2.2: Kontinuerlige funksjoner

1) d) $f(x,y) = e^{-x} \sin(x+y)$

$-x$ → kont.

Set. 2.2.3: kont. (funk. av kont. er kont.)

x: kont. $\quad y$: kont.

Set. 2.2.2: kont. (sum av kont. er kont.)

Set. 2.2.3: kont. (kont. funk. av kont. er kont.)

Set. 2.2.2: kont. (prod. av kont. er kont.)

4) a) $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq M |\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x}, \vec{y}$ → $(\star)$

Vis: $\vec{F}$ er kont.

Bevis: La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Vil vise at $\vec{F}$ er kont. i $\vec{y}$. Siden $\vec{y}$ er en generell vektor, vil dette vise at $\vec{F}$ er kont. i hele $D_{\vec{F}}$.

Vil vise at det fins $\delta > 0$ s.a. når $\vec{x}$ er s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$, så er

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| < \varepsilon.$$

La $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, og se på $\vec{x}$ s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$.

Da er:

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \underset{(\star)}{\leq} M|\vec{x} - \vec{y}| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$Mz = \varepsilon$

$z = \frac{\varepsilon}{M}$

$\blacksquare$

b) $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\rightarrow$ Anta $A \neq 0$: Hvis $A = 0$, så er $\vec{F}(\vec{x}) = 0$, så denne er kont.

Bevis: La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Vil vise at det fins $\delta > 0$ s.a. når $\vec{x}$ er sånn at $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$, så er $|\vec{F}(x) - \vec{F}(\vec{y})| < \varepsilon$.

Velg $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, og la $\vec{x}$ være s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$. Da er

$\|A\|\delta = \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| = |A\vec{x} - A\vec{y}| = |A(\vec{x} - \vec{y})|$$

$$\underset{\text{Set 1.6.3}}{\leq} \underbrace{\|A\|}_{\text{matrisenorm}} |\vec{x} - \vec{y}| < \|A\|\delta = \cancel{\|A\|}\frac{\varepsilon}{\cancel{\|A\|}} = \varepsilon$$

$\blacksquare$