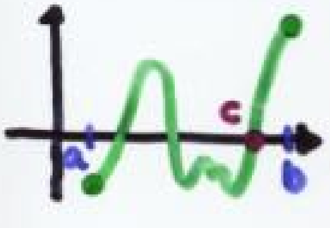
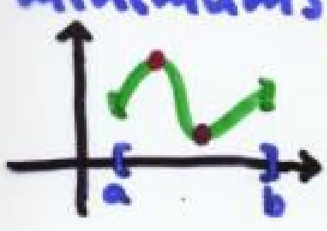
# Funksjonslære

**Skjæringssetningen:** Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn så finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.




Nyttig til å vise at en funksjon har et nullpunkt uten at vi må regne ut hva det er.

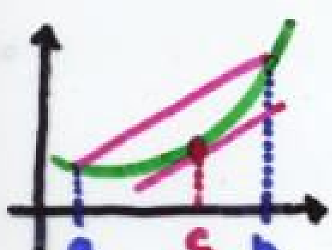
**Ekstremalverdisetningen:** Enhver kontinuerlig funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definert på et lukket, begrenset intervall, har både maksimums- og minimumspunkter.




Kan brukes til å vise at en funksjon har maksimums- og minimumspunkter uten å måtte regne ut hva de er.

**Middelverdisetningen:** Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar i $(a,b)$, så finnes det en $c \in (a,b)$ slik at

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{stigningstall for tangenten i punktet } c} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{stigningstall til sekanten gjennom } (a,f(a)) \text{ og } (b,f(b))}$$



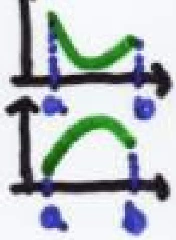

Kan brukes til å vise diverse ulikheter, f.eks at $|\cos x - \cos y| < |x-y|$ for alle $x, y$. (Sett $f(x) = \cos x$)

# Kurvedrøfting

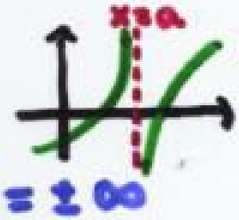
**Maksimal- og minimalpunkt**: Nok å sjekke endepunktene av intervallet, punkter hvor $f'(c) = 0$ og punkter hvor $f$ ikke er deriverbar.

For å avgjøre om et punkt virkelig er maks/min:
Fortegnsskjema for $f'$:


**Krumning**: $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ konveks
$f''(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ konkav




**Asymptoter:**




- **Vertikale:** Let etter punkter $a$ slik at
  $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$


- **Skråasymptoter** (spesialtilfelle: horisontal)
  Regn ut $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ og så $b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$
  Hvis både $a$ og $b$ eksisterer, er $y = ax + b$ en skråasympt.

**Omvendte funksjoner**: En $\underbrace{\text{injektiv}}^{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$ funksjon $f: D_f \to V_f$ har en omvendt funksjon $f^{-1}: V_f \to D_f$ gitt ved at hvis $f(x) = y$, så er $f^{-1}(y) = x$.

**Derivasjon**: $\boxed{(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$

## Uegentlig integral: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

## Logaritmisk derivasjon: $f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln|f(x)|\right)'$

(Husk: $\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$ ved kjerneregelen)

Eks: Vi skal derivere $f(x) = x^2\cdot\cos^4 x\cdot e^x$

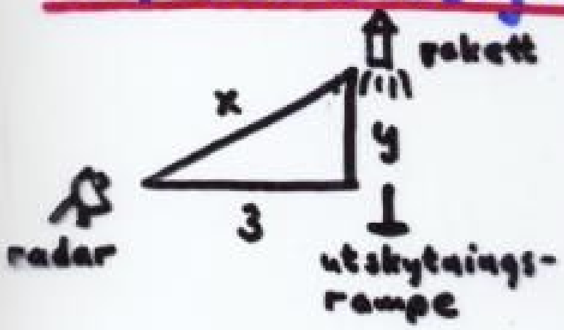
Vi har: $\ln|f(x)| = \ln|x^2\cdot\cos^4 x\cdot e^x| = \ln|x^2| + \ln|\cos^4 x| + \ln|e^x|$

$= 2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x$

Så: $D[\ln|f(x)|] = 2\cdot\frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) + 1 = \underline{\frac{2}{x} - 4\tan x + 1}$

Dermed: $f'(x) = f(x)\cdot D[\ln|f(x)|] = \underline{\underline{x^2\cos^4 x\cdot e^x\left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)}}$

## Koplede hastigheter:




En rakett skytes vertikalt opp 3 km fra en radarstasjon. På et gitt tidspunkt er avstanden fra raketten til stasjonen 5 km, og denne avstanden øker med fart 0,8 km/s. Hvor stor fart har raketten?

Løsning: Her vet vi at $x'(t) = 0{,}8$ km/s. Vi ønsker å finne $y'(t)$. Vi bruker først Pythagoras til å finne en sammenheng mellom $x(t)$ og $y(t)$: $3^2 + y(t)^2 = x(t)^2$

Så deriverer vi begge sider av ligningen mhp $t$:

$$2y(t)y'(t) = 2x(t)x'(t) \Rightarrow y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{y(t)}$$

Når $x(t) = 5$, gir Pythagoras at $y(t) = \sqrt{x(t)^2 - 9} = \sqrt{25-9} = \underline{4}$

Dermed blir $y'(t) = \frac{x(t)\cdot x'(t)}{y(t)} = \frac{5\cdot 0{,}8}{4} = 1$, dvs $\underline{1\text{ km/s}}$