Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 8

I kapittel 8 er integrasjon og integrasjonsteknikker det store temaet, og her er det mange regneoppgaver som gir deg anledning til å trene inn disse teknikkene. Det er få teoripregede oppgaver denne gang, men legg merke til analysens fundamentalteorem i seksjon 8.3, og oppgave 8.3.5, 8.3.6 og 8.3.7 som illustrerer bruk av fundamentalteoremet.

Oppgave 8.2.1

La $f : [1,2] \to \mathbf{R}$ være funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, og la $\Pi = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\}$ være en partisjon. Den øvre trappesummen er da

$$\begin{aligned}\varnothing(\Pi) &= 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{0.746}}\end{aligned}$$

og den nedre trappesummen er

$$\begin{aligned}N(\Pi) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx \underline{\underline{0.646}}\end{aligned}$$

Oppgave 8.3.3

Vi skal beregne verdien av integralene.

b)

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{3x+2}\,dx &= \int_0^2 e^2 e^{3x}\,dx = e^2\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^2 \\ &= \frac{e^2}{3}(e^6 - e^0) = \underline{\underline{\frac{e^8 - e^2}{3}}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\Big[\arctan 2x\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}\end{aligned}$$

e) Ved substitusjonen $u = \frac{x}{3}$, $du = \frac{1}{3}\,dx$, får vi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \arcsin\frac{1}{3} - \arcsin 0 = \underline{\underline{\arcsin\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 8.3.5

a) Vi skal finne den deriverte til

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Ifølge analysens fundamentalteorem (8.3.3) blir den deriverte lik integranden innsatt øvre grense i integralet, det vil si

$$f'(x) = \underline{\underline{e^{-x^2}}}$$

Oppgave 8.3.6

a) Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar. Vi definerer

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

og skal finne $G'(x)$. Her er øvre grense i integralet en funksjon av x, så vi må bruke kjerneregelen. La

$$F(u) = \int_a^u f(t)dt$$

Da er

$$G(x) = F(g(x))$$

og kjerneregelen gir da

$$G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{\underline{f(g(x))g'(x)}}$$

hvor vi har benyttet at $F'(u) = f(u)$ ifølge analysens fundamentalteorem.

b) Vi deriverer de oppgitte funksjonene ved hjelp av formelen fra punkt a) ovenfor.

i) $D\left[\int_0^{\sin x} te^{-t}dt\right] = \sin x e^{-\sin x}\cos x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin 2x\; e^{-\sin x}}}$

ii) $D\left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right] = e^{-\sqrt{x}^2}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}}}$

iii) $$D\left[\int_{\sin x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] = D\left[-\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x = -\frac{1}{\cos x}\cos x = \underline{\underline{-1}}$$

Oppgave 8.3.7

Vi skal finne grenseverdiene.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x e^{\frac{1}{t}}}{x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 8.4.1

Vi skal løse de ubestemte integralene.

a) $\int \frac{dx}{x+3} = \underline{\underline{\ln|x+3| + C}}$

b) $$\int (7x + 3x^{\frac{1}{2}} - \cos x)\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \sin x + C$$
$$= \underline{\underline{\frac{7}{2}x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} - \sin x + C}}$$

c) $\int \frac{dx}{1+2x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x) + C}}$

f) Ved substitusjonen $u = \frac{x}{\sqrt{7}}$, $du = \frac{1}{\sqrt{7}}\,dx$, får vi

$$\int \frac{4}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{7}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$
$$= 4\arcsin u + C = \underline{\underline{4\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C}}$$

Oppgave 8.4.3

Vi skal løse de ubestemte integralene.

a) Ved substitusjonen $u = \arcsin x$, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, får vi

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

c) Ved substitusjonen $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}\,dx$$
$$= 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\arctan u + C$$
$$= \underline{\underline{2\arctan\sqrt{x} + C}}$$

d) Vi starter med å splitte opp integralet i to deler

$$\int \frac{7x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 7\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Her er det andre integralet i summen ovenfor lett å beregne:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C_1$$

Det første integralet kan vi løse ved å bruke substitusjonen $u = 1-x^2$, $du = -2x\,dx$, som gir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C_2$$

I alt får vi da

$$\int \frac{7x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underline{\underline{-7\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C}}$$

Oppgave 8.6.1

Vi skal finne arealet avgrenset av de oppgitte kurvene.

a) $y = x^4$, x-aksen og linjen $x = 1$. Grafen skjærer x-aksen i $x = 0$. Arealet er derfor gitt ved

$$A = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1^5 - 0^5) = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

c) $y = \sin x$, x-aksen og linjene $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = -\frac{\pi}{4}$. Grafen ligger under x-aksen i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$. Arealet er derfor

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin x \, dx = -\Big[-\cos x\Big]_{-\pi/2}^{-\pi/4} \\ &= \cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) - \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

f) $y_1 = \frac{1}{1+x^2}$, $y_2 = \frac{x}{2}$ og y-aksen. Det eneste skjæringspunktet mellom grafene y_1 og y_2 er for $x = 1$ (tegn figur!). Vi finner arealet som differensen mellom arealet under y_1 og arealet under y_2:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2}\Big) \, dx = \Big[\arctan x - \frac{x^2}{4}\Big]_0^1 \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{4} - (\arctan 0 - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.3

Vi skal beregne arealet av det skraverte området mellom grafene til $\cos x$ og $\sin x$ på figuren (se figur i Kalkulus). Skjæringspunktene mellom grafene som avgrenser området er gitt ved

$$\cos x = \sin x \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Skjæringspunktene vi er på jakt etter får vi for $k = -1$ og for $k = 0$, det vil si $x = -\frac{3\pi}{4}$ og $x = \frac{\pi}{4}$. I det aktuelle området ligger grafen til $\cos x$ hele tiden over grafen til $\sin x$, så vi får det søkte arealet ved å integrere $\cos x - \sin x$ mellom de to skjæringspunktene. Arealet blir derfor

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.5

Vi skal finne volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier grafen om x-aksen.

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_0^1 \pi y^2\, dx = \int_0^1 \pi \frac{1}{1+x^2}\, dx = \Big[\pi \arctan x\Big]_0^1$$
$$= \pi \arctan 1 - \pi \arctan 0 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

d) $y = \frac{1}{\sin x}$ mellom $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{\pi}{3}$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\pi}{\sin^2 x}\, dx = \Big[-\pi \cot x\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\pi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\Big)$$
$$= -\pi\Big(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\Big) = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}}$$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ mellom $x = 0$ og $x = 3$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_0^3 \pi\Big(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\Big)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{1}{1+2x}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big[\ln|1+2x|\Big]_0^3 = \frac{\pi}{2}(\ln 7 - \ln 1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 7}}$$

Oppgave 8.6.7

Vi skal finne volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier grafen om y-aksen.

a) $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 3$.

$$V = \int_0^3 2\pi x\, y(x)\, dx = 2\pi \int_0^3 x^3\, dx = \frac{2\pi}{4}\Big[x^4\Big]_0^3 = \frac{\pi}{2}(3^4 - 0^4) = \underline{\underline{\frac{81\pi}{2}}}$$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$. Ved å bruke substitusjonen $u = 9 - x^2$, $du = -2x\, dx$, finner vi

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$$
$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\Big) \int_9^5 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \pi \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$
$$= 2\pi\Big[\sqrt{u}\Big]_5^9 = \underline{\underline{2\pi(3 - \sqrt{5})}}$$

e) $y = \sin(x^2)$ mellom $x = 0$ og $x = \sqrt{\pi}$. Ved å bruke substitusjonen $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, finner vi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \pi \sin(u)\,du \\ &= \Big[-\pi \cos u\Big]_0^{\pi} = -\pi(\cos\pi - \cos 0) = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.9

a) Området avgrenset av $y = x$ og $y = x^2$ dreies om x-aksen (tegn figur!). Vi skal finne volumet av omdreiningslegemet (bruker setning 8.6.3 i Kalkulus).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi x^2\,dx - \int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx \\ &= \pi\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) = \underline{\underline{\frac{2}{15}\pi}} \end{aligned}$$

b) Området dreies isteden om y-aksen. Vi skal finne volumet av omdreiningslegemet (bruker setning 8.6.5 i Kalkulus).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx \\ &= 2\pi\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.11

a) Buelengden av grafen til funksjonen $f(x) = 3x + 4$ fra $x = 0$ til $x = 3$ er gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + 3^2}\,dx \\ &= \sqrt{10}\int_0^3 dx = \sqrt{10}\Big[x\Big]_0^3 = \underline{\underline{3\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

b) Buelengden av grafen til funksjonen $f(x) = \cosh x$ fra $x = 1$ til $x = 2$ er gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,dx = \int_1^2 \cosh x\,dx \\ &= \Big[\sinh x\Big]_1^2 = \underline{\underline{\sinh 2 - \sinh 1}} = \frac{(e^3 + 1)(e - 1)}{2e^2} \end{aligned}$$