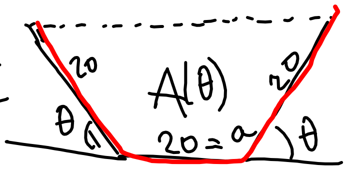
## Kalkulus demon 23/10

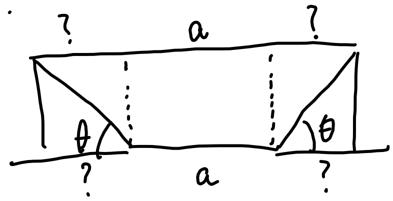
7.1 7, 15,
7.2 9
7.6. 7

7.1.7




Blikket er 60 cm til sammen.
Vil finne arealet til trapeset som funksjon av $\theta$.

$$A = \frac{a+b}{2} h.$$ Vil finne $b$. Så $b = a + 2?$




hosliggende

Vi ser at $\cos\theta = \frac{?}{a}$ så $? = a\cos\theta$.

Dermed er $b = a + 2a\cos\theta$.
Må også uttrykke $h$ v.h.a. $\theta$. Vi har at $\sin\theta = \frac{h}{a}$, så
$h = a\sin\theta$. Dermed er

$$A = \frac{(a + a + 2a\cos\theta)a\sin\theta}{2} = a^2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

Vil maksimere $A$ mhp $\theta$.

$$A'(\theta) = a^2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$

(bruk at $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ for å bli kvitt sinus)

Setter $u = \cos\theta$. Løser derfor

$$2u^2 + u - 1 = 0$$

og får $u = \frac{1}{2}$ eller $u = -1$. Så enten er $\cos\theta = \frac{1}{2}$ eller $\cos\theta = -1$.

ugyldig løsning

Så må ha $\cos\theta = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow \theta = 60^\circ$.

Så maks areal er gitt v/

$$A(60^\circ) = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{4} a^2$$

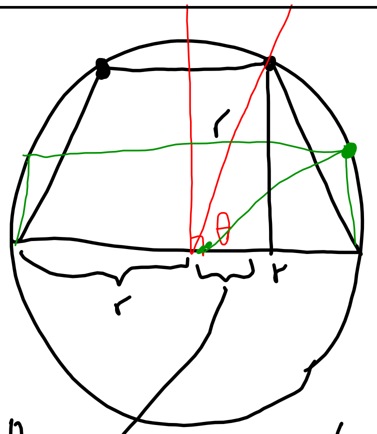
$\sin 60^\circ =$

$= \sqrt{3}\cdot 3\cdot 100$

$\approx 500?$

$\boxed{7.115}$ Trapes i sirkel m/ ene siden er diameter i sirkelen.

Finn maksimale areal til trapeset.




- Den røde streken har lengde r.
- Høyde: $\sin\theta = \frac{h}{r}$ så $h = r\sin\theta$

$$A = \frac{a+b}{2}h$$

- a: $a = 2r$
- b: $\cos\theta = \frac{b/2}{r}$

Dette er $b/2$.

Så $b = 2r\cos\theta$.

Så $A = \frac{2r + 2r\cos\theta}{2} r\sin\theta = r^2(1+\cos\theta)\sin\theta$.

Deriver!

$$A'(\theta) = r^2\left(-\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta\right)$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$-\sin^2\theta = -1 + \cos^2\theta$

$$= r^2\left(-1 + \cos^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= r^2\left(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\right)$$

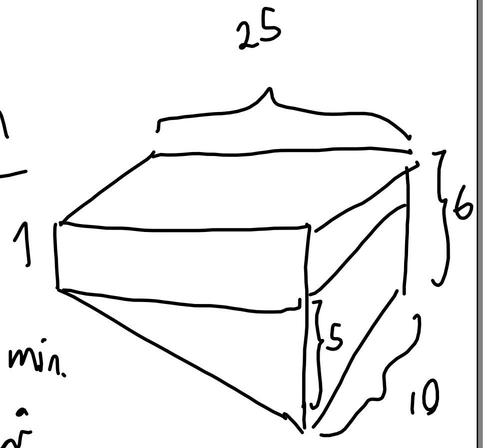
$$= 2r^2\left(\cos\theta - \tfrac{1}{2}\right)\left(\cos\theta + 1\right).$$

Må ha $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\Longrightarrow$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$. $\theta = 60^\circ$.

Så max areal er $A(60^\circ) = r^2 \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2}$

7.2.9

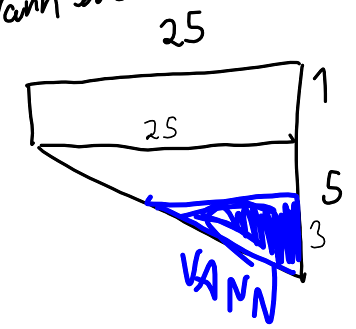
25 m langt
10 m bredt
1 m dyp i den grunne enden
6 m — " — dype — " —




Vann kommer inn 2000 liter pr min.
2 kubikkmeter pr min.

Spm $V'(t) = 2$ Finn $h'(t)$ når høyden er 3 m i den dype enden.

Finner formel for $V(t)$ = volum vann etter T minutter.




$$V(t) = \frac{h(t)\ \text{lengde vann}}{2} \cdot 10$$

Den store trekanten er formlik m/ den blå.

Dette betyr at $\frac{\text{lengde vann}}{25} = \frac{h(t)}{5}$

Så lengde vann $= 5h(t)$. Derfor er $V(t) = \frac{5h(t)^2}{2} \cdot 10 = 25h(t)^2$

Vil finne $h'(t)$ når $h(t) = 3$. Deriverer og får

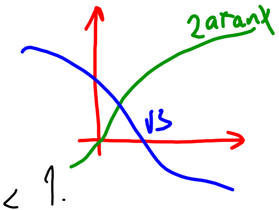
$$2 = V'(t) = 50\, h(t) \cdot h'(t).$$

Så $h'(t) = \frac{2}{150}$ m/min $= \frac{2}{15\cancel{0}} \frac{10\cancel{0}\text{ cm}}{\text{min}} = \frac{4}{3} \frac{\text{cm}}{\text{min}}$

$= 1.33\ldots$

7.6.7) s 344

a) v.a. $\overset{VS(x)}{\frac{1+x}{1+x^2}} = \overset{HS(x)}{2\arctan x}$




har én løsning $x_0$ og $\frac{1}{3}\sqrt{3} < x_0 < 1$.

$HS' = \frac{2}{1+x^2} > 0$ så høyresiden er strengt stigende.

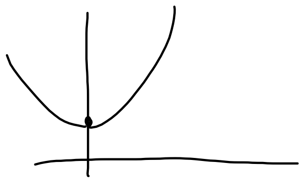
$$VS' = \frac{(1+x^2) - 2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$HS' - VS' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2)+x^2+2x-1}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2+x^2+2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$$



$x = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2\cdot 3}$ ingen reelle løsninger.

Så $\underbrace{HS(x) - VS(x)}_{f(x)}$ er en strengt stigende funksjon.

Ser på $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1+\sqrt{3}/3}{1+3/9}$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{3+\sqrt{3}}{3+1} \approx 1.18 -$$

$= -0.13....$

$$f(1) = 2\arctan(1) - \frac{1+1}{1+1}$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 = 0.5 \text{ ca?}$$

Så! $f(x)$ må ha nullpunkt $x_0$ v/ skjæringssetningen.

Nøyaktig ett siden $f$ er strengt stigende.

Siden $f(x_0) = 0 = VS(x_0) - HS(x_0)$ er $VS(x_0) = HS(x_0)$.

okt 23-15:11

B)

$$\varphi(x) = \frac{\arctan x}{(1+x)^2}$$

Finn når $\varphi$ er strengt voksende/avtagende. Finn uttrykk for globalt maksimum.

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x)^2 - 2(1+x)\arctan x}{(1+x)^4}$$

udefinert $x=-1$

For å finne kritiske punkter finner vi når teller er null.

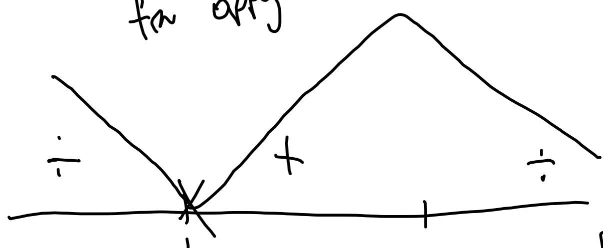
$$\frac{(1+x)^2}{1+x^2} - 2(1+x)\arctan x = 0$$

$1 - 2\cdot 0 = 1$

Én løsning er gitt v/ $x=-1$. Anta $x \neq -1$. Kan da dele på $x+1$.

$$\frac{(1+x)}{1+x^2} - 2\arctan x = 0$$

Denne har nøyaktig én løsning fra oppg a).




fortegnslinje for $\varphi'(x)$

$$\boxed{\frac{1+x_0}{1+x_0^2} = 2\arctan x_0}$$

Så $\varphi$ har toppunkt i $x_0$.

maks verdi

$$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} = \frac{1+x_0}{2(1+x_0^2)(1+x_0)^2} \text{ fra a).}$$

7.4.8 $f$ kont', to ganger deriverbar

$f^{-1} = g$ ← omvendte funksjon til $f$.

Vis at $g$ også er to ganger deriverbar og at

$$g''(x) = \frac{f''(g(x))\, g'(x)}{f'(g(x))^2} \qquad (f'(g(x)) \neq 0)$$

Har alltid $y = f(g(y))$ ← fordi $f$ og $g$ er omvendte

Deriverer mhp $y$ på begge sider:

$$1 = f'(g(y))\, g'(y).$$

Så $$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Deriverer på nytt:

$$g''(y) = \frac{-f''(g(y))\, g'(y)}{f'(g(y))^2}$$

□

La $f(x) = \sin x$. Finn $g''\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\boxed{g\left(\tfrac{1}{2}\right) = ? = \frac{\pi}{6}}$$

$$g'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f'' = -\sin}$$

Så $$g''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-f''\left(\frac{\pi}{6}\right) g'\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}}{3/4}$$

$$= \frac{1/\sqrt{3}}{3/4} = \frac{4/\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3\sqrt{3}}}}$$