ved induksjon er $x_n < 2$ for alle n.

Fra dette over og a), så er $\{x_n\}$ en øvre begrenset, voksende følge. Fra Teorem 4.3.9 er denne følgen konvergent, si mot et punkt a.

Merk at:

$$x_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt{x_n}$$

$$a = \sqrt{2}\sqrt{a}$$

$$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \text{ eller } a = 2$$

Derfor må følgen konvergere mot 0 eller 2 (siden den konvergerer). Følgen er nedre begrenset av 1, og voksende, så den kan ikke konvergere mot 0.

Dermed er $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

c) $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$, $n \geq 1$ $\quad y_2$ $\quad y_3 \ldots$

<u>Viser $y_n < y_{n+1}$ for alle n:</u> Dette er OK for $n = 1$.

Anta at OK for $n \leq k$.

$$y_{k+1} = \sqrt{2y_k + y_k^2} > \sqrt{y_k^2} = y_k$$

siden $y_1 = 1 < y_2 < y_3 \ldots < y_k$ fra induksjonshypotesen.

Så ved induksjon er $\{y_n\}$ en voksende følge.

Hvis $\{y_n\}$ konvergerer mot a:

$$a = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2y_n + y_n^2} = \sqrt{2a + a^2}$$

$$a^2 = 2a + a^2$$

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

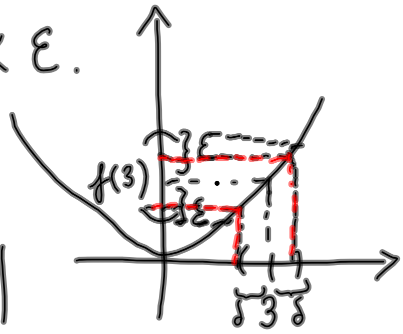
Men, $\{y_n\}$ er en voksende følge som er nedre begrenset av 1. Dermed kan den ikke konvergere mot 0.

Så $\{y_n\}$ konvergerer ikke.

5.1: 5) b) $f(x) = x^2$ i punktet $x = 3$:

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi finne $\delta > 0$ s.a. når

$|x - 3| < \delta$, så er $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$.



La $h = x - 3$. Merk at

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)|$$

$$\underset{x = h+3}{=} |h||h+6|$$

For $|h| < 1$, så er $|h+6| < 8$ (tatt i litt)

Så hvis $|h| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$, så er

$$|h||h+6| < \frac{\varepsilon}{8} \cdot 8 = \varepsilon$$

Så velg derfor $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Da vil, når

$|x - 3| = |h| < \delta$, så er $|f(x) - f(3)| = |h||h+6| < \varepsilon$.

Dermed har vi funnet en passende δ, og f er kontinuerlig i $x = 3$. $\blacksquare$