UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Fredag 16. januar 2015.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller 5 av de 6 delspørsmålene 10 poeng hver, mens det sjette spørsmålet teller 20 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x,y,z) = xy^2z^3 + y^2z$, er $\frac{\partial f}{\partial z}$ lik:

A) $xy^2 + y^2$
B) $6yz^2 + 2y$
C) $y^2z^3 + 3xy^2z^2 + y^2$
D) $3xy^2z^2 + y^2$
E) y^2z^3

Oppgave 2. (3 poeng) I punktet $(\frac{\pi}{2}, 2)$ vokser funksjonen $f(x,y) = xy\sin x$ raskest i retningen:

A) $(2, \frac{\pi}{2})$
B) $(\pi, 0)$
C) $(\pi, 2)$
D) $(1, -\frac{\pi}{2})$
E) (π, π)

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) Jacobi-matrisen til $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ x + y^3 \end{pmatrix}$ er:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 4y \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2y^2 + 4xy & 4xy \\ 1 + y^3 & x + 3y^2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} x^2y^2 & \frac{2}{3}xy^3 \\ \frac{x^2}{2} + y^3 & x + \frac{y^4}{4} \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2y^2 & 2x \\ 3y^2 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 4. (3 poeng) Trekanten med hjørner i $(1, -1)$, $(-2, 3)$ og $(5, 5)$ har arealet:

A) 17
B) 8
C) 23
D) 14
E) 12

Oppgave 5. (3 poeng) Den inverse matrisen til $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

A) er lik $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

B) finnes ikke

C) er lik $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

D) er lik $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

E) er lik $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. (3 poeng) Determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ er lik:

A) 3
B) -12
C) 0
D) 8
E) 11

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. (3 poeng) Dersom du substituerer $u = \arcsin x$ i integralet $\int_0^{\sqrt{2}/2} e^{\arcsin x}\, dx$, får du

A) $\int_0^{\sqrt{2}/2} e^u \sin u\, du$
B) $\int_0^{\pi/4} e^u \cos u\, du$
C) $\int_0^{\pi/4} e^u \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$
D) $\int_0^{\pi/3} e^u\, du$
E) $\int_0^{\pi/4} e^u\, du$

Oppgave 8. (3 poeng) Integralet $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx$ er lik

A) $\ln 2$
B) $2\ln 2$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\pi}{8}$
E) $\ln 2 + 4$

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}\, dx$:

A) er lik 8π
B) er lik $10\ln 2$
C) er lik 12π
D) er lik $24\ln 2$
E) divergerer

Oppgave 10. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{t}e^t\, dt}{x^3}$ er:

A) ∞
B) 0
C) $\frac{e}{4}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Vis at -1 er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + 3z^2 + 7z + 5$$

og finn den reelle og komplekse faktoriseringen.

b) (10 poeng) Finn tall A, B, C slik at

$$\frac{3x^2 + 3x - 4}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}$$

c) (20 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{4x + 1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$$

Oppgave 13.

a) (10 poeng) La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ være to 2×2-matriser. Regn ut AB og vis at

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

b) (10 poeng) Vi kaller en 2×2-matrise C et *kvadrat* dersom det finnes en 2×2-matrise D slik at $D^2 = C$. Vis at hvis C er et kvadrat, så er $\det(C) \geq 0$. Vis at $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *ikke* er et kvadrat.

Oppgave 14. (10 poeng) I denne oppgaven er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en to ganger deriverbar funksjon. Anta at $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, er to lokale ekstremalpunkter for f. Vis at det finnes et punkt c mellom a og b der $f''(c) = 0$.

Opplysning: At d er et *lokalt ekstremalpunkt* for f betyr bare at d enten er et lokalt mininumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt.

SLUTT