UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 15. oktober 2010.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgavene teller 1 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 20. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Oppgaveark

Oppgave 1. Den deriverte til funksjonen $f(x) = \sin(\pi \cos(x))$ er:

A $\cos(\pi \sin(x))$

✓**B** $-\pi \sin(x) \cos(\pi \cos(x))$

C $-\pi \cos(x) \cos(\pi \cos(x))$

D $-\pi \sin(x) \cos(\pi \sin(x))$

E $\pi \cos(\pi \cos(x))$

Oppgave 2. Det komplekse tallet $i/(1+i)$ blir på formen $re^{i\theta}$:

A $2e^{i\frac{7}{4}\pi}$

B $2e^{i\frac{1}{4}\pi}$

✓**C** $(\sqrt{2}/2)e^{i\pi/4}$

D $\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

E $\sqrt{2}i$

Oppgave 3. Det komplekse tallet $z = 3e^{i\frac{5}{6}\pi}$, z er lik:

✓**A** $-(3/2)\sqrt{3} + (3/2)i$

B $-3\sqrt{3} - (3/4)i$

C $-1\sqrt{3} + (1/4)i$

D $-3 + 3i$

E $3\sqrt{3} - (3/4)i$

Oppgave 4. Polynomet $z^3 - 3z^2 + 6z - 4$ har røtter

A 1, 2 og $1 + i$

B 1, $1 - i$ og $1 + i$

✓**C** 1, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

D -1, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

E i, $1 - i\sqrt{3}$ og $1 + i\sqrt{3}$

Oppgave 5. For $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, definer $w = \bar{z}/z$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A $w \in \mathbb{R}$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

B w er rent imaginær for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

C $w = 1/\bar{z}$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

D $\overline{wz} = \bar{z}^2$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

✓**E** $|w| = 1$ for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Oppgave 6. Det komplekse tallet $z = e^{i\pi/3} + \sqrt{3}e^{i7\pi/6}$ er lik

A $-i$

B e^i

C $(1 + \sqrt{3})e^{i9\pi/6}$

✓**D** -1

E 1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. La

$$a_n = e^{\frac{\sin(n)}{n}}, \; n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Da er $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

✓**A** 1

B π

C Ingenting, følgen divergerer.

D 0

E e

Oppgave 8. Den deriverte til $f(x) = \ln(\cos(x))$ er

✓**A** $-\tan(x)$

B $1/\sin(x)$

C $-1/\sin(x)$

D Fins ikke, siden f ikke er deriverbar.

E 1

Oppgave 9. Grenseverdien

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x) + x^2} - x} \text{ blir}$$

A 1

B 1/2

✓**C** $1 + \sqrt{2}$

D Grensen eksisterer ikke

E ∞

Svar: Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x) + x^2} - x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)(\sqrt{\sin^2(x) + x^2} + x)}{\sin^2(x) + x^2 - x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)(\sqrt{\sin^2(x) + x^2} + x)}{\sin^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\sin^2(x) + x^2} + x}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{\sin^2 x}} + \frac{x}{\sin x} \right) \\
&= \sqrt{1+1} + 1 = \sqrt{2} + 1,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

Oppgave 10. Grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \text{ blir}$$

A 0

(Fortsettes på side 4.)

B 1

C e

✓**D** $1/e$

E ∞

Svar: Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x+1}} = e^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Oppgave 11. Den deriverte til funksjonen

$$f(x) = x\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{er:}$$

A $x/(1+x^2)$

B $1/(1+x^2) + \ln(1+x^2)$

C $x^2/(1+x^2) + \ln(1/(1+x^2))$

✓**D** $-2x^2/(1+x^2) + \ln(1/(1+x^2))$

E $x^2/(1+x^2)$

Oppgave 12. En sylinderformet eske med høyde x og radius r skal ha volum lik 1. Hvilken radius må esken ha hvis det totale overflatearealet (topp, bunn og sidevegg) skal bli minst mulig?

A π

B $\sqrt{2\pi}$

C 1

D $(2\pi)^{1/3}$

✓**E** $(2\pi)^{-1/3}$

Oppgave 13. Vi har at

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Den inverse til denne funksjonen, $\sinh^{-1}(y)$, er gitt ved:

A $2(\ln(-y) - \ln(y))$

✓**B** $\ln(y + \sqrt{y^2+1})$

C $\ln(y - \sqrt{y^2+1})$

D $\sin(y)$

E Funksjonen har ingen inversfunksjon

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 14. Når $x \to \infty$ har funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

asymptote:

A $y = x$

B $y = \sqrt{x^2+1}$

✓**C** $y = x + 1$

D $y = 2x + 1$

E $y = x - 1$

Oppgave 15. Funksjonen

$$f(x) = e^{-x^2}$$

er konkav på mengden:

A $[0, \infty)$

✓**B** $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$

C $(-\infty, -1/\sqrt{2})$

D $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

E Ingen steder

Oppgave 16. Funksjonen $f : (0, \sqrt{\pi}/2) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x^2))}{x^4}.$$

Da blir grensen $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

A ∞

B 1

C 0

D 1/4

✓**E** $-1/2$

Svar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(x^2))}{x^4} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin(x^2)2x}{4x^3\cos(x^2)} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2\cos(x^2)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2)}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

der vi igjen har brukt at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

Oppgave 17. Den andrederiverte til funksjonen

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

er

A $e^{\sin(x)}(\sin^2(x) + \cos(x))$

(Fortsettes på side 6.)

B $e^{\sin(x)}\cos(x))$
✓**C** $e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x))$
D $e^{\sin(x)}(\cos^2(x) + \cos(x))$
E $e^{\cos(x)}$

Oppgave 18. Funksjonen

$$f(x) = e^{\sin^3(x)} \text{ er injektiv på mengden:}$$

A $[0, \infty)$
✓**B** $[-\pi/2, \pi/2]$
C $[-\pi/2, \pi/2] \bigcup [5\pi/2, 7\pi/2]$
D $[-2, 2]$
E hele $\mathbb{R}$

Svar: Vi har at $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x e^{\sin^3(x)}$. Det er klart at $f'(x)$ skifter fortegn for $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, o.s.v., slik at områder der f er injektiv ikek kan inneholde disse punktene. Legg videre merke til at $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi) = [e^{-1}, e]$ for enhver k. Dette utelukker svaralternativ 4 også, som var det enestesvaralternativet som ikke inneholdt punkter på formen $k\frac{\pi}{2}$. □

Oppgave 19. Et prosjektil som skytes ut med en vinkel $\theta \in [0, \pi/2]$ har etter en tid t posisjonen $(x(t), y(t))$, der $x(t) = (\frac{\pi}{2} - \theta)\sqrt{t}$ og $y(t) = \theta t - \frac{t^2}{2}$.

Prosjektilet lander når det etter en tid s treffer bakken, slik at $y(s) = 0$. Hvilken utgangsvinkel θ vil maksimere lengden $x(s)$?

A $\pi/4$
B $\pi/2$
C $\pi/\sqrt{5}$
✓**D** $\pi/6$
E $\pi/12$

Svar: Vi har $y(s) = 0$ når $\theta s - \frac{s^2}{2} = 0$, eller når $s = 2\theta$. Da blir

$$x(s) = (\frac{\pi}{2} - \theta)\sqrt{s} = (\frac{\pi}{2} - \theta)\sqrt{2\theta} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\theta^{1/2} - \sqrt{2}\theta^{3/2}.$$

Deriverer vi dette med hensyn på θ og setter lik 0 får vi $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\theta^{-1/2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\theta^{1/2} = 0$, som gir at $\frac{3\sqrt{2}}{2}\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, og dermed $\theta = \frac{\pi}{6}$. □

Oppgave 20. En konkav og to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon f er slik at $f(x) > 0$ for alle x med i definisjonsområdet til f, D_f. Sett $g(x) = 1/f(x)$. Hvilket av følgende utsagn må da være sant?

A g er konkav på D_f
✓**B** g er konveks på D_f
C g er verken konveks eller konkav på D_f
D g er voksende på D_f
E g er avtagende på D_f

(Fortsettes på side 7.)

Svar: Vi har at $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$, og at

$$g''(x) = \frac{-f''(x)[f(x)]^2 + 2f(x)[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} = \frac{-f''(x)f(x) + 2[f'(x)]^2}{[f(x)]^3}.$$

Siden $f(x) > 0$ er nevneren her positiv. Siden f er konkav så er $f''(x) < 0$, men da blir $-f''(x)f'(x) > 0$, slik at telleren blir positiv. Men da er også $g''(x)$ positiv, slik at g er konveks. $\square$

SLUTT