Plenum 23-11

1.6: 1, 4, 6, 10, 11, 12

1.7: 1, 3, 4, 8, 10

1.8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 20

a)

1.6: 4.) a) $\dim(A) = 8\times 6$, $\dim(B) = 6\times 9$.

$\dim(AB) = 8\times 9$

$8\times \cancel{6} \cdot \cancel{6}\times 9$

b) $\dim(A) = 4\times 3$, $\dim(AB) = 4\times 5$

$$\underbrace{(4\times \cancel{3})}_{\dim(A)} \cdot \underbrace{(\cancel{3}\times 5)}_{\dim B} = \underbrace{4\times 5}_{\dim(AB)}$$

$\dim(B) = \underline{3\times 5}$

c) $\dim(AB) = 5\times 7$.

$$\underbrace{5\times y}_{\dim A} \cdot \underbrace{y\times 7}_{\dim B} = \underbrace{5\times 7}_{\dim(AB)}$$

B har 7 <u>kolonner</u>/søyler.

6.) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 & 0+4 \\ 0+6 & 0+8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 & 0+4 \\ 0+6 & 0+8 \end{bmatrix}$

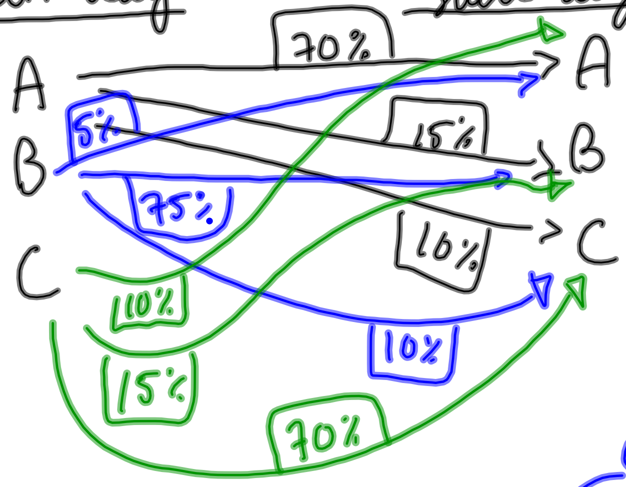
$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$2\times\cancel{2} \cdot \cancel{2}\times 2$
$= 2\times 2$

$AB = AC$, selv om $B \neq C$

$AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12.) Start dag — slutt dag barn



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

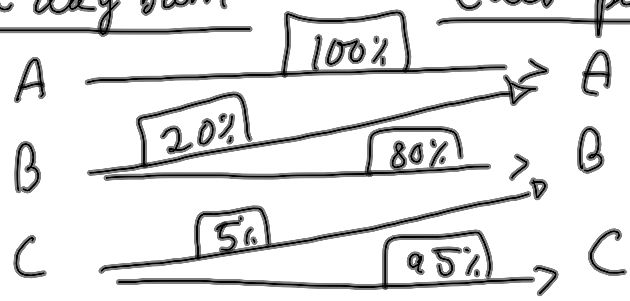
a)

$$M = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,1 \\ 0,15 & 0,75 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

se på piler inn i A

se på piler inn i B

b) Slutt dag barn — Etter personale



$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix}$$

c) $K = NM = \begin{bmatrix} 0{,}73 & 0{,}2 & 0{,}13 \\ 0{,}125 & 0{,}605 & 0{,}155 \\ 0{,}095 & 0{,}095 & 0{,}665 \end{bmatrix}$

Anta $\vec{u} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$

Fordeling etter personale $= \vec{w} = N\vec{v} \overset{a)}{=} N(M\vec{u})$

$\overset{b)}{=} (NM)\vec{u} = K \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 258 \\ 268{,}5 \\ 313{,}5 \end{bmatrix}$

Set. 1.6.2 i)

d) Fordeling etter pers. dag 2 $= (NM)\vec{w} = \begin{bmatrix} 282{,}8 \\ 243{,}3 \\ 258{,}5 \end{bmatrix}$

1.7: 3.) $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-7z & 3y-7w \\ x-2z & y-2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x-7z=1 \\ x-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y-7w=0 \\ y-2w=1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 2z$

$3(2z)-7z=1$

$-z=1$

$\underline{z=-1}$

$\underline{x=2(-1)=-2}$

$\Downarrow$

$y=1+2w$

$3(1+2w)-7w=0$

$-w=-3$

$w=3$

$\Downarrow$

$y=1+2\cdot 3=\underline{7}$

En kandidat for A^{-1} er

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Må sjekke om $XA = I_2$:

$$XA = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Så A er inverterbar med invers

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Def: A er inverterbar (hvis og bare) hvis det finnes en matrise X s.a.

$AX = I_2$ ok.

$XA = I_2$ Må sjekke!

8.) A, B inverterbare $\Rightarrow ((AB)^T)^{-1} = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

$(\dim A = \dim B = n \times n)$ $\boxed{\text{Vis!}}$

Merk at AB er inverterbar fra Set. 1.7.4. ii.

Da er $(AB)^T$ inverterbar fra Set. 1.7.4 iii.

Dessuten:

$$((AB)^T)^{-1} \underset{\text{Set. 1.7.4 iii}}{=} ((AB)^{-1})^T \underset{\text{Set. 1.7.4 ii}}{=} (B^{-1}A^{-1})^T \underset{\text{Set. 1.6.2 vi}}{=} (A^{-1})^T (B^{-1})^T$$

10.) a) <u>Vis:</u> $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er inverterbar $\Longleftrightarrow$

$ad - bc \neq 0$ og $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$: Anta at A er inverterbar. Den eneste matrisen som oppfyller $AX = I_2$ og $XA = I_2$ er $X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Denne er kun definert når $ad - bc \neq 0$. Så siden A er inverterbar må $ad - bc \neq 0$. Dermed er $ad - bc \neq 0$ og

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$\Leftarrow$: Anta at $ad - bc \neq 0$. Da fins det en løsning av $XA = I_2$ og $AX = I_2$, og den er

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$ Dette betyr

at A er invertibel med $A^{-1} = X$. $\boxtimes$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$(2 \cdot 3 - (-5)(-1) \neq 0)$

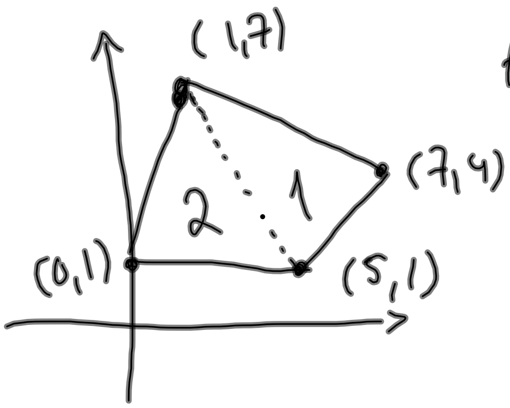
$$A^{-1} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bruk formel for A^{-1}: Gjør matrise-multiplik.

$$I_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 19 \\ 7 \end{bmatrix}}$$

1.8: 4.) $(0,1), (5,1), (1,7)$ og $(7,4)$. Areal?



$$A_{firkant} = A_1 + A_2$$

$\Delta 1$ har hjørner

$\vec{c}_1 = (1,7)$, $\vec{d}_1 = (7,4)$, $\vec{e}_1 = (5,1)$.

$$\vec{a}_1 = \vec{d}_1 - \vec{c}_1 = (6,-3)$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 - \vec{c}_1 = (4,-6)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{a}_1, \vec{b}_1) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} 24 = \underline{12}$$

$\Delta 2$: hjørner; $\vec{c}_2 = (0,1)$, $\vec{d}_2 = (1,7)$, $\vec{e}_2 = (5,1)$.

$$\vec{a}_2 = \vec{d}_2 - \vec{c}_2 = (1,6)$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - \vec{c}_2 = (5,0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{a}_2, \vec{b}_2) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \underline{15}$$

Så: $A_{firkant} = A_1 + A_2 = 12 + 15 = \underline{\underline{27}}$

9.) Anta $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

a) <u>Vis</u>: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ har løsn.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Systemet kan skrives:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$\det A \neq 0$ (antagelse) $\underset{\text{Oppg. 1.7.10}}{\Longrightarrow}$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I_2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ -a_2 c_1 + a_1 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{\det A}, \quad y = \frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{\det A}$$

som er nøyaktig uttrykkene over (fra def. av 2×2 determinant)

b) Hva hvis $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

Dvs. $a_1 b_2 = a_2 b_1$ (siden $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$)

$\Downarrow$

Vektorene (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er enten parallelle eller samme vektor.

Så linjene

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \left(y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} x\right)$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

er enten parallelle eller sammenfallende (like) $\Rightarrow$ Ligningssytemet har enten ingen (parallelle) eller uendelig mange (like) løsninger.

20.) <u>Vis</u>: 2×2 matrise A er inverterbar $\iff$ $\det A \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$: Anta at A er inverterbar. Da er $ad-bc \neq 0$ fra oppg. 1.7.10. Men det betyr at $\det A = ad-bc \neq 0$.

$\Leftarrow$: Anta motsatt at $\det A \neq 0$. Da er $ad-bc = \det A \neq 0$. Fra oppg. 1.7.10 er da A inverterbar. ⊠

17.) a) Anta at f.eks. $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er like.
Hvis to andre er like; bytt navn.
Det er derfor nok å vise at $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ når $\vec{a} = \vec{b}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \overset{\vec{a}=\vec{b}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(\cancel{a_2 c_3} - \cancel{a_3 c_2}) - a_2(\cancel{a_1 c_3} - \cancel{a_3 c_1}) + a_3(\cancel{a_1 c_2} - \cancel{a_2 c_1}) = 0 \quad \blacksquare$$

b) $\det(s\vec{a} + t\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$

$$= \begin{vmatrix} sa_1 + td_1 & sa_2 + td_2 & sa_3 + td_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (sa_1 + td_1) \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - (sa_2 + td_2) \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (sa_3 + td_3) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \ldots$$