Kapittel 9

Seksjon 9.1

Oppgave 9.11.6

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \ln x(2\sqrt{x}) - \int \frac{1}{x} 2\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x} \ln - \int 2\sqrt{x}^{-1/2} dx \\
&= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.14

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^\pi 2\pi x \sin x dx = [-2\pi x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2\pi \cos x dx \\
&= 2\pi^2 + [2\pi \sin x]_0^\pi = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.21

Gjør vi substitusjonen $u = -x^2$ får vi først at $du = -2xdx$, og deretter

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u dx = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Bruker vi delvis integrasjon finner vi så

$$\begin{aligned}
\int x^n e^{-x^2} dx &= \int x^{n-1} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \int \frac{1}{2}(n-1) x^{n-2} e^{-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Vi får deretter

$$\begin{aligned}
\int x^5 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} + 2 \int x^3 e^{-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} + 2 \left(-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \\
&= -\left(\frac{1}{2} x^4 + x^2 + 1 \right) e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.23

a)

Vi har at $I_0 = \int_0^1 1dx = 1$. For $n = 1$ bruker vi substitusjonen $u = \arcsin x$ etterfulgt av delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \arcsin x dx = \int_0^{\pi/2} u \cos u du \\
&= [u \sin u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u = \pi/2 + [\cos u]_0^{\pi/2} \\
&= \pi/2 - 1.
\end{aligned}$$

b)

Vi bruker substitusjonen $u = \arcsin x$ etterfulgt av delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (\arcsin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} u^n \cos u du \\
&= [u^n \sin u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n u^{n-1} \sin u \\
&= (\pi/2)^n - n\left(\left[-u^{n-1}\cos u\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)u^{n-2}\cos u du \right) \\
&= (\pi/2)^n - n(n-1)\int_0^{\pi/2} u^{n-2}\cos u du = (\pi/2)^n - n(n-1)I_{n-2}.
\end{aligned}$$

c)

Vi får at $I_3 = (\pi/2)^3 - 6I_1 = (\pi/2)^3 - 6(\pi/2 - 1) = (\pi/2)^3 - 3\pi + 6$.

Seksjon 9.2

Oppgave 9.2.4

Med substitusjonen $x = 2 \sin u$ får vi først $dx = 2 \cos u du$, og dermed

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 u} 2 \cos u du \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) du \\
&= 2\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\pi/2} = \pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.2.15

Vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}dx - \frac{1}{2}\int_4^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= [\arcsin u]_0^{\sqrt{3}/2} + \left[\sqrt{u}\right]_1^4 \\
&= \frac{\pi}{3} + 2 - 1 = \frac{\pi}{3} + 1,
\end{aligned}$$

der vi i det første integralet gjorde substitusjonen $u = 2x$, i det andre integralet substitusjonen $u = 4 - x^2$.

Oppgave 9.2.23

Vd hjelp av substitusjonen $u = \arcsin x$ blir volumet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \pi(\arcsin x)^2 dx &= \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \sqrt{1-x^2}du = \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \sqrt{1-sin^2 u}du \\
&= \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \cos u du = \left[\pi u^2 \sin u\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\pi u \sin u du \\
&= \frac{\pi^3}{4} + [2\pi u \cos u]_0^{\pi/2} du - \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos u du \\
&= \frac{\pi^3}{4} - [2\pi \sin u]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.2.25

Vi setter $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

a)

Vi har at $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \pi/4$, og

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} x dx \\
&= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{du}{u} \\
&= [\ln u]_{\sqrt{2}/2}^1 = -\ln(2^{-1/2}) = \frac{\ln 2}{2},
\end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonen $u = \cos x$.

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\tan^{n+2} x &= \tan^n x \tan^2 x = \tan^n x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \tan^n x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Vi får derfor at

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \\
&= \int_0^1 u^n du - I_n = \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} \right]_0^1 - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.
\end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonen $u = \tan x$.

c)

Setter vi inn $n = 0$ i den gitte identiteten får vi at $I_1 = \frac{\ln 2}{2}$, som vi har bevist er sant i a). Anta så at vi har vist at formelen er riktig for n. Vi skal vise at den også er riktig for $n+1$. Vi bruker b) og får

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - I_{2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+2} - \frac{(-1)^n}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\
&= (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} + \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} \right) \right],
\end{aligned}$$

som beviser at formelen er riktig for $n+2$ også. Det følger ved induksjon at formelen er riktig for alle n.

d)

For en verdi $y \in (0, \pi/4)$ har vi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx &= \int_0^y \tan^n x dx + \int_y^{\pi/4} \tan^n x dx \leq \int_0^y \tan^n y dx + \int_y^{\pi/4} dx \\
&= y \tan^n y + (\pi/4 - y) \leq \frac{\pi}{4} \tan^n y + (\pi/4 - y),
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\tan y < 1$. Hvis vi først velger y så nær $\pi/4$ at $\pi/4 - y < \frac{\epsilon}{2}$, og deretter n så stor at $\frac{\pi}{4}\tan^n y < \frac{\epsilon}{2}$, så ser vi at $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx < \epsilon$. Det følger at $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx = 0$, siden ϵ var vilkårlig valgt. Dermed må leddene i c) kansellere hverandre, slik at

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n}.$$

Oppgave 9.2.28

a)

Vi får

$$\begin{aligned}
\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt &= [tg(t)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} tg'(t)dt \\
&= f(b)g(f(b)) - f(a)g(f(a)) - \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

der vi først gjorde delvis integrasjon, og deretter substitusjonen $x = g(t)$ (som gir $t = f(x)$), som vi kan gjøre siden g er monoton.

b)

Med $g(t) = \arcsin\sqrt{t}$ har vi at $f(x) = \sin^2 x$, og i det gitte integralet er $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$. f er kontinuerlig og strengt monoton, og bruker vi a) får vi at integralet blir

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \sin(2x))\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Seksjon 9.3

Oppgave 9.3.2

a)

Vi skriver

$$\frac{5x+5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)},$$

og ser at vi må løse likningene

$$\begin{aligned}
A + B &= 5 \\
3A - 2B &= 5.
\end{aligned}$$

Det er raskt å se at eneste løsning her er $A = 3, B = 2$, slik at delbrøksoppspalting gir

$$\int \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}\right) dx = 3\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C.$$

c)

Vi kan faktorisere nevneren som $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$. og vi skriver

$$\frac{4x+2}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A + 2B}{(x+2)(x-4)},$$

og ser at vi må løse likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ -4A + 2B &= 2. \end{aligned}$$

Det er raskt å se at eneste løsning her er $A = 1, B = 3$, slik at delbrøksoppspalting gir

$$\int \frac{4x+2}{(x+2)(x-4)}dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-4}\right) dx = \ln|x+2| + 3\ln|x-4| + C.$$

Oppgave 9.3.6

a)

Polynomidivisjon gir først at

$$\begin{aligned} \frac{x^5+4x^4+2}{x^2+x+1} &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3x+1}{x^2+x+1} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2+x+1} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}, \end{aligned}$$

der vi har "lurt inn" et multiplum av den deriverte av nevneren (som blir $2x+1$) i telleren, splittet opp brøken i to, og skrevet om nevneren (det er raskt å sjekke at nevneren ikke har reelle røtter). De fire første leddene her er greie å integrere. For det neste leddet kan vi gjøre substitusjonen $u = x^2+x+1$, og får at integralet blir $\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)$. I det siste leddet kan vi gjøre substitusjonen $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, og får da $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$, og dermed

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}dx \\ &= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Hele integralet blir dermed

$$\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + x + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

d)

Vi ser raskt at nevneren kan skrives som $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Delbrøksoppspalting gir deretter

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x-3},$$

slik at integralet blir

$$-\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}|x-3| + C.$$

Oppgave 9.3.8

Delbrøksoppspalting gir her

$$\begin{aligned}
\frac{2x+2}{(x+2)^2(x-1)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+4C)x + (-2A-B+4C)}{(x+2)^2(x-1)},
\end{aligned}$$

og dette gir likningene

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
A + B + 4C &= 2 \\
-2A - B + 4C &= 2,
\end{aligned}$$

som har løsningene $A = -\frac{4}{9}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{4}{9}$. Dermed blir integralet

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{4}{9}\ln|x-1| + C.$$

Oppgave 9.3.18

Røttene til $x^4+1 = 0$ er $x = e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$. Parer vi sammen de konjugerte røttene finner vi

$$\begin{aligned}
(x - e^{\frac{\pi}{4}i})(x - e^{\frac{7\pi}{4}i}) &= x^2 - \sqrt{2}x + 1 \\
(x - e^{\frac{3\pi}{4}i})(x - e^{\frac{5\pi}{4}i}) &= x^2 + \sqrt{2}x + 1.
\end{aligned}$$

Delbrøksoppspaltingen tar nå formen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + (B+D)}{x^4+1},
\end{aligned}$$

som gir likningene

$$
\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D &= 0 \\
A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D &= 0 \\
B + D &= 1,
\end{aligned}
$$

som har løsninger $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, B = D = \frac{1}{2}, C = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Vi har altså

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x - \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x + \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 1} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 1},
\end{aligned}
$$

der vi har skrevet

$$
\begin{aligned}
x^2 - \sqrt{2}x + 1 &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\
x^2 + \sqrt{2}x + 1 &= \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Her kan vi integrere alle de fire leddene, slik at integralet blir

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right),
\end{aligned}
$$

der vi har gjort substitusjonene $u = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $u = \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Oppgave 9.3.25

a)

Siden polynomet har reelle koeffisienter, og $2 + i$ er en rot, så er også $2 - i$ en rot. Men da er polynomet delelig med $(z - (2 + i))(z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$. Utfører vi polynomdivisjonen $(z^3 - 11z + 20) : (z^2 - 4z + 5)$ får vi $z + 4$. Røttene er altså $2 + i, 2 - i$, og -4.

b)

Vi skriver

$$\begin{aligned}
\frac{10x+3}{x^3-11x+20} &= \frac{Ax+B}{x^2-4x+5}+\frac{C}{x+4} \\
&= \frac{(Ax+B)(x+4)+C(x^2-4x+5)}{x^3-11x+20} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(4A+B-4C)x+(4B+5C)}{x^3-11x+20},
\end{aligned}$$

som gir oss likningene

$$\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
4A+B-4C &= 10 \\
4B+5C &= 3,
\end{aligned}$$

som har løsninger $A=1, B=2, C=-1$. Integralet blir dermed

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{x+2}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x+4}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \int \frac{4}{(x-2)^2+1}dx - \int \frac{1}{x+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2)-\ln|x+4|+C.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.3.36

Vi har at $V=\int_0^1 \frac{\pi}{(1+x^2)^2}dx$. Her kan vi bruke formel (2) i boka, men la oss gå frem som om vi ikke husker denne, og i stedet bruke metoden som utleder (2). Delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} &= \int_0^1 1\times\frac{1}{1+u^2}du = \left[u\frac{1}{1+u^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2u^2}{(1+u^2)^2}du \\
&= \frac{1}{2}+2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} - 2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du.
\end{aligned}$$

Isolerer vi $\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du$ her ser vi at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u$. Dermed blir volumet $\pi\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$.

Seksjon 9.5

Oppgave 9.5.3

e)

Vi skal bevise denne på to måter. Først skal vi bruke sammenligningskriteriet. Ved opptegning av grafene ser vi at $e^x-1\le 2x$ på $[0,1]$, slik at $\frac{1}{e^x-1}\ge\frac{1}{2x}$.

Men

$$\int_0^1 \frac{1}{2x}dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\ln t\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2}\ln t = \infty,$$

slik at integralet divergerer. Den andre måten å vise dette på er ved å regne ut integralet direkte ved hjelp av substitusjonen $u = e^x - 1$, som gir $du = e^x dx$, eller $dx = \frac{du}{u+1}$. Vi får da

$$\begin{aligned}\int_0^1 &= \int_0^{e-1} \frac{1}{u(u+1)}du = \int_0^{e-1}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_t^{1-e} = \infty.\end{aligned}$$

Oppgave 9.5.4

a)

Arealet under grafen er gitt ved $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, som vi vet fra Setning 9.5.8 divergerer, slik at arealet er uendelig. Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\int_1^\infty \frac{\pi dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^t = \pi,$$

slik at volumet er endelig.

b)

Arealet under grafen er gitt ved

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = 2,$$

slik at arealet er endelig. Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\int_0^1 \frac{\pi dx}{x} = \lim_{t\to 0}\left[\pi \ln x\right]_t^1 = \infty,$$

slik at volumet er uendelig.

Oppgave 9.5.5

Anta først at $p \leq 1$. Bruker vi grensesammenligningskriteriet med $g(x) = \frac{1}{x^p}$, ser vi umiddelbart at integralet divergerer, siden $\frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \ln x \to \infty$ når $x \to \infty$. For $p > 1$ kan vi finne en $\epsilon > 0$ slik at også $p - \epsilon > 1$. Vi bruker nå grensesammenligningskriteriet med $g(x) = \frac{1}{x^{p-\epsilon}}$ (som gir et konvergent integral) og får $\frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-\epsilon}}} = \frac{\ln x}{x^\epsilon}$. Bruker vi L'Hôpitals regel på den siste får vi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\epsilon x^{\epsilon-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\epsilon x^\epsilon} = 0,$$

slik at integralet konvergerer.

Oppgave 9.5.12

Problemet i oppgaven er at integranden er på formen $\infty - \infty$. Vi kan skrive om integranden til

$$\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} = \frac{x(x+1) - k(2x^2+2k)}{(2x^2+2k)(x+1)} = \frac{(1-2k)x^2 + x - 2k^2}{(2x^2+k)(x+1)}.$$

Hvis $1 - 2k \neq 0$, d.v.s. $k \neq \frac{1}{2}$, kan vi bruke grensesammenligningskriteriet med $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ til å slutte at integralet divergerer, siden da er det leddet i teller med høyest grad et andregradsledd.

Anta så at $k = \frac{1}{2}$. Vi kan da skrive integralet som

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2x+2} \right) dx &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln(2x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2} \right) \right]_1^t \\
&= \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \ln \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$