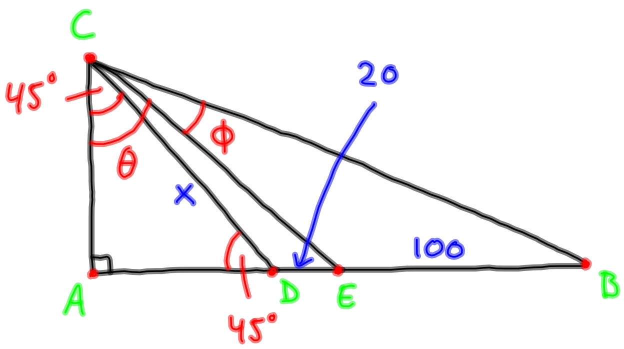
Løsningsforslag oblig 2 Mat 1100 h13

Oppgave 1

a)



Pyth: $AC^2 + AD^2 = x^2$

og $AC = AD$.

Ergo $AC = AD = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{AD + 120}{AC} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} + 120}{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{1 + \frac{120\sqrt{2}}{x}}}$$

$$\tan\theta = \frac{AD + 20}{AC} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} + 20}{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{1 + \frac{20\sqrt{2}}{x}}}$$

b) Vi får

$$\theta + \phi = \arctan\left(1 + \frac{120\sqrt{2}}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(1 + \frac{20\sqrt{2}}{x}\right)$$

så $\phi(x) = \underline{\underline{\arctan\left(1 + \frac{120\sqrt{2}}{x}\right) - \arctan\left(1 + \frac{20\sqrt{2}}{x}\right)}}$

c) $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{0}}$

fordi argumentene til de to arctan-leddene begge går mot $+\infty$, og

$$\lim_{u\to\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}.$$

Videre:

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \arctan 1 - \arctan 1 = \underline{\underline{0}}$$

d) $$\phi'(x) = \frac{1}{1+\left(1+\frac{120\sqrt{2}}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-120\sqrt{2}}{x^2}\right)$$

$$- \frac{1}{1+\left(1+\frac{20\sqrt{2}}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-20\sqrt{2}}{x^2}\right)$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{x^2+(x+20\sqrt{2})^2} - \frac{120\sqrt{2}}{x^2+(x+120\sqrt{2})^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{20\sqrt{2}\left[x^2+(x+120\sqrt{2})^2\right] - 120\sqrt{2}\left[x^2+(x+20\sqrt{2})^2\right]}{\left[x^2+(x+20\sqrt{2})^2\right]\cdot\left[x^2+(x+120\sqrt{2})^2\right]}}}$$

Nevneren i $\phi'(x)$ er positiv for alle $x \in (0, \infty)$, så vi regner videre på telleren for å sjekke fortegnet. Telleren er:

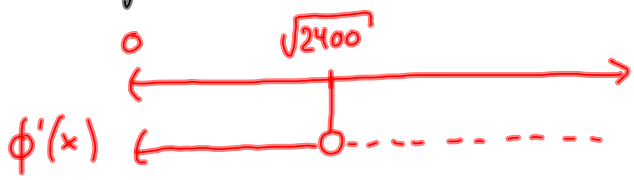
$$20\sqrt{2}\left[x^2+x^2+240\sqrt{2}\,x+120^2\cdot 2-\left(6x^2+6x^2+240\sqrt{2}\,x+6\cdot 20^2\cdot 2\right)\right]$$

$$=20\sqrt{2}\left[2x^2+\cancel{240\sqrt{2}}\,x+2\cdot 120^2-12x^2-\cancel{240\sqrt{2}}\,x-12\cdot 20^2\right]$$

$$=20\sqrt{2}\left[24000-10x^2\right]$$

$$=200\sqrt{2}\left(2400-x^2\right)$$

Så fortegnslinjen ser slik ut:



$\phi(x)$ vokser på $(0, \sqrt{2400}]$ og avtar på $[\sqrt{2400}, \infty)$.

c) Makspunktet for $\phi(x)$ tilsvarer $\sqrt{2400}$ fot, altså

$$\approx 49 \text{ fot}$$

Sjørøverne må altså gå 49 fot oppover tribunen for å komme dit kongen satt.

Oppgave 2

$$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x} \quad \text{for } x \in (0, \infty).$$

a) $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x \overset{[0^0]}{=} \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$$

Eksponenten:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x \overset{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Ergo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^0 = 1.$

For at f skal bli kontinuerlig i 0, må altså

$$\underline{\underline{f(0) = 1}}$$

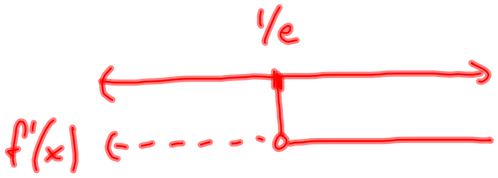
b) $$f'(x) = e^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{e^{x \ln x}(\ln x + 1)}} \quad \text{for } x > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^{x \ln x}}_{\to 1}\left(\underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + 1\right) = \underline{\underline{-\infty}}$$

c) $f'(x) = 0$ gir

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$



$\underline{f \text{ avtar på } \left[0, \frac{1}{e}\right] \text{ og vokser på } \left[\frac{1}{e}, \infty\right).}$

Globalt minimum for f : $\underline{\underline{x = \frac{1}{e}}}$

Lokalt maksimum for f : $\underline{\underline{x = 1}}$

f har intet globalt maksimum, siden $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

d) Siden f er kontinuerlig på hele D_f, har den ingen vertikale asymptoter. Siden $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, har den ingen horisontale asymptoter.

Sjekker skrå :

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x \ln x}}{x}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x \ln x}(\ln x + 1)}{1}$$

$$= +\infty$$

Ergo ingen skrå asymptote.

Oppgave 3

$$\int \sin(\sin x)\cos(\sin x)\cos x \, dx$$

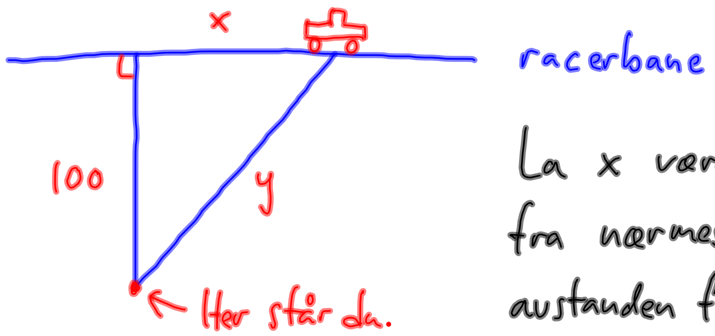
$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin(\sin x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(\sin x) \cdot \cos x \\ du &= \cos(\sin x)\cos x \, dx \end{aligned}}$$

$$= \int u \, du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\left[\sin(\sin x)\right]^2 + C}}$$

Oppgave 4

Figur:



La x være bilens avstand fra nærmeste punkt og y avstanden fra bilen til deg.

Pythagoras: $x^2 + 100^2 = y^2$

Så (deriverer): $\boxed{2x(t) \cdot x'(t) + 0 = 2y(t) \cdot y'(t).}$

På tidspunktet vårt er $x = 100$, så

$$y^2 = 100^2 + 100^2, \quad \text{dvs.} \quad y = \sqrt{2} \cdot 100.$$

Så finner vi $x'(t)$ regnet i meter per sekund:

$$150 \text{ km/h} = 150 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 41{,}67 \text{ m/s}$$

Innsetting av dette samt $x(t) = 100$ og $y(t) = \sqrt{2} \cdot 100$ i den innrammede likningen, gir $y'(t) \approx 29.5$

Bilen fjerner seg med fart $\underline{\underline{\approx 29{,}5 \text{ m/s} \approx 106 \text{ km/h}}}$