MAT1100 - Grublegruppen
Uke 36

Jørgen O. Lye

Partiell derivasjon

Hvis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så kaller man følgende dens partiellderiverte (gitt at de finnes!)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Merk at definisjonene er at du deriverer med hensyn på den ene av de 2 variablene, mens den andre bare følger med som en konstant. Eksempler på bruk er at hvis $f(x, y) = x^2 y$ så er $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, mens $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$.

Når jeg skriver "gitt at de finnes" mener jeg bare at grensene må finnes, uavhengig av hvordan h går mot 0. Altså den vanlige definisjonen av derivasjon, som etter planen vil være tema for forelesningen 19.09. Mer om partiell derivasjon er tema på slutten av MAT1100 og i MAT1110.

Det kan bemerkes at det ikke er noe magisk med planet her: hvis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ så er $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ definert akkurat som for $\mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemann

Gitt en funksjon $f : U \to \mathbb{C}$ hvor $U \subset \mathbb{C}$, dvs en delmengde av $\mathbb{C}$. Visuelt kan du tenke på U som en disk eller hele planet (dette er sant for våre formål). I likhet med tall så har komplekse funksjoner en realdel og imaginærdel: $f(z) = u(z) + iv(z)$. Dvs u, v er begge funksjoner fra U inn i $\mathbb{R}$. Man kan også skrive $u(z) = u(x, y)$ og $v(z) = v(x, y)$.

Når man regner ut

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

for $\Delta z = \Delta x$ og $\Delta z = i\Delta y$ får man følgende relasjoner mellom u og v hvis man krever at disse 2 grensene er like:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Disse 2 kalles Cauchy-Riemann ligningene.

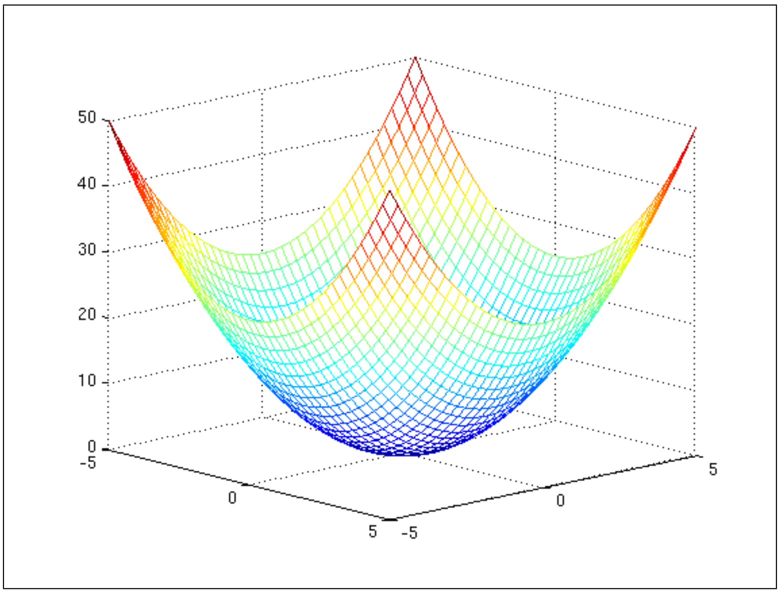
Goursats teorem

Utledningen over sier at hvis f er deriverbar i kompleks forstand, så må Cauchy-Riemann gjelde. Dette kan brukes til å argumentere at hvis Cauchy-Riemann ikke holder, så er funksjonen f ikke deriverbar som kompleks funksjon. Det kan derimot vises (men ikke her!) at følgende er sant: anta u, v har partiell-deriverte som finnes, og at f tilfredsstiller Cauchy-Riemann. Da er f deriverbar som kompleks funksjon.

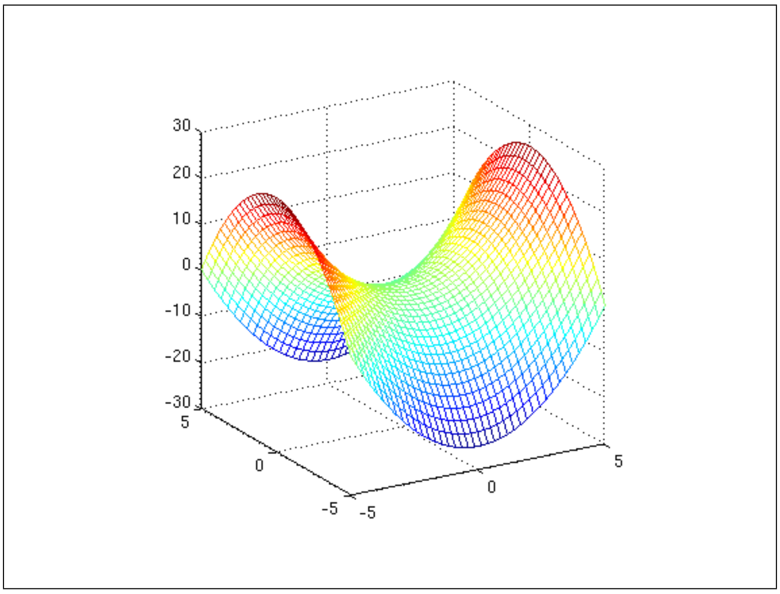
Oppsummeringsvis: det holder å sjekke Cauchy-Riemann!

Grafisk bilde av funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ inn i $\mathbb{R}$

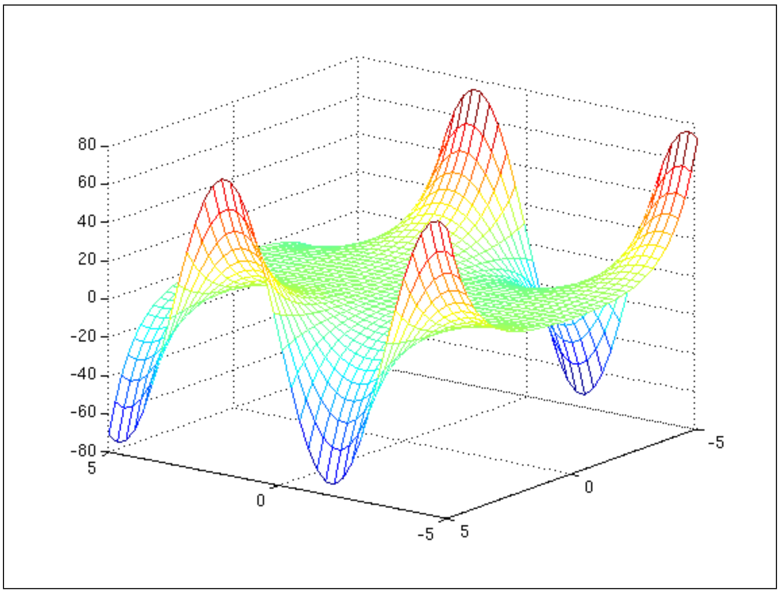
Når man plotter funksjoner i 1 variabel, trenger man bare si hvor høyt over x-aksen funksjonen er. Dvs. man tenker seg at man har èn kopi av $\mathbb{R}$ som utgjør x-aksen, mens en annen utgjør y-aksen. I 2 variable tenker man på $f(x, y)$ som en viss høyde over x-y-planet. Analogt med skrivemåten $y = f(x)$ skriver man gjerne $z = f(x, y)$. I figurene 1-3 er det plottet noen enkle funksjoner i 2 variable for å få litt følelse for dette.



Figur 1: Plot av funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Figur 2: Plot av funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Figur 3: Plot av funksjonen $f(x, y) = \mathrm{Re}\,(\sin(x + iy))$.

Integrasjon i planet

Dere vil i MAT1110 (og kanskje senere på grublegruppen) lage en teori for integrasjon i flere variable enn 1. Her er det praktisk med en mer ad-hoc definisjon derimot: hvis $f : U \to \mathbb{R}$ er en funksjon i 2 variable igjen, så kan man integrere i både x og y, dvs skrive

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int \left(\int f(x, y)\, dx \right) dy$$

I det innerste integralet integrere man $f(x, y)$ med hensyn på x mens man behandler alle y-er som konstanter. Så integrerer man dette igjen med hensyn på y. Når man har et bestemt integral så må man gi grenser til både x og y. Dvs. man bestemmer seg for et område i planet, og integralet blir da volumet (regnet med fortegn) mellom grafen (som er en flate i 2 dimensjoner) og x-y-planet.

Eksempel

La $f(x, y) = x^2 + y^2$, og la området i planet være kvadratet med hjørner (0,0), (1,0), (1,1) og (0,1). Da ser regnestykket slik ut:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2\right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Konturintegral

Det neste som må på plass er hva et konturintegral (også kalt linjeintegral) er. Settingen er som følger: la $\mathbf{r}(t)$ være en parametrisering av en kurve $\mathcal{C}$ i planet. Dvs. $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Man kan godt tenke på t som tid, slik at $\mathbf{r}(t)$ beskriver hvor på en kurve man er ved tiden t. Eksempler er $\mathbf{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ som beskriver en sirkel, mens $\mathbf{r}(t) = (t, t)$ beskriver linjestykket mellom $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Vi vil integrere funksjonen $f(x, y)$ langs denne kurven, og skriver

$$\int_{\mathcal{C}} f\,dr = \int_0^1 f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Eksempel: La $f(x, y) = x^2 + y^2$. For sirkelen er $\mathbf{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ slik at $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-2\pi \sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$ og $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\pi^2 \sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi t)} = 2\pi$. Videre er $f(\mathbf{r}(t)) = 1$, slik at

$$\int_{\mathcal{C}} f\,dr = \int_0^1 1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

Greens teorem

Da er vi endelig klare for å formulere Greens teorem!

La Ω være en område i planet avgrenset av en glatt kurve $\mathcal{C}$ slik at kurven ikke skjærer seg selv, og slik at den bare har endelig mange "knekkpunkter". La $F(x, y)$ og $G(x, y)$ være 2 deriverbare funksjoner i planet (som før). Da er

$$\int_{\mathcal{C}} (F\,dx + G\,dy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Bevisskissen er som følger: la Ω være et rektangel og regn ut begge sidene. Argumenter så at du alltid kan approksimere et område i planet med rektangler.

Cauchys integralteorem

La $f(z)$ være en deriverbar funksjon i kompleks forstand. La $F = f$ og $G = if$ i Greens. Hvis man skriver $dz = dx + idy$ ser man ved bruk av Cauchy-Riemann ligningene at

$$\int_{\mathcal{C}} f\, dz = 0$$

Når man integrerer rundt en lukket kurve slik er det vanlig å skrive $\oint$. Cauchys teorem er altså

$$\oint f\, dz = 0$$

Veldig viktig korollar

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Korollar

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Hvis man integrerer rundt en disk D med radius R, og slik at $M = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$, så er

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{(2\pi)} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n! M}{R^n}$$

Korollar

Hvis $f : \mathbb{C} \to C$ er begrenset og deriverbar, dvs det finnes en $M \in \mathbb{R}$ slik at $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Da er f en konstant.

Maksimum modulus-prinsippet

La $D(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$ være en disk med radius r og sentrum w. Begrensingen over gir for $n = 0$ at

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial D(w,r)} |f(\zeta|$$

for alle $z \in D(w, r)$. Sagt med ord er vil en kompleks (deriverbar) funksjon alltid være størst på randen av området!

Algebraens fundamentalteorem

Algebraens fundamentalteorem sier at ethvert polynom som ikke er konstant har et nullpunkt i $\mathbb{C}$. La oss vise dette. Anta $P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$ ikke har et nullpunkt. Vi kan anta at $c_n \neq 0$. Da er $\frac{1}{P(z)}$ en lovelig kompleks funksjon som er deriverbar siden P er det (alle polynomer er deriverbare). Planen er å vise at $\frac{1}{P}$ er begrenset som funksjon $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dermed konstant. Merk at vi kan skrive $|P(z)| = |z|^n \left|c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_0}{z^n}\right|$. La $D(0, R)$ være en disk med sentrum i 0 og radius R. Fra resultatet rett over vet vi at $\frac{1}{P}$ er størst langs randen, dvs der $|z| = R$. Der har vi at

$$\frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{R^n \left|(c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_0}{z^n})\right|}$$

Vi kan velge en litt stor R slik at dette er begrenset for alle større R. Bare tenk at man velger en R så stor at den i praksis knebler alle leddene $\frac{c_{n-1}}{z}$, $\frac{c_{n-1}}{z^2}$ etc. Slik at andre ledd i nevneren er dominert av c_n. Da vil $\frac{1}{P}$ bare bli mindre om man velger R større. Altså har man

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq M$$

for alle $r \geq R$. Vi kan dermed la $r \to \infty$ og få at $\frac{1}{P(z)}$ som funksjon fra $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er begrenset. Men da er den konstant ved et av korollarene over. Og da er $P(z)$ konstant, hvilket er en selvmotsigelse. Så $P(z)$ må ha et nullpunkt!