Problemsett 4, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Vi sier at en mengde M er lukka under addisjon hvis $\alpha, \beta \in M \Rightarrow \alpha + \beta \in M$ og lukka under multiplikasjon hvis $\alpha, \beta \in M \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in M$.

   a) Er $\mathbb{Q}$ lukka under addisjon og/eller multiplikasjon?

   b) Er $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (de irrasjonale talla) lukka under addisjon og/eller multiplikasjon?

   c) Hvis $\alpha \in \mathbb{Q}$ og $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, hva kan man si om $\alpha + \beta$ og $\alpha \cdot \beta$?

2. La $d(x)$ betegne desimaldelen til x; for eksempel er $d(0) = 0, d(-\frac{4}{3}) = d(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Betrakt mengden $M = \{d(\sqrt{2}), d(2\sqrt{2}), \ldots, d(2009\sqrt{2})\}$. Vis at det finnes forskjellige elementer x og y i M slik at $|x - y| < \frac{1}{2008}$. (Hint: Hvis du skal løse 366 matematikkoppgaver i løpet av 2009, må det være en dag du gjør minst 2 oppgaver.)

3. Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to a} h(x) = 0$. Vis at grenseverdiene $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ og $\lim_{x\to a} f(x)h(x)$ kan ta hvilken som helst verdi i $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

4. En funksjon $f : I \to \mathbb{R}$ der I er et intervall kalles *Lipschitz-kontinuerlig* hvis det eksisterer en $K \geq 0$ slik at $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ for alle $x, y \in D$. Vis at en Lipschitz-kontinuerlig funksjon også er kontinuerlig, men at det motsatte ikke nødvendigvis gjelder. Vis også at en Lipschitz-kontinuerlig funksjon ikke trenger å være deriverbar.

5. Vi sier at en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er periodisk med periode $p > 0$ hvis $f(x + p) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. For eksempel har cosinusfunksjonen periode 2π (eller for den saks skyld 42π) siden $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)(= \cos(x + 42\pi))$ for alle x.

   a) La f og g være periodiske funksjoner med periode p. Vis at $f + g$ er periodisk.

   b) Vis at hvis f er periodisk med periode p, er $f(x + np) = f(x)$ for alle heltall n.

   c) Anta at f er periodisk og at $\lim_{x\to\infty} f(x) = F \in \mathbb{R}$. Vis at f er konstant.

   d) La f og g være ikke-konstante kontinuerlige periodiske funksjoner med periode henholdsvis 1 og p. Når er $f + g$ periodisk?

   e) Fins det periodiske funksjoner f og g slik at $f(x) + g(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$?

6. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi definerer bildet $\text{Im}(f)$ til f til å være alle verdier f tar:

   $$\text{Im}(f) = \{y | f(x) = y \text{ for noen } x \in \mathbb{R}\}$$

   Hvilke av følgende påstander er sanne? Kom med et bevis eller gi et moteksempel.

   a) Hvis f er kontinuerlig og $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, er f monoton.

   b) Hvis f er kontinuerlig og monoton, er $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

   c) Hvis f er monoton og $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, er f kontinuerlig.

7. Finn alle deriverbare funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ som tilfredsstiller $f'(x) = f(f(x))$.