Plan: 1.2.15, 1.2.17, 1.2.25, 1.3.4, 1.4.10, 1.2.21, 1.4.4, 1.4.7, 1.4.8, 1.3.2, 1.3.3, 1.5.6, 1.5.7

1.2.15 Vis omvendt trekantulikhet:

$||x|-|y|| \leq |x-y|$ for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

Bevis:

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$

$$\Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

Ved symmetri $(x \leftrightarrow y)$

$$-(|x|-|y|) = |y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$$

$$\Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

1.2.17 Vis at for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ så er $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$

Bevis: $|x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) =$

$$x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y = |x|^2 + x\cdot y + x\cdot y + |y|^2$$

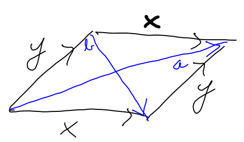
$$= |x|^2 + 2x\cdot y + |y|^2$$

Tilsvarende: $|x-y|^2 = (x-y)\cdot(x-y)$

$$= |x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2$$

$$\Rightarrow |x+y|^2 + |x-y|^2 = |x|^2 + \cancel{2x\cdot y} + |y|^2 + |x|^2 - \cancel{2x\cdot y} + |y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

Vis at i et parallellogram så er summen av kvadratene av lengdene diagonalene lik summen av kvadratene av lengdene sidene.



Altså:

$$|x|^2 + |y|^2 + |x|^2 + |y|^2 \overset{?}{=} |a|^2 + |b|^2$$

$$\parallel$$

$$2|x|^2 + 2|y|^2$$

Bevis:

$a = x + y$ Fra figuren ser vi at

$b = x - y \Leftarrow y + b = x$

Vi har vist at

$$2|x|^2 + 2|y|^2 = |x+y|^2 + |x-y|^2 = |a|^2 + |b|^2$$

Som skulle vises.

1.2.21 Finn en parameterfremstilling gjennom punktene $\underline{a} = (7, -3, 2, 4, -2)$ og $\underline{b} = (2, 1, -1, -1, 5)$.

Triks: La $\underline{r}(t) = (1-t)\cdot \underline{a} + t\cdot \underline{b}$
$= \underline{a} + (\underline{b} - \underline{a})\cdot t$

(Sjekk: $\underline{r}(0) = 1\cdot \underline{a} + 0\cdot \underline{b} = \underline{a}$
$\underline{r}(1) = 0\cdot \underline{a} + 1\cdot \underline{b} = \underline{b}$, og
$\underline{r}(t)$ er på formen $\underline{x} + \underline{y}\cdot t$)

$-\underline{a} + \underline{b} = -(7, -3, 2, 4 -2) + (2, 1, -1, -1, 5)$
$= (-5, 4, -3, -5, 7)$

Så $\underline{r}(t) = (7, -3, 2, 4, -2) + (-5, 4, -3, -5, 7)t$

1.2.25 To skip Anna og Berit
med posisjoner $\underline{a}(t)$ og $\underline{b}(t)$.
Vi vet at $\underline{a}(0)=(0,4)$ og $\underline{b}(0)=(39,14)$

Anna beveger seg parallelt med $(3,4)=\underline{x}$
Berit — || — $(-12,5)=\underline{y}$
Farten til Anna er 15 knop
— || — Berit er 13 knop.

Da er $\underline{a}(t)=\underline{a}(0)+15\cdot\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}t$

$$=(0,4)+15\cdot\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}t=$$

$$=(0,4)+3\cdot(3,4)\cdot t$$

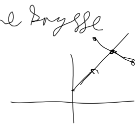
og $\underline{b}(t)=b(0)+13\cdot\frac{\underline{y}}{|\underline{y}|}\cdot t$

$$=(39,14)+13\cdot\frac{(-12,5)}{\sqrt{12^2+5^2}}t \quad //$$

$12^2=144$
$+ \quad +$
$5^2=25$
$\parallel$
169

$$=(39,14)+(-12,5)\cdot t$$

Hvor vil kursen til skipene krysse hverandre?



Så vi må løse ligningen
$\underline{a}(t)=\underline{b}(s)$.
$\Updownarrow$
$(0,4)+(9,12)t=(39,14)+(-12,5)s$
$\Rightarrow 9t=39-12s \Rightarrow 3t=13-4s$
$4+12t=14+5s \qquad \Updownarrow \quad 12t=4\cdot 13-16s$
$\Updownarrow$
$4+4\cdot 13-16s=14+5s$
$\Updownarrow$
$4\cdot 13-10=21s$
$\parallel$
$40+12-10$
$\parallel$
$42=2\cdot 21 \qquad \Rightarrow s=2$

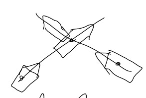
$\Rightarrow 12\cdot t=4\cdot 13-4\cdot 4\cdot 2=4(13-8)$
$=4\cdot 5$

$\Rightarrow 4\cdot 3\cdot t=4\cdot 5 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$

$\underline{a}(\frac{5}{3})=(0,4)+(9,12)\cdot\frac{5}{3}=(15,24)$
$\parallel$
$\underline{b}(2)=(39,14)+(-12,5)\cdot 2=(39-24,14+10)$

Så kursene skjærer i $(15,24)$

Vil skipene kollidere?
Vi beregner minimum $|\underline{b}(t)-\underline{a}(t)|=|\underline{c}(t)|$
, altså minste avstand mellom skipene.



Hvis du gidder.
Hvis ikke så anta at skipene er [illegible] og se at $t\neq s$.

1.3.4 Vis at for alle $x, y \in \mathbb{C}^n$

er $|x-y|^2 = |x|^2 - 2\cdot\mathrm{Re}(x\cdot y) + |y|^2$

Bevis: $|x-y|^2 = (x-y)\cdot(x-y)$

$= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y$

Setning 1.3.1 (b)

$= |x|^2 - x\cdot y - \overline{x\cdot y} + |y|^2$

$= |x|^2 - (x\cdot y + \overline{x\cdot y}) + |y|^2$

$= |x|^2 - 2\cdot\mathrm{Re}(x\cdot y) + |y|^2$ $\blacksquare$

Vis at $(x+y)\cdot(x-y) = |x|^2 - 2i\mathrm{Im}(x\cdot y) + |y|^2$

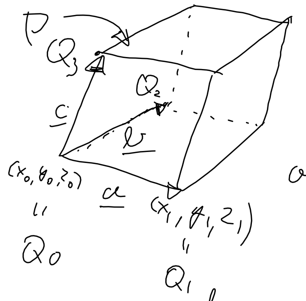
$(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - x\cdot y + y\cdot x - y\cdot y$

$= |x|^2 - x\cdot y + \overline{x\cdot y} - |y|^2 = |x|^2 - (x\cdot y - \overline{x\cdot y}) - |y|^2$

$= |x|^2 - 2\cdot i\mathrm{Im}(x\cdot y) - |y|^2$ $\blacksquare$

(Husk: $(z - \overline{z}) = 2\cdot i\mathrm{Im}(z)$)

1.4.10 Anta at hjørnene i et parallellepipedet har heltalls koeffisienter.



osv. slik at x_i, y_i, z_i er heltall.

Vis at volumet til P er et heltall.

Bevis:

Da er volumet til P gitt som

$V = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|$

merk at $\underline{a} = Q_1 - Q_0$ og Q_1 og Q_0 har heltalls koordinater, så $\underline{a}$ har heltallskoordinater.

Tilsvarende har $\underline{b}$ og $\underline{c}$ heltalls-koordinater.

$$\underline{d} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{matrix} i & j & k & i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

$-a_3 b_2 i \; \cdots$

så $\underline{d}$ har heltallskoeffisienter.

$((d_1, d_2, d_3)$ så $d_i \in \mathbb{Z})$

$\underline{d} \cdot \underline{c} = d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 + d_3 \cdot c_3$

Som er et heltall, så $|\underline{d} \cdot \underline{c}|$ er et heltall, men $V = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|$, så V er et heltall.

1.4.4 Finn en vektor som står ortogonalt på $\underline{a} = (2, 0, -3)$ og $\underline{b} = (-1, 3, 4)$

Bevis: Setning 1.4.1 d sier at $\underline{a} \times \underline{b}$ står ortognalt på $\underline{a}$ og $\underline{b}$.

$$\begin{array}{cccccc} i & j & k & i & j & k \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 9i & -8j & 0 & 0 & 3j & 6k \end{array} = 9i - 5j + 6k,$$

Så $(9, -5, 6)$ står ortognalt på $\underline{a}$ og $\underline{b}$

$$\left(\begin{array}{l} (9, -5, 6) \cdot (2, 0, -3) = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 0 \\ (9, -5 \cdot 6) \cdot (-1, 3, 4) = -9 - 15 + 24 = 0 \end{array} \right)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

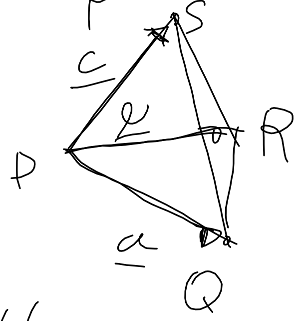
$$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{l} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \underline{d}$$

Da er $\underline{d}$ ortogonal til $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$.

1.4.7 Pyramide med hjørner i
(Tetrahedon)

$(2, -1, 2)$, $(0, 5, -3)$, $(2, 4, 6)$, $(3, -2, 4)$

P'' Q'' R'' S''



Hva er volumet til pyramiden?

Løsning:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}\right|$$

$\underline{a} = Q - P = (-2, 6, -5)$

$\underline{b} = R - P = (0, 5, 4)$

$\underline{c} = S - P = (1, -1, 2)$

$\underline{a} \times \underline{b} =$

$$\begin{array}{cccccc} i & j & k & i & j & k \\ -2 & 6 & -5 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 5 & 4 \end{array}$$

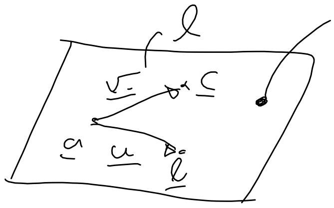
$25i \quad 8j \quad 0 \quad 24i \quad 0 \quad -10k$

$= 49i + 8j - 10k$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (49 \cdot 1 - 8 - 10 \cdot 2) = 21$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 21 = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$$

1.4.8 Finn ligningen for planet gjennom $\underline{a}=(1,1,-1)$, $\underline{b}=(0,-2,-6)$ og $\underline{c}=(2,3,3)$



$Q=(x,y,z)$ slik at

Q er med i planet, altså,

$$Q = \underline{a} + \underline{u}\cdot t + \underline{v}\cdot s$$

$$\Rightarrow Q - \underline{a} = \underline{u}\cdot t + \underline{v}\cdot s$$

$$\Rightarrow (Q - \underline{a})\cdot(\underline{u}\times\underline{v}) = 0$$

$$\underline{u} = \underline{b} - \underline{a} = (-1,-3,-5)$$

$$\underline{v} = \underline{c} - \underline{a} = (1,2,4)$$

$$\underline{u}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(-12+10) - j(-4+5) + k\cdot(-2+3)$$

$$= -2i - j + k \qquad (Q = (x,y,z))$$

$$\Rightarrow (Q - \underline{a})\cdot(\underline{u}\times\underline{v}) = Q\cdot(\underline{u}\times\underline{v}) - \underline{a}\cdot(\underline{u}\times\underline{v})$$

$$= -2x - y + z - (1,1,-1)\cdot(-2,-1,1)$$

$$= -2x - y + z + 2 + 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-2x - y + z = -4}}$$