Løsningsforslag til MAT 1100: Oblig 2, H-11

Oppgave 1: a) Dette er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og vi bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{1+u}-1}{2u} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+u)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) Vi har

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

Setter vi $u=\frac{1}{x}$, vil $u\to 0$ når $x\to\infty$, og vi får

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2} = -\frac{1}{2}$$

ifølge del a).

c) Vi skal følge oppskriften i seksjon 6.5 for å finne asymptoter på formen $y=ax+b$. Først finner vi a ved å regne ut

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Dette betyr at $a=1$. Vi må nå undersøke $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$, dvs.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x\right)$$

Ifølge del c) er denne grensen $-\frac{1}{2}$. Dermed er $b=-\frac{1}{2}$ og asymptoten er

$$y=ax+b=x-\frac{1}{2}$$

.

Oppgave 2: a) Siden $\arctan x$ og x er definert og kontinuerlig i alle punkter, er brøken $\frac{\arctan x}{x}$ kontinuerlig i alle punkter der $x\neq 0$ (setning 5.1.5). For å sjekke om f er kontinuerlig i 0, må vi undersøke om $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Det er tilfellet siden

$$\lim_{x\to 0}f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

b) Vi bruker definisjonen av den deriverte:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x(1+x^2)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)} = 0$$

Altså er f deriverbar i 0, og $f'(0)=0$.

c) Ved analysens fundamentalteorem er

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

og dette uttrykket er større enn 0 for alle x. Følgelig er F strengt voksende. Innfører vi ny variabel $u = -t$, ser vi at $du = -dt$ og

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\arctan t}{t}\, dt = \int_0^{x} \frac{\arctan(-u)}{-u}\,(-du) =$$

$$= -\int_0^{x} \frac{\arctan u}{u}\, du = -F(x)$$

der vi blant annet har brukt at $\arctan(-u) = -\arctan u$.

d) Siden $\arctan x$ er voksende og $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, har vi for $x > 1$:

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{\arctan t}{t}\, dt \geq \int_1^{x} \frac{\frac{\pi}{4}}{t}\, dt = \frac{\pi}{4} \ln x \to \infty$$

når $x \to \infty$. Følgelig vil $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

e) Siden både teller og nevner går mot ∞, kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

f) Ved analysens fundamentalteorem er $F'(x) = f(x)$. Dermed er

$$F''(x) = f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

g) Det holder å vise at $F''(x) \leq 0$ på $[0, \infty)$. Siden x^2 alltid er positiv, må vi da vise at $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x$. Bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $\arctan x$ over intervallet $[0, x]$, ser vi at

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1 + c^2}$$

for en $c \in (0, x)$. Dermed er

$$\arctan x = \frac{x}{1 + c^2} > \frac{x}{1 + x^2}$$

siden $x > 0$ og $c^2 < x^2$. Det betyr at $F''(x) < 0$ for alle $x > 0$, og følgelig er F konkav på $[0, \infty)$.