Mat 1100 Obligatorisk oppgave 2

Høsten 2012

Innleveringsfrist: *Torsdag 1. november kl. 14.30.*

Sted for innlevering: *7. etasje, Niels Henrik Abels hus. Det blir ofte kødannelse ved innleveringstidspunktet, så det kan være lurt å ikke komme rett før kl. 14.30. Husk å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk.*

Instruksjoner: *Studenter som ikke får oppgaven godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60 % score. Det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle delspørsmål (punktene a, b osv) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til riktig svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Oppgaven skal leveres med en egen forside, som du finner på

www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/obligforside.pdf

LYKKE TIL!

Oppgave 1

Arkitekten Jørn Innzon planlegger et nytt operahus. Sentralt i bygget skal det plasseres en lang trapp med stigningsvinkel 30° og horisontal lengde 40 meter.

a) Innzon mener at en partisjon Π_n av intervallet $[0, 40]$ med n like lange delintervaller og en tilhørende øvre trappesum $\text{Ø}(\Pi_n)$ for funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

må være relevant her. Hvorfor er akkurat denne funksjonen aktuell? Vis at

$$\text{Ø}(\Pi_n) = \frac{800(n+1)}{\sqrt{3}\, n} \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

b) Finn $\lim_{n\to\infty} \text{Ø}(\Pi_n)$. Hva er den geometriske tolkningen av denne grensen?

c) Innzon ønsker at trappens trinn skal være 25 cm dype. Hvis trappens profil sett fra siden skal tilsvare den øvre trappesummen $\text{Ø}(\Pi_n)$, hva må da n være? Beregn $\text{Ø}(\Pi_n)$ for denne verdien av n. Hva er den geometriske tolkningen av svaret du finner?

Oppgave 2

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$$

b) (Ondskapsfull.) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-(1/x)}}{x}$$

Oppgave 3

La a være et gitt, reelt tall slik at $a > 2$. La funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$f(x) = |x| \cdot (a + x)$$

a) Finn eventuelle nullpunkter for f. Finnes det punkter der f ikke er deriverbar?

b) Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter med tilhørende ekstremalverdier.

c) Avgjør hvor f er konveks og konkav, og angi eventuelle vendepunkter. Skisser grafen til f.

Oppgave 4

Anta at funksjonene f og g er slik at f' og g' er kontinuerlige på intervallet $[a, b]$, og at f'' og g'' fins på (a, b). Anta videre at

$$f'(a) = g'(a) \qquad \text{og} \qquad f'(b) = g'(b).$$

Vis at da fins et tall $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = g''(c)$.

SLUTT