Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 9

I kapittel 9 får du innarbeidet flere integrasjonsteknikker, slik som delvis integrasjon, substitusjon og delbrøkoppspaltning. Du finner løsningsforslag til helt enkle drilloppgaver såvel som mer sammensatte eksempler på bruk av disse teknikkene. Det er også et par eksempler på uegentlige integraler, og oppgave 9.5.14 dveler ved et tilsynelatende paradoks som det kan være nyttig å tenke igjennom.

Oppgave 9.1.1

a) Delvis integrasjon gir

$$\int x\sin x\,dx \underset{\uparrow}{=} -x\cos x - \int -\cos x\,dx = \underline{\underline{-x\cos x + \sin x + C}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = x,\ v' = \sin x \\ u' = 1,\ v = -\cos x \end{array}}$$

d) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int x^2e^x\,dx \underset{\uparrow}{=} x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2,\ v' = e^x \\ u' = 2x,\ v = e^x \end{array}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) = \underline{\underline{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 2x,\ v' = e^x \\ u' = 2,\ v = e^x \end{array}}$$

g) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int (x^2+x)\sin x\,dx \underset{\uparrow}{=} -(x^2+x)\cos x - \int -(2x+1)\cos x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = x^2+x,\ v' = \sin x \\ u' = 2x+1,\ v = -\cos x \end{array}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -(x^2+x)\cos x - \left((2x+1)(-\sin x) - \int -2\sin x\,dx\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 2x+1,\ v' = -\cos x \\ u' = 2,\ v = -\sin x \end{array}}$$

$$= -(x^2+x)\cos x + (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

$$= \underline{\underline{-(x^2+x-2)\cos x + (2x+1)\sin x + C}}$$

h) Delvis integrasjon gir

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x,\ v' = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{2}{3}x^{3/2} \end{array}}$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{1/2}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C}}$$

Oppgave 9.1.3

a) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \cos x,\ v' = e^{-x} \\ u' = -\sin x,\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -e^{-x}\cos x - \left(-e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sin x,\ v' = e^{-x} \\ u' = \cos x,\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

I alt har vi nå fått ligningen

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

som videre gir oss

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C}}$$

b) Delvis integrasjon gir

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sin x,\ v' = \sin x \\ u' = \cos x,\ v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1 - \sin^2 x\,dx$$

$$= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

I alt har vi da fått ligningen

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

som videre gir oss

$$\int \sin^2 x\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C}}$$

Oppgave 9.1.5

Delvis integrasjon gir

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\, dx \underset{\uparrow}{=} -\frac{\ln(x^2)}{x} - \int \frac{2}{x}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \ln(x^2),\ v' = 1/x^2 \\ u' = 2/x,\ v = -1/x \end{array}}$$

$$= -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C$$

$$= -2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{x}(\ln x + 1) + C}}$$

Oppgave 9.1.11

Delvis integrasjon gir

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\, dx \underset{\uparrow}{=} \arctan x(x - \arctan x) - \int \frac{x - \arctan x}{1+x^2}\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arctan x,\ v' = \frac{x^2}{1+x^2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2},\ v = x - \arctan x, \\ \text{(se mellomregning nedenfor)} \end{array}}$$

$$= x\arctan x - \arctan^2 x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\arctan x - \arctan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$$

$$= \underline{\underline{x\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}}$$

Mellomregning:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx = \int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\, dx = x - \arctan x + D$$

Oppgave 9.1.23

a) Vi lar $I_n = \int_0^1 \arcsin^n x\, dx$. Da har vi

$$I_0 = \int_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

og

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin x\, dx \underset{\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin x,\ v' = 1 \\ u' = 1/\sqrt{1-x^2},\ v = x \end{array}}}{=} \Big[x \arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \Big[x \arcsin x\Big]_0^1 - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$$

$$= \arcsin 1 - 0 - \left(-\sqrt{0} + \sqrt{1}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

b) Delvis integrasjon to ganger gir

$$I_n = \int_0^1 \arcsin^n x\, dx \underset{\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin^n x,\ v' = 1 \\ u' = \frac{n \arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x \end{array}}}{=} \Big[x \arcsin^n x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{nx \arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\underset{\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin^{n-1} x,\ v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{(n-1)\arcsin^{n-2} x}{\sqrt{1-x^2}},\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array}}}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(-\Big[\sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x\Big]_0^1 + \int_0^1 (n-1)\arcsin^{n-2} x\, dx\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(\left[0\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - 1 \cdot 0^{n-1}\right] + (n-1)I_{n-2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}}}$$

c) Setter vi inn $n = 3$ i formelen fra punkt b), får vi

$$I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3(3-1)I_{3-2} = \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi + 6}}$$

Oppgave 9.2.1

a) Ved substitusjon finner vi

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{\uparrow}{=} \int 2\sin u\, du = -2\cos u + C = \underline{\underline{-2\cos\sqrt{x} + C}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sqrt{x},\ du = dx/2\sqrt{x} \\ dx = 2\,du\sqrt{x} \end{array}}$$

b) Ved substitusjon finner vi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{u}{1+u^2} 2u\, du = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\, du = 2\int \frac{(1+u^2)-1}{1+u^2}\, du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sqrt{x},\ x = u^2, \\ dx = 2u\, du \end{array}}$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = 2(u - \arctan u) + C = \underline{\underline{2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C}}$$

d) Substitusjon gir

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{u} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = e^x,\ du = e^x dx, \\ dx = du/u \end{array}}$$

$$= \arcsin u + C = \underline{\underline{\arcsin e^x + C}}$$

Oppgave 9.2.3

a) Substitusjon gir

$$\int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \frac{1}{2} e^u\, du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = x^2,\ du = 2x dx \\ x = 0 \implies u = 0 \\ x = \sqrt{2} \implies u = 2 \end{array}}$$

c) Substitusjon gir

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} = \int_2^3 \frac{u+1}{1-u} 2u\,du = -2\int_2^3 \frac{u^2+u}{u-1}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=\sqrt{x},\ du = dx/2\sqrt{x} \\ x=4 \implies u=2 \\ x=9 \implies u=3 \end{array}}$$

$$= -2\int_2^3 \left(u+2+\frac{2}{u-1}\right) du = -2\left[\frac{1}{2}u^2 + 2u + 2\ln|u-1|\right]_2^3$$

$$\boxed{\text{se polynomdivisjon nedenfor}}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}3^2 + 4 + 2\ln|3-1| - \left(\frac{1}{2}2^2 + 2 + 2\ln|2-1|\right)\right)$$

$$= -2\left(\frac{5}{2} + 2 + 2\ln 2\right) = \underline{\underline{-(9+4\ln 2)}}$$

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} u^2 + u : u - 1 = \underline{u + 2 + \dfrac{2}{u-1}} \\ \underline{u^2 - u} \\ \quad 2u \\ \quad \underline{2u-2} \\ \qquad\ \ 2 \\ \qquad\ \ \underline{2} \\ \qquad\ \ 0 \end{array}$$

Oppgave 9.2.4

Substitusjon gir

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-2^2\sin^2 u}\; 2\cos u\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 2\sin u,\ dx = 2\cos u\,du \\ x=2 \implies u=\pi/2 \\ x=0 \implies u=0 \end{array}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2 u}\; 2\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 u\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos 2u + 1)\,du = 2\left[\frac{\sin 2u}{2} + u\right]_0^{\pi/2} = 2\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Oppgave 9.3.5

a) Ved å dele opp integranden får vi

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x+1}\,dx = \int\Big(x+1-\frac{4}{x+1}\Big)\,dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2}+x-4\ln|x+1|+C}}$$

Oppdelingen fikk vi ved polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rl} x^2+2x-3 : x+1 = & \underline{x+1-\dfrac{4}{x+1}} \\ \underline{x^2+\ \ x\quad\ } & \\ x-3 & \\ \underline{x+1} & \\ -4 & \\ \underline{-4} & \\ 0 & \end{array}$$

d) Ved delbrøkoppspaltning av integranden (se nedenfor) får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int\Big(\frac{-2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\Big)\,dx \\ &= \underline{\underline{3\ln|x+2|-2\ln|x+1|+C}} \end{aligned}$$

Vi viser delbrøkoppspaltningen:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \\ x-1 &= A(x+2)+B(x+1) \\ &= (A+B)x+(2A+B) \end{aligned}$$

Sammenligning av koeffisienter gir

$$A+B=1, \quad 2A+B=-1$$

det vil si

$$A=-2, \quad B=3$$

e) Ved å skrive om integranden slik at den deriverte av nevneren blir trukket inn i telleren, får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= 2\int \frac{(2x+2)-1}{x^2+2x+2}\,dx \\ &= 2\Big(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\ln|x^2+2x+2| - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx\right) \\
&= \underline{\underline{2\ln|x^2+2x+2| - 2\arctan(x+1) + C}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 9.3.9

Ved delbrøkoppspaltning (se nedenfor) av integranden får vi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx &= \frac{1}{3}\int\Big(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{3}(2\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1|) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1)^2 - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + C}}
\end{aligned}
$$

Vi viser delbrøkoppspaltningen:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
x+1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\
&= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C
\end{aligned}
$$

Sammenligning av koeffisienter gir

$$
A+B=0, \quad A-B+C=1, \quad A-C=1
$$

det vil si

$$
A=\frac{2}{3}, \quad B=-\frac{2}{3}, \quad C=-\frac{1}{3}
$$

Oppgave 9.3.17

Vi skal beregne $\int \frac{dx}{x^3+8}$.

Vi ser at $(x+2)$ er en faktor i nevneren siden $x=-2$ er et nullpunkt for x^3+8. For å faktorisere nevneren utfører vi polynomdivisjon.

$$
\begin{array}{l}
x^3+8 : x+2 = \underline{x^2-2x+4} = (x-1)^2+3 \\
\underline{x^3+2x^2} \\
\quad -2x^2+8 \\
\quad \underline{-2x^2-4x} \\
\qquad\qquad 4x+8 \\
\qquad\qquad \underline{4x+8} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Delbrøkoppspaltning av integranden gir nå

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \\
1 &= A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) \\
1 &= (A+B)x^2 + (2B+C-2A)x + (4A+2C)
\end{aligned}
$$

Sammenholder vi koeffisientene på hver side av identiteten, finner vi

$$
A+B=0, \quad 2B+C-2A=0, \quad 4A+2C=1
$$

som gir

$$
A=\frac{1}{12}, \quad B=-\frac{1}{12}, \quad C=\frac{1}{3}
$$

Dermed blir

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+8} &\underset{\uparrow \atop \boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}}{=} \int \left(\frac{\frac{1}{12}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4} \right) dx \\
&= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\int \frac{(2x-2)-6}{x^2-2x+4}\,dx \\
&= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{6}{24}\int \frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx \\
&= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{3[(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1]}\,dx \\
&\underset{\uparrow \atop \boxed{u=\frac{x-1}{\sqrt{3}},\ du=\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx}}{=} \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{12}\sqrt{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{12}\sqrt{3}\arctan(u) + C
\end{aligned}
$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{12}\ln\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2-2x+4}} + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C}}$$

Oppgave 9.3.27

Ved substitusjon får vi først omformet integralet

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+13} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{dz}{z(z^2+4z+13)} = \int g(z)\,dz$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z = e^x,\ dz = e^x\,dx \\ dx = \frac{1}{z}dz \end{array}}$$

og bruker så delbrøkoppspaltning på den nye integranden.

$$g(z) = \frac{1}{z(z^2+4z+13)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+4z+13}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(z^2+4z+13) + (Bz+C)z \\ &= (A+B)z^2 + (4A+C)z + 13A \end{aligned}$$

Sammenligning av koeffisientene gir

$$13A = 1, \quad 4A + C = 0, \quad A + B = 0$$

det vil si

$$A = \frac{1}{13}, \quad B = -\frac{1}{13}, \quad C = -\frac{4}{13}$$

Den nye integranden kan nå omformes slik:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{z+4}{z^2+4z+13}\right) = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{(2z+4)+4}{z^2+4z+13}\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{2z+4}{z^2+4z+13} + \frac{4}{(z+2)^2+9}\right)\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{2z+4}{z^2+4z+13} - \frac{2}{9}\frac{1}{\left(\frac{z+2}{3}\right)^2+1}\right) \end{aligned}$$

Leddvis integrasjon gir dermed

$$\int g(z)\,dz = \frac{1}{13}\left(\ln|z| - \frac{1}{2}\ln(z^2+4z+13) - \frac{2}{9}\cdot 3\arctan\left(\frac{z+2}{3}\right)\right) + D$$

Substituerer vi nå tilbake $z = e^x$, har vi ialt

$$\int f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{13}\left(x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4e^x+13) - \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{e^x+2}{3}\right)\right) + D}}$$

Oppgave 9.3.29

Substitusjon og delbrøkoppspaltning gir

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{c} u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx \\ x=0 \implies u=1 \\ x=\pi/3 \implies u=1/2 \end{array}}}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{u(u+1)}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\Big)\,du = \Big[\ln|u| - \ln|u+1|\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \ln 1 - \ln 2 - \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \underline{\underline{\ln\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 9.5.1

a) Integrasjonsintervallet er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

b) Integranden er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1} \int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1} \Big[\arcsin x\Big]_0^{a}$$

$$= \lim_{a\to 1} (\arcsin a - \arcsin 0)$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

e) Integrasjonsintervallet er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$\underset{\boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}}{=} \frac{1}{3} \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\Big)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\Big[\ln|x-1| - \ln|x+2|\Big]_2^a \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}(\ln|a-1| - \ln|a-2| - \ln 1 + \ln 4) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left|\frac{a-1}{a-2}\right| + \ln 4\right) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left|\frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}\right| + \ln 4\right) \\
&= \frac{1}{3}(\ln 1 + \ln 4) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln 4}}
\end{aligned}$$

i) Integralet konvergerer. Ved delvis integrasjon får vi at $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$ (dette har du allerede gjort i oppgave 9.1.1b). Dermed får vi:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln x\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2\Big(\ln x - \frac{1}{2}\Big)\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\Big(\ln 1 - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}a^2\Big(\ln a - \frac{1}{2}\Big)\right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+} a^2\Big(\ln a - \frac{1}{2}\Big) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

hvor vi i siste overgang har benyttet at $\lim_{a\to 0^+} a^2\ln a = 0$ ifølge setning 6.3.16 i Kalkulus.

Oppgave 9.5.14

Gabriels trompet fremkommer ved at vi dreier grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $1 \le x < \infty$, om x-aksen (tegn figur!).

a) Vi finner volumet av Gabriels trompet (bruker setning 8.6.3):

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^\infty \pi f(x)^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\pi\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \pi\lim_{b\to\infty}\Big(1-\frac{1}{b}\Big) = \underline{\underline{\pi}}
\end{aligned}$$

Så Gabriels trompet har endelig volum.

b) Vi beregner overflaten av Gabriels trompet ved hjelp av den oppgitte formelen:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \\ &> 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

hvor den siste ulikheten skyldes at $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} > 1$. Men integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ vet vi divergerer mot uendelig, så da må det opprinnelige integralet også divergere (ved sammenligningskriteriet). Det betyr at Gabriels trompet har uendelig overflate.

c) **Påstand:** Vi kan male den (uendelige) innsiden av Gabriels trompet ved å kjøpe nok maling til å fylle det endelige volumet, helle malingen i trompeten og tømme ut det som blir til overs. Dermed har vi malt den uendelige overflaten med endelig mye maling.

Kommentar: I praksis får vi ikke fylt opp hele volumet til trompeten, og dermed får vi ikke malt hele overflaten. Dette skyldes at malingen må ha en viss tykkelse (la oss si diameteren til et atom), mens tuten i trompeten blir vilkårlig smal bare vi beveger oss langt nok inn. Før eller siden blir tuten smalere enn diameteren til et atom, og da får ikke malingen presset seg lenger inn.

Men hvis vi antar at vi har en idealisert "matematisk" maling som kan bli vilkårlig tynn slik at den fyller opp hele volumet til trompeten, ville vi faktisk kunne male den uendelige overflaten av trompeten med endelig mye maling. Dette er egentlig ikke noe mer paradoksalt enn at et integral over et ubegrenset intervall kan bli endelig. Tenk igjennom dette på egenhånd!