MAT1100 - Grublegruppen
Notat4

Jørgen O. Lye

Litt mer om ζ og Γ

Litt oppsummering av $\Gamma(z)$

I det forrige notatet påstod jeg at funksjonen

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

som i utgangspunktet er definert for $\mathrm{Re}(s) > 0$ kan utvides til hele $\mathbb{C}$, bortsett fra at den vil gi ∞ på negative heltall. La meg i det følgende late som om s er reell, selv om alt stemmer nedenfor hvis en erstatter utsagn av typen $s > a$ med $\mathrm{Re}(s) > a$.

Grunnen til at vi kan utvide funksjonen var formelen

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Den kan vi bruke til å rekursivt definere Γ: hvis $s \in (-1, 0)$ kan vi skrive $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, hvor en på høyresiden evaluerer Γ for et argument større enn 0, og bruker dette til å definere venstresiden. Vi forfremmer altså relasjonen $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ som er utledet for $s > 0$ til å definere Γ for $s > -1$. På denne måten får vi en funksjon som samsvarer med $\Gamma(s)$ definert ved integralet når $s > 0$.

For $s \in (-2, \infty)$ bruker man $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}$ osv, slik at for $s \in (-n, \infty)$ kan man skrive

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(s+j)}$$

Litt oppsummering av ζ

Vi definerte

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergens av denne summen krevde $s > 1$, alternativt $\mathrm{Re}(s) > 1$. Men det kan vises at følgende formel gjelder, selv om beviset er langt og teknisk:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Hvis $s < 0$, slik at $1 < 1-s$, så vil denne formelen kunne brukes til å definere venstresiden. ζ-funksjonen kan utvides til hele $\mathbb{C}$ med en uendelighet i $s = 1$, men formelen er litt mystisk, og vi kommer ikke til å utlede den eller egentlig bruke den. Men den kan da tas med uansett:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{s-1}}$$

Anvendelser av ζ og Γ

ζ og primtall

La oss gå tilbake til den opprinnelige definisjonen av ζ definert ved en rekke:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

Hvis man ganger dette dyret med $\frac{1}{2^s}$ får man

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

Trekker man dette fra $\zeta(s)$ står man igjen med alle ledd uten en faktor $\frac{1}{2^s}$:

$$(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots$$

Hvis man så ganger dette med $\frac{1}{3^s}$ og trekker ifra mister man alle ledd med en faktor 3^{-s}:

$$(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

Neste vi kan gange med er 5^{-s}, siden det ikke er noe vits med 4^{-s}: alle ledd med en faktor av 4^{-s} hadde faktorer av 2^{-s}, og ble fjernet av første steg. Mønsteret er da klart: gang med p^{-s} og trekk dette fra, hvor p er et tall som ikke inneholder noen andre faktorer større enn 1. Dvs primtall. Gjør en dette fjerner man flere og flere ledd, til man til slutt står igjen med bare 1:

$$\prod_{p \text{ primtall}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1$$

Eller at

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primtall}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Riemann-hypotesen

Hvis man tror på rekursjonsformelen fra forrige avsnitt, dvs

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

kan man se at for $s = -2n$ så er sinus-faktoren 0, så $\zeta(-2n) = 0$. Pass litt på: for $s = +2n$ kunne en kanskje tro at man også hadde null, men husk at $\Gamma(1-2n)$ divergerer for positive heltall n. Man kan vise at disse kansellerer de positive nullene til sinus, siden $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ når $x \to 0$.

Nullene for $s = -2n$ kalles trivielle nullpunkter. Riemann-hypotesen sier følgende: alle ikke-trivielle nullpunkter til $\zeta(s)$ (utvidet til hele $\mathbb{C}$ bortsett fra $s = 1$) har realdel $\frac{1}{2}$. Dvs $s = \frac{1}{2} + it$.

Γ-funksjonen og volum av sfærer

Vi har følgende triks:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Hvis en så enten stoler på intuisjon, eller refererer til et mer avansert kalkulusbevis, kan skifte til sfæriske koordinater i n dimensjoner ved at $x_1^2 + \cdots x_n^2 = r^2$, og at $dx_1 \cdots dx_n = r^{n-1} dr\, dS^n$, hvor all vinkelavhengighet er i dS^n. Integrerer man bort vinklene får man arealet av enhetskulen, S^n. Så påstanden er at

$$S^n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\, dr = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^n = \pi^{n/2}$$

Skifter man variabel på venstresiden til $x = r^2$ finner man følgende:

$$S^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Litt testing gir at enhetskulen i 2 dimensjoner, dvs sirkelen, har overflate (omkrets) lik $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$. I 3 dimensjoner finner man areal 4π hvis man bruker at $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, som er ganske greit å vise. Kuleflater i 4 dimensjoner har areal $2\pi^2$.

Det kan bemerkes at formelen gir for $n = 1$ at $S^1 = 2$. Dette må tolkes på følgende vis: den null-dimensjonale kulen er 2 punkter, ± 1. Fra et null-dimensjonalt synspunkt har et punkt areal 1, på samme måte som at lengden til enhetsintervallet er 1, mens arealet er 0, osv. Så dette forteller oss bare det vi vet: den null-dimensjonale sfæren er 2 punkter.

Hvis man skal ha arealet av kuler med radius r, kan man faktisk se fra benevning at man må ha $S^n(r) = S^n r^{n-1}$. Volumet til kulen finner man ved å integrere dette fra $r = 0$ til en radius R:

$$V_n = \int_0^R S^n r^{n-1}\, dr = \frac{S^n R^n}{n}$$

Dvs

$$V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2} R^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Noen potensrekketriks

Over til noe litt annet: hvordan finne et par potensrekker. Det ble tidligere nevnt at man kan finne Taylor-rekken til funksjoner, og det stemmer. Men for noen funksjoner har man triks.

Husk at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

når $|x| < 1$. Integrerer man begge sider her får man at

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Som er en praktisk måte å finne denne rekken!

Geometriske rekker kan melkes for mer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

Integralet av høyresiden blir arctan, som dere snart vil vise. Dvs

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Det kan vises at denne rekken konvergerer også for $x = 1$, selv om rekken vi fikk den fra ikke gjør det. Dvs

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$