Problemsett 8, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. (Eksamen 2003) Funksjonen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ oppfyller $f(xy) = f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in (0, \infty)$, og er deriverbar i punktet $x = 1$ hvor $f'(1) = k > 0$. Vis at $f(1) = 0$. Vis at $f(x + h) = f(x) + f(1 + h/x)$ for x og h så alle ledd er definert. Bruk dette til å vise at $f'(x) = k/x$, og forklar hvorfor $f(x) = k \log x$.

2. (Eksamen 2004) Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og $a, b \in \mathbb{R}$ er tall slik at $a < b$ og $f(a) < f(b)$. Vis at da finnes en det en $c \in [a, b)$ slik at $f(c) = f(a)$, men $f(x) > f(c)$ for alle $x \in (c, b)$. (Hint: $c = \sup\{x \in [a, b] | f(x) \leq f(a)\}$.)

3. (Eksamen 2006) I denne oppgava er $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen $h(x) = f(x)/g(x)$ er strengt voksende, så er også funksjonen
$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}$$
definert for $x > 0$ strengt voksende. (Hint: La $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved F, G, f og g. Du kan få bruk for dette resultatet fra Kalkulus:

   Cauchys middelverdisetning: Anta at $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Dersom $G(b) \neq G(a)$, finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at
$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$
   (Vi kan få en formel som også gjelder når $G(b) = G(a)$ ved å bruke den litt mindre oversiktlige skrivemåten $(F(b) - F(a))G'(c) = (G(b) - G(a))F'(c)$.))

4. (Eksamen 2007) En mengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *åpen* dersom det for hver $a \in A$ finnes en $\delta > 0$ slik at $(a - \delta, a + \delta) \subset A$. Vis at intervallet $(0, 1]$ *ikke* er en åpen mengde. Vis også at dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så er mengden
$$A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$$
   åpen.

5. (Prøveeksamen 2003) En funksjon f av en variabel kalles en *Lipschitz-funksjon* på intervallet I dersom det finnes et tall K slik at $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ for alle $x, y \in I$. Vis først at dersom f er en Lipschitz-funksjon på intervallet I, så er f kontinuerlig på I. Vis deretter følgende påstand: Dersom den deriverte g' er kontinuerlig på et lukka, begrensa intervall I, så er g en Lipschitz-funksjon på I.

6. (Konteeksamen 2003) Tilnærma oppgave 5.2.12 a)-c) i Kalkulus.

7. (Konteeksamen 2004) Oppgave 5.3.6 i Kalkulus.

8. (Konteeksamen 2007) I denne oppgava er a og b to reelle tall, $a < b$ og $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon. Vis at dersom den deriverte f' er begrensa, så er f det også.