Løsningsforslag noen oppgaver

Fredrik Meyer

September 30, 2016

1 5.1.5G

Vi skal vise at funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ er kontinuerlig i punktet $x = 4$.

Så anta vi er gitt en $\epsilon > 0$. Vi må vise at om vi velger $\delta > 0$ liten nok så kan vi få funksjonsforskjellen $|f(x) - f(4)| < \epsilon$ når $|x - 4| < \delta$.

Målet er å begrense ulikheten, og uttrykke den kun som en funksjon av δ. Det vil si at vi har lyst å ha funksjonsforskjellen på venstre siden av ulikheten, og et uttrykk som bare avhenger av δ på høyresiden.

Vi har at

$$|f(x) - f(4)| = |\sqrt{x} \ - 2| = |\sqrt{x} - \sqrt{4}|.$$

Dette ligner litt på en kjent faktorisering. Vi har nemlig at

$$|(x - 4)| = |\sqrt{x} - \sqrt{4}||\sqrt{x} + \sqrt{4}| < \delta.$$

Stokker vi om, får vi at

$$|\sqrt{x} - 2| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + 2}.$$

Denne ulikheten er et steg nærmere det vi har lyst, nemlig en høyreside som kun avhenger av δ. Siden vi har lyst å finne en øvre begrensning for uttrykket, så lurer vi på maksimumsverdien til høyresiden er. Den oppnår maksimumsverdien når $\sqrt{x}+2$ er minst mulig. Hva er det minste $\sqrt{x}+2$ kan være? Siden vi vet at $|x-4| < \delta$, så er x i intervallet $(4-\delta, 4+\delta)$. Vi kan anta at $\delta < 1$ (siden det er vi som har kontroll på δ). Dermed er x i intervallet $(3, 5)$. Dermed er $\sqrt{x} + 2$ i intervallet $(\sqrt{3}+2, \sqrt{5}+2)$. Dette er circa $(3.73, 4.23)$. Siden det minste $\sqrt{x}+2$ kan være, er $\sqrt{3} + 2$, så kan vi skrive ulikheten

$$|f(x) - f(4)| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + 2} \ < \frac{\delta}{\sqrt{3} + 2}.$$

Dermed har vi en ulikhet som kun avhenger av δ på høyresiden. Dermed: om vi velger δ til å være minimumsverdien av 1 og $\epsilon/(\sqrt{3} + 2)$, så vil alltid $|f(x) - f(4)| < \epsilon$.

Dermed er $f(x) = \sqrt{x}$ kontinuerlig i $x = 4$.