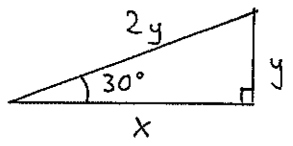
Løsningsforslag oblig II Mat1100 høst 2012

Oppgave 1

a) Trappens profil:

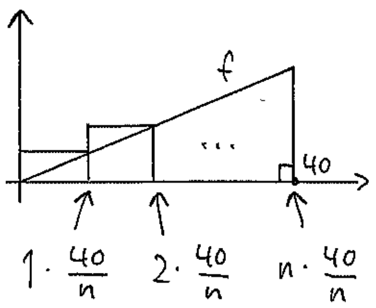


$$x^2 + y^2 = (2y)^2$$
$$x^2 = 3y^2$$
$$y^2 = \frac{x^2}{3} \qquad y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Ergo kan trappens profil beskrives som grafen til

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{for } x \in [0, 40].$$

Øvresummen:



$$\phi(\Pi_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1\cdot\frac{40}{n}\right)\cdot\frac{40}{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\frac{40}{n}\right)\cdot\frac{40}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot n\cdot\frac{40}{n}\right)\cdot\frac{40}{n}$$
$$= \frac{1600}{\sqrt{3}\,n^2}(1+2+\cdots+n)$$

Så $\phi(\Pi_n) = \frac{1600}{\sqrt{3}\cdot n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \underline{\underline{\frac{800(n+1)}{\sqrt{3}\,n}}}$

b) $$\lim_{n\to\infty}\phi(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{800(n+1)}{\sqrt{3}\,n} = \frac{800}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{1/n}+1}{1} = \underline{\underline{\frac{800}{\sqrt{3}}}}$$

Vi har $\int_0^{40}\frac{x}{\sqrt{3}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[x^2\right]_0^{40} = \frac{800}{\sqrt{3}}$

Grensen $\lim_{n\to\infty}\phi(\Pi_n)$ kan altså tolkes geometrisk som arealet under grafen til f på intervallet $[0, 40]$.

c) 25 cm trinn gir 4 trinn pr. meter horisontalt, så $n = 160$. Vi har

$$\phi(\Pi_{160}) = \frac{800\cdot 161}{\sqrt{3}\cdot 160} = \underline{\underline{\frac{805}{\sqrt{3}}}}$$

Geometrisk tolkning: Arealet av trappens profil sett fra siden, når man har 25 cm trinn.

Oppgave 2

a) $$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x} \overset{[\infty^0]}{=} \lim_{x\to\infty}\left[e^{\ln(\ln x)}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}$$

Eksponenten:

$$\lim_{x\to\infty}\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Så $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x} = e^0 = \underline{1}$.

b) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{e^{1/x}\cdot\cancel{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 3

Vi har $f(x) = \begin{cases} x(a+x) = x^2 + ax & \text{for } x \geq 0 \\ -x(a+x) = -x^2 - ax & \text{for } x < 0. \end{cases}$

a) $f(x) = 0$ gir $x^2 + ax = 0$

$x(x+a) = 0$, dvs. $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = -a}}$

(nullpunktene)

Vi sjekker deriverbarhet i $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + ah - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} (h + a) = a.$$

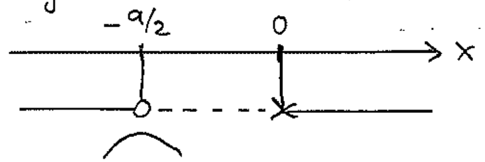
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - ah - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (-h - a) = -a.$$

Siden $a > 2$, er dermed f ikke deriverbar i $x=0$.
Ergo er svaret ja, det fins et punkt der f ikke er deriverbar.

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{for } x > 0 \\ -2x - a & \text{for } x < 0. \end{cases}$

$f'(x) = 0$ gir $2x + a = 0$, dvs. $x = -\frac{a}{2}$.



f er strengt voksende på $(-\infty, -\frac{a}{2}]$ og $[0, \infty)$

— " — avtakende " $[-\frac{a}{2}, 0]$.

Lokalt makspunkt $x = -\frac{a}{2}$

Tilhørende lokal maksverdi $f(-\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{4} - a(-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$

Lokalt minpunkt $x = 0$

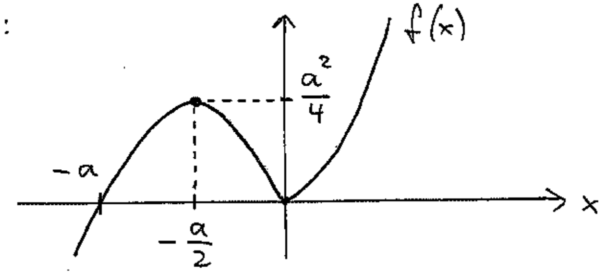
Tilhørende lokal minimumsverdi $f(0) = 0$.

c) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } x > 0 \\ -2 & \text{for } x < 0 \end{cases}$

f er konkav på $(-\infty, 0]$ og konveks på $[0, \infty)$.

Vendepunkt $\underline{\underline{x = 0}}$.

Skisse:



Oppgave 4

La $F(x) = f'(x) - g'(x)$.

Da er F kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b).

Videre er $F(a) = f'(a) - g'(a) = 0$

$F(b) = f'(b) - g'(b) = 0$

Ergo fins ved Rolles teorem $c \in (a, b)$ slik at

$$F'(c) = 0.$$

Altså $f''(c) - g''(c) = 0$, dvs. $f''(c) = g''(c)$.