Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT1100, H-17

Oppgave 1. a) Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(-\sin(xy))\cdot y = -y^2\sin(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1\cdot\cos(xy)) + y(-\sin(xy)\cdot x = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

der vi har brukt kjerneregelen i den første derivasjonen og både produktregelen og kjerneregelen i den andre. Siden de partiellderiverte er kontinuerlige, er f deriverbar (vi bruker dette i del b).

b) Gradienten i punktet $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{4}, 1)$ er

$$\nabla f(\frac{\pi}{4},1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},1), \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},1)\right) = \left(-\sin(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4})\right)$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1, 1-\frac{\pi}{4}\right)$$

Dette betyr at funksjonen vokser raskest i retningen $\mathbf{r} = \left(-1, 1-\frac{\pi}{4}\right)$. Hvis $\mathbf{u}$ er enhetsvektoren i denne retningen, er

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{u}) = |\nabla f(\mathbf{a})| = \sqrt{(-1)^2 + (1-\frac{\pi}{4})^2} = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}}$$

Oppgave 2. Pyramiden har samme volum som pyramiden utspent av vektorene $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\mathbf{d}-\mathbf{a}$. Dermed er

$$V = \frac{1}{6}\det(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\left\{1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{6}\{4+16+0\} = \frac{10}{3}$$

Oppgave 3. a) Antall tonn Gravenstein som leveres er 45% av x_1, pluss 25% av x_2, pluss 30% av x_3, dvs.

$$y_1 = 0.45x_1 + 0.25x_2 + 0.3x_3$$

Antall tonn Aroma som leveres er 15% av x_1, pluss 50% av x_2, pluss 40% av x_3, dvs.

$$y_2 = 0.15x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3$$

Antall tonn Summerred som leveres er 40% av x_1, pluss 25% av x_2, pluss 30% av x_3, dvs.

$$y_1 = 0.4x_1 + 0.25x_2 + 0.3x_3$$

Dermed er

$$A = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.25 & 0.3 \\ 0.15 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix}$$

b) Siden $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = B\mathbf{y}$. Dermed er

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 46 & 6 & -54 \\ -65 & -5 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at leverandørene P og R leverer 20 tonn hver, mens Q leverer 40 tonn.

Hvis vi isteden setter inn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$, får vi

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 46 & 6 & -54 \\ -65 & -5 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 750 \\ -975 \end{pmatrix}$$

som er umulig siden leverandør R ikke kan levere -975 tonn.

Oppgave 4. a) Vi setter $z = x^2$. Da er $dz = 2x\,dx$, og vi får

$$I = \int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{z}{2} e^z\,dz$$

Vi fortsetter med delvis integrasjon: Hvis vi lar $u = \frac{z}{2}$ og setter $v' = e^z$, får vi $u' = \frac{1}{2}$ og $v = e^z$. Dermed er

$$I = \frac{z}{2}e^z - \int \frac{1}{2}e^z\,dz = \frac{z}{2}e^z - \frac{1}{2}e^z + C = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

b) Vi setter $u = e^x$. Da er $du = e^x\,dx$, og vi får

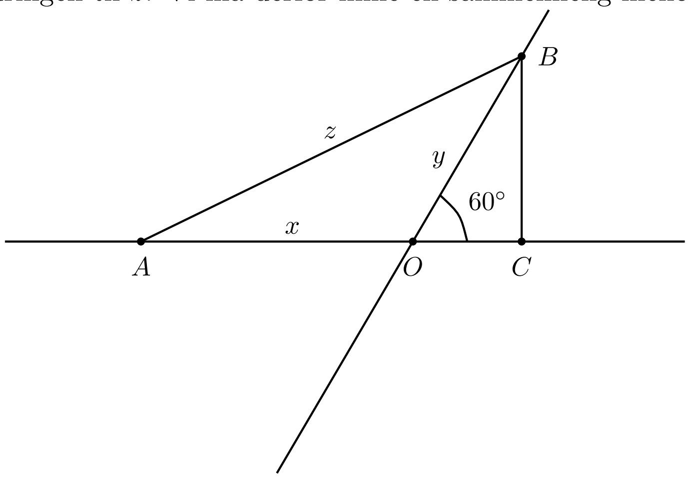
$$I = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 5}\,dx = \int \frac{1}{u^2 + 2u + 5}\,dx = \int \frac{1}{u^2 + 2u + 1 + 4}\,du$$

$$= \int \frac{1}{(u+1)^2 + 4}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + 1}\,du$$

Setter vi nå $z = \frac{u+1}{2}$, får vi $dz = \frac{1}{2}\,du$, og dermed

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\arctan z + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{u+1}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x+1}{2} + C$$

Oppgave 5. På figurene kjenner vi hvordan x og y endrer seg, og skal finne endringen til z. Vi må derfor finne en sammenheng mellom x, y og z.



Husker man cosinussetningen, får man direkte fra figuren at

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(120°) = x^2 + y^2 + xy$$

Hvis man ikke husker cosinussetningen, observerer man at $|OC| = y\cos 60° = \frac{y}{2}$ og $|BC| = y\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}y$. Bruker vi Pytagoras på $\triangle ACB$, får vi

$$z^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = x^2 + y^2 + xy$$

Både x, y og z er funksjoner av t, og deriverer vi ligningen

$$z^2 = x^2 + y^2 + xy$$

mhp. t, får vi

$$2zz' = 2xx' + 2yy' + x'y + xy'$$

eller med andre ord

$$z' = \frac{2xx' + 2yy' + x'y + xy'}{2z}$$

På høyre side vet vi at i det aktuelle øyeblikket er $x = 3$, $x' = -80$, $y = 5$ og $y' = 70$. For å finne z observerer vi at

$$z^2 = x^2 + y^2 + xy = 3^2 + 5^2 + 3 \cdot 5 = 49$$

som gir $z = 7$. Dermed er

$$z' = \frac{2 \cdot 3 \cdot (-80) + 2 \cdot 5 \cdot 70 + (-80) \cdot 5 + 3 \cdot 70}{2 \cdot 7} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7}$$

Avstanden mellom bilene øker altså med en fart på $\frac{15}{7}$ km/t.

Oppgave 6. a) Ved produktregelen har vi

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) \\ &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \end{aligned}$$

b) Setter vi inn $f''(x) = af'(x) + bf(x)$ og $g''(x) = ag'(x) + bg(x)$, ser vi at

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \\ &= f(x)(ag'(x) + bg(x)) - (af'(x) + bf(x))g(x) \\ &= af(x)g'(x) + bf(x)g(x) - af'(x)g(x) - bf(x)g(x) \\ &= a(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)) \\ &= ah(x) \end{aligned}$$

c) (Litt slurvete oppgavetekst – det burde vært en antagelse om at $h(x)$ er forskjellig fra 0 i minst ett punkt x). Deler vi på $h(x)$ i formelen i b) og integrerer, får vi

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\, dx = \int a\, dx$$

På høyre side innfører vi ny variabel $u = h(x)$. Da er $du = h(x)\, dx$, og vi får

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int a\, dx$$

Integrasjon og innsetting gir

$$\ln |h(x)| = ax + K$$

der K er en integrasjonskonstant. Vi løser for $h(x)$ og får

$$h(x) = \pm e^K e^{ax}$$

Siden $\pm e^K$ kan være en hvilken som helst, ikke-null konstant C, kan dette skrives $h(x) = Ce^{ax}$. Går vi tilbake til den opprinnelige ligningen $h'(x) = ah(x)$, ser vi at $h(x) = Ce^{ax}$ også er en løsning når $C = 0$ (vi mistet denne løsningen da vi delte på $h(x)$).

d) Sjekker først at $f(x) = e^x$ er en løsning av differensialligningen når $a = 2$, $b = -1$. Vi får $f''(x) = e^x$ og $2f'(x) - f(x) = 2e^x - e^x = e^x$, så $f''(x) = 2f'(x) - f(x)$.

La $g(x)$ være en hvilken som helst annen løsning. Da vet vi fra c) at $h(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ er på formen Ce^{2x} (husk at $a = 2$). Siden $h(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = e^x g'(x) - e^x g(x)$, har vi derfor

$$e^x g'(x) - e^x g(x) = C^{2x}$$

som kan omskrives til

$$g'(x) - g(x) = Ce^x$$

Enhver løsning av den opprinnelige differensialligningen er derfor også en løsning av $g'(x) - g(x) = Ce^x$.

e) (Bonusspørsmål) Vi løser $g'(x) - g(x) = Ce^x$ ved å multiplisere med den integrerende faktoren e^{-x}. Da får vi $g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = C$, som også kan skrives

$$\big(g(x)e^{-x}\big)' = C$$

Integrasjon på begge sider gir

$$g(x)e^{-x} = Cx + D$$

der D er en ny integrasjonskonstant. Dermed er

$$g(x) = Cxe^x + De^x$$

Vi vet fra d) at alle løsninger av differensialligningen $y'' = ay' + by$ er på denne formen, og det er lett å sjekke ved innsetting at alle funksjoner $g(x) = Cxe^x + De^x$ virkelig er løsninger av differensialligningen.

Bemerkning: Legg merke til at den karakteristiske ligningen til differensialligningen $y'' = 2y' - y$ (også kjent som $y'' - 2y' + 1 = 0$) har en dobbeltrot $r = 1$. Teknikken i denne oppgaven kan altså brukes til å finne de litt mystiske "ekstraløsningene" vi får når den karakteristiske ligningen har en dobbeltrot. Funksjonen h kalles ofte *Wronski-determinanten* til f og g siden den fremkommer som

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$