Plan: 1.5.11, 1.7.4, 1.7.8, 1.7.10, 1.8.9, 1.8.10, 1.8.17, 2.1.1

1.5.11 Smittsom sykdom, og tre typer mennesker, smitteutsatte, syke og immune.
Endring fra uke til uke er som følger:

1 uke $\longrightarrow$ 2 uke

smitteutsatt $\xrightarrow{94\%}$ smitteutsatt
smitteutsatt $\xrightarrow{5\%}$ syk
smitteutsatt $\xrightarrow{1\%}$ immun

syk $\xrightarrow{0\%}$ smitteutsatt
syk $\xrightarrow{20\%}$ syk
syk $\xrightarrow{80\%}$ immun

immun $\xrightarrow{1\%}$ smitteutsatt
immun $\xrightarrow{0\%}$ syk
immun $\xrightarrow{99\%}$ immune

La x_n = andel av befolkningen som er smitteutsatt i uke n.

y_n = —— " —— syke –"–

z_n = —— " —— immune –"–

a) Finn en matrise A slik at

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.94 & 0 & 0.01 \\ 0.05 & 0.20 & 0 \\ 0.01 & 0.8 & 0.99 \end{pmatrix} = A}}$$

b) $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_1 = ? = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \ldots$$

1.7.10 Vis at $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ er inverterbar hvis og bare hvis $\det A = ad - bc \neq 0$, og at $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bevis: La oss se på produktet:

$$A \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot d - b\cdot c & -a\cdot b + b\cdot a \\ c\cdot d - c\cdot d & -b\cdot c + a\cdot d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"$\Leftarrow$": Hvis $ad - bc \neq 0$, så er $A \cdot \frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$, så A er inverterbar

"$\Rightarrow$" Hvis A er inverterbar, så vil $\underbrace{A^{-1}A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} = (ad-bc)A^{-1}$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, og ikke alle d, b, c, a er 0, så $ad - bc \neq 0$.

(Enklere kontrapositivt, hvis $ad - bc = 0$ så må $a = b = c = d = 0$ så $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ som ikke er inverterbar)

b) Bruk formelen i a) til å finne A^{-1} når $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Bevis:

$\det A = 2\cdot 3 - (-5)\cdot(-1) = 1$

$\overset{a)}{\Rightarrow} A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$

(Løsning til 1.7.4: siden der er $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$)

c) Finn løsningene til systemet:

$$2x - 5y = 3$$
$$-x + 3y = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 10 \\ 3 + 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}$$

1.7.8 Dersom A og B er inverterbare matriser, vis at inversen til $(AB)^T$ er $(A^{-1})^T(B^{-1})^T$.

Bevis: Husk: ~~setning~~ 1.7.4 $(A^T)^{-1} \overset{1.}{=} (A^{-1})^T$, $(AB)^{-1} \overset{2.}{=} B^{-1}A^{-1}$

Setning 1.6.2: $(AB)^T \overset{3.}{=} B^T A^T$

$$\left((AB)^T\right)^{-1} \overset{1.}{=} \left((AB)^{-1}\right)^T \overset{2.}{=} \left(B^{-1}A^{-1}\right)^T$$

$$\overset{3.}{=} (A^{-1})^T (B^{-1})^T$$

1.8.9 a) Vis at ligningssystemet $\begin{pmatrix} 0\cdot x+0\cdot y=c_1 \\ 0\cdot x+0\cdot y=c_2 \end{pmatrix}$

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$ har løsningene

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$)

Bevis: $(*) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{= A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Fra 1.7.10 så er $A^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

Så $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} b_2\cdot c_1-b_1\cdot c_2 \\ -a_2\cdot c_1+a_1c_2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

$$\Rightarrow x=\frac{b_2\cdot c_1-b_1\cdot c_2}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer hvis $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$?

Da er $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ikke inverterbar,
så systemet har ingen eller
uendelig mange løsninger.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \iff a_1b_2=b_1\cdot a_2$ (anta $a_1\neq 0$)

så $b_2=\frac{b_1\cdot a_2}{a_1}$.

Så $(*)=\begin{cases} a_1x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\cdot x+\frac{a_2}{a_1}\cdot b_1\cdot y=c_2$$

$$\frac{a_2}{a_1}(a_1x+b_1y)=c_2$$

Så hvis $a_1x+b_1y=c_1$

så må $\frac{a_2}{a_1}\cdot c_1=c_2$ for at
systemet har noen løsninger.
Da finnes uendelig mange
løsninger for $(*)$.
Hvis ikke $\frac{a_2}{a_1}c_1=c_2$ så finnes
ingen løsninger.

1.8.10 Regn ut determinantene:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

(B med setning 1.8.5(iv)!!
Altså $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$
$\overset{\shortparallel}{}$
$\det(\underline{a} + s\underline{b}, \underline{b}, \underline{c})$)

(Nyttig $\det(A) = \det(A^T)$)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{I-3II}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -14 & -10 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{III-2II}{=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -14 & -10 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} \overset{I-2III}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} ? \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} ? \end{vmatrix} + (-12) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot 12 \underline{\underline{= 84}}$$

b)
$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{I+2III}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{II+2\cdot III}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 4 \cdot (-11) + 8 \cdot (-3)$$

$$= 4 \cdot 11 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4(11-6) = 4 \cdot 5$$

$$\underline{\underline{= 20}}$$

c)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{I+3III}{=\!=} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{II+4\cdot III}{=\!=} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 10 & -7 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{I-II}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & -7 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{= 0}}$$

(Bruker kun 1.8.5(iv))

1.8.17 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ er 3-dimensjonale vektorer.

a) Vis at om to av vektorene er like så er $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$.

Bevis: Anta $\underline{a} = \underline{b}$. (tilfellene $\underline{b} = \underline{c}$ eller $\underline{c} = \underline{a}$ er analoge)

Da er $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \overset{1.8.5(iv)}{=} \det(\underline{a} - \underline{b}, \underline{b}, \underline{c})$

$= \det(0, \underline{b}, \underline{c}) = 0$ ▨

b) Vis at $\det(s\underline{a} + t\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})$
$= s\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) + t\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})$

Bevis: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (\dots)$, ...

Da er $\det(s\underline{a} + t\cdot\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})$

$$= (sa_1 + t\cdot d_1)\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - (sa_2 + td_2)\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (sa_3 + td_3)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= sa_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - s\cdot a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + sa_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + td_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - td_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + td_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= s\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right) + t\left(d_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right)$$

$= s\cdot\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) + t\cdot\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})$ ▨

c) Definisjon: En vektor $\underline{a}$ er en lineærkombinasjon av $\underline{b}$ og $\underline{c}$ dersom det finnes skalarer t og s slik ~~at~~ at $\underline{a} = s\cdot\underline{b} + t\cdot\underline{c}$

Vis at om $\underline{a}$ er en lineærkombinasjon av $\underline{b}$ og $\underline{c}$, så er $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$.

Bevis: Vi vet at $\underline{a} = t\cdot\underline{b} + s\cdot\underline{c}$

så $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \det(t\cdot\underline{b} + s\cdot\underline{c}, \underline{b}, \underline{c})$

$\overset{b)}{=} t\cdot\underbrace{\det(\underline{b}, \underline{b}, \underline{c})}_{\overset{a)}{=}0} + s\cdot\underbrace{\det(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c})}_{\overset{a)}{=}0}$

$= 0$ ▨

c) Gi en geometrisk

d) Gi en geometrisk tolkning av c).

Tolkning: Volumet utspent av $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ er gitt som $|\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})|$. Så dette volumet er 0, hvis og bare hvis $\underline{a}$ ligger i planet (evt. linjen) utspent av $\underline{b}$ og $\underline{c}$.