Oppsummering

$z = a + ib$

a kalles realdelen til z

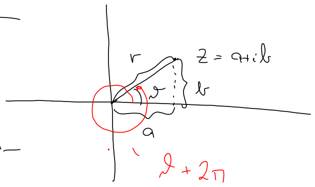
b —"— imaginærdelen —"—

Polarkoordinater: r – modulus

ϑ – argument

$a = r\cos\vartheta$, $b = r\sin\vartheta$

$z = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta$



Hvis ϑ er et argument for z, så er $\vartheta + 2\pi$, $\vartheta + 4\pi, \dots$ også argumenter for z.

Eksponentialfunksjonen

Vi vet hva e^x er når x er et reelt tall, men hva er e^z når z er et komplekst tall?

Regneregel for e^x: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

Ønsker at utvidelsen skal tilfredsstille $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

Det viser seg at det bare er ett mulig valg:

Definisjon: Hvis $z = a+ib$, så definerer vi

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

Eksempel: Hva skjer hvis z tilfeldigvis er et reelt tall, f.eks. $z = 7 = 7 + 0i$

$$e^7 = e^{7+0i} = e^7(\underbrace{\cos 0}_{1} + i\underbrace{\sin 0}_{0}) = e^7$$

Eksempel: $z = i\pi = 0 + i\pi$

$$e^{i\pi} = \underbrace{e^0}_{1}(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}) = -1, \text{ dvs } e^{i\pi} = -1$$

eller $e^{i\pi} + 1 = 0$ Eulers formel

Eksempel: $z = 2\pi i = 0 + 2\pi i$

$$e^{2\pi i} = e^{0+2\pi i} = \underbrace{e^0}_{1}(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i\underbrace{\sin 2\pi}_{0}) = 1$$

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

Eksempel: $z = i\vartheta = 0 + i\vartheta$

$$e^{i\vartheta} = e^{0+i\vartheta} = \underbrace{e^0}_{1}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Polar/eksponentialform: $z = a + ib$ med polarkoordinater r og ϑ

$$z = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta = r(\underbrace{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}_{\text{cis}\,\vartheta}) = re^{i\vartheta}$$

Setning: Hvis z og w er komplekse tall så er

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Bevis: Anta at $z = a+ib$ og $w = c+id$. Da er $z+w = (a+c) + i(b+d)$. Da er

$$e^{z+w} = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{a+c}\left(\cos(b+d) + i\sin(b+d)\right)$$

Tilsvarende er

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

komplekst tall med modulus e^a og argument b

$$e^w = e^{c+id} = e^c(\cos d + i\sin d)$$

komplekst tall med modulus e^c og argument d

$e^z \cdot e^w$: modulus: $e^a \cdot e^c = e^{a+c}$

argument: $b+d$

Dermed

$$e^z \cdot e^w = e^{a+c}\left(\cos(b+d) + i\sin(b+d)\right) = e^{z+w}$$

Denne regelen kan utvides til flere ledd:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}\cdot e^{z_3}\cdot \ldots \cdot e^{z_n} = e^{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n}$$

Hvorfor: $\underbrace{e^{z_1}\cdot e^{z_2}}_{e^{z_1+z_2}}\cdot e^{z_3} = e^{z_1+z_2}\cdot e^{z_3} = e^{z_1+z_2+z_3}$

Hva skjer når $z_1 = z_2 = \ldots z_n$?

$$(e^z)^n = e^z\cdot e^z\cdot e^z\cdot\ldots\cdot e^z = e^{z+z+z+\ldots+z} = e^{nz}$$

Setning: Når z er et komplekst tall og $n = 1,2,3,4,\ldots$, så $(e^z)^n = e^{nz}$

De Moivres formel:

$(e^{z})^{n} = e^{nz}$

Setning: For $n = 1, 2, \ldots$

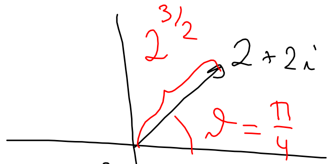
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Bevis:

$$(\underbrace{\cos\theta + i\sin\theta}_{e^{i\theta}})^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Eksempel: Regn ut $(2+2i)^{43}$

Skriv $z = 2+2i$ på polarform.



$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{\underset{2\cdot 4}{8}} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$$

$2^1 \cdot 2^{1/2} = 2^{1+1/2}$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Altså

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2^{3/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$(ab)^n = a^n b^n$

Dermed

$$z^{43} = \left[2^{3/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{43} = \left(2^{3/2}\right)^{43}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{43}$$

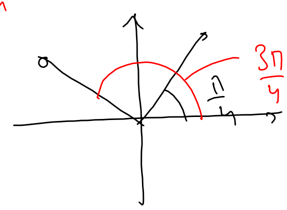
$$= 2^{\frac{129}{2}}\left(\cos\frac{43\pi}{4} + i\sin\frac{43\pi}{4}\right)$$

$$\frac{43}{4}\pi = \frac{40}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = 10\pi + \frac{3}{4}\pi = 5\cdot(2\pi) + \frac{3}{4}\pi$$

$$= 2^{\frac{129}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{129}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

usynlig rom



$$= 2^{\frac{129}{2}}\,\frac{2^{1/2}}{2}(-1+i)$$

$$= 2^{\frac{129}{2}+\frac{1}{2}-1}(-1+i) = \underline{\underline{2^{64}(-1+i)}}$$

Eksempel: Husk $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Hva med $\sin 3x$, $\cos 3x$

$\sin 4x$, $\cos 4x$

$\vdots$

n = 3: De Moivre:

$$(\overbrace{\cos x}^{a} + \overbrace{i \sin x}^{b})^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

$$= \cos^3 x + 3\cos^2 x \, i \sin x + 3\cos x\,(\underbrace{i}_{-1}\sin x)^2 + (i\sin x)^3$$

↳ $i^3 = i\, i^2 = -i$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

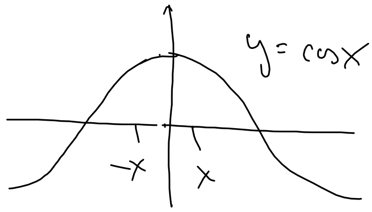
$$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i\,(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

Altså: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

Trigonometriske funksjoner

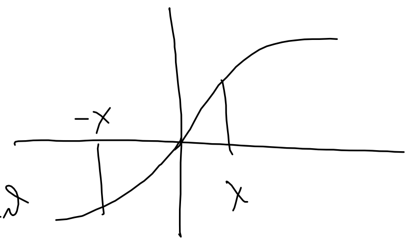


Husk at: $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

$$e^{-i\vartheta} = e^{i(-\vartheta)} = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

Altså

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$
$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$



Adderer: $e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2\cos\vartheta \Rightarrow \cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

Subtraherer: $e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i\sin\vartheta \Rightarrow \sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$

Anta nå at z er et komplekst tall. Da defineres

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Refleksjonsstund:

3. grads / 4 grads ligninger

$y'' + ay' + by = 0$ / e^{rx} e^{-rx}

$e^{rx}(A\cos bx + B\sin bx)$

$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$

$\Longrightarrow$ elektrisitetslære .

$\Longrightarrow$ kvantemekanikk : $\rightarrow$ Schrödingerligning