Løsningsforslag til obligatorisk oppgave i MAT 1100, H-04

Oppgave 1: a) Vi har

$$zw = (1 + i\sqrt{3})(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i\sqrt{3} \cdot 1 + i\sqrt{3} \cdot i =$$
$$= 1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$$

og

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot i + i\sqrt{3} \cdot 1 - i\sqrt{3} \cdot i}{(1^2 - i^2)} =$$
$$\frac{(1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

b) Vi skriver (r, θ) for polarkoordinatene til z og (ρ, ϕ) for polarkoordinatene til w. Da er

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

og

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siden z ligger i første kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Videre er

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

og

$$\sin\phi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Siden w ligger i første kvadrant, betyr dette at $\phi = \frac{\pi}{4}$.

c) Når vi deler to komplekse tall på hverandre, dividerer vi modulusene og subtraherer argumentene. Modulus til $\frac{z}{w}$ er altså $\frac{r}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ og argumentet er $\theta - \phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Dette betyr at

$$\frac{z}{w} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12})$$

Sammenligner vi dette med uttrykket for $\frac{z}{w}$ i a), ser vi at

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \qquad \text{og} \qquad \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(husk at to komplekse tall er like dersom realdel er lik realdel og imaginærdel er lik imaginærdel). Dermed har vi

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

og

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Oppgave 2:
a) Sjekker at $r = 1-2i$ er en rot i $P(z) = z^3 + 2z^2 - 3z + 20$: (Jeg har skrevet opp regnestykket slik det blir seende ut om man bruker binomialformelen til å regne ut $(1-2i)^3$. Ganger du ut dette uttrykket for hånd, får du litt andre ledd, men svaret blir selvfølgelig det samme.)

$$P(1-2i) = (1-2i)^3 + 2(1-2i)^2 - 3(1-2i) + 20 =$$
$$= 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot (-2i) + 3\cdot 1\cdot (-2i)^2 + (-2i)^3 +$$
$$+2\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot (-2i) + (-2i)^2\right) - 3(1-2i) + 20 =$$
$$= 1 - 6i - 12 + 8i + 2 - 8i - 8 - 3 + 6i + 20 = 0$$

b) Siden polynomet er reelt, må også den komplekskonjugerte $\overline{r} = 1+2i$ være en rot i P. Dette betyr at $P(z)$ er delelig på $(z-(1-2i))(z-(1+2i)) = z^2 - 2z + 5$. Polynomdivisjon gir:

$$\begin{array}{rl} z^3 + 2z^2 - 3z + 20 & : \; z^2 - 2z + 5 = \; z + 4 \\ -\underline{(z^3 - 2z^2 + 5z)} & \\ 4z^2 - 8z + 20 & \\ \underline{-(4z^2 - 8z + 20)} & \\ 0 & \end{array}$$

Dette viser at den tredje roten er -4. Den reelle og komplekse faktoriseringen er derved gitt ved

$$P(z) = (z+4)(z^2 - 2z + 5) = (z+4)(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$$

Bemerkning Det er også mulig å løse denne oppgaven uten å bruke at den komplekskonjugerte $\overline{r} = 1+2i$ er en rot i polynomet. Da bruker man polynomdivisjon til å dele $P(z)$ på $(z-(1-2i))$. Divisjonen går opp og gir et komplekst annengradspolynom til svar. For å finne de andre røttene, setter man dette polynomet lik null og løser annengradsligningen. Regningene er mye lengre og atskillig mer komplisert enn ved metoden ovenfor.

Oppgave 3:
a) Siden dette er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}$$

b) Siden $\ln 1 = 0$ og $\cos 0 = 1$, er dette et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel. I dette tilfellet får vi et nytt "$\frac{0}{0}$"-uttrykk når vi har derivert én gang, og vi må derfor bruke L'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\cos x} = \frac{-1}{1} = -1$$

c) Dette er et "1^∞"-uttrykk, og vi må først flytte all x-avhengigheten opp i eksponenten:

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(1-\tan x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-\tan x)}{x}}$$

<u>Mellomregning:</u> Vi ser først på hva som skjer med eksponenten $\frac{\ln(1-\tan x)}{x}$ når $x\to 0$. Siden dette er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\tan x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\tan x}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{1} = \frac{1\cdot(-1)}{1} = -1$$

der vi har brukt at $\tan 0 = 0$ og $\cos 0 = 1$.

Dermed er mellomregningen ferdig, og vi kan gå tilbake til det opprinnelige uttrykket:

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan x)^{\frac{1}{x}} == \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-\tan x)}{x}} = e^{-1}$$

d) I denne oppgaven lønner det seg å multiplisere med det konjugerte uttrykket over og under brøkstreken:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-x)}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}$$

Oppgave 4: Vi må vise at for enhver $\epsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at $|f(x)-f(2)| < \epsilon$ når $|x-2| < \delta$. Vi innfører hjelpestørrelsen $h = x-2$ og observerer at $x = 2+h$. Uttrykket vi må kontrollere er:

$$|f(x)-f(2)| = |(x^2+2x)-(2^2+2\cdot 2)| = |x^2+2x-8| =$$

$$= |(2+h)^2+2(2+h)-8| = |4+4h+h^2+4+2h-8| = |6h+h^2| = |h||6+h|$$

I dette uttrykket er den siste faktoren $|6+h|$ omtrent lik 6 når h er liten. Spesielt ser vi at hvis $|h| < 1$, så er $|6+h| < 7$. Sørger vi samtidig for at $|h| < \frac{\epsilon}{7}$, blir produktet $|h||6+h| < \epsilon$. Vi velger derfor $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{7}, 1\}$.

La oss sjekke at denne δ-en virkelig fungerer. Vi må vise at dersom $|x-2| < \delta$, så er $|f(x)-f(2)| < \epsilon$. Ifølge regningene ovenfor er (husk at $h = x-2$)

$$|f(x)-f(2)| = |h||6+h| < \frac{\epsilon}{7}\cdot 7 = \epsilon$$

der vi har brukt at $|h| < \frac{\epsilon}{7}$ (siden $|h| = |x-2| < \delta \le \frac{\epsilon}{7}$) og $|6+h| \le 6+|h| < 7$ (siden $|h| = |x-2| < \delta \le 1$).

Oppgave 5: Noen av punktene i denne oppgaven kan regnes litt enklere hvis man bruker at $\frac{x}{\tan x} = x\cot x$ (der begge uttrykkene er definert), men jeg har

valgt ikke å bruke cotangens i dette løsningsforslaget.
a) Funksjonen er definert når $\tan x$ er definert og forskjellig fra null. Tangens er udefinert for verdiene $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ og null for verdiene $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Slår vi sammen disse mengdene, ser vi at g er definert når x ikke er et heltallig multiplum av $\frac{\pi}{2}$:

$$D_g = \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$$

b) Vi bruker brøkregelen til å regne ut $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1 \cdot \tan x - x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} \tag{1}$$

Bruker vi at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos z}$, kan dette uttrykkes forenkles til

$$g'(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} \tag{2}$$

Det er ikke nødvendig å gjøre denne forenklingen for å full uttelling til eksamen, men som vi senere skal se, gjør den deler av oppgaven enklere.

c) Det er flere måter å gjøre denne oppgaven på. Jeg viser to:

Metode 1: Dette er "standardmetoden" for oppgaver av denne typen. Vi bruker middelverdisetningen på funksjonen $h(x) = \tan x$ i intervallet $[0, x]$, der $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Denne setningen sier at det finnes en c mellom 0 og x slik at

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c) = \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

der vi i siste skritt bruker at funksjonen $1/\cos^2 x$ er voksende for $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (siden $\cos^2 x$ er avtagende i dette intervallet). Setter vi $h(x) = \tan x$ og bruker at $h(0) = \tan 0 = 0$, får vi

$$\frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ganger vi med x på begge sider (husk at x er positiv), får vi

$$\tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$$

som er ulikheten vi skulle vise. Bruker vi denne ulikheten, ser vi fra formel (1) ovenfor at g er avtagende på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.

Metode 2: Denne metoden er enklere i akkurat denne oppgaven. Vi vet at $\sin x < x$ når $x > 0$ (se f.eks. oppgave 6.2.7 i *Kalkulus* som ble gjennomgått på forelesning). Siden $\cos x < 1$, er da $\sin x \cos x < x$ når x er positiv. Fra formel (2) ovenfor ser vi da at $g'(x) < 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Men hvis $g'(x) < 0$, forteller formel (1) oss at $\tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$.

d) Bruk kalkulatoren! (Kurven kan minne om en parabel med spissen opp, men går mot $-\infty$ når $x \to -\pi^+$ og $x \to \pi^-$.)

e) Når x er forskjellig fra 0 og $\pm\frac{\pi}{2}$, er f kontinuerlig i x siden den er en sammensetning av kontinuerlige funksjoner som er definert i en omegn om x. For å vise at f er kontinuerlig i 0 og $\pm\frac{\pi}{2}$, bruker vi Observasjon 5.4.7 i *Kalkulus* som sier at f er kontinuerlig i a dersom $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vi har

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel. Siden $f(0) = 1$, viser dette at f er kontinuerlig i 0. Videre har vi

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$$

siden $\tan x$ går mot pluss eller minus uendelig når x går mot $\frac{\pi}{2}$. Siden $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, viser dette at f er kontinuerlig i $\frac{\pi}{2}$. Kontinuitet i $-\frac{\pi}{2}$ vises på akkurat samme måte.

f) Vi bruker definisjonen av derivert. I punktet 0 har vi

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\tan x} - 1}{x}$$

Bruker vi L'Hôpitals regel, får vi (når vi bruker formel (2) ovenfor til å derivere $\frac{x}{\tan x}$):

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\tan x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x} - 0}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}$$

Dette er et nytt "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og vi bruker L'Hôpitals regel på nytt:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2\sin x\cos x}$$

Dette er nok et"$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og vi bruker L'Hôpitals regel igjen:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin x\cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{0}{2} = 0$$

Altså er f deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

Vi kan finne de deriverte i $\pm\frac{\pi}{2}$ på samme måte. Heldigvis er regningene enklere i dette tilfellet:

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{\tan x}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Vi kan bruke L'Hôpitals regel direkte på dette uttrykket, men regningene blir enklere om vi forenkler litt først. Bruker vi at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, får vi:

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{\tan x}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin x(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

I den første faktoren setter vi bare inn $x = \frac{\pi}{2}$ og får:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

I den andre faktoren bruker vi L'Hôpitals regel:—

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -1$$

Dette gir

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Dette viser at f er deriverbar i $\frac{\pi}{2}$ med $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. På akkurat samme måte viser man at f er deriverbar i $-\frac{\pi}{2}$ med $f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Bemerkning: Mange vil løse oppgaver av denne typen på en annen måte. For å finne (for eksempel) $f'(0)$, regner de ut grenseverdien av $f'(x)$, når x går mot 0. Desom denne eksisterer, sier de at $f'(0)$ er lik denne grenseverdien. Men er dette nødvendigvis riktig? Det er det faktisk, men påstanden krever et lite bevis:

Setning 1 *Anta at f er kontinuerlig i a og at $\lim_{x\to a} f'(x) = L$. Da er f deriverbar i a og $f'(a) = L$*

Proof: Det er to forskjellige varianter av argumentet — den ene bruker middelverdisetningen og den andre bruker L'Hôpitals regel. Bruker vi L'Hôpital, observerer vi først at siden f er kontinuerlig i a, er $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. L'Hôpital gir dermed

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to a} f'(x) = L \qquad \spadesuit$$

Legg merke til at beviset forteller oss at metoden i Setning 1 vanligvis gir nøyktig de samme regningene som metoden vi har benyttet, bortsett fra at man slipper den første bruken av L'Hôpitals regel. Man bør imidlertid være klar over et faremoment ved metoden i Setning 1: **Det kan tenkes at $\lim_{x\to a} f'(x)$ ikke eksisterer, men at f allikevel er deriverbar i a!** Du finner et eksempel på dette i oppgave 6.2.18b) i *Kalkulus*. Dette betyr at dersom du finner at $\lim_{x\to a} f'(x)$ ikke eksisterer, så vet du faktisk ikke om $f'(a)$ eksisterer eller ikke. Dersom du derimot finner at $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ikke eksisterer, så vet du selvfølgelig at $f'(a)$ ikke eksisterer (fra definisjonen av f').