Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 7

I seksjon 7.1 og 7.2 lærer du å løse oppgaver hvor det kan lønne seg å tegne figurer og sette navn på ukjente størrelser. Oppgave 7.3.7 illustrerer hvordan du kan anslå om et estimat gitt ved Newtons metode er for lite eller for stort. I seksjon 7.4 får du trening i å vise at en funksjon er injektiv, og finne den omvendte funksjonen og dens deriverte. I seksjon 7.5 og 7.6 blir du kjent med cotangens og arcusfunksjonene, og får se eksempler på praktisk bruk av dem (f.eks i oppgave 7.6.14).

Oppgave 7.1.1

Vi skal lage en rektangulær innhegning inntil en låve, og ønsker at innhegningen skal ha størst mulig areal. Vi har materialer til 50 meter gjerde som skal utgjøre tre av sidene i innhegningen. Velger vi to av sidene til å være x meter lange, må den siste siden være $50 - 2x$ meter lang, slik at arealet blir

$$A(x) = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2, \quad x \in [0, 25]$$

Vi deriverer for å finne det maksimale arealet:

$$A'(x) = 50 - 4x$$

Vi ser at $A'(x) = 0$ for $x = 12.5$. I tillegg er $A'(x) > 0$ for $x < 12.5$ og $A'(x) < 0$ for $x > 12.5$, så $x = 12.5$ er et maksimumspunkt for $A(x)$. Det største arealet blir da

$$A(12.5) = 50 \cdot 12.5 - 2(12.5)^2 = 312.5, \text{ det vil si } \underline{\underline{312.5 \text{ m}^2}}.$$

Oppgave 7.1.3

Vi skal finne ut hvor B skal ligge for at avstanden fra A til C via B skal bli minst mulig (se figur til oppgaven i Kalkulus). Her kan vi benytte et enkelt geometrisk argument til å løse oppgaven. La C' være speilingen av C om den nedre horisontale linjen på figuren, kall fotpunktet for normalen fra C ned på denne linja for D og kall fotpunktet for normalen fra A ned på denne linja for E. Da er $|BC| = |BC'|$ siden de to rettvinklede trekantene BDC' og BDC er kongruente. Men det betyr at avstanden fra A til C via B er lik avstanden fra A til C' via B. Den sistnevnte avstanden er kortest når B ligger på den rette linjen mellom A og C', det vil si når trekantene AEB og $C'DB$ er formlike (vinklene BEA og BDC' er rette, og vinklene EBA og DBC' er toppvinkler). Det betyr at vi må ha

$$\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|C'D|}$$

altså

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \frac{9-x}{4}\\ 2x &= 9-x\\ x &= 3\end{aligned}$$

Avstanden fra A til C via B blir altså minst når vi har $\underline{\underline{x = 3}}$.

Oppgave 7.1.5

Vi skal finne det maksimale volumet til en rett sirkulær kjegle hvor sidekanten har lengde $L = 9$. La r være radius i sirkelen og h være høyden til kjeglen (se figuren til oppgaven i Kalkulus). Ved Pythagoras formel har vi da at $r^2 = L^2 - h^2$. Setter vi dette inn i formelen for volumet V av kjeglen, får vi

$$V(h) = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(L^2 - h^2)h$$

Vi deriverer for å finne ekstremalverdier:

$$\begin{aligned}V'(h) &= \frac{\pi}{3}\Big((-2h)h + (L^2 - h^2)\cdot 1\Big)\\ &= \frac{\pi}{3}(-3h^2 + L^2) = \pi\Big(\frac{L^2}{3} - h^2\Big)\end{aligned}$$

Setter vi inn $L = 9$, får vi altså

$$V'(h) = \pi\Big(\frac{9^2}{3} - h^2\Big) = \pi(27 - h^2)$$

Vi ser at $V'(h) = 0$ når $h = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$. Siden høyden h ikke kan være negativ, er eneste mulighet at $h = 3\sqrt{3}$. Da vi har at $V'(h) > 0$ for $0 < h < 3\sqrt{3}$ og $V'(h) < 0$ for $h > 3\sqrt{3}$, blir $h = 3\sqrt{3}$ et maksimumspunkt for $V(h)$. Det maksimale volumet til kjeglen blir dermed

$$V(3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}(9^2 - (3\sqrt{3})^2)\cdot 3\sqrt{3} = \pi(81-27)\sqrt{3} = \underline{\underline{54\sqrt{3}\pi}}$$

Oppgave 7.2.1

Vi har en 4 meter lang stige som står opptil en vegg på flatt underlag (tegn figur!). Vi lar høyden til toppen av stigen på et tidspunkt t være

$x(t)$, mens avstanden mellom foten og veggen er $y(t)$. Sammenhengen mellom x og y er da ifølge Pythagoras formel gitt ved

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 16$$

og derivasjon av denne ligningen med hensyn på tiden t gir

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Foten av stigen glir vekk med en konstant hastighet lik 0.5 m/s. Vi er interessert i det øyeblikket hvor $x = 2$, $y = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ og $y'(t) = \frac{1}{2}$, og setter vi dette inn i ligningen ovenfor, får vi

$$4x'(t) + 2\sqrt{3} = 0$$

det vil si

$$x'(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}} \approx -0.87$$

Toppen av stigen beveger seg altså mot bakken med en hastighet på 0.87 meter per sekund idet den befinner seg 2 meter over bakken.

Oppgave 7.2.2

En rett sirkulær kjegle med vertikal akse og med spissen ned fylles med vann med hastigheten 100 cm^3/s. Kjeglen har en høyde på 40 cm som er lik radien i toppflaten. Radien i vannets toppflate ved en vannhøyde h er dermed lik h, og volumet av vannet i kjeglen ved denne høyden blir

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

Deriverer vi uttrykket med hensyn på tiden t, får vi

$$V'(t) = \pi h(t)^2 h'(t)$$

det vil si

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h(t)^2}$$

For $V'(t) = 100$ og $h(t) = 10$ gir dette

$$h'(t) = \frac{100}{\pi 10^2} = \frac{1}{\pi} \approx \underline{\underline{0.32}}$$

Når vannet har en høyde på 10 cm, stiger det altså med en hastighet omtrent lik 0.32 cm/s.

Oppgave 7.2.7
En lommelykt lyser opp en sektor på 60 grader. Vi går mot et gjerde med en hastighet på 1 m/s, og skal finne ut hvor fort den opplyste lengden av gjerdet minker. Vi lar avstanden fra gjerdet være $y(t)$, mens det opplyste området har lengde $x(t)$. Da har vi

$$\frac{x(t)/2}{y(t)} = \tan 30^\circ \iff x(t) = 2y(t)\tan 30^\circ = 2y(t)\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Ved å derivere får vi

$$x'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot y'(t)$$

Siden vi går mot gjerdet med hastigheten $y'(t) = 1$, minker lengden av det opplyste området med $\underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{ m/s}}}$.

Oppgave 7.3.1

a) Vi skal bruke Newton's metode to ganger for å finne et tilnærmet nullpunkt for $f(x) = x^5 + 3x - 7$ i intervallet $[1, 2]$. Startverdi er $x_0 = 1.5$. Den neste tilnærmelsen er gitt ved

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^5 + 3x_0 - 7}{5x_0^4 + 3} \approx 1.320$$

og anvender vi metoden en gang til med ny startverdi x_1, finner vi

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 + 3x_1 - 7}{5x_1^4 + 3} \approx 1.27$$

(Det eksakte nullpunktet er 1.26 med to desimalers nøyaktighet.)

Oppgave 7.3.7

a) Vi skal studere grafen til funksjonen $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$. Siden $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^{\sqrt{2}} - 3 > 0$ og grafen er kontinuerlig, har grafen minst ett nullpunkt i intervallet $(1, 2)$ ved skjæringsetningen. Siden funksjonen er strengt voksende, kan den ha høyst ett nullpunkt. Dermed må den ha nøyaktig ett nullpunkt i dette intervallet.

b) Vi bruker Newton's metode én gang med startverdi $x_0 = 1$ og får

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e^{\sqrt{x_0}} - 3}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}e^{\sqrt{x_0}}} = 1 - 2\frac{e-3}{e} = \frac{6-e}{e} \approx 1.2073$$

Siden den dobbeltderiverte er positiv (sjekk dette selv!) for $x > 1$, er grafen konveks i intervallet $(1, 2)$ og ligger derfor i hele dette intervallet på oversiden av grafens tangent i punktet $x_0 = 1$. Spesielt gjelder dette i skjæringspunktet x_1 mellom tangenten og x-aksen, og det betyr at $f(x_1) > 0$. Siden $f(x_0) = e - 3 < 0$, må grafen skjære x-aksen mellom x_0 og x_1 ifølge skjæringssetningen. Det betyr at den tilnærmede verdien x_1 for nullpunktet er for stor, siden x_1 i vårt tilfelle er større enn x_0. (Det eksakte nullpunktet er 1.2069 med fire desimalers nøyaktighet.)

Oppgave 7.4.1

Vi skal vise at funksjonen er injektiv og finne den omvendte funksjonen.

b) $f(x) = x^2$ og $D_f = [0, \infty)$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x > 0$ for $x \in (0, \infty)$. Siden funksjonen er strengt voksende på intervallet $[0, \infty)$, må den være injektiv. Den inverse funksjonen finnes ved å løse ligningen $y = f(x) = x^2$ med hensyn på x. Den eneste løsningen er $x = \sqrt{y}$, da x skal være positiv. Den inverse funksjonen er dermed

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty)$$

c) $f(x) = x^2$ og $D_f = (-\infty, 0]$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x < 0$ for $x \in (-\infty, 0)$. Siden funksjonen er strengt avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$, må den være injektiv. Vi løser igjen $y = f(x) = x^2$ med hensyn på x, og da x nå er negativ, må vi ha $x = -\sqrt{y}$. Den inverse funksjonen er altså

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty)$$

e) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ og $D_f = [-1, \infty)$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x + 2 > 0$ for $x \in (-1, \infty)$. Siden funksjonen er strengt voksende på intervallet $[-1, \infty)$, må den være injektiv. Verdimengden til f er $V_f = [2, \infty)$, og vi finner som tidligere den inverse funksjonen ved å løse ligningen $y = f(x)$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= y \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12 + 4y}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{y - 2} \end{aligned}$$

Da x skal ligge i intervallet $[-1, \infty)$, må vi velge løsningen med pluss foran rottegnet. Den inverse funksjonen blir altså

$$f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y - 2}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [2, \infty)$$

Oppgave 7.4.3

Funksjonen $f(x) = 2xe^x + 1$ med definisjonsområde $D_f = [-1, \infty)$ er injektiv fordi den deriverte $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$ er positiv på intervallet $(-1, \infty)$, slik at f blir strengt voksende på intervallet $[-1, \infty)$. Vi lar g betegne den omvendte funksjonen, og skal beregne $g'(1)$. Vi har åpenbart

$$y = f(x) = 2xe^x + 1 = 1 \iff x = 0$$

og finner dermed

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2e^0(1+0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 7.4.5

Funksjonen $f(x) = \tan 2x$ har definisjonsområde $D_f = (-\pi/4, \pi/4)$ og er injektiv fordi dens deriverte $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$ er positiv på dette intervallet, slik at funksjonen selv er strengt voksende. Vi skal finne den deriverte til den omvendte funksjonen g i punktet $x = 1$. Vi har $y = f(x) = 1$ når $x = \pi/8$. Dermed blir

$$g'(1) = \frac{1}{f'(\pi/8)} = \frac{1}{2/(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 7.5.2

Da den deriverte av cotangens er gitt ved $D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x}$, har vi

a) $D[\cot(x^2)] = -\dfrac{1}{\sin^2(x^2)} \cdot D[x^2] = \underline{\underline{-\dfrac{2x}{\sin^2(x^2)}}}$

b) $D[\cot^2 x] = 2\cot x \cdot D[\cot x] = \underline{\underline{-\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}}}$

Oppgave 7.5.5

a) Vi nedfeller en normal fra toppunktet C i trekanten ABC på grunnlinjen AB, og kaller normalens fotpunkt D. I den rettvinklede trekanten CDB er da $CD = a\sin B$ og $DB = a\cos B$. Av dette følger cotangenssetningen:

$$\cot A = \frac{AD}{CD} = \frac{AB - DB}{CD} = \frac{c - a\cos B}{a\sin B}$$

b) I en trekant er to sider henholdsvis 10 cm og 5 cm lange, og den mellomliggende vinkelen er 30°. Setter vi $c = 10$, $a = 5$ og $B = 30°$, kan vi bruke cotangenssetningen til å finne vinkel A:

$$\cot A = \frac{10 - 5\cos 30}{5\sin 30} = \frac{10 - 5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{5 \cdot \frac{1}{2}} = 4 - \sqrt{3}$$

Av dette får vi at

$$\tan A = \frac{1}{4 - \sqrt{3}} \implies A \approx \underline{\underline{23.8^\circ}}$$

Da vinkelsummen i trekanten er 180°, blir den siste vinkelen

$$C = 180^\circ - B - A \approx 180^\circ - 30^\circ - 23.8^\circ = \underline{\underline{126.2^\circ}}$$

Oppgave 7.6.1

a) $\arcsin \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ fordi $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

e) $\arccos \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$ fordi $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

f) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$ fordi $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\arctan 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ fordi $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$

Oppgave 7.6.2

Vi skal derivere funksjonene (vi bruker setning 7.6.2 og 7.6.4).

a) $D[\arcsin \sqrt{x}] = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}^2}} D[\sqrt{x}] = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}}$

b) $D[\arctan e^x] = \frac{1}{1 + (e^x)^2} D[e^x] = \underline{\underline{\frac{e^x}{1 + e^{2x}}}}$

c) $D[x^2 \arcsin x] = 2x \arcsin x + x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{x\left(2\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}$

e) $D[\arcsin x + \arccos x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{0}}$

Oppgave 7.6.3

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan 2x}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+(2x)^2} D[2x]}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + 4x^2} = \underline{\underline{2}}$

c) $$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \underline{\underline{-1}}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2}2x}{6x}$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 7.6.5

Vi studerer funksjonen $f(x) = x \arctan x$.

a) Den førstederiverte er gitt ved
$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$
Her har begge leddene på høyre side samme fortegn som x. Det medfører at også $f'(x)$ har samme fortegn som x. Følgelig er f voksende i intervallet $[0, \infty)$ og avtagende i $(-\infty, 0]$.

b) Den andrederiverte blir
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{(1+x^2) + (1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$
Dermed ser vi at $f''(x) > 0$ for alle x. Det betyr at funksjonen er konveks på hele $\mathbf{R}$.

c) Funksjonen $f(x) = x \arctan x$ er definert for alle x og har derfor ingen vertikale asymptoter. Vi undersøker om den har noen skrå asymptoter ved hjelp av metoden i 6.5.5. Vi finner først at grensen
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$
eksisterer, slik at vi muligens kan ha to skråasymptoter. Ved hjelp av oppgave 7.6.3c) finner vi videre at begge grensene
$$\lim_{x\to\infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$
og

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \arctan x + \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \to -\infty} x \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

eksisterer. Det betyr at f har asymptotene

$$y = \pm \frac{\pi}{2} x - 1$$

Oppgave 7.6.14

En 1 meter høy plakat henger med nedre kant 2 meter over bakken. Vi skal finne den avstanden x som gir størst betraktningsvinkel $\theta(x)$ (se figur i boken). Av figuren ser vi at θ fremkommer som differensen mellom to vinkler:

$$\theta(x) = \arctan \frac{3}{x} - \arctan \frac{2}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

Den deriverte blir

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot \frac{-3}{x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2 \left(1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2\right)} - \frac{3}{x^2 \left(1 + \left(\frac{3}{x}\right)^2\right)} = \frac{2}{x^2 + 4} - \frac{3}{x^2 + 9} \end{aligned}$$

og mulige ekstremalpunkt for θ er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} \theta'(x) = 0 &\iff \frac{2}{x^2 + 4} = \frac{3}{x^2 + 9} \\ &\iff 2(x^2 + 9) = 3(x^2 + 4) \\ &\iff x^2 = 6 \\ &\iff x = \sqrt{6} \end{aligned}$$

siden $x \geq 0$. Den deriverte funksjonen $\theta'(x)$ er kontinuerlig overalt og kan ikke skifte fortegn andre steder enn ved det eneste nullpunktet $x = \sqrt{6}$. Siden $\theta'(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$ og $\theta'(3) = \frac{2}{13} - \frac{3}{18} = -\frac{1}{78} < 0$, må følgelig θ' være positiv i intervallet $(0, \sqrt{6})$ og negativ i $(\sqrt{6}, \infty)$. Derfor må $\theta(x)$ ha et maksimum når $x = \sqrt{6}$.