L'Hôpitals regel

"$\frac{0}{0}$" - tilfellet: $\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ under forutsetning av at den neste grensen eksisterer.

Intuitiv forklaring:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

"0", "0", $= f'(c_1)$, $= g'(c_2)$

$$\overset{MVS}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c_2)}$$

ønsker mer samme c begge steder.

CAUCHY

Cauchys middelverdisetning: Anta at $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbare i alle $x \in (a,b)$. Da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bevis: La $h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$.

Da $h(a) = [f(b)-f(a)]g(a) - [g(b)-g(a)]f(a)$

$= f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)} = f(b)g(a) - f(a)g(b)$

og

$h(b) = [f(b)-f(a)]g(b) - [g(b)-g(a)]f(b)$

$= \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b)$

$= f(b)g(a) - f(a)g(b)$

Altså er $h(a) = h(b)$. Bruker vi MVS på $h(x)$, får vi:

$$0 = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c) \text{ for en } c \in (a,b)$$

$h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

Siden $h'(x) = [f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x)$

Altså

$0 = h'(c) = [f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c)$

dvs $[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c) \quad \Big| : (g(b)-g(a))g'(c)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

HURRA!

Anvendelse på L'Hôpital "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{CMVS}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

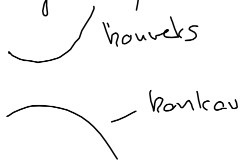
"0", "= 0", $c \to a$

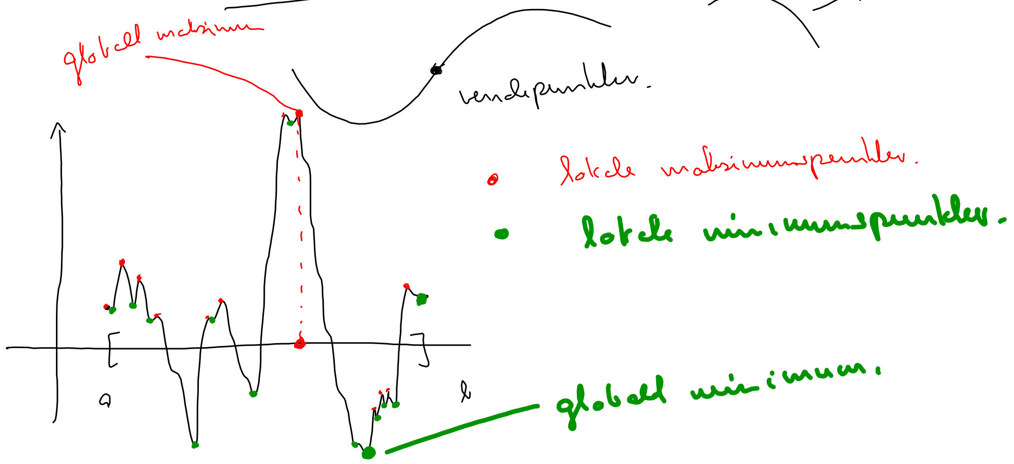
Kurvedröfting

Interessert i: Hva funksjonen vokser og avtar

maks og min.-punkter (lokale + globale)

Hvordan vi krummer grafen?





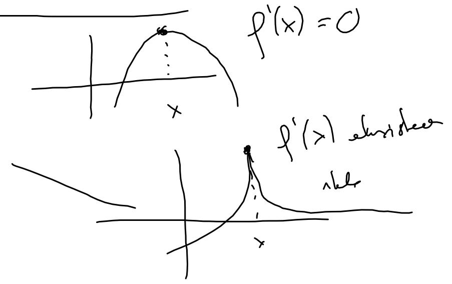
Praktisk metode for å finne maks- og min.-punkter.

Kritiske punkter:

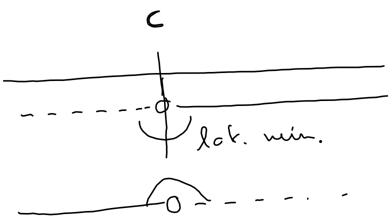
(i) Punkter der $f'(x) = 0$

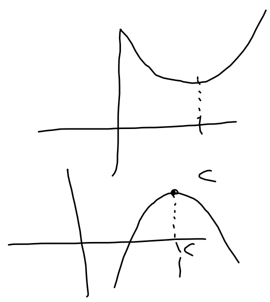
(ii) Punkter der $f'(x)$ ikke eksisterer

(iii) Endepunkter.

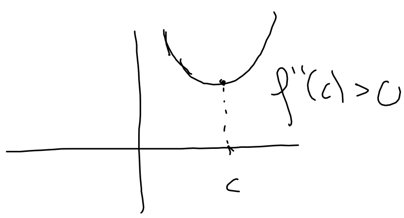


$f'(c) = 0$

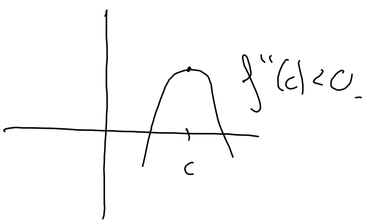




$f'(c) = 0$ og $\underbrace{f''(c) > 0}_{f' \text{ vokser}}$ $\Rightarrow$ lokalt min.

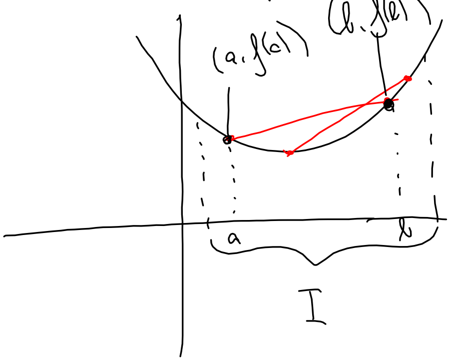


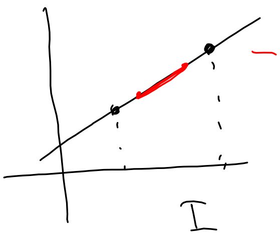
$f'(c) = 0$ og $\underbrace{f''(c) < 0}_{f' \text{ avtar}}$ $\Rightarrow$ lokalt maks

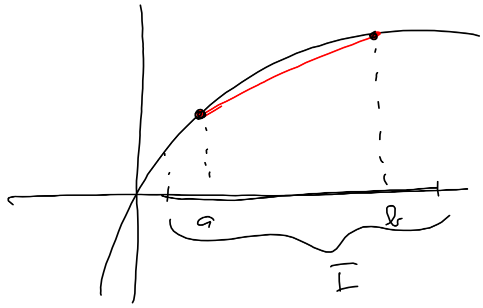


Konveks og konkav

Definisjon: f er konveks på intervallet I dersom det for alle punkter $a, b \in I$ er slik at sekanten fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ aldri stikker under funksjonsgrafen.

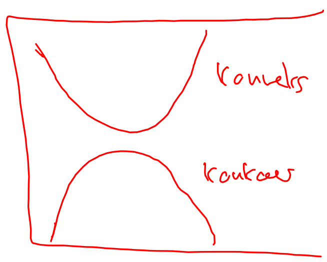




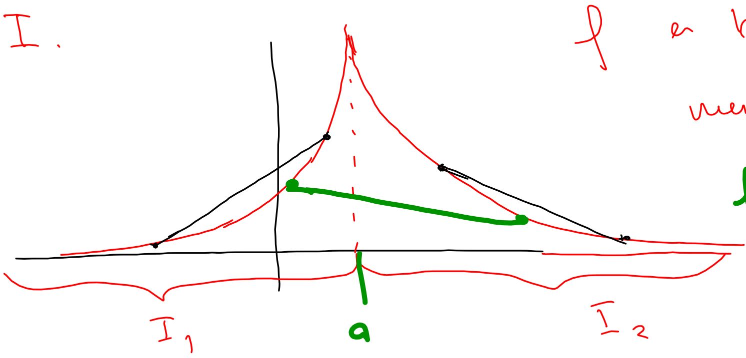


f er konkav på intervallet I dersom det for alle punkter $a, b \in I$ er slik at sekanten fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ aldri stikker over funksjonsgrafen.

Setning: Anta at $f''(x) \geq 0$ for alle x i et intervall I. Da er f konveks i I. Dersom $f''(x) \leq 0$ for alle x i I, da er f konkav i I.



NB: Viktig at betingelsen holder i alle punkter $x \in I$.



f er konveks på I_1 og I_2, men ikke konveks på $\mathbb{R}$!

$f''(x) > 0$ for alle $x \neq a$.