Problemsett 1, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Med enkle operasjoner på komplekse tall kan vi komme fram til at $1 = -1$:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

   Hvor på veien går det galt?

2. La z og w være komplekse tall forskjellige fra 0. Vis at z og w står normalt på hverandre (dette skrives ofte $z \perp w$) hvis og bare hvis $\Re(z/w) = 0$.

3. La $\mathcal{C}$ være sirkelen i det komplekse planet med sentrum 0 og radius 1, og la P og Q være diametralt motsatte punkter på $\mathcal{C}$. Vis at for alle $X \in \mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ vil trekanten utspent av P, Q og X være rettvinkla.

4. La a, b og c være 3 forskjellige komplekse tall. Vis at følgende 3 påstander er ekvivalente:

   I) Trekanten definert av a, b og c er likesida.

   II) $a + e^{2\pi i/3} \cdot b + e^{4\pi i/3} \cdot c = 0$ eller $a + e^{2\pi i/3} \cdot c + e^{4\pi i/3} \cdot b = 0$. (Det første gjelder hvis hjørnene i trekanten ligger i rekkefølgen $a - b - c$ med klokka, det andre hvis mot klokka.)

   III) $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$.

5. Vis ved hjelp av I) og II) i forrige oppgave Napoleons teorem: Dann utvendige likesida trekanter på sidene i en vilkårlig trekant. Da utspenner massesentrene til disse en likesida trekant.