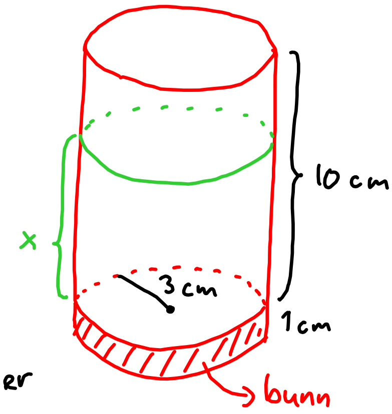
Løsningsforslag oblig 2 Mat 1100 høst 2015

Oppgave 1



a) Se figuren til høyre.

$h_b = 0.5$ (cm) fordi tyngdepunktet til bunnen må ligge midtveis opp i glassets bunn

$m_v = 9\pi x$ fordi volumet av vannet er

$$\pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot x \quad (cm^3)$$

og hver cm^3 veier 1 gram

$h_s = 6$ (cm) fordi tyngdepunktet til siden må ligge midtveis mellom bunnens topp og glassets topp.

$h_v = 1 + \frac{x}{2}$ (cm) fordi tyngdepunktet for vannet må ligge halvveis opp i vannet regnet fra bunnen, og bunnens topp ligger i høyde 1 over bordet.

b) Innsetting gir

$$h(x) = \frac{10 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 6 + 9\pi x\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{10 + 50 + 9\pi x}$$

$$= \frac{305 + 9\pi x + \frac{9}{2}\pi x^2}{60 + 9\pi x}$$

$$h(0) = \frac{305}{60} \approx 5{,}08$$

Tolkning: Når glasset er tomt, er tyngdepunktet $\approx 5{,}08$ cm over bordet.

$$h(10) \approx 5{,}84$$

Tolkning: Når glasset er helt fullt, er tyngdepunktet $\approx 5{,}84$ cm over bordet.

c) $$h'(x) = \frac{(9\pi + 9\pi x)(60 + 9\pi x) - (305 + 9\pi x + \frac{9}{2}\pi x^2)\cdot 9\pi}{(60 + 9\pi x)^2}$$

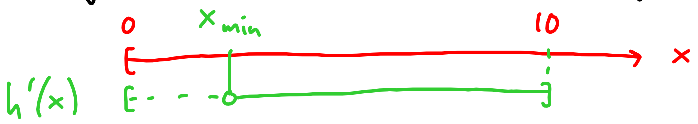
$h'(x) = 0$ gir
$$(1+x)(60+9\pi x) - 305 - 9\pi x - \frac{9}{2}\pi x^2 = 0$$
$$60 + 60x + \cancel{9\pi x} + 9\pi x^2 - 305 - \cancel{9\pi x} - \frac{9}{2}\pi x^2 = 0$$
$$\frac{9}{2}\pi x^2 + 60x - 245 = 0$$
$$9\pi x^2 + 120x - 490 = 0$$

dvs. $$x = \frac{-120 \pm \sqrt{14400 + 17640\pi}}{18\pi}$$

$\boxed{\text{Må velge + for å få } x > 0}$

$$= \frac{\sqrt{400 + 490\pi} - 20}{3\pi} \overset{\text{def}}{=} x_{min} \approx 2{,}55$$

Fra uttrykket for $h'(x)$ får vi at fortegnsskjemaet blir slik:



h vokser på $[x_{min}, 10]$ og avtar på $[0, x_{min}]$.

Globalt minimumspunkt $x = x_{min} \approx 2.55$

Lokale maksimumspunkter $x = 0$ og $x = 10$, $x = 10$ globalt

d) Vannhøyden x_{min} (cm) gir lavest høyde $h(x)$ for tyngdepunktet. Tilnærmet verdi: 2,55 cm vannhøyde.

e) Utregning gir $h(x_{min}) = x_{min} + 1 \approx 3{,}55$ (cm).
Når tyngdepunktet er lavest, ligger det altså akkurat i høyde med vannoverflaten i glasset.

Oppgave 2

a) $$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ xe^{x} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

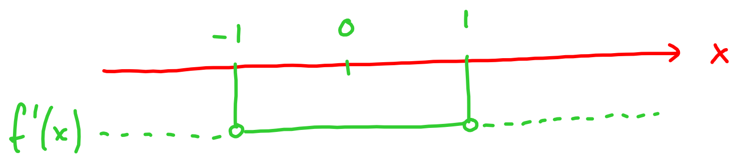
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{he^{-|h|}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{-|h|} = e^{0} = 1$$

Ergo er f deriverbar i 0, med $f'(0) = 1$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) & \text{for } x > 0 \\ e^{x} + xe^{x} = e^{x}(1+x) & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



f vokser på $[-1, 1]$ og avtar på $(-\infty, -1]$ og $[1, \infty)$

Vi har $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} \overset{[\infty \cdot 0]}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{x} \overset{[\infty \cdot 0]}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\underbrace{e^{-x}}_{\to \infty}} = 0$$

Videre har vi

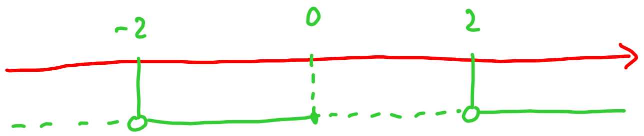
$$f(-1) = -1e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$f(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Konklusjon: Globalt maksimumspunkt $x = \frac{1}{e}$

— " — minimumspunkt $x = -\frac{1}{e}$

c) $$f''(x) = \begin{cases} -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2) & \text{for } x > 0 \\ e^{x} + e^{x} + xe^{x} = e^{x}(x+2) & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



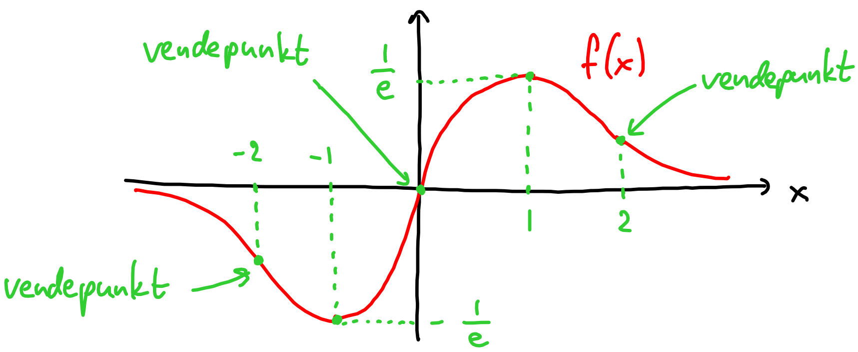
f er konkav på $(-\infty, -2]$ og $[0, 2]$

f er konveks på $[-2, 0]$ og $[2, \infty)$.

Vendepunkter: $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$

Merk: Vi trenger ikke sjekke om $f''(0)$ fins for å kunne konkludere med dette.

d) Fra regningen under b) følger at f har horisontal asymptote $y = 0$ (tosidig). Siden f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$, kan den ikke ha vertikale asymptoter. Skisse:



$\boxed{\text{Oppgave 3}}$

$$V = \int_{10}^{11} \pi \cdot [f(x)]^2 \, dx = \int_{10}^{11} \pi \cdot \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$$

Vi har

$$\pi \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \pi \int \frac{u}{\cancel{1+x^2}} \cancel{(1+x^2)} \, du = \pi \int u \, du$$

$$u = \arctan x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad dx = (1+x^2) du$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} u^2 + C$$

$$= \frac{\pi}{2} (\arctan x)^2 + C$$

Ergo

$$V = \pi \int_{10}^{11} \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \Big[(\arctan x)^2 \Big]_{10}^{11}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \Big[(\arctan 11)^2 - (\arctan 10)^2 \Big]}} \approx 0{,}04$$