5.2.3a

5.2.6

5.2.8

5.3.1c

5.3.2

5.3.3

5.3.5

5.4.2c

5.4.3c

5.4.4

5.4.9?

5.2.11?

5.2.5?

5.2.3a) Vis at $f(x) = \ln x$ og $g(x) = x^2 - 2$ skjærer hverandre på intervallet $[1,2]$:

Bevis: Se på funksjonen $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - x^2 + 2$

Da er h kontinuerlig på $[1,2]$

$h(1) = \ln 1 - 1^2 + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 > 0$

$h(2) = \ln 2 - 2^2 + 2 = \ln 2 - 2 < 0$

(siden $2 < e^2 \Rightarrow \ln 2 < 2$, siden $\ln$ er strengt monoton)

så skjæringssetningen sier oss at det finnes en a i $[1,2]$ slik at $h(a) = 0 = f(a) - g(a)$

så $f(a) = g(a)$ så de skjærer hverandre.

5.2.6: Vis at ethvert polynom av odde grad har minst en reell rot.

Bevis: Gitt $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$

slik at n er odde og $a_0 \neq 0$.

Vi vil vise at $f(x)$ og $f(-x)$ har forskjellige fortegn når $|x| \gg 0$. Da vil skjæringssetningen gi at f har et nullpunkt.

Skriv $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$

$$= a_0 x^n \Big(1 + \underbrace{\frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 x^n}}_{\to\, 0 \text{ når } |x| \to \infty}\Big)$$

Når $|x| \to \infty$ vil $\left|\frac{a_1}{a_0 x}\right| \to 0$ og $\left|\frac{a_2}{a_0 x^2}\right| \to 0$ osv ...

(for eksempel $|x| \geq 2n \cdot \max\left\{\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \ldots \left|\frac{a_n}{a_0}\right|, 1\right\} = M$, så vil $\left|\frac{a_1}{a_0 x}\right| \leq \frac{1}{2n}$ osv...)

Så for $|x| \geq M$ $(|x| \gg 0)$ så er

$f(x) \approx a_0 x^n$ og $f(-x) \approx a_0 (-x)^n = a_0 x^n (-1)^n = -a_0 x^n$ siden n er odde

Så $f(x)$ og $f(-x)$ har forskjellig fortegn, så skjæringssetningen forteller oss at f har et nullpunkt mellom $-x$ og x.

(Litt mer presist:
hvis $a_0 \cdot x > 0$ vil $a_0 x^n (1 - \frac{1}{2}) \leq f(x) \leq a_0 x^n (1 + \frac{1}{2})$
hvis $a_0 \cdot x < 0$ vil $a_0 x^n (1 - \frac{1}{2}) \geq f(x) \geq a_0 x^n (1 + \frac{1}{2})$
når $|x| \geq M$)

5.2.8. La $f: [0,1] \to [0,1]$ være kontinuerlig. Da finnes et fikspunkt for f i $[0,1]$, dvs. et punkt a i $[0,1]$ slik at

$f(a) = a$

Bevis: Se på den kontinuerlige funksjonen $h(x) = f(x) - x$

$(h: [0,1] \to \mathbb{R})$

$h(0) = f(0) - 0 \geq 0$ (om $f(0)=0$ er vi ferdig så vi antar $f(0) - 0 > 0$)

$h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (om $f(1) = 1$ — " — antar $f(1) - 1 < 0$)

Så $h(0) > 0$ og $h(1) < 0$.

Så de har forskjellig fortegn

Så skjæringssetningen forteller oss at det finnes en a i $[0,1]$ slik at $h(a) = 0 = f(a) - a$

så $f(a) = a$. $\blacksquare$

5.3.1c) Vis at $f(x) = \tan(x^2+1)$ har maksimums og minimumspunkter på intervallet $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

Bevis: Vi må sjekke at f er kontinuerlig (OK), og f er definert på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Husk $\tan x$ er definert over alt bortsett fra for $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ for n et heltall.

men $x^2+1 < \frac{\pi}{2}$ på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ siden $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$

Så ekstremalverdisetningen sier oss at f har maks. og min. punkt.

5.3.2a) Vis at $f(x)$ er kontinuerlig ved å bruke . . .

Bevis: La $h(x) = 1$ (h er kontinuerlig over alt)

La $g(x) = x$ (g —"—)

Så $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ er kontinuerlig i alle punkter a slik at $\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{g(a)} \neq 0$

(fra resultat i boken)

Så f er kontinuerlig på $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Vis at $f(x)$ ikke er begrenset på $[-1, 1]$. (Hva er $f(0) = ?$)

Bevis: Når $x \to 0^+$ vil $f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$

Så f er ubegrenset.

Så hvorfor strider ikke dette mot ekstremalverdisetningen?

Fordi f ikke er definert i 0

5.4.2e) Vis at $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$ fra definisjonen:

Bevis: Gitt $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $\left\{ \begin{array}{l} \text{når } |x-4|<\delta \text{ så er } |\sqrt{x}-2|<\varepsilon? \\ |\sqrt{x}-2| < \varepsilon \text{ for } |x-4|<\delta ? \end{array} \right.$

$$= \frac{|\sqrt{x}-2| \cdot |\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{|x-4|}{2}$$

(siden $2 \leq \sqrt{x}+2$)

Hva med $\delta = \varepsilon$

Velg $\delta = \varepsilon$. Da er $|\sqrt{x}-2|$

$$= \frac{|\sqrt{x}-2| \cdot |\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{|x-4|}{2}$$

$$< \frac{\delta}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{når } |x-4|<\delta.$$

$\blacksquare$

5.3.3 a) Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = B$ eksisterer. Vis at f er begrenset.

Bevis: Siden $A = \lim_{x\to\infty} f(x)$, så finnes en N slik at $|f(x)-A| < 1$ når $x > N$.

og siden $B = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, så finnes en M slik at når $x < M$ så er $|f(x) - B| < 1$.

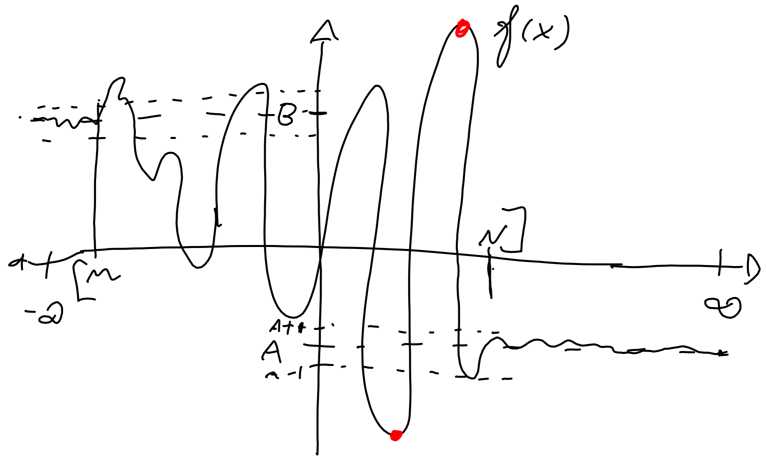
Altså er $|f(x)| < |A|+1$ når $x > N$ og $|f(x)| < |B|+1$ når $x < M$

Så er $f(x)$ begrenset på $[M,N]$?

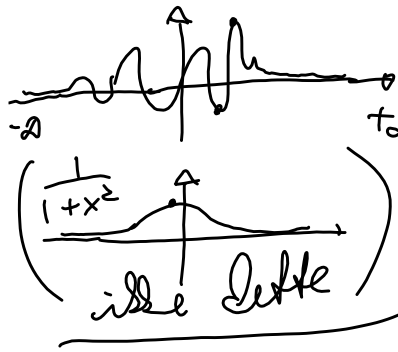
Ekstremalverdisetningen forteller oss at det finnes en $C > 0$ slik at $|f(x)| < C$ når x er i $[M,N]$.

Så $|f(x)| \leq \max\{|A|+1, |B|+1, C\}$

$\boxed{M}$



5.3.3 b) Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og har både positive og negative verdier, og $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$



Bevis: Bruker ekstremalverdisetningen.

På lukket intervall?

Velg a slik at $f(a) > 0$
og velg b slik at $f(b) < 0$

~~(for enkelthetsskyld så antar vi at $a<b$)~~

La $\varepsilon = \min\{|f(a)|, |f(b)|\}$

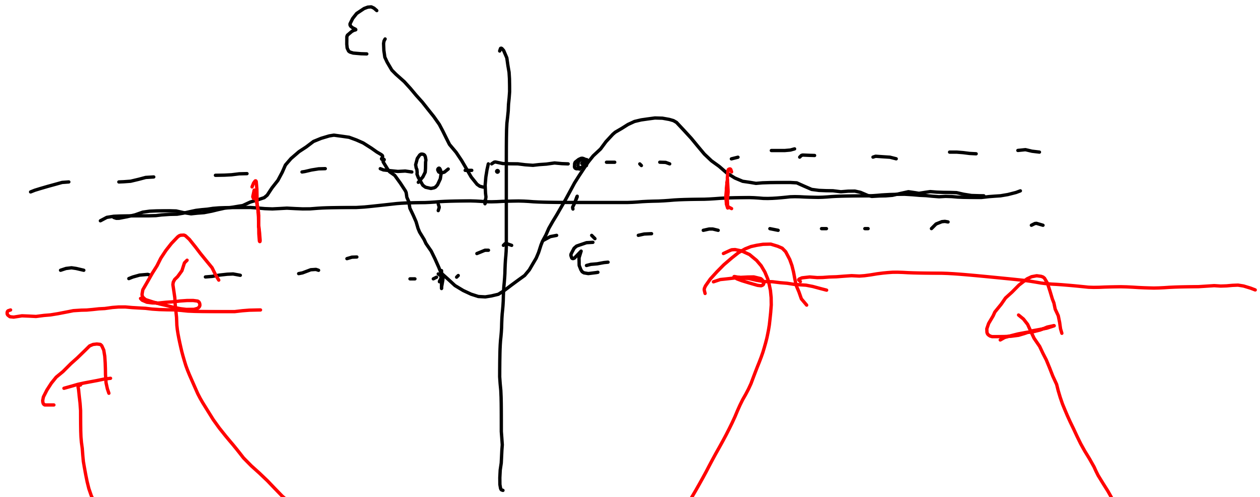
Da finnes en B og en A slik at

$|f(x) - 0| < \varepsilon$ når $x > B$

$|f(x) - 0| < \varepsilon$ når $x < A$

f har $\overset{M}{\text{maks}}$ og $\overset{m}{\text{min}}$ punkter på $[A, B]$. Men da er M og m faktisk ekstremalpunkter på hele $\mathbb{R}$, siden $|f(x)| < |f(b)| \leq |f(m)|$ når $x < A$ eller $x > B$

og $|f(x)| < |f(a)| < |f(M)|$ når $x < A$ eller $x > B$.



her er

$$|f(x)| < \varepsilon$$

Så ekstremalverdiene er ikke her

5.3.5 Anta $f: [a,b] \to V_f$ er kontinuerlig

Vis at $V_f = \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \}$

er et lukket begrenset intervall.

Bevis: Fra ekstremalverdisetningen finnes punkter M og m i $[a,b]$ slik

at $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ for alle x i $[a,b]$

så vi vil vise at $V_f = [f(m), f(M)]$.

La $y \in [f(m), f(M)]$

Bruk skjæringssetningen på

$h(x) = f(x) - y$ på intervallet

$[m, M]$ (så anta $m \leq M$)

Vet at $h(m) = f(m) - y \leq 0$

(antar at $f(m) - y < 0$, hvis ikke er jo $y = f(m) \in V_f$)

$h(M) = f(M) - y \geq 0$

(antar at $f(M) - y > 0$)

Så skjæringssetningen gir oss en $l \in [m, M]$ slik at $f(l) = y$.

Så $y \in V_f$.

Så vi har vist at $[f(m), f(M)] \subseteq V_f$.

(Hvis $y \in V_f$ så er $f(m) \leq y \leq f(M)$, så y er i $[f(m), f(M)]$. $\square$)

5.4.3c Regn ut $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+3x} - x$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+(3/x)}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3}{\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+(3/x)}+1} = \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

(Fysikken: $(1+x)^n \approx 1+nx$
når $x \approx 0$)

$$\sqrt{x^2+3x} - x = x\sqrt{1+3/x} - x$$
$$= x\left(1+\frac{3}{2x}\right) - x = 3/2$$

5.4.4 c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } 0 < x \leq 6 \\ \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} & \text{for } x > 6 \end{cases}$

er f kontinuerlig i punktet 6?

Bevis: Observasjon 5.4.7.

Er $\lim_{x \to 6} f(x) = f(6) = \frac{1}{6}$

$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$

$\lim_{x \to 6^+} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim_{x \to 6^+} \frac{\cancel{\sqrt{x+3}-3}}{\cancel{(\sqrt{x+3}-3)}(\sqrt{x+3}+3)}$

$= \lim_{x \to 6^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{1}{\sqrt{6+3}+3}$

$= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$. Så f er kontinuerlig i 6. $\boxtimes$