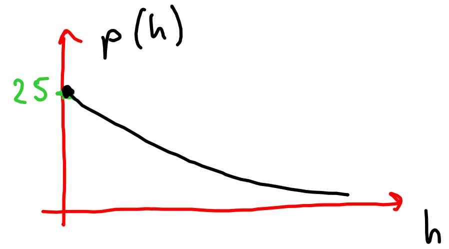
Omvendte funksjoner (7.4) (Inverse funksjoner)

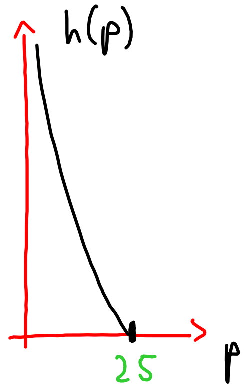
eks. På planeten Solaris er trykket p som funksjon av høyden h over havet gitt ved

$$p(h) = \frac{100}{4+h}$$



Høyden h som funksjon av trykket p er da gitt ved

$$p\cdot(4+h) = 100$$
$$4p + ph = 100$$
$$ph = 100 - 4p$$
$$h(p) = \frac{100-4p}{p} = \frac{100}{p} - 4$$



Dette svarer til at funksjonene

$$f(x) = \frac{100}{4+x} \qquad D_f = [0, \infty) \qquad V_f = (0, 25]$$

og

$$g(x) = \frac{100}{x} - 4 \qquad D_g = (0, 25] \qquad V_g = [0, \infty)$$

er omvendte av hverandre. Vi har

$$g(f(x)) = \frac{100}{f(x)} - 4 = \frac{100}{\left(\frac{100}{4+x}\right)} - 4$$

$$= \frac{100\cdot(4+x)}{100} - 4 = \frac{400+100x}{100} - 4 = x$$

Tilsvarende fås $f(g(x)) = x$. □

Definisjon: Omvendte funksjoner

Funksjonene f og g kalles omvendte av hverandre hvis

$$g(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_f \qquad D_g = V_f$$
$$f(g(x)) = x \quad \text{— " —} \quad x \in D_g \qquad V_g = D_f$$

Vi skriver $g(x) = f^{-1}(x)$ og $f(x) = g^{-1}(x)$.

Grafene blir speilbilder om diagonalen $y = x$. For at f^{-1} skal finnes, må det til hver $b \in V_f$ være kun en $a \in D_f$ slik at $f(a) = b$. Funksjonen f kalles da injektiv eller en-entydig.

Teorem (7.4.5 og 7.4.6)

Hvis D_f er et intervall og f er kontinuerlig og strengt monoton (strengt voksende eller strengt avtakende), så gjelder

(i) Den omvendte funksjonen f^{-1} er også kontinuerlig

(ii) Hvis f er deriverbar i x og $f'(x) \neq 0$, så er f^{-1} deriverbar i punktet $f(x)$, og

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bevis Se bok. Vi nøyer oss med et "fysikerbevis" for (ii): Vi har $f^{-1}(f(x)) = x$.

Vi deriverer begge sider, og bruker kjerneregelen:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

dvs.

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{hvis } f'(x) \neq 0 \quad \square$$

<u>eks.</u> Anta at f og g er omvendte funksjoner, og at

$$f(1) = 8 \quad , \quad g'(8) = 4$$

Finn $f'(1)$.

<u>Løsn.</u> Vi har $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

[tok $x=1$
Da er
$f(x) = 8$]

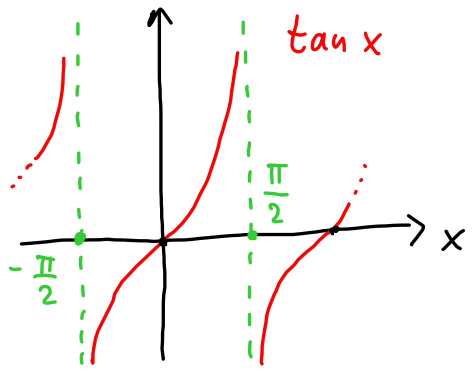
$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(1)}$$

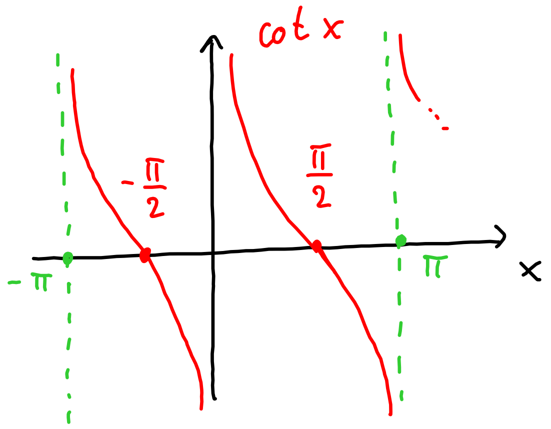
$$g'(8) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$4 = \frac{1}{f'(1)}$$, dvs. $f'(1) = \frac{1}{4}$

Tangens og cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$





$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

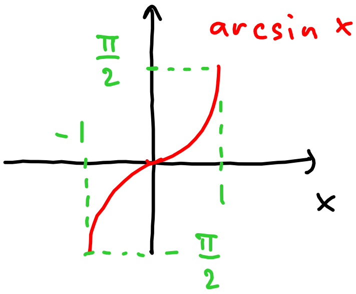
$$(\cot x)' = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$

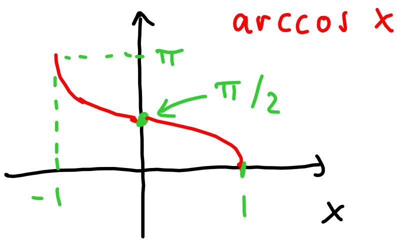
$\boxed{\text{Arcusfunksjonene (7.6)}}$

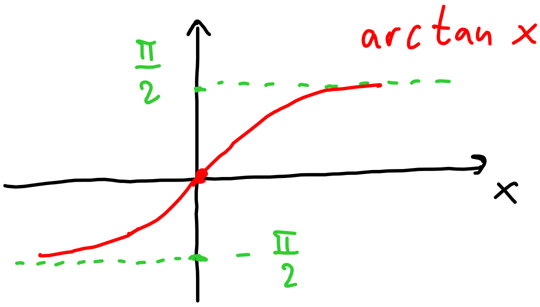
Vi velger områder der de trigonometriske funksjonene er en-entydige, og definerer omvendte funksjoner til dem der.

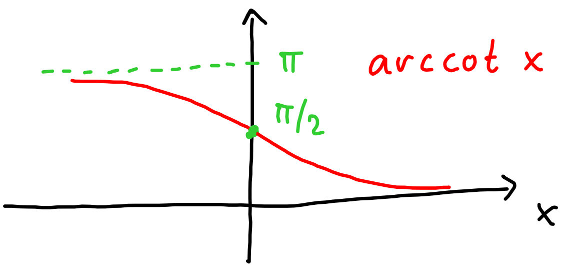


$$\arcsin x = (\text{den omvendte til } \sin x) = \underbrace{\sin^{-1} x}_{\text{farlig,}}$$

ikke lik $\dfrac{1}{\sin x}$







Deriverte av arcusfunksjonene

Bruker $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Vi ser på $\sin^{-1} x$. Formelen gir, med $f(x) = \sin x$:

$$\left(\sin^{-1}\right)'\left(\sin x\right) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Fordi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, og
$\cos x \geq 0$ for $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Innsetting av x for $\sin x$ gir $\left(\sin^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tilsvarende for de andre. Oversikt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\[2ex] (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} & (\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}}$$