Oppgave 1. Ved å substituere $z = -1 - \frac{1}{z}$ kun i det ene leddet øker man graden til polynomet. Deretter går det galt mellom linjene $z^3 = 1$ og $z = 1$, siden man glemmer å ta med komplekse røtter.

Oppgave 2a.

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| \implies |z| - |w| \leq |z - w| \tag{1}$$
$$|w| = |w - z + z| \leq |z - w| + |z| \implies -(|z| - |w|) \leq |z - w| \tag{2}$$

Ved å kombinere (1) og (2) følger det at $||z| - |w|| \leq |z - w|$. Geometrisk betyr dette at enhver side i en trekant er større enn differansen mellom de to andre sidene.

Oppgave 2b. La w_i være en løsning av ligningen $z^{2009} + 2008z + 2010 = 0$. Anta at $|w_i| \leq 1$. Da er

$$2010 = |-w_i^{2009} - 2008w_i| \leq |w_i|^{2009} + 2008|w_i| \leq 1 + 2008 = 2009$$

hvilket er absurd. Derfor er $|w_i| > 1$.

Oppgave 2c. Ved algebraens fundamentalteorem kan $P(z)$ skrives som

$$P(z) = (z - w_1)(z - w_2) = z^2 - z(w_1 + w_2) + w_1 w_2.$$

Det betyr at $p = -w_1 - w_2$ og $q = w_1 w_2$. Holder derfor å bestemme w_1 og w_2. Løser vi ligningssystemet $w_1 - w_2 = 292$ og $w_1 + w_2 = 280$ får vi at $w_1 = 286$ og $w_2 = 6$. Dette betyr at $p = -292$ og $q = 1716$. Anta nå at $|z| \leq 1$. Ved å bruke trekantulikheten får vi

$$|P(z)| = |z^2 - 292z + 1716| \leq |z|^2 + 292|z| + 1716 \leq 1 + 292 + 1716 = 2009.$$

Oppgave 3. Røttene til polynomet $z^{2n} - 1$ er gitt som $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, der $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. De eneste reelle røttene forekommer når $k = 0$ eller $k = n$, i hvilket tilfelle $z_0 = 1$ og $z_n = -1$. De resterende røttene $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_{n+1}, \ldots z_{2n-1}$ har en ikke-null imaginærdel slik at vi kan anta at hvis $1 \leq k \leq n-1$, da finnes det en $n+1 \leq r \leq 2n-1$ slik at $\overline{z_k} = z_r$. Ved algebraens fundamentalteorem betyr dette at

$$\begin{aligned}
z^{2n} - 1 &= (z - z_0)(z - z_n) \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)(z - \overline{z_k}) \\
&= (z-1)(z+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2(z_k + \overline{z_k}) + z_k \cdot \overline{z_k}\right) \\
&= (z-1)(z+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z\mathrm{Re}(z_k) + |z_k|^2\right) \\
&= (z-1)(z+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)
\end{aligned}$$

siden $|z_k| = 1$ og $\mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\frac{k\pi}{n}$. For å vise det siste uttrykket, legg merke til at

$$\frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2(n-1)}$$

ved å bruke polynomdivisjon eller ved å finne summen til høyresiden som er en geometrisk rekke. Dette betyr at

$$1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2(n-1)} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

Velger vi $z = 1$ får vi

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\right) \\ &= 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

Siden $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$ for $k = 1, 2, \ldots, n-1$ får vi reelle verdier når vi tar kvadratroten slik at

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Oppgave 4. La $z = e^{i\frac{\pi}{11}}$. Da kan vi omformulere oppgaven til å regne ut

$$\mathrm{Im}\left(z\right) + \mathrm{Im}\left(z^3\right) + \mathrm{Im}\left(z^5\right) + \mathrm{Im}\left(z^7\right) + \mathrm{Im}\left(z^9\right) = \mathrm{Im}(z + z^3 + \ldots + z^9).$$

I vår tilfelle er det lettere å regne ut $z + z^3 + \ldots + z^9$ først og finne imaginærdelen etterpå.

$$z + z^3 + \ldots + z^9 = \frac{z(1 - z^{10})}{1 - z^2} = \frac{z - z^{11}}{1 - z^2}.$$

Legg merke til at $z^{11} = e^{i\pi} = -1$ slik at vi får

$$z + z^3 + \ldots + z^9 = \frac{1 + z}{1 - z^2} = \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - \overline{z}}{(1 - z)(1 - \overline{z})} = \frac{1 - \overline{z}}{z^2 - 2z\mathrm{Re}(z) + |z|^2}.$$

Da er

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1 - \overline{z}}{z^2 - 2z\mathrm{Re}(z) + |z|^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{11}}\right) = \frac{-\sin\frac{\pi}{11}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{11}}.$$

Oppgave 5. Dette stemmer ikke hvis $a \in \mathbb{C}$. Det kom flere gode forslag på hvordan man kan lage definere en relasjon for $a, b \in \mathbb{C}$ slik at man kan snakke om at $a < b$. Et forslag var å studere $|a|$ istedenfor a for da ville vi få reelle tall og kunne bruke egenskapen til $\mathbb{R}$. Et annet forslag var å kun definere $a < b$ når de komplekse tallene a og b lå på en linje. En original ide fra noen var å inndele det komplekse planet inn i fire regioner og definere positivitet og negativitet utifra disse regionene. Hukommelsen min sier meg at det var flere andre gode forslag, men dette er de jeg husker best akkurat nå. Send meg en e-post hvis forslaget ditt ikke er med her.

Oppgave 6. Vi løser oppgaven med komplekse tall (Tegn en figur). Uten tap av generalitet kan man anta at palmetreet og dødningshodet er punktene p og d i det komplekse planet, henholdsvis. Graven er da plassert i punktet $a + bi$. Linjen mellom graven og palmetreet er $p - a - bi$ og linjen mellom graven og dødsningshodet er $d - a - bi$. Det røde flagget er da plassert i punktet $i \cdot (p - a - bi) = b + (p - a)i$ og det blåe flagget er plassert i punktet $(-i) \cdot (d - a - bi) = -b + (a - d)i$. Midtpunktet mellom flaggene er $\frac{1}{2}(b + (p - a)i - b + (a - d)i) = \frac{1}{2}(p - d)i$. Dette betyr at skatten ligger i punktet $\frac{1}{2}(p - d)i$ som ikke involverer graven, dvs. ikke involverer a og b. Dette betyr at for å finne skatten kan man gjøre slik: Start ved palmetreet og gå mot dødningshodet. Stans halvveis og snu deg mot venstre og gå like stor avstand som før. Der finner du skatten.