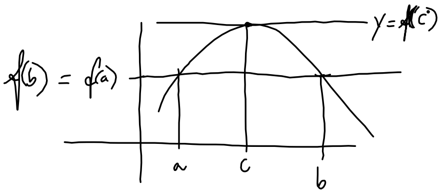
ROLLES TEOREM

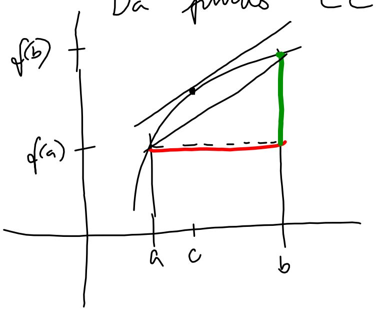
- Anta $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar på $x\in(a,b)$
- Anta $f(a)=f(b)$.

Da finnes $c\in(a,b)$ s.a. $\underline{\underline{f'(c)=0}}$



MIDDELVERDISETNINGEN. Samme som før, men $f(a)\neq f(b)$.

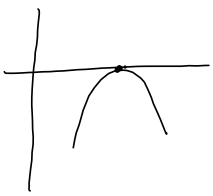
Da finnes $c\in(a,b)$ s.a. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



6.2.3. Skal vise at grafene til $f(x) = 2 - x^3$
og $g(x) = \ln(2+x)$
har <u>NØYAKTIG ETT</u> skjæringspunkt i $[0,1]$

$\iff$ $h(x) = 2 - x^3 - \ln(2+x)$
har <u>NØYAKTIG ETT nullpunkt</u> i $[0,1]$

SKJÆRINGSSETN: h kontinuerlig på $[a,b]$ og $h(a)$ og $h(b)$ har forskjellig fortegn, da finnes en $c \in (a,b)$ s.a. $h(c) = 0$.



$$\left.\begin{aligned} h(0) &= 2 - 0 - \ln 2 > 0 \\ h(1) &= 2 - 1 - \ln 3 < 0 \end{aligned}\right\}$$ og h kontinuerlige som sammensetninger av kontinuerlige funksjoner.

Da finnes en $c \in (0,1)$ slik at $h(c) = 0$
Så $h(x)$ har minst ett nullpunkt.

EGENSKAPER VED DERIVERT:

f kontinuerlig og $f'(x) \geq 0$, så er f voksende
$f'(x) \leq 0$, så er f avtagende

$\leq$ avtagende
$<$ strengt avtagende

Ser på $h'(x) = -3x^2 - \frac{1}{2+x} < 0$ på $[0,1]$
$h(x)$ er strengt avtagende og har minst ett nullpunkt på $(0,1)$, så da har det nøyaktig ett nullpunkt.

6.2.5. $f(x) = x - \frac{4}{x}$

Se at $f(-1) = f(4)$

$f(-1) = -1 - \frac{4}{-1} = 3$

$f(4) = 4 - \frac{4}{4} = 3$

f er ikke kontinuerlig på hele $[-1,4]$

f er kontinuerlig på $(-1,0)\cup(0,4)$

→ Dette strider mot $\underbrace{}_{\text{antakelsene i}}$ Rolles teorem.

$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{4}{x^2} = -1$

$-4 = x^2$

$\underline{x = \pm 2i} \notin \mathbb{R}$

$f'(c) \neq 0$ for alle $c \in (-1,4)$

6.2.7. ① Vis at det finnes $c \in (0, x)$ s.a. $\sin x = x \cdot \cos c$

Se på $f(x) = \sin x$, kontinuerlig og deriverbar på $(0, x)$

v/ Middelverdisetningen finnes $\underline{c \in (0, x)}$ s.a.

$$\cos c = f'(c) = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$\cos c = \frac{\sin x}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$\underline{\sin x = x \cos c}$$

② Skal vise $|\sin x| \leq |x|$

$$|\sin x| = |x| \cdot |\cos c| \leq |x| \cdot 1 = |x|.$$

L'HOPITAL – VIKTIG TEKNIKK FOR GRENSEVERDIER

"$\frac{0}{0}$" Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ og $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistere (kan være $+\infty$ eller $-\infty$)

Da eksistere $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

MORAL: Deriverer teller og nevner hver for seg.

EKS: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{"\frac{0}{0}"}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

- Gjelder når $a = \infty$ eller $a = -\infty$
- Gjelder også "$\frac{\infty}{\infty}$" og "$0 \cdot \infty$" (omskrives)
- TRIKS Utvider "1^{∞}" "0^{0}" "∞^{0}"

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln h(x)} \qquad b = e^{\ln b}$$

$$= e^{\lim_{x\to a} \ln h(x)} \quad + \ln\text{-regel } 3$$

6.3.4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{2\ln(\tan x)} \overset{\text{"}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{\tan x}(\tan x)'}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}$ $\Bigg\}$ $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{\tan x\cdot\cos^2 x}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\tan x\cdot\cos^2 x}{2}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x\cdot\cos^2 x}{2x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cos^{\cancel{2}} x}{2x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\cdot\cos x}{2x}$ Produkt regel for derivasjon

$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x(-\sin x)}{2}$

$= \frac{1^2-0^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

6.3.6. $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}$

OMSKRIVING

$$\underset{L'H}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}-0}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

ALTERNATIVT: $h=\frac{1}{x}$

$h\to 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h-1\right)}{h}$$

$$\underset{L'H}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \frac{e^h-0}{1} = \underline{\underline{1}}$$

6.3.5. $\underline{\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} \underset{\text{TRIKS}}{\overset{"1^\infty"}{=}} \lim_{x \to 0} e^{\underline{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}}$

$\ln a^b = b \ln a$

$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos x)}$

ln-regel 3

$= \underline{e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x)}} = \underline{e^{-\frac{1}{2}}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \ln(\cos x)}{x^2} \underset{L'H}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-\tan x}{2x}$

$\underset{L'H}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2}$

$= \underline{-\frac{1}{2}}$

6.3.13. $\lim_{x\to 0} \underline{x^{\sin x}} \overset{\text{"}0^0\text{"}}{\underset{\text{TRIKS}}{=}} \lim_{x\to 0} e^{\underline{\ln x^{\sin x}}}$

$= \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \ln x}$

$= e^{\underline{\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \ln x}} = e^0 = \underline{1}$

• $\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \ln x \overset{\text{"}0\cdot-\infty\text{"}}{\underset{\text{omskrive}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$ $\quad \cancel{h = \frac{1}{\sin x}}$

$\overset{\text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{0\cdot\sin x - \cos x\cdot 1}{\sin^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$

$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} -\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x + x(-\sin x)}$

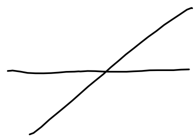
$= \underline{0}$

$\underline{e^0 = 1}$

ASYMPTOTER:

Vertikale $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ a^-}} f(x) = \infty$ eller $-\infty$

Da er $x = a$ en vertikal asymptote



Skrå eller horisontale

(1) Beregn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

(2) Beregne $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$

Da er $y = ax + b$ asymptote

6.5.1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

  så $x = 0$ er vertikal asymptote.

- ① $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} \leftarrow \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x}{1}}$

$$\underset{L'H}{\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}$$

$$= \underline{1}$$

② $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - a \cdot x)$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x}$$

$$= \underline{0}$$

Asymptote: $y = ax + b = \underline{\underline{x}}$