MAT1100: Obligatorisk oppgave 2, H14: Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Vi setter $u = \cot x$ og får $du = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$. Dermed er

$$\int \frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}\,dx = -\int u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cot^4 x}{4} + C$$

b) Vi setter $u = \frac{x}{4}$, og får $du = \frac{1}{4}dx$. Dermed er

$$\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{16 - 16u^2}} \cdot 4\,du = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du$$

$$= \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{4} + C$$

Oppgave 2: a) Dette er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og bruker vi L'Hôpitals regel, får vi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^t}{\ln(t+e^2)}\,dt}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x}{\ln(x+e^2)}}{1} = \frac{e^0}{\ln e^2} = \frac{1}{2}$$

der vi har brukt analysens fundamentalteorem til å finne den deriverte av integralet.

b) Siden $\lim_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, er dette er også et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. Bruker vi L'Hôpitals regel, får vi

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan x} e^{t^2}\,dt}{x - 1} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{e^{\arctan^2 x}\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{e^{\frac{\pi^2}{16}}}{2}$$

der vi har brukt analysens fundamentalteorem kombinert med kjerneregelen til å finne den deriverte av integralet.

Oppgave 3: Formelen for volumet til et omdreiningslegeme om y-aksen er $V = 2\pi \int_0^a x f(x)\,dx$. I vårt tilfelle får vi

$$v = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

Oppgave 4: a) Vi deriverer og rydder opp:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + x^2 - (1 - x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Dette viser at $f'(x) \geq 0$ for alle x, og følgelig er f voksende overalt. Siden $f(0) = 0$, ser vi at $f(x)$ er positiv for $x > 0$ og negativ for $x < 0$.

b) Vi deriverer en gang til:

$$f''(x) = \frac{4x(1+x^2)^2 - 2x^2 \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{4x(1+x^2) - 8x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{4x + 4x^3 - 8x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{4x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^3}$$

Et fortegnsskjema viser at $f''(x) \geq 0$ når $x \leq -1$ og når $0 \leq x \leq 1$, og dessuten at $f''(x) \leq 0$ når $-1 \leq x \leq 0$ og når $x \geq 1$. Dette betyr at f er konveks på $(-\infty, -1]$ og $[0, 1]$, og konkav på $[-1, 0]$ og $[1, \infty)$.

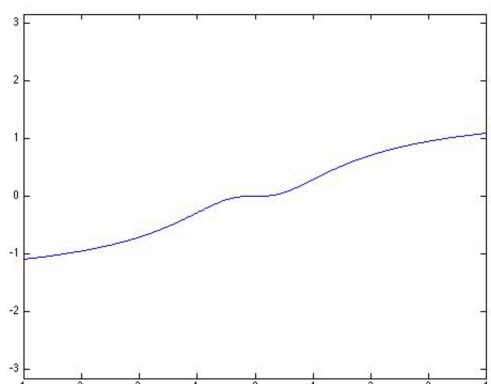
c) Siden

$$\lim_{x \to \infty} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

og

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2},$$

er $y = \frac{\pi}{2}$ en asymptote når $x \to \infty$, og $y = -\frac{\pi}{2}$ en asymptote når $x \to -\infty$. Grafen ser slik ut:



Oppgave 5: a) For en hvilket som helst x er $f(x+0) = f(x)f(0)$, dvs. $f(x) = f(x)f(0)$. Siden $f(x) \neq 0$ (legg merke til at f tar verdier i $(0, \infty)$), må $f(0) = 1$.

b) For å finne den deriverte til f i punktet x ser vi på

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x)f'(0) = kf(x)$$

Dette viser at $f'(x)$ eksisterer og er lik $kf(x)$.

c) Siden $f'(t) = kf(t)$, er $k = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Integrerer vi på begge sider, får vi

$$\int_0^x k\,dt = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$

Integralet til venstre er lik kx. I integralet til høyre substituerer vi $u = f(x)$. Da er $du = f'(t)\,dt$, og vi får

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{1}{u}\,du = \ln f(x) - \ln f(0) = \ln f(x)$$

der vi har brukt at $f(0) = 1$. Tilsammen gir dette

$$kx = \ln f(x)$$

Tar vi eksponentialfunksjonen på begge sider, får vi

$$e^{kx} = e^{\ln f(x)} = f(x)$$

akkurat som vi skulle vise.

Oppgave 6: Siden vi arbeider med nedre trappesummer og $f(x) = e^x$ er en voksende funksjon, er høyden til trappesummen over det i-te delintervallet $[x_{i-1}, x_i] = [\frac{a(i-1)}{n}, \frac{ai}{n}]$ gitt ved funksjonsverdien $f(x_{i-1}) = f(\frac{a(i-1)}{n}) = e^{\frac{a(i-1)}{n}}$ i det venstre endepunktet. Dermed er

$$N(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{(i-1)a}{n}} \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} (e^{\frac{a}{n}})^{i-1}$$

Den siste summen er en endelig, geometrisk rekke med kvotient $e^{\frac{a}{n}}$. Ifølge summeformelen for en slik rekke er

$$\sum_{i=1}^{n-1} (e^{\frac{a}{n}})^{i-1} = \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

Dermed er

$$N(\Pi_n) = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

Ved L'Hôpitals regel får vi

$$\lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = (e^a - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

$$\overset{L'H}{=} (e^a - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{a}{n^2}}{e^{\frac{a}{n}}(-\frac{a}{n^2})} = e^a - 1$$

b) I den øvre trappesummen må vi isteden bruke de høyre endepunktene, og får dermed

$$\text{Ø}(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ia}{n}} \frac{a}{n} = e^{\frac{a}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{(i-1)a}{n}} \frac{a}{n} = e^{\frac{a}{n}} N(\Pi_n)$$

Siden $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{a}{n}} = 1$, er dermed

$$\lim_{n\to\infty} \text{Ø}(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{a}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) = 1 \cdot (e^a - 1) = e^a - 1$$

Dette betyr at $f(x) = e^x$ er integrerbar og at

$$\int_0^a e^x \, dx = e^a - 1$$