Kapittel 6

Seksjon 6.1

Oppgave 6.1.9

Vi har at

$$\begin{aligned} D[x^2] &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Oppgave 6.1.10

Vi har at

$$\begin{aligned} D[\sqrt{x}] &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Oppgave 6.1.11

a)

Vi har at

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1|-|1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Det er klart at $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = 1$, og $\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1$, slik at grenseverdien ikke eksisterer.

b)

Vi har at

$$g'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)|1+h-1|-(1-1)|1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0,$$

slik at den deriverte i 1 eksisterer, og er lik 0.

Oppgave 6.1.13

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos h}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\cos h}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h^2(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\cos^2 h}{h^2(1+\cos h)}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin^2 h}{h^2}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+\cos h}\\
&= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

mens

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0.$$

Siden de ensidige grenseverdiene er forskjellige, så følger det at f ikke er deriverbar i 0.

Oppgave 6.1.14

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^kh^{n-k}-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^kh^{n-k}-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^kh^{n-k}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^kh^{n-k-1}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n-2}x^{n-2}h+\binom{n}{n-3}x^{n-3}h^2+\cdots\right)\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Vi har her brukt binomialformelen, at $\binom{n}{n-1}=n$, og at det bare er det første leddet som ikke inneholder en potens av h.

Oppgave 6.1.15

Vi har at

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{\cos h-1}{h}\\
&= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}+\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \cos x,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, og at

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{\cos h + 1} = 1 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Seksjon 6.2

Oppgave 6.2.4

$x = \tan x$ svarer til at $f(x) = x - \tan x = 0$. Vi har at $f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$.

Det er klart at intervallene på formen $[((n-1)/2)\pi, ((n+1)/2)\pi]$ svarer til intervaller med sentrum i $k\pi$ med lengde π. På slike intervaller antar $\tan x$ alle verdier mellom $-\infty$ og ∞, slik at f går mot $-\infty$ og ∞ i hver ende av intervallet. Det følger fra skjæringssetningen at f har minst ett nullpunkt, slik at det finnes minst et punkt der $x = \tan x$.

Videre har vi at $\cos^2(x) \geq 1$, slik at $f'(x) \leq 0$, og $f'(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = k\pi$.

- I det første intervallet (n=0), så er $x = 0$ et nullpunkt for f. Det er klart at det ikke kan finnes andre nullpunkter mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$, siden f er strengt avtagende på $[-\pi/2, 0)$, og på $(0, \pi/2]$.
- For andre n er $f(n\pi) = n\pi \neq 0$, og $\lim_{x\to((n-1)/2)\pi} = -\infty$, $\lim_{x\to((n+1)/2)\pi} = \infty$.
- Hvis $n > 0$ så er det klart at f ikke har noen nullpunkter på $[n\pi, ((n+1)/2)\pi)$, og har nøyaktig et nullpunkt på $[((n-1)/2)\pi, n\pi)$ (siden f er avtagende på hvert av intervallene).
- Hvis $n < 0$ så er det klart at f har nøyaktig et nullpunkt på $[n\pi, ((n+1)/2)\pi)$, og ikke har noen nullpunkter på $[((n-1)/2)\pi, n\pi)$.

I alle tilfellene $n = 0$, $n > 0$, $n < 0$, ser vi at f har nøkatig ett nullpunkt.

Oppgave 6.2.8

Sett $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $b = x$. Vi får først at $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Bruker vi middelverdisetningen får vi at det finnes en c mellom 0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{1}{1+c} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(1+x) - 0}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Vi har altså at $\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$, og resultatet følger ved å gange med x på begge sider.

Oppgave 6.2.10

Likningen $(1+x)^a \leq 1 + ax$ kan først skrives om til $(1+x)^a - 1 \leq ax$. Deler vi nå med x på begge sider vil det stå igjen $\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{(1+x)^a - 1}{x}$ på venstresiden. Bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = (1+x)^a$ på intervallet fra

0 til x får vi at $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^a-1}{x} = f'(c) = a(1+c)^{a-1}$ for en c i intervallet fra 0 til x.

Vi splitter nå det vi skal vise i to muligheter: For $x > 0$ slipper vi å snu ulikheten når vi deler med x, slik at vi her skal vise at $\frac{(1+x)^a-1}{x} = a(1+c)^{a-1} \leq a$, som er det samme som at $(1+c)^{a-1} \leq 1$, som er opplagt siden $1+c \geq 1$ og $a-1 \leq 0$.

For $-1 < x < 0$ må vi snu ulikheten når vi deler med x, slik at vi her skal vise at $\frac{(1+x)^a-1}{x} = a(1+c)^{a-1} \geq a$, som er det samme som at $(1+c)^{a-1} \geq 1$, som er opplagt siden $0 < 1+c \leq 1$ og $a-1 \leq 0$.

For $x = 0$ ser vi at vi faktisk har likhet i den gitte ulikheten, slik at den $(1+x)^a \leq 1+ax$ faktisk holder i alle tilfeller

Oppgave 6.2.12

Sett $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Deriverer vi finner vi at $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, og vi ser at $f'(x) \leq 1$ for alle x. Bruker vi middevlerdisetningen for x og y ser vi at

$$\left| \frac{\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq 1.$$

Ganger vi opp med $|x-y|$ på begge sider, så får vi det vi skal vise.

Oppgave 6.2.13

Bruker vi middelverdisetningen på intervallet (a,d) ser vi at det finnes en $c_1 \in (a,d)$ slik at $f'(c_1) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a} = 0$. Bruker vi middelverdisetningen på samme måte på intervallet (d,b) ser vi at det finnes en $c_2 \in (d,b)$ slik at $f'(c_2) = 0$. Bruker vi nå middelverdisetningen på (c_1, c_2) og funksjone $f'(x)$ får vi at det finnes en $c \in (c_1, c_2)$ slik at $f''(c) = \frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1} = 0$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 6.2.21

a)

Sett $f(x) = \ln(\ln x)$, og bruk middelverdisetningen på $a = n$ og $b = n+1$. Vi får først at $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, og så at det finnes en c mellom n og $n+1$ slik at

$$\frac{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)}{1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \frac{1}{c \ln c}$$

Vi har også at $f''(x) = \frac{-1-\ln x}{(x \ln x)^2}$, slik at $f''(x) < 0$ for $x > \frac{1}{e}$. Siden $n > 1$ så er altså $f'(x)$ avtagende på området vi ser på, slik at

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{c \ln c} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n},$$

som var det vi skulle vise.

b)

Bruker vi den venstre ulikheten fra a) får vi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \\ &> (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \cdots \\ &\quad +(\ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(n+1))) \\ &= \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 2) \to \infty, \end{aligned}$$

som viser at s_n ikke konvergerer.

c)

Fortsetter vi med ulikheten fra b) får vi

$$\begin{aligned} t_n &= s_n - \ln[\ln(n+1)] \\ &> \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 2) - \ln[\ln(n+1)] \\ &> -\ln(\ln 2), \end{aligned}$$

som er den ene ulikheten i det vi skal vise. Får å få den andre ulikheten bearbeider vi den høyre ulikheten fra a) på samme måte som i b):

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \\ &< \frac{1}{2\ln 2} + (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \cdots \\ &\quad + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \\ &= \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2). \end{aligned}$$

Fortsetter vi med ulikheten fra b) får vi

$$\begin{aligned} t_n &= s_n - \ln[\ln(n+1)] \\ &< \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) - \ln[\ln(n+1)] \\ &= \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2). \end{aligned}$$

Vi har nå vist at, for alle n,

$$-\ln(\ln 2) < t_n < -\ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &< \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} = 0, \end{aligned}$$

der vi har brukt venstre ulikhet i a). Dermed er følgen avtagende. Siden følgen også er nedad begrenset, så er den konvergent. Videre må da grenseverdien t oppfylle

$$-\ln(\ln 2) \le t \le -\ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Seksjon 6.3

Oppgave 6.3.3

e)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\frac{\cos 0}{1+\sin 0}} = e^1 = e.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.6

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2}\frac{e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.18

Det er klart at nevneren i uttrykket går mot 0, mens telleren går mot $1+q$. Eneste mulighet for at grenseverdien skal eksistere er da at $1+q=0$, eller $q=-1$. Da blir grenseverdien gitt ved

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\cos x}+px-1}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-(\sin x)e^{\cos x}+p}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}.$$

Det er klart at nevneren også i dette uttrykket går mot 0, og telleren går mot p. Skal grenseverdien eksistere må derfor $p=0$, og grenseverdien blir da gitt ved

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{-(\sin x)e^{\cos x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin^2 x-\cos x)e^{\cos x}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}} \\
&= \frac{(0-1)e^1}{1+1} = -\frac{1}{2}e.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.22

Vi har at $f(0)=\frac{1}{2}$, og at

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Siden $x^2 + \frac{1}{2}$ er kontinuerlig for negative x, så følger det at f er kontinuerlig i 0. Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos h}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-2\cos h - h^2}{2h^3} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\sin h - 2h}{6h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cos h - 2}{12h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\sin h}{12} = 0 \\
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0,
\end{aligned}$$

og det følger at f er deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

Seksjon 6.4

Oppgave 6.4.15

a)

g er definert der nevneren er $\neq 0$, det vil si der $\tan x \neq 0$, og der $\tan x$ er definert. Førstnevnte utelukker bare $x = k\pi$, mens sistnevnte utelukker $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Disse to til sammen svarer til alle punkter på formen $k\frac{\pi}{2}$, slik at $D_g = \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

b)

$g'(x) = \frac{\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$.

c)

Vi vet at $\sin x < x$ når $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Deler vi med $\cos x$ (som er positiv på det gitte intervallet) på begge sider får vi at

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{\cos x} < \frac{x}{\cos^2 x},$$

der vi i den siste overgangen har brukt at $0 < \cos x < 1$ på det gitte intervallet. Fra b) har vi videre at $g'(x)$ har samme fortegn som $\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}$, som da blir negativ, slik at g er avtagende på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En annen måte å vise dette på er ved først å observere at

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = g'(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$$

for en c mellom 0 og x, der vi har brukt middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = \tan x$. Siden $\cos x$ er avtagende på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ følger det at $\frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}$. Dermed er $\frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$, og ulikheten vi skal vise følger nå ved at vi ganger opp med x på begge sider.

e)

Det er klart at f er kontinuerlig utenom "skjøtepunktene" $x = 0, x = \pm\frac{\pi}{2}$. For $x = 0$ regner vi ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 = f(0),$$

som viser at f er kontinuerlig i 0. Når x går mot $\pm\frac{\pi}{2}$ så er det klart at $\tan x$ går mot ∞, slik at $\lim_{x\to\pm\pi/2} f(x) = 0 = f(0)$, slik at f er kontinuerlig i $\pm\frac{\pi}{2}$ også, og dermed er f kontinuerlig i hele $(-\pi, \pi)$.

f)

Den deriverte i 0 er

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{\tan h} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \sin h}{h \sin h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - h\sin h - \cos h}{h\cos h + \sin h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h\sin h}{h\cos h + \sin h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h - h\cos h}{-h\sin h + \cos h + \cos h} = \frac{0}{2} = 0,
\end{aligned}$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel to ganger. Dette viser at f er deriverbar i 0, og at $f'(0) = 0$. For $x = -\frac{\pi}{2}$ får vi

$$\begin{aligned}
f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-\frac{\pi}{2}+h}{\tan(-\frac{\pi}{2}+h)}}{h} \\
&= -\frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\tan(-\frac{\pi}{2}+h)} = -\frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(-\frac{\pi}{2}+h)}{h\sin(-\frac{\pi}{2}+h)} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(-\frac{\pi}{2}+h)}{h} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(-\frac{\pi}{2}+h)}{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

der vi igjen har brukt L'Hôpitals regel. Dette viser at f er deriverbar i $-\frac{\pi}{2}$, og at $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. På samme måte får vi for $x = \frac{\pi}{2}$ at

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\frac{\pi}{2}+h}{\tan(\frac{\pi}{2}+h)}}{h} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\tan(\frac{\pi}{2}+h)} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}{h\sin(\frac{\pi}{2}+h)} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}{h} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

som viser at f er deriverbar også i $\frac{\pi}{2}$, og at $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Seksjon 6.5

Oppgave 6.5.10

Vi regner først ut

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^h = 1,\end{aligned}$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel. Vi regner deretter ut

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty}(x^2(e^{1/x}-1)-x) = \lim_{x\to\infty} x(x(e^{1/x}-1)-1) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}(e^h-1)-1}{h}.\end{aligned}$$

Vi viste akkurat at $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^h-1)=1$, slik at vi her kan bruke L'Hôpitals regel. Vi får dermed

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}e^h-\frac{1}{h^2}(e^h-1)\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h-1)e^h+1}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{he^h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}e^h = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Derfor blir $y = x+\frac{1}{2}$ en asymptote for f.

Vi må også sjekke om $x=0$ er en asymptote, siden f ikke er definert for $x=0$. Vi regner ut

$$\lim_{x\to 0} x^2(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to 0} x^2e^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\frac{e^y}{y^2} = \infty,$$

der vi på det siste uttrykket brukte L'Hôpitals regel to ganger. Derfor er også $x=0$ en asymptote for f.