MAT 1100: Løsningsforslag til oblig 2, H-07

a) Hvis $t \neq 0$, er f kontinuerlig i t fordi den i en omegn om t er gitt som en brøk av to kontinuerlige funksjoner (se setning 5.1.5 i *Kalkulus*). For å undersøke om f er kontinuerlig i 0, regner vi ut

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\arcsin t}{t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{1} = 1$$

Siden denne grensen er lik $f(0)$, er f kontinuerlig i 0 (se *Kalkulus*, observasjon 5.4.7).

b) Bruker vi brøkregelen for derivasjon, ser vi at for $t \neq 0$, er

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t}{t^2}$$

For å regne ut $f'(0)$ bruker vi definisjonen av derivert:

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\arcsin t}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\arcsin t - t}{t^2}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1}{2t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(-\frac{1}{2})(1-t^2)^{-3/2}(-2t)}{2} = 0$$

OBS: Det er IKKE riktig å si at $f'(0) = 0$ fordi $f(0)$ er lik konstanten 1, og den deriverte til alle konstanter er 0. Siden alle funksjoner er konstante i alle punkter, ville dette bety at alle deriverte var 0!

c) Anta først at $t > 0$. Bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $g(x) = \arcsin x$ og intervallet $[0, t]$, får vi

$$\frac{\arcsin t - \arcsin 0}{t - 0} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

for en $c \in (0, t)$. Siden funksjonen $\sqrt{1-c^2}$ avtar når c vokser, vil $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ vokse når c vokser. Dermed er $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, og vi får

$$\frac{\arcsin t}{t} < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ganger vi med t på begge sider, har vi

$$\arcsin t < \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{for } 0 < t < 1 \tag{1}$$

Ulikheten for negative t kan man for eksempel utlede ved en symmetribetraktning. Dersom vi setter $h(t) = \arcsin t$ og $k(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, ser vi at $h(-t) = -h(t)$ og $k(-t) = -k(t)$. Hvis $t < 0$, har vi dermed

$$-h(t) = h(-t) < k(-t) = -k(t)$$

der vi har brukt ulikheten (1) ovenfor (husk at $-t$ nå er positiv). Ganger vi ulikheten med -1 og snur ulikhetstegnet, får vi

$$\arcsin t > \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{for } -1 < t < 0$$

Siden

$$f'(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t}{t^2} & \text{for } t \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

har vi $f'(t) \geq 0$ på $[0, 1)$ og $f'(t) \leq 0$ på $(-1, 0]$. Dette betyr at f er voksende på $[0, 1)$ og avtagende på $(-1, 0]$. Minimumsverdien er dermed $f(0) = 1$.

d) Ved analysens fundamentalteorem er $F'(x) = f(x)$. Siden $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ alltid er positiv ($\arcsin x$ og x har samme fortegn), er F voksende på hele definisjonsområdet. Siden $F''(x) = f'(x)$, er $F''(x) \geq 0$ når $x \geq 0$ og $F''(x) \leq 0$ når $x \leq 0$. Altså er F konveks på $[0, 1)$ og konkav på $(-1, 0]$.

e) Anta $x > 0$. Etter det vi allerede har sett, er

$$1 < f(t) < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{for } 0 < t < x$$

Dermed er (tenk over hvorfor!)

$$\int_0^x 1 \, dt < \int_0^x f(t) \, dt < \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$$

Integrerer vi, får vi

$$x < F(x) < \arcsin x \qquad \text{for } 0 < x < 1$$

La oss nå se på tilfellet $x < 0$. Den enkleste er kanskje å bruke et symmetriargument også i dette tilfellet. Innfører vi en ny variabel $s = -t$, ser vi at

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^{-x} f(-s)(-ds) = -\int_0^{-x} f(s) \, ds = -F(-x)$$

der vi har brukt at $f(-s) = f(s)$. Dette betyr at $-F(x) = F(-x)$. Etter det vi allerede har vist, er (husk at nå er $-x > 0$)

$$-x < F(-x) < \arcsin(-x)$$

Setter vi inn $F(-x) = -F(x)$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ og ganger ulikheten med -1 (husk å snu ulikhetstegnene!), får vi

$$\arcsin x < F(x) < x \qquad \text{for } -1 < x < 0$$

Kommentar: Mange har løst det siste punktet ved derivasjon istedenfor integrasjon. Det blir ikke nødvendigvis riktig — det kan nemlig tenkes at $h(t) < k(t)$ selv om $h'(t) > k'(t)$ (dette er bare sunn fornuft — det ikke sikkert at den raskeste løperen vinner et kappløp hvis den langsomste har fått stort nok forsprang!) For at resonnementet skal bli riktig, må man også sjekke at de to funksjonene starter i samme punkt (i origo for funksjonene i oppgaven).