MAT1100: Obligatorisk oppgave 2

Innlevering: Innleveringsfristen er torsdag 30. oktober 2014, kl.14.30, og innleveringsstedet er 7. etasje i Niels Nenrik Abels hus. Oppgaven skal leveres med en offisiell forside som du finner her:

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/obligforside.pdf

Husk å føre på brukernavn i tillegg til navn! Se for øvrig

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/index.html

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Besvarelser som gjennomgående mangler mellomregninger og begrunnelser, vil bli underkjent selv om de har flere riktige svar enn det som normalt kreves.

Alle delspørsmål (punktene 1a), 1b), 2a), 2b), 3 osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Er det et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatet derfra i resten av besvarelsen. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har vist at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg med hånd eller på maskin og gjenspeile din forståelse av stoffet. Alle svar skal begrunnes. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Alle oppgavene kan besvares ut ifra pensum i kapitlene 3, 4, 5, 6, 7 og 8.

Oppgave 1: Løs integralene:

a)

$$\int \frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}\,dx$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

Oppgave 2: Finn grenseverdiene

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^t}{\ln(t+e^2)}\,dt}{x}$$

b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan x} e^{t^2}\,dt}{x-1}$$

Oppgave 3: Finn volumet til legemet som fremkommer når området under grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ dreies én gang rundt y-aksen.

Oppgave 4: I denne oppgaven er

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$$

a) Finn $f'(x)$. Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende. Avgjør også hvor f er positiv og hvor den er negativ.

b) Finn $f''(x)$ og avgjør hvor f er konveks og hvor den er konkav.

c) Finn asymptotene til f og tegn grafen.

Oppgave 5: I denne oppgaven er $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ en funksjon slik at

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Vis at $f(0) = 1$.

I resten av oppgaven antar vi at f er deriverbar i 0 med $f'(0) = k$.

b) Vis at f er deriverbar i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$ med $f'(x) = kf(x)$.

c) Begrunn at
$$kx = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln f(x)$$
og bruk dette til å vise at $f(x) = e^{kx}$.

Oppgave 6: I denne oppgaven er a et postivt reelt tall,

$$\Pi_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$$

er partisjonen av $[0, a]$ i n like store delintervaller og $N(\Pi_n)$ er den nedre trappesummen til funksjonen $f(x) = e^x$.

a) Forklar at

$$N(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{(i-1)a}{n}} \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

og vis at $\lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) = e^a - 1$.

b) Forklar at $Ø(\Pi_n) = e^{\frac{a}{n}} N(\Pi_n)$, og bruke dette til å vise at $\lim_{n\to\infty} Ø(\Pi_n) = e^a - 1$. Hva kan du ut ifra det du nå har vist, si om integralet $\int_0^a e^x \, dx$?

LYKKE TIL!