Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 10

I kapittel 10 får du trening i å løse ulike typer differensialligninger, og her får du bruk for integrasjonsteknikkene du lærte i forrige kapittel. Men vel så viktig som det regnemessige, er det å lære seg hvordan man tenker når man skal stille opp differensialligninger for å løse praktiske problemer. Dette finner du eksempler på i oppgavene til seksjon 10.2 og 10.4.

Oppgave 10.1.3

a) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren blir her

$$e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = 1$$

det vil si

$$[x^{-2}y]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$x^{-2}y = x + C$$

som gir løsningen

$$y = \underline{\underline{x^3 + Cx^2}}$$

b) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' - 2xy = e^{x^2}$. Her er integrerende faktor

$$e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 1$$

det vil si

$$\left[e^{-x^2}y\right]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$e^{-x^2}y = x + C$$

som gir løsningen

$$y = \underline{\underline{e^{x^2}(x + C)}}$$

d) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\arctan x}{x^2}$ på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren blir

$$e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$x^2 y' + 2xy = \arctan x$$

det vil si

$$[x^2 y]' = \arctan x$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$x^2 y = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C \quad \text{(se nedenfor)}$$

som gir løsningen

$$\underline{\underline{y = \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1 + x^2) + \frac{C}{x^2}}}$$

Ovenfor har vi benyttet delvis integrasjon til å løse integralet

$$\int \arctan x\,dx \underset{\uparrow}{=} x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arctan x,\ v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2},\ v = x \end{array}}$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

Oppgave 10.1.7

Vi skal løse differensialligningen $(x + 1)y' + y - 1 = 0, \quad x > -1$.
Denne ligningen er på formen

$$(x + 1)y' + y = 1$$

der vi gjenkjenner venstre side som den deriverte til $(x + 1)y$, slik at ligningen kan skrives

$$[(x + 1)y]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$(x + 1)y = x + D$$

som gir løsningen

$$y = \frac{x + D}{x + 1} = \frac{x + 1 + (D - 1)}{x + 1} = \underline{\underline{1 + \frac{C}{x + 1}}}$$

der vi har satt $C = D - 1$.

Oppgave 10.1.9

a) Vi skal løse integralet $\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx$.

Vi ser at nevneren ikke kan faktoriseres ytterligere, siden faktoren $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ ikke har noe nullpunkt.

Delbrøkoppspaltning av integranden gir

$$\begin{aligned}\frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\\ 2x-2 &= A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+1)\\ &= (A+B)x^2+(2A+B+C)x+(5A+C)\end{aligned}$$

Sammenholder vi koeffisientene på hver side av identiteten, får vi

$$A+B=0,\quad 2A+B+C=2,\quad 5A+C=-2$$

som gir

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=3$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx &\underset{\uparrow\ \boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}}{=} \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x+3}{x^2+2x+5}\right)dx\\ &= -\ln|x+1|+\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+5}\,dx\\ &= -\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx+\int\frac{2}{(x+1)^2+4}\,dx\\ &= -\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+\int\frac{2}{4[(\frac{x+1}{2})^2+1]}\,dx\\ &\underset{\uparrow\ \boxed{u=\frac{x+1}{2},\ du=\frac{1}{2}\,dx}}{=} -\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= -\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\arctan(u)+C\\ &= \underline{\underline{-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C}}\end{aligned}$$

b) Vi skal finne alle løsninger til differensialligningen

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2-1}y=\frac{2}{x^2+2x+5}\qquad\text{hvor } x>1$$

Den integrerende faktoren blir

$$e^{\int \frac{2}{x^2-1}\,dx} = e^{\int (\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})\,dx} = e^{\ln(\frac{x-1}{x+1})} = \frac{x-1}{x+1}$$

Multipliserer vi ligningen med den integrerende faktoren, får vi

$$\begin{aligned}\left[y\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' &= \frac{2}{x^2+2x+5}\cdot\frac{x-1}{x+1}\\ y\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= \int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx\\ y &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx\end{aligned}$$

Men det siste integralet regnet vi ut i punkt a), så vi har ialt

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\right)}}$$

Oppgave 10.2.1

La $y(t)$ være befolkningstallet ved tiden t. Endringen i befolkningen per år er da gitt ved $y'(t)$. Denne endringen skyldes dels en befolkningsvekst på $0.02y(t)$ per år, og dels en netto innvandring på 40 000 personer per år. Setter vi de to uttrykkene for befolkningsveksten lik hverandre, får vi

$$y' = 0.02y + 40\,000$$

Den integrerende faktoren er $e^{\int -0.02\,dt} = e^{-0.02t}$, og multipliserer vi ligningen med denne, får vi

$$e^{-0.02t}y' - 0.02e^{-0.02t}y = 40\,000e^{-0.02t}$$

det vil si

$$\left[e^{-0.02t}y\right]' = 40\,000e^{-0.02t}$$

Integrerer vi begge sider av ligningen, får vi

$$e^{-0.02t}y = -2\,000\,000e^{-0.02t} + C$$

som gir den generelle løsningen

$$y = Ce^{0.02t} - 2\,000\,000$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2000000$ gir

$$y(0) = C - 2\,000\,000 = 2\,000\,000$$

Det betyr at $C = 4\,000\,000$, så vår løsning blir

$$y(t) = \underline{\underline{4\,000\,000e^{0.02t} - 2\,000\,000}}$$

Oppgave 10.2.9

La $y(t)$ være vannmengden i demningen ved tiden t. Endringen i vannmengden per sekund er da gitt ved $y'(t)$. Denne endringen skyldes dels et tilsig på 100 m^3 vann per sekund, og dels et utslipp på $10^{-6}y(t)$ m^3 vann per sekund. Setter vi de to uttrykkene for endringen i vannmengden lik hverandre, ser vi at

$$y'(t) = 100 - 10^{-6}y(t)$$

det vil si at vi får den oppgitte differensialligningen

$$y'(t) + 10^{-6}y(t) = 100$$

Dette er en første ordens, lineær differensialligning, og multipliserer vi ligningen med den integrerende faktoren $e^{10^{-6}t}$, får vi

$$(e^{10^{-6}t}y(t))' = 100e^{10^{-6}t}$$

Integrerer vi på begge sider, får vi

$$e^{10^{-6}t}y(t) = \frac{100}{10^{-6}}e^{10^{-6}t} + C = 10^8 e^{10^{-6}t} + C$$

det vil si

$$y(t) = 10^8 + \frac{C}{e^{10^{-6}t}}$$

Når demningen er full inneholder den 10^8 m^3 vann. Vi skal finne ut hvor lang tid det tar fra demningen er tom til den er halvfull. La oss starte målingen av tiden når demningen er tom, det vil si at $y(0) = 0$. Ved hjelp av denne initialbetingelsen får vi bestemt konstanten C:

$$y(0) = 0 \iff 10^8 + \frac{C}{e^0} = 0 \iff C = -10^8$$

Så den spesielle løsningen blir

$$y(t) = 10^8 - \frac{10^8}{e^{10^{-6}t}} = 10^8\Big(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\Big)$$

Vi skal finne ut hvor lang tid t det tar før $y(t) = \frac{1}{2} \cdot 10^8$. Vi har

$$\begin{aligned}
10^8\Big(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\Big) &= \frac{1}{2} \cdot 10^8 \\
\Big(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\Big) &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{e^{10^{-6}t}} &= \frac{1}{2} \\
e^{10^{-6}t} &= 2 \\
t &= \underline{\underline{10^6 \ln 2}}
\end{aligned}$$

Det tar altså $10^6 \ln 2$ sekunder fra demningen er tom til den er halvfull.

Oppgave 10.2.15

a) En melkekartong der temperaturen var $6°C$ ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen i melka $13°C$. Lufttemperaturen var $20°C$. La $T(t)$ være temperaturen i melka ved tiden t, og la A være lufttemperaturen utenfor melkekartongen. Vi regner med at temperaturen i melka endrer seg med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melka. Dette betyr at

$$T'(t) = \alpha(A - T(t))$$

det vil si at temperaturen i melka er beskrevet ved differensialligningen

$$T' + \alpha T = \alpha A$$

Multipliserer vi med den integrerende faktoren $e^{\alpha t}$, får vi

$$\begin{aligned}
T'e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t}T &= \alpha e^{\alpha t}A \\
\big[e^{\alpha t}T\big]' &= \alpha e^{\alpha t}A
\end{aligned}$$

og integrasjon på begge sider gir

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t}T &= e^{\alpha t}A + B \\
T(t) &= \underline{\underline{A + Be^{-\alpha t}}}
\end{aligned}$$

Når melka står på kjøkkenbenken er temperaturen i lufta omkring melkekartongen gitt ved lufttemperaturen, det vil si at $A = 20$. Ved tiden $t = 0$ er temperaturen i melka $6°C$. Dette gir oss

$$T(0) = 20 + B = 6 \iff B = \underline{\underline{-14}}$$

Ved tiden $t = 2$ var temperaturen $13°C$, hvilket gir at

$$T(2) = 20 - 14e^{-2\alpha} = 13$$

det vil si

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha} &= \frac{1}{2} \\ -2\alpha &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ \alpha &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 2}} \end{aligned}$$

Dermed er temperaturen til melka etter t timer gitt ved

$$T(t) = 20 - 14e^{\frac{t\ln 2}{2}}$$

b) Temperaturen i melka etter tre timer er

$$\begin{aligned} T(3) &= 20 - 14e^{-\frac{3\ln 2}{2}} = 20 - 14e^{\ln 2^{-3/2}} \\ &= 20 - 2^{-3/2}14 \approx \underline{\underline{15.05}} \end{aligned}$$

det vil si at temperaturen er ca 15.05°C.

c) Da temperaturen i melka var 15°C, ble den satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i melka $12°C$. Vi skal finne temperaturen T_k i kjøleskapet. Differensialligningen fra punkt a) og dens generelle løsning gjelder fortsatt (spesielt er konstanten α den samme som vi fant i punkt a). Den eneste forskjellen er at lufttemperaturen A utenfor kartongen nå blir lik temperaturen T_k i kjøleskapet. Setter vi $t = 0$ idet kartongen settes inn i kjøleskapet, gir de nye opplysningene oss

$$\begin{aligned} T(0) &= T_k + Be^{-\alpha 0} = T_k + B = 15 \\ T(1) &= T_k + Be^{-\alpha} = T_k + \frac{B}{\sqrt{2}} = 12 \end{aligned}$$

Fra den første ligningen ovenfor har vi $B = 15 - T_k$ som innsatt i den andre ligningen gir

$$\begin{aligned} T_k + \frac{\sqrt{2}}{2}15 - \frac{\sqrt{2}}{2}T_k &= 12 \\ T_k\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 12 - \frac{\sqrt{2}}{2}15 \\ T_k &= \frac{12 - \frac{\sqrt{2}}{2}15}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \underline{\underline{4.7574}} \end{aligned}$$

Så temperaturen i kjøleskapet var ca 4.76°C.

Oppgave 10.3.1

Vi skal løse differensialligningen $y' - 3y = e^{2x}$ med initialbetingelsen $y(0) = 0$. Multiplikasjon med den integrerende faktoren e^{-3x} gir

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = e^{-x}$$

det vil si

$$\left[e^{-3x}y\right]' = e^{-x}$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$e^{-3x}y = C - e^{-x}$$

som gir løsningen

$$y = Ce^{3x} - e^{2x}$$

Av initialbetingelsen får vi

$$y(0) = C - 1 = 0 \iff C = 1$$

Så den spesielle løsningen som oppfyller initialbetingelsen vår, er

$$y(x) = \underline{\underline{e^{3x} - e^{2x}}}$$

Oppgave 10.3.3

Vi skal løse $y' + y\tan x = \sin 2x$ med initialbetingelsen $y(0) = 2$. Substitusjonen $u = \cos x,\ du = -\sin x\, dx$ gir

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{1}{u}\, du = -\ln|u| = -\ln|\cos x|$$

Den integrerende faktoren blir dermed $e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|}$, og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$\frac{y'}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 2\sin x$$

det vil si

$$\left[\frac{y}{\cos x}\right]' = 2\sin x$$

Ved å integrere begge sider av ligningen får vi

$$\frac{y}{\cos x} = -2\cos x + C$$

som gir løsningen

$$y = C\cos x - 2\cos^2 x$$

Vi bestemmer konstanten C ved hjelp av initialbetingelsen:

$$y(0) = C - 2 = 2 \iff C = 4$$

Så den spesielle løsningen blir

$$y(x) = \underline{\underline{4\cos x - 2\cos^2 x}}$$

Oppgave 10.3.5

Vi skal løse differensialligningen

$$x^2y' + 2xy = \arctan x$$

med initialbetingelsen $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Her kan vi gjenkjenne venstre side av ligningen direkte som den deriverte til uttrykket yx^2, slik at ligningen kan skrives

$$\left[yx^2\right]' = \arctan x$$

Vi integrerer på begge sider og løser integralet vi får på høyre side ved hjelp av delvis integrasjon hvor vi setter $u = \arctan x$, $v' = 1$, $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = x$. Dette gir

$$\begin{aligned} yx^2 &= \int \arctan x\, dx \\ &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

Divisjon med x^2 gir da at den generelle løsningen er

$$y = \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) + \frac{C}{x^2}$$

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen:

$$y(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + C = \frac{\pi}{4} \iff C = \frac{1}{2}\ln 2$$

Den spesielle løsningen som tilfredsstiller vår initialbetingelse blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}}$$

Oppgave 10.4.1

a) Vi skal løse differensialligningen

$$y' = yx^2$$

og observerer først at $y \equiv 0$ er en løsning. For $y \neq 0$ kan vi separere ligningen og får

$$\frac{y'}{y} = x^2$$

Integrasjon på begge sider av ligningen gir

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x^2\,dx$$

det vil si

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + D$$

som betyr at

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + D} = e^D e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Løsningen blir dermed

$$y = \pm e^D e^{\frac{1}{3}x^3} = \underline{\underline{Ce^{\frac{1}{3}x^3}}}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $C = \pm e^D \neq 0$, men når $C = 0$ får vi $y \equiv 0$ som vi allerede har observert er en løsning.)

b) Differensialligningen

$$y' = \frac{x^2}{y^3}$$

er separabel og løses ved samme fremgangsmåte som ovenfor. Separasjon av variablene gir først ligningen

$$y^3 y' = x^2$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

det vil si

$$\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + D$$

og løsningen blir

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + C}}}$$

c) Differensialligningen

$$(x+1)y' + y^2 = 0$$

har åpenbart den trivielle løsningen $y \equiv 0$. For $y \neq 0$ er den separabel og kan skrives

$$-\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x+1}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

det vil si

$$\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C$$

Løsningen blir

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{\ln|x+1| + C}}}$$

d) Differensialligningen

$$xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

kan skrives

$$\begin{aligned} xyy' &= (1+x^2) + y^2(1+x^2) \\ &= (1+x^2)(1+y^2) \end{aligned}$$

ved å faktorisere og trekke sammen uttrykket på høyre side. Denne ligningen kan (for $x \neq 0$) skrives på formen

$$\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$$

og er dermed separabel. Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx$$

det vil si

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + D$$

eller med andre ord

$$\ln(1+y^2) = 2\ln|x| + x^2 + D_2$$

Dette betyr at

$$1 + y^2 = e^{2\ln|x| + x^2 + D_2} = x^2 e^{x^2} e^{D_2}$$

altså

$$y^2 = Cx^2e^{x^2} - 1$$

Løsningen er dermed

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{Cx^2e^{x^2} - 1}}}$$

hvor $C > 0$.

Oppgave 10.4.8

a) For $x > 0$ har vi gitt at funksjonen $y = f(x)$ tilfredsstiller ligningen

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

som også kan skrives

$$x[f(x)]^2 = \int_1^x f(t)\,dt$$

Ved å derivere begge sider av ligningen (vi bruker analysens fundamentalteorem til å derivere høyre side), får vi

$$[f(x)]^2 + 2xf(x)f'(x) = f(x)$$

det vil si

$$y^2 + 2xyy' = y$$

som er ekvivalent med

$$yy' = \frac{y - y^2}{2x}$$

b) Vi skal finne alle løsninger av den opprinnelige ligningen og løser først differensialligningen som vi fant i punkt a). Denne har åpenbart de konstante løsningene $y \equiv 0$ og $y \equiv 1$. Forutsetter vi $y \neq 0$ og $y \neq 1$, blir ligningen separabel og kan skrives

$$\frac{y'}{1-y} = \frac{1}{2x}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \frac{1}{2x}\,dx$$

det vil si

$$-\ln|1-y| = \ln\sqrt{x} + D$$

Bytter vi fortegn og bruker eksponentialfunksjonen på begge sider, gir dette

$$e^{\ln|1-y|} = e^{-\ln\sqrt{x}}e^{-D}$$

som betyr at

$$1 - y = \pm \frac{e^{-D}}{\sqrt{x}} = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Differensialligningen har dermed løsningen

$$\underline{y = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}}$$

i tillegg til de to konstante løsningene ovenfor.

Ifølge punkt a) må alle løsninger $y = f(x)$ av den opprinnelige funksjonsligningen også være løsninger av differensialligningen og altså ha formen $f(x) = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}$. Setter vi en slik funksjon inn i den opprinnelige ligningen, blir venstre side

$$[f(x)]^2 = 1 - \frac{2C}{\sqrt{x}} + \frac{C^2}{x}$$

og høyre side

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt &= \frac{1}{x}\int_1^x \left(1 - \frac{C}{\sqrt{t}}\right) dt \\
&= \frac{1}{x}\left[t - 2C\sqrt{t}\right]_1^x \\
&= 1 - \frac{2C}{\sqrt{x}} + \frac{2C - 1}{x}
\end{aligned}$$

Disse uttrykkene er identiske hvis og bare hvis $C^2 = 2C - 1$, det vil si $C = 1$. Funksjonsligningen har derfor bare løsningen

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}$$

i tillegg til de konstante løsningene $f(x) = 0$ og $f(x) = 1$.

Oppgave 10.4.9

a) La $N(t)$ være antall individer i dyrebestanden etter t år. En logistisk vekstmodell for dyrebestanden er gitt ved differensialligningen

$$dN/dt = 10^{-4}N(10^4 - N)$$

med initialbetingelsen $N(0) = 4 \cdot 10^3$. Vi observerer først at differensialligningen har de konstante løsningene $N \equiv 0$ og $N \equiv 10^4$.

Forutsetter vi at $N \neq 0$ og $N \neq 10^4$ er differensialligningen separabel og kan skrives

$$\frac{N'}{N(N-10^4)} = -10^{-4}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{N(N-10^4)}\,dN = \int -10^{-4}\,dt = -10^{-4}t + C_1$$

Ved delbrøkoppspaltning blir integralet på venstre side

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{N(N-10^4)}\,dN &= 10^{-4}\int\left(\frac{1}{N-10^4} - \frac{1}{N}\right)dN \\ &= 10^{-4}(\ln|N-10^4| - \ln|N| + C_2) \\ &= 10^{-4}\ln\left|\frac{N-10^4}{N}\right| + C_2\end{aligned}$$

Dermed blir ligningen vår

$$10^{-4}\ln\left|\frac{N-10^4}{N}\right| = -10^{-4}t + C_3$$

som er ensbetydende med at

$$\frac{N-10^4}{N} = \pm e^{-t}e^{10^4C_3} = Ce^{-t}$$

det vil si

$$N - 10^4 = Ce^{-t}N$$

som også kan skrives

$$N(1 - Ce^{-t}) = 10^4$$

Løsningen blir dermed

$$N(t) = \frac{10^4}{1 - Ce^{-t}}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $C = \pm e^t \neq 0$, men når $C = 0$ får vi $N \equiv 10^4$ som vi allerede har observert er en løsning.)

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen $N(0) = 4 \cdot 10^3$ som gir oss

$$N(0) = \frac{10^4}{1-C} = 4 \cdot 10^3$$

det vil si

$$C = -\frac{3}{2}$$

Dermed blir dyrebestanden etter t år gitt ved

$$\underline{\underline{N(t) = \frac{10^4}{1 + \frac{3}{2}e^{-t}}}}$$

For å finne hvilken størrelse bestanden vil stabilisere seg på i det lange løp, undersøker vi hva som skjer med $N(t)$ når tiden t vokser over alle grenser:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{10^4}{1 + \frac{3}{2}e^{-t}} = \underline{\underline{10^4}}$$

Bestanden vil altså stabilisere seg på 10 000 dyr.

b) Vi skal heretter anta at det drives jakt på dyrebestanden og at det felles $2.1 \cdot 10^3$ dyr per år. Vi endrer derfor modellen til

$$dN/dt = 10^{-4}N(10^4 - N) - 2.1 \cdot 10^3$$

med initialbetingelse $N(0) = 4 \cdot 10^3$. Høyresiden av ligningen er et annengradspolynom i N med røtter $3 \cdot 10^3$ og $7 \cdot 10^3$, så ligningen kan skrives

$$dN/dt = -10^{-4}(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)$$

På samme måte som i punkt a) observerer vi først at differensialligningen har de konstante løsningene $N \equiv 3 \cdot 10^3$ og $N \equiv 7 \cdot 10^3$. Forutsetter vi at $N \neq 3 \cdot 10^3$ og $N \neq 7 \cdot 10^3$, er differensialligningen separabel og kan skrives

$$\frac{N'}{(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)} = -10^{-4}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)}\, dN = \int -10^{-4}\, dt = -10^{-4}t + D_1$$

Ved delbrøkoppspaltning blir integralet på venstre side

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4 \cdot 10^3} \int \left(\frac{1}{N - 7 \cdot 10^3} - \frac{1}{N - 3 \cdot 10^3} \right) dN \\
&\quad = \frac{1}{4 \cdot 10^3}(\ln|N - 7 \cdot 10^3| - \ln|N - 3 \cdot 10^3| + D_2) \\
&\quad = \frac{1}{4 \cdot 10^3} \ln \left| \frac{N - 7 \cdot 10^3}{N - 3 \cdot 10^3} \right| + D_2
\end{aligned}$$

Ligningen vår blir altså

$$\frac{1}{4\cdot 10^3}\ln\left|\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3}\right| = -10^{-4}t + D_3$$

det vil si

$$\ln\left|\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3}\right| = -0.4t + D_4$$

som er ensbetydende med at

$$\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3} = \pm e^{-0.4t}e^{D_4} = De^{-0.4t}$$

det vil si

$$N - 7\cdot 10^3 = De^{-0.4t}(N - 3\cdot 10^3)$$

som også kan skrives

$$N(1 - De^{-0.4t}) = (7 - 3De^{-0.4t})10^3$$

Løsningen blir dermed

$$N(t) = \frac{7-3De^{-0.4t}}{1-De^{-0.4t}}10^3$$

hvor D er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $D = \pm e^{D_3} \neq 0$, men når $D = 0$ får vi $N \equiv 7\cdot 10^3$ som vi allerede har observert er en løsning.)

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen $N(0) = 4\cdot 10^3$ som gir oss

$$N(0) = \frac{7-3D}{1-D}10^3 = 4\cdot 10^3$$

det vil si

$$D = -3$$

Dermed blir dyrebestanden etter t år gitt ved

$$N(t) = \frac{7+9e^{-0.4t}}{1+3e^{-0.4t}}10^3$$

For å finne hvilken størrelse bestanden nå vil stabilisere seg på i det lange løp, undersøker vi hva som skjer med $N(t)$ når tiden t vokser over alle grenser:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{7+9e^{-0.4t}}{1+3e^{-0.4t}}10^3 = \underline{\underline{7\cdot 10^3}}$$

Bestanden vil altså stabilisere seg på 7 000 dyr.

c) Hvis vi istedet starter med 2 000 dyr ved tiden $t = 0$, blir initialbetingelsen istedet $N(0) = 2 \cdot 10^3$ som gir oss
$$N(0) = \frac{7-3D}{1-D} 10^3 = 2 \cdot 10^3$$
det vil si
$$D = 5$$
Løsningen blir i dette tilfellet
$$N(t) = \frac{7-15e^{-0.4t}}{1-5e^{-0.4t}} 10^3$$
og vi ser at dyrebestanden dør ut så snart telleren i uttrykket for $N(t)$ blir null, det vil si når
$$7 = 15e^{-0.4t}$$
altså når
$$0.4t = \ln \frac{15}{7}$$
det vil si når
$$t = \frac{5}{2} \ln \frac{15}{7} \approx \underline{\underline{1.9}}$$
Dyrebestanden vil altså være utryddet etter ca. 1.9 år.

Kommentar: Det kan være verdt å legge merke til at den gitte differensialligningen forteller en hel del om den kvalitative oppførselen til løsningen, uten at vi bestemmer denne eksplisitt. Ligningen forteller oss at den deriverte
$$dN/dt = 10^{-4}(-N^2 + 10^4 N - 2.1 \cdot 10^7)$$
betraktet som en funksjon av N, er en parabel med et maksimumspunkt fordi dN/dt er på formen $aN^2 + bN + c$ med $a < 0$. Derfor er den deriverte negativ når N tilhører et av intervallene $[0, 3 \cdot 10^3)$ eller $(7 \cdot 10^3, \infty)$ og den er positiv når N tilhører $(3 \cdot 10^3, 7 \cdot 10^3)$. Hvis vi starter med $N = 4 \cdot 10^3$ individer (som i punkt b), er altså den deriverte positiv, og antall dyr vil øke så lenge $N < 7 \cdot 10^3$. Samtidig vil den deriverte avta mot null. Hvis vi starter med $N = 2 \cdot 10^3$ individer (punkt c), er den deriverte negativ og antall dyr vil avta. Startverdiene $N = 7 \cdot 10^3$ og $N = 3 \cdot 10^3$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevektstilstand.

Oppgave 10.5.1

a) Differensialligningen
$$y'' + y' - 6y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 + r - 6 = 0$$

med røtter

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

Den generelle løsingen av differensialligningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{-3x} + De^{2x}}}$$

c) Differensialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0$$

med løsning

$$r = -3$$

Da den karakteristiske ligningen bare har én rot, så er den generelle løsningen av differensialligningen

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{-3x} + Dxe^{-3x}}}$$

d) Differensialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

med røtter

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2i$$

Da den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter, blir den generelle løsningen av differensialligningen

$$y(x) = \underline{\underline{e^x(C\cos 2x + D\sin 2x)}}$$

Oppgave 10.5.4

a) Vi skal finne den løsningen av $y'' - 4y' + 4y = 0$ som går gjennom $(0,1)$ og $(1,-1)$. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

har bare den ene roten $r = 2$, så den generelle løsningen av differensialligningen er

$$y = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene:

$$y(0) = Ce^0 + D \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \implies \underline{C = 1}$$
$$y(1) = Ce^2 + D \cdot 1 \cdot e^2 = e^2 + De^2 = -1 \implies \underline{D = -1 - e^{-2}}$$

Løsningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x}\big(1 - (1 + e^{-2})x\big)}}$$

b) Vi skal finne den løsningen av $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$ som går gjennom $(\frac{\pi}{2}, 1)$ og $(\pi, 1)$. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$$

har løsningene

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{5}{4}}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = \underline{-\frac{1}{2} \pm i}$$

Da vi har har to komplekse røtter, er den generelle løsningen av differensialligningen gitt ved

$$y = e^{-x/2}(C \cos x + D \sin x)$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene:

$$y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = e^{-\pi/4}\Big(C \cos\frac{\pi}{2} + D \sin\frac{\pi}{2}\Big) = e^{-\pi/4}D = 1 \implies \underline{D = e^{\pi/4}}$$
$$y(\pi) = e^{-\pi/2}\big(C \cos(\pi) + D \sin(\pi)\big) = -Ce^{-\pi/2} = 1 \implies \underline{C = -e^{\pi/2}}$$

Den spesielle løsningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-x/2}\big(-e^{\pi/2}\cos x + e^{\pi/4}\sin x\big)}}$$

Oppgave 10.5.8

a) Ved å benytte at

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x &= \sin\frac{\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x \\ &= \underline{\underline{\sin\Big(3x + \frac{\pi}{6}\Big)}}\end{aligned}$$

b) Ved å benytte at

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} &= \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\Big) \\ &= \sqrt{2}\Big(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\Big) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2}\sin\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)}}\end{aligned}$$

c) Ved å benytte at

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\Big) \\ &= 2\Big(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\Big) \\ &= \underline{\underline{2\sin\Big(\frac{\pi}{3} - x\Big)}}\end{aligned}$$

Oppgave 10.5.11

To dyrearter lever i et naturlig samspill. Vi lar $N_1(t)$ og $N_2(t)$ være antall individer av hver art ved tiden t. Vi setter

$$\begin{aligned}x(t) &= N_1(t) - 300 \\ y(t) &= N_2(t) - 10\,000\end{aligned}$$

Samspillet mellom artene modelleres ved differensialligningene

$$x'(t) = by(t) \quad \text{og} \quad y'(t) = -cx(t)$$

hvor b og c er positive konstanter.

a) Det er naturlig å forvente at rovdyrbestanden vil vokse raskest når byttedyrbestanden er størst, og at byttedyrbestanden vil avta raskest når rovdyrbestanden er størst. Den første differensialligningen ovenfor sier at x (og dermed N_1) vokser raskest når y (og dermed N_2) er størst. Den andre differensialligningen sier at y (og dermed N_2) avtar raskest når x (dvs N_1) er størst. Det må bety at N_1 er antall rovdyr og N_2 er antall byttedyr.

b) Implisitt derivasjon av ligningen $x'(t) = by(t)$ gir

$$x''(t) = by'(t) = b(-cx(t)) = \underline{\underline{-bcx(t)}}$$

hvor vi har benyttet at $y'(t) = -cx(t)$ ifølge modellen.

c) Vi antar at $x(0) = x_0$ og $y(0) = y_0$. Vi skal finne $x(t)$ og $y(t)$. Vi bruker først ligningen i punkt b) til å finne $x(t)$. Den karakteristiske ligningen $r^2 = -bc$ har løsningene

$$r = \pm i\sqrt{bc}$$

Den generelle løsingen av $x(t)$ blir dermed

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0t}\big(C\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \\ &= C\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot t) \end{aligned}$$

Nå kan vi derivere uttrykket ovenfor og bruke differensialligningen $x'(t) = by(t)$ til å finne $y(t)$. Den generelle løsingen av $y(t)$ blir da

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{b}x'(t) &= \frac{1}{b}\big(-C\sqrt{bc}\sin(\sqrt{bc}\cdot t) + \sqrt{bc}D\cos(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \\ &= \frac{\sqrt{bc}}{b}\big(D\cos(\sqrt{bc}\cdot t) - C\sin(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \end{aligned}$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= C\cos(\sqrt{bc}\cdot 0) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot 0) = C = x_0 \\ y(0) &= \frac{\sqrt{bc}}{b}(D\cos(\sqrt{bc}\cdot 0) - C\sin(\sqrt{bc}\cdot 0)) = \frac{\sqrt{bc}}{b}D = y_0 \end{aligned}$$

som gir $C = x_0$ og $D = \sqrt{\frac{b}{c}}\,y_0$. Dermed er løsningen

$$x(t) = \underline{\underline{x_0\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + \sqrt{\frac{b}{c}}\,y_0\sin(\sqrt{bc}\cdot t)}}$$

$$y(t) = \underline{\underline{y_0\cos(\sqrt{bc}\cdot t) - \sqrt{\frac{c}{b}}\,x_0\sin(\sqrt{bc}\cdot t)}}$$

d) Observasjoner tyder på at de beste verdiene er $b = 0.05$ og $c = 84$. Vi antar at $N_1(0) = 300$ og $N_2(0) = 1400$. Da har vi

$$x_0 = N_1(0) - 300 = 300 - 300 = 0$$
$$y_0 = N_2(0) - 10\,000 = 1\,400 - 10\,000 = -8\,600$$

Dermed er tidsforløpet til utviklingen til artene gitt ved

$$N_1(t) = x(t) + 300 = -\sqrt{\frac{1}{1680}}\,8600\ \sin(\sqrt{4.2}\cdot t) + 300$$
$$N_2(t) = y(t) + 10\,000 = -8600\cos(\sqrt{4.2}\cdot t) + 10\,000$$

(Du må selv skissere grafene til N_1 og N_2. Benytt gjerne Maple.)

Kommentar til grafene: Det er naturlig at toppene (og bunnene) er forskjøvet i forhold til hverandre. Når antall byttedyr er på toppnivå, vokser antall rovdyr raskest. Det medfører at antall byttedyr vil avta slik at veksten i rovdyrstammen blir mindre (antall rovdyr nærmer seg et toppnivå), og etterhvert blir det så få byttedyr at rovdyrene sulter og rovdyrbestanden blir mindre. Da vil antall byttedyr øke igjen, og slik vil det fortsette å svinge.