n-tupler

Et n-tuppel er en "liste" av n tall

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Eksempler:

$\vec{a} = (-3, 4, \sqrt{2}, \pi, e^2)$ er et 5-tuppel

$\vec{b} = (-100, 3, 0, \sqrt{3})$ —"— 4-tuppel

Regneoperasjoner for n-tupler: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Addisjon: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

Subtraksjon: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$

Multiplikasjon med skalar: c er et tall:

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ (et tall).

Eksempel: Du har en butikk og $p_1, p_2, \ldots, p_n$ er pris på varene før moms: $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Momstuppel: $\vec{m} = 0.25\vec{p} = (0.25p_1, 0.25p_2, \ldots, 0.25p_n)$

Pris etter moms: $\vec{q} = \vec{p} + \vec{m} = (\underbrace{1.25p_1}, 1.25p_2, \ldots, 1.25p_n)$

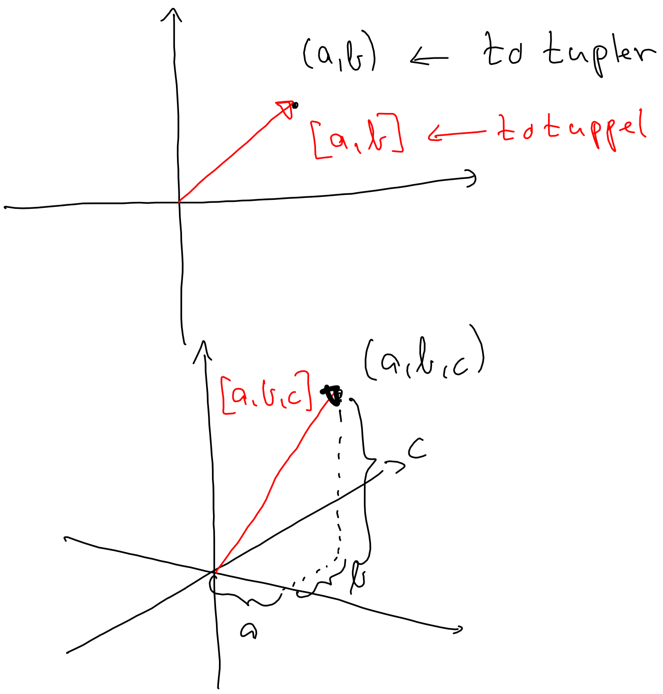
$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ antall av hver varetype.

Total utsalgspris: $\vec{a} \cdot \vec{q} = a_1(1.25p_1) + a_2(1.25p_2) + \ldots$

$\mathbb{R}^n$: er samlingen av alle reelle n-tupler: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n$: ———— " ———— komplekse n-tupler $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$
$z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Vi har truffet 2- og 3-tupler før:

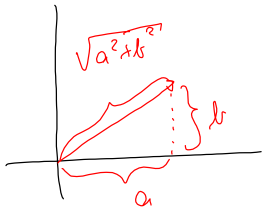


Vi skal ofte tenke på to-tupler som punkter eller vektorer i planet, men bruke notasjonen (a,b) uansett.

Tre tupler er ofte punkter eller vektorer i rommet. Uansett bruker vi notasjonen (a,b,c)

Geometri for n-tupler

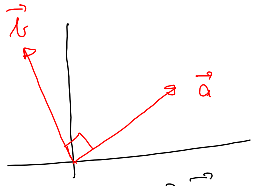
Lengde av n-tuppel: 2-dim: $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$



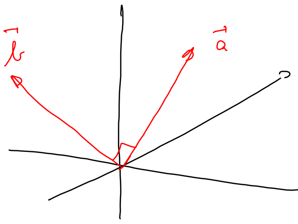
3-dim: $|(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Vi definerer lengden eller normen til et n-tuppel
$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ved: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Stå normalt på hverandre:



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

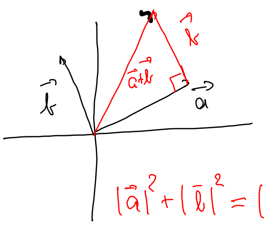
Definisjonen: To n-tupler $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ står normalt på hverandre dersom $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Viktig sammenheng: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$
$= |\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ (fordi $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$)

Pythagoras' teorem i $\mathbb{R}^n$: Anta at $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ står normalt på hverandre. Da er

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$



$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2$

Bevis: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{0} + \vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 + 0 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

okt 28-13:42