UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Torsdag 8. jan. 2004. Kontinuasjonseksamen.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av to deler. Den ene delen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å svare feil. Den andre delen av oppgavesettet består av 7 delspørsmål som teller 10 poeng hver. I denne delen må du grunngi svarene dine; ubegrunnede svar vil få 0 poeng selv om de er riktige. Maksimalt oppnåelig poengsum på hele settet er 100 poeng.

Del 1

1. Integralet $\int xe^{x^2}\,dx$ er lik:
☐ $\frac{x^2}{2}e^{x^2} + C$
☐ $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$
☐ $e^{x^2} + C$
☐ $xe^{x^2} - e^{x^2} + C$
☐ $e^{x^2} + e^{x^2}2x^2 + C$

2. Integralet $\int \frac{x-7}{(x+1)(x-3)}\,dx$ er lik:
☐ $3\ln(x+1) - 2\ln(x-3) + C$
☐ $\frac{\frac{x^2}{2}-7x}{(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-3x)} + C$
☐ $2\ln(x+1) - \ln(x-3) + C$
☐ $\frac{\frac{x^2}{2}-7x}{\ln(x+1)\ln(x-3)} + C$
☐ $\ln(x+1) + 2\ln(x-3) + C$

(Fortsettes side 2.)

3. Når vi substituerer $u = \ln x$ i integralet $\int_1^e \sin(\ln x)\, dx$, får vi:
□ $\int_0^1 \sin u \, du$
□ $\int_1^e \sin u \, e^u \, du$
□ $\int_0^1 \sin u \, e^u \, du$
□ $\int_0^1 \sin u \, \frac{1}{u} \, du$
□ $\int_1^e \sin u \, du$

4. Når funksjonen $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, dreies en gang om y-aksen, vil volumet til omdreiningslegemet være gitt ved:
□ $\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$
□ $\int_0^\pi \sin x \, dx$
□ $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx$
□ $\int_0^\pi \frac{4\pi}{3} \sin^3 x \, dx$
□ $2\pi \int_0^\pi x \ \sin x \, dx$

5. Det uegentlige integralet $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} \, dx$:
□ Divergerer.
□ Konvergerer og er lik 1.
□ Konvergerer og er lik e.
□ Konvergerer og er lik e^2.
□ Konvergerer og er lik 0.

6. Gradienten til funksjonen $f(x, y, z) = x + 2y^2 e^{-z}$ er:
□ $1 + 4ye^{-z} - 2y^2 e^{-z}$
□ $(1 + 2y2e^{-z}, x + 4ye^{-z}, x - 2y^2 e^{-z})$
□ $(1, 4ye^{-z}, -2y^2 e^{-z})$
□ $(1, 4ye^{-z} - 2y^2 e^{-z}, 2y^2 e^{-z})$
□ $(1, x + 4ye^{-z}, x - 4y^2 e^{-z})$

7. Hvis $f(x, y) = x \sin(xy)$, $\mathbf{a} = (2, 0)$, $\mathbf{r} = (3, -1)$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ lik:
□ -1
□ 0
□ -4
□ 3
□ $\frac{1}{2}$

8. I hvilken retning vokser $f(x, y) = x^2 y$ raskest når du står i punktet $(2, -1)$:
□ $(-4, 4)$
□ $(4, 4)$
□ $(2, 4)$
□ $(0, 4)$
□ $(4, -1)$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ er lik:
□ ∞
□ 2
□ Grensevedien eksisterer ikke.
□ 1
□ 0

(Fortsettes side 3.)

10. Hvis $f(u,v) = 3uv^2$, $g(x,y) = \sin(xy^2)$, $h(x,y) = 2xy$ og $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$, så er $\frac{\partial k}{\partial x}$ lik:
☐ $12x^2y^4\cos(xy^2)$
☐ $24x^3y^5\cos(xy^2) + 48x^2y^3\sin(xy^2)$
☐ $12x^2y^2\cos(xy^2) + 24xy^2\sin(xy^2)$
☐ $24xy^2\sin(xy^2)$
☐ $12x^2y^4\cos(xy^2) + 24xy^2\sin(xy^2)$

Del 2

Oppgave 1.

a) Finn de første- og annenordens partiellderiverte til funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

b) Vis at $(1, -\frac{1}{2})$ er et stasjonært punkt for f. Avgjør om punktet er et lokalt minimum, et lokalt maksimum eller et sadelpunkt for f.

Oppgave 2.

Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $z = 8 - 8i\sqrt{3}$.

Oppgave 3.

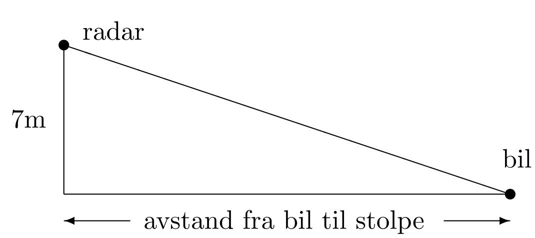
a) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1)}$$

b) Løs integralet $\int \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,dx$.

Oppgave 4.

En radar er plassert i en stolpe 7 meter over bakken. En bil nærmer seg stolpen. I det øyeblikket avstanden fra bilen til stolpen er 24 meter, viser radaren at avstanden fra bilen til radaren avtar med 30 meter per sekund. Hvor fort kjører bilen?



(Fortsettes side 4.)

Oppgave 5.

I denne oppgaven er $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ en funksjon. Alt vi vet om f er at den er kontimuerlig og at $f(0) = f(1)$.

Anta at N er et naturlig tall. Vis først at

$$\left(f(0) - f(\frac{1}{N})\right) + \left(f(\frac{1}{N}) - f(\frac{2}{N})\right) + \cdots + \left(f(\frac{N-1}{N}) - f(1)\right) = 0$$

Bruk dette til å vise at dersom ikke alle leddene i summen er lik null, må det finnes to ledd med motsatte fortegn (med *leddene i summen* mener vi $f(0) - f(\frac{1}{N})$, $f(\frac{1}{N})) - f(\frac{2}{N})$, $\ldots$,$f(\frac{N-1}{N}) - f(1)$).

Vi lar nå $g : [0, 1 - \frac{1}{N}] \to \mathbf{R}$ være funksjonen definert ved $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{N})$. Forklar hvorfor det må finnes et punkt c slik at $g(c) = 0$. Forklar til slutt hvorfor vi nå har bevist følgende teorem:

Ampères teorem: Anta at $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at $f(0) = f(1)$. For hvert naturlige tall N finnes det punkter c, d i $[0,1]$ slik at $d - c = \frac{1}{N}$ og $f(c) = f(d)$.

SLUTT