Notater fra forelesning i MAT1100 torsdag 27.08.09

Amandip Sangha, amandips@math.uio.no

28. august 2009

Definisjon 1.1. En delmengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *oppad begrenset* dersom det finnes et tall $b \in \mathbb{R}$ slik at

$$b \geq x \quad \text{for alle } x \in A.$$

Et slikt tall b kalles en *øvre skranke* for A.

Bemerkning 1.2. Hvis b er en øvre skranke for A, vil ethvert tall $c \in \mathbb{R}$ som er slik at $c \geq b$, også være en øvre skranke for A. Dette er klart da $c \geq b$ og $b \geq x$ for alle $x \in A$ medfører $c \geq x$ for alle $x \in A$.

Bemerkning 1.3. Hvis $b > x$ for alle $x \in A$, så er b er en øvre skranke for A, fordi $b > x$ medfører klart at $b \geq x$ holder.

For definisjoner av mengder og intervaller se avsnitt 2.1 i læreboken Kalkulus (s. 80-82).

Eksempel 1.4. Betrakt intervallet $(0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid \; 0 < x < 2\}$. Her har vi at 2 er en øvre skranke for mengden $(0, 2)$. Alle tall større enn 2 er da også øvre skranker for mengden.

Eksempel 1.5. For intervallet $(-\infty, -5] = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x \leq -5\}$ er -5 en øvre skranke. Alle tall større enn -5 vil også være øvre skranker.

Eksempel 1.6. Intervallet $(3, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x > 3\}$ har ingen øvre skranke.

I eksemplene over er altså mengdene $(0, 2)$ og $(-\infty, -5]$ oppad begrensede, men mengden $(3, \infty)$ er ikke oppad begrenset.

Definisjon 1.7. En delmengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *nedad begrenset* dersom det finnes et tall $b \in \mathbb{R}$ slik at

$$b \leq x \quad \text{for alle } x \in A.$$

Et slikt tall b kalles en *nedre skranke* for A.

Tilsvarende bemerkninger som til første definisjon:

Bemerkning 1.8. Hvis b er en nedre skranke for A, vil ethvert tall $c \in \mathbb{R}$ som er slik at $c \leq b$, også være en nedre skranke for A. Dette er klart da $c \leq b$ og $b \leq x$ for alle $x \in A$ medfører $c \leq x$ for alle $x \in A$.

Bemerkning 1.9. Hvis $b < x$ for alle $x \in A$, så er b er en nedre skranke for A, fordi $b < x$ medfører klart at $b \leq x$ holder.

Eksempel 1.10. For intervallet $(0, 2)$ er 0 en nedre skranke, og alle tall mindre enn 0 er også nedre skranker.

Eksempel 1.11. Intervallet $(-\infty, -5]$ har ingen nedre skranke.

Eksempel 1.12. For $(3, \infty)$ er alle tall mindre enn eller lik 3 nedre skranker.

Mengdene $(0, 2)$ og $(3, \infty)$ er altså nedad begrensede, men $(-\infty, -5]$ er ikke nedad begrenset.

Gitt en mengde $A \subset \mathbb{R}$, er altså en øvre skranke et tall som begrenser mengden ovenfra, og en nedre skranke er et tall som begrenser mengden nedenfra. Vi har nå sett at en mengde kan ha flere (og noen ganger ingen) øvre/nedre skranker. Vi skal være spesielt interesserte i den mest "økonomiske" av disse øvre/nedre skrankene, dvs. den meste "effektive" måten å begrense en mengde ovenfra/nedenfra.

Definisjon 1.13. La b være en øvre skranke for mengden $A \subset \mathbb{R}$. Vi sier at b er den *minste øvre skranken* til A dersom b er mindre enn alle andre øvre skranker for A. Vi skriver $b = \sup A$. (supremum)

Tilsvarende definisjon for nedre skranker må bli

Definisjon 1.14. La c være en nedre skranke for mengden $A \subset \mathbb{R}$. Vi sier at c er den *største nedre skranken* til A dersom c er større enn alle andre nedre skranker for A. Vi skriver $c = \inf A$. (infimum)

Eksempel 1.15. For intervallet $(0, 2)$ er 2 den *minste* øvre skranken, altså $\sup(0, 2) = 2$. Det er klart at et tall $y < 2$ ikke kan være en øvre skranke for mengden $(0, 2)$, fordi da vil det finnes tall x mellom y og 2, altså $y < x < 2$. Dette vil si at $x \in (0, 2)$, men y er ikke større enn eller lik tallet x, slik at y er ikke en øvre skranke for $(0, 2)$. Ergo er 2 den minste mulige øvre skranken. Videre har vi at største nedre skranke for $(0, 2)$ er 0, altså $\inf(0, 2) = 0$. Man kan resonnere som før.

Eksempel 1.16. $\sup(-\infty, -5] = -5$, og $\inf(-\infty, -5]$ eksisterer ikke. Vi nevnte allerede i eksempel 1.11 at intervallet $(-\infty, -5]$ ikke hadde noen nedre skranker, følgelig er det meningsløst å spørre om hvilke nedre skranker som vil være størst.

Eksempel 1.17. Intervallet $(3, \infty)$ hadde ingen øvre skranke, altså eksisterer ikke $\sup(3, \infty)$. Man har $\inf(3, \infty) = 3$.

Gitt en delmengde av $\mathbb{R}$, er vi ofte interesserte i å vite om mengden har en supremum eller infimum (som vi har sett over, er det ikke alltid slik). For mengder som er av typen som i eksemplene over, altså intervaller, var det lett å se direkte hva som var øvre og nedre skranker, og det var lett å finne sup og inf (i de tilfellene der disse eksisterte). Men ofte kan man støte på delmengder av $\mathbb{R}$ som ikke er presentert for oss som intervaller, og da vil det være nyttig å ha noen kriterier for å avgjøre hvorvidt en mengde har en supremum/infimum. Til dette har vi

Kompletthetsprinsippet Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde $A \subset \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke (supremum, $\sup A$).

Bemerkning 1.18. Dette prinsippet kan formuleres som et teorem, men vi skal ta det som et aksiom. Og det er påstanden om *minste* øvre skranke som er ikke-triviell. Fordi enhver oppad begrenset mengde har per definisjon en øvre skranke, men å garantere at vi kan finne den *minste* blant de øvre skrankene, det krever en grundigere matematisk begrunnelse.

Bemerkning 1.19. Intervallet $(3, \infty)$ var ikke oppad begrenset og hadde da heller ikke en supremum.

Tilsvarende prinsipp for nedre skranker kan vi nå selv utlede ved å anta kompletthetsprinsippet (husk at vi tar det som et aksiom).

Korollar 1.20. *Enhver ikke-tom, nedad begrenset delmengde $B \subset \mathbb{R}$ har en største nedre skranke (infimum,* $\inf B$*).*

Bevis. Anta at B er ikke-tom og nedad begrenset, la oss si at $d \in \mathbb{R}$ er en nedre skranke for B, dvs. $d \leq x$ for alle $x \in B$. Definér mengden

$$A = \{-x \mid \quad x \in B\}.$$

Siden vi har $d \leq x$ for alle $x \in B$, får vi (ved å multiplisere ulikheten med -1) at $-d \geq -x$ for alle $x \in B$. Dette tilsier at $-d$ er en øvre skranke for A (for husk at elementene i A er på formen $-x$, der $x \in B$). Nå har vi altså at A er ikke-tom og oppad begrenset, så ved kompletthetsprinsippet har A en *minste* øvre skranke, la oss kalle denne $c = \sup A$. Nå gjelder $c \geq -x$ for alle $x \in B$ ("c er større enn eller lik alle elementene i A", for husk igjen at elementene i A er på formen $-x$, der $x \in B$). Vi multipliserer denne ulikheten igjen med -1 og får ulikheten $-c \leq x$ for alle $x \in B$. Denne siste ulikheten forteller altså at $-c$ er en nedre skranke for B. Vi hevder nå at $-c$ faktisk må være den *største* nedre skranken til B. Anta (for kontradiksjon) at $-c$ *ikke* er den største nedre skranken. Da finnes det et tall $e \in \mathbb{R}$ slik at $e > -c$ (e er større enn $-c$) og $e \leq x$ for alle $x \in B$ (e er en nedre skranke for B). Vi multipliserer begge disse ulikhetene med -1 og får

$$-e < c \quad \text{og} \quad -e \geq -x \text{ for alle } x \in B,$$

som tilsier at tallet $-e$ er en øvre skranke for A og at $-e$ er *mindre enn* c, men dette motsier at c var den *minste* øvre skranken for A. Her fikk vi en kontradiksjon, altså må $-c$ være den *største* nedre skranken til B, $-c = \inf B$. □

Bemerkning 1.21. Vi refererer til begge disse formuleringene som kompletthetsprinsippet. Det vil fremgå av sammenhengen (man skriver det eksplisitt) om vi er ute etter å finne supremum eller infimum.

Eksempel 1.22. La oss bruke kompletthetsprinsippet til å vise at det finnes et positivt, reelt tall a som er slik at $a^2 = 2$ (mao. "$\sqrt{2}$" er et reelt tall).

Definér mengden $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad 0 < x^2 < 2\}$. Vi ønsker å se nærmere på $\sup A$, og til det må vi først apellere til kompletthetsprinsippet for å garantere at $\sup A$ finnes. Da må vi først forsikre oss om at mengden vår er ikke-tom og oppad begrenset. Vi har at 1 tilfredsstiller $1^2 = 1$, så $0 < 1^2 < 2$, hvilket betyr at $1 \in A$, altså er A ikke-tom. Videre har vi at 2 må være en øvre skranke for A, fordi hvis et tall x er slik at $x^2 < 2$, da må også $x < 2$ (for hvis ikke, så hadde nødvendigvis kvadratet x^2 vært større enn 2 også). Altså er mengden A oppad begrenset. Ved kompletthetsprinsippet konkluderer vi at A må ha en *minste* øvre skranke, og la oss kalle dette tallet $a = \sup A$. Vi hevder nå at $a^2 = 2$. Vi hevder altså at dette er tallet vi leter etter, nemlig det vi kaller kvadratroten av 2. Vi skal etablere $a^2 = 2$ ved å argumentere at $a^2 < 2$ og $a^2 > 2$ er umulig.

Anta (for kontradiksjon) at $a^2 < 2$. Da kan vi skrive $a^2 = 2 - c$ for et tall c som er slik at $0 < c < 2$. (Merk at man må ha $0 < c$ fordi c skal trekkes fra 2 for å gi et tall a^2 som er *mindre enn* 2. Og merk at man må ha $c < 2$ for ellers ville $2 - c$ ha blitt negativt, men på venstresiden av $a^2 = 2 - c$ står kvadratet a^2 som er et positivt tall). La oss definere og betrakte tallet

$$x = a + \frac{c}{8}.$$

Vi har at $x^2 = (a + \frac{c}{8})^2 = a^2 + \frac{ac}{4} + \frac{c^2}{64}$. Nå husker vi at 2 var en øvre skranke for A, og a er den *minste* øvre skranken til A, hvilket tilsier at $a \leq 2$. Dette medfører

$$\frac{ac}{4} \leq \frac{2c}{4} = \frac{c}{2}.$$

Videre har vi at $0 < c < 2$ medfører

$$\frac{c^2}{64} = c(\frac{c}{64}) < c(\frac{2}{64}) = \frac{c}{32} < \frac{c}{2}.$$

Tilsammen gir dette

$$x^2 = a^2 + \frac{ac}{4} + \frac{c^2}{64} < a^2 + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = a^2 + c.$$

Vi hadde $a^2 = 2 - c$, som gir $a^2 + c = 2$. Med andre ord sier den siste ulikheten at $x^2 < 2$. Dette betyr at $x \in A$. Men på den annen side har vi at $x > a$, fordi $x = a + \frac{c}{8}$. Dette motsier at a var en øvre skranke for A. Dermed er $a^2 < 2$ umulig.

Anta (for kontradiksjon) at $a^2 > 2$. Da kan vi skrive $a^2 = 2 + d$ for et tall $d \in \mathbb{R}$ som er slik at $d > 0$. La oss definere og betrakte tallet

$$y = a - \frac{d}{4}.$$

Her ønsker vi å anta at $y > 0$, og dette får vi ved å anta at d er "passe liten" (helt presist at $d < 4a$). Denne milde antagelsen går ikke utover generaliteten i resonnementet, så vi antar at $y > 0$ nå. Vi regner så at $y^2 = (a - \frac{d}{4})^2 = a^2 - \frac{ad}{2} + \frac{d^2}{16}$. Husk at vi hadde $a \leq 2$, hvilket medfører

$$\frac{ad}{2} \leq \frac{2d}{2} = d,$$

og det er klart at $\frac{d^2}{16} > 0$. Tilsammen gir dette at

$$y^2 = a^2 - \frac{ad}{2} + \frac{d^2}{16} > a^2 - d + 0 = a^2 - d,$$

fordi på høyresiden trekker vi fra et større tall d (større enn tallet $\frac{ad}{2}$ som trekkes fra på venstresiden), og på venstresiden legger man til det positive tallet $\frac{d^2}{16}$, mens man på høyresiden ikke legger til noe ekstra (0). Vi hadde at $a^2 = 2 + d$, som gir at $a^2 - d = 2$. Ulikheten over sier altså at $y^2 > 2$. Dette medfører (sammen med antagelsen $y > 0$) at y er en øvre skranke for A (for husk at et element $x \in A$ tilfredsstiller $x^2 < 2$, så y må nå nødvendigvis være større enn en slik x). Vi har nå etablert at y er en øvre skranke for A, men samtidig har man at $y < a$ da $y = a - \frac{d}{4}$, hvilket motsier at a var den *minste* øvre skranken for A. Dermed er også $a^2 > 2$ umulig.

Vi har nå bevist at $a^2 = 2$.