Notater fra forelesning i MAT1100 mandag 31.08.09

Amandip Sangha, amandips@math.uio.no

28. august 2009

Følger og konvergens (seksjon 4.3 i Kalkulus)

Definisjon 1.1. En *følge* er en uendelig sekvens av tall

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\}$$

Vi bruker ofte notasjonen $\{a_n\}$ for å betegne en følge. Med a_n menes det n-te leddet i følgen, altså det tallet som står på plass nummer n i denne sekvensen. Det naturlige tallet $n \in \mathbb{N}$ brukes altså til å angi leddenes posisjon i sekvensen.

Eksempel 1.2. $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Denne følgen kan spesifiseres med formelen $a_n = n$. Denne følgen er rett og slett bare en liste av de naturlige tallene.

Eksempel 1.3. Følgen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = 3n$ er

$$\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}.$$

Eksempel 1.4. Følgen $\{b_n\}$ gitt ved $b_n = \frac{1}{n}$ er

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}.$$

Eksempel 1.5. $c_n = \frac{n}{n+1}$,

$$\{c_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}.$$

Eksempel 1.6. $d_n = (-1)^n$,

$$\{d_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}.$$

Eksempel 1.7. $d_n = 5$,

$$\{d_n\} = \{5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\}.$$

Dette er en konstant følge, alle leddene i følgen er lik 5.

Vi ønsker å forstå hvordan leddene i en følge oppfører seg lenger utover i følgen. Man kan stille en del naturlige spørsmål:

- Avtar leddene etterhvert? Øker leddene?
- Hopper leddene frem og tilbake?
- Noen regelmessighet overhodet?
- Nærmer leddene seg én bestemt verdi?

Eksempel 1.8. La oss ta for oss følgen $\{b_n\}$ fra eksempel 1.4 igjen, der $b_n = \frac{1}{n}$. Noen av de første leddene er altså

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}.$$

I denne følgen er alle leddene positive, fordi $\frac{1}{n} > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Det ser også ut til at følgen er avtagende. Dette skulle tilsi at leddene i følgen stadig nærmer seg 0.

Vi må gi en matematisk presis definisjon av hva det vil si for en følge "å nærme seg" et tall.

La oss først repetere en del nyttig fakta om *absoluttverdi* som vi skal gjøre bruk av (se s.82-83 Kalkulus). For et tall $x \in \mathbb{R}$ skriver man $|x|$ for *absoluttverdien* til x, og dette er definert ved

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

Det vil si at $|x|$ er tallet x med positivt fortegn. Vi leser definisjonen: hvis x var positiv, la det stå, men hvis x var negativ, sett et ekstra minustegn foran, slik at resultatet blir positivt. Legg merke til at for to reelle tall $x, y \in \mathbb{R}$, så vil $|x - y|$ betegne avstanden mellom punktene x og y på tallinjen. Vi forstår at differansen $x - y$ måler avstanden, men det er også fornuftig å insistere på å angi avstand i positive tall, derav bruken av absoluttverdien $|x - y|$ til å måle avstanden mellom x og y.

Vi oppsummerer kort noen nyttige relasjoner vedrørende absoluttverdi:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (trekantulikheten)

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iii) For et positivt tall $r > 0$ har man at $|x| < r \Longleftrightarrow -r < x < r$.

Punkt (i)-(ii) er vist i Kalkulus. For å etablere punkt (iii) kan vi resonnere at

$$|x| < r \text{ betyr } \begin{cases} x < r, & \text{dersom } x \text{ er positiv} \\ -r < x, & \text{dersom } x \text{ er negativ} \end{cases}$$

Herfra ser vi de ønskede ulikhetene. Altså må x være i intervallet $(-r, r)$. En annen nyttig observasjon er at $|x-y| = |y-x|$. Dette følger av punkt (ii), da man har at $|x-y| = |y-x|$, da $|x-y| = |-(y-x)| = |-1|\cdot|y-x| = |y-x|$.

Nå er vi klare til å gi en presis definisjon av begrepet *konvergens*, dvs. hvordan man skal oppfatte at en følge "nærmer seg" en bestemt verdi.

Definisjon 1.9. En følge $\{a_n\}$ *konvergerer* mot tallet $a \in \mathbb{R}$ dersom det for ethvert tall $\epsilon > 0$ finnes et naturlig tall $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Da skriver man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

og tallet a kalles *grenseverdien* til følgen $\{a_n\}$.

Tallet ϵ kan man tolke som en avstandsmargin, og med det naturlige tallet N mener man en posisjon i følgen (sekvensen) $\{a_n\}$. Nå kan vi tolke definisjonen slik:

> Uansett hvor liten avstand ($\epsilon > 0$) man får gitt, så kan man gå langt nok ut i følgen (finne stor nok N) slik at derfra og utover (for alle ledd a_n for $n \geq N$) vil alle leddene ligge nærmere tallet a enn den gitte avstanden ($\epsilon > 0$).

Bemerkning 1.10. Vi kan bruke punkt (iii) fra det vi skrev om absoluttverdi til å forstå ulikheten fra definisjonen bedre. La oss si at vi har en følge $\{a_n\}$ som konvergerer mot et tall a. La $\epsilon > 0$ være gitt (altså et bestemt tall), og vi tenker oss at vi har funnet $N \in \mathbb{N}$ slik at ulikheten fra definisjonen gjelder: $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Denne ulikheten kan vi skrive om ved hjelp av punkt (iii) om absoluttverdi, $|x| < r \iff -r < x < r$, og vår ulikhet fra definisjonen blir da (med $a_n - a$ for x, og ϵ for r)

$$\begin{aligned} &|a_n - a| < \epsilon \quad \text{for alle } n \geq N \quad \iff \\ &-\epsilon < a_n - a < \epsilon \quad \text{for alle } n \geq N \quad \iff \\ &a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{for alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Den siste ulikheten forteller altså at $a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ for alle $n \geq N$. Sagt med andre ord, alle ledd, fra og med ledd nummer N og utover, ligger i intervallet $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Bemerkning 1.11. Tallet N, som betegner hvor langt ut i følgen man må gå før leddene i følgen er nærmere a enn gitt avstandsmargin ϵ, avhenger gjerne av ϵ (og selvsagt av følgen). Noen ganger kan man skrive $N = N(\epsilon)$ for å poengtere denne avhengigheten.

Eksempel 1.12. Vi viser at følgen $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n}$, konvergerer mot 0 iht. definisjonen. La $\epsilon > 0$ være gitt (vilkårlig). Vi må vise at det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - 0| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Vi har at

$$|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n},$$

så vi trenger å finne $N \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < \epsilon$ for alle $n \geq N$. La oss først forstå hvordan n må være for at $\frac{1}{n} < \epsilon$ skal holde. Vi regner:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \epsilon \qquad |\cdot n \\ 1 &< \epsilon n \qquad |: \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} &< n. \end{aligned}$$

Dette viser at $\frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\epsilon}$. Vi ønsker et heltall N, så vi avrunder $\frac{1}{\epsilon}$ oppover til nærmeste heltall og kaller dette heltallet N. Da får vi $N > \frac{1}{\epsilon}$, som gir at når $n \geq N$, da er også $n > \frac{1}{\epsilon}$, som ved foregående utregning tilsier $\frac{1}{n} < \epsilon$. Det var dette vi ønsket.

Eksempel 1.13. En konstant følge er alltid konvergent, og grenseverdien er bare konstanten. For hvis $\{d_n\}$ er en konstant følge, med $d_n = d$ for alle n, der $d \in \mathbb{R}$ er et bestemt tall,

$$\{d, d, d, \ldots\},$$

da får vi at for uansett $\epsilon > 0$, kan vi bare velge $N = 1$ og vi får umiddelbart at

$$|d_n - d| = |d - d| = 0 < \epsilon, \text{ for alle } n \geq N(= 1).$$

Bemerkning 1.14. Hvis man skal vise at en følge *ikke* konvergerer, da holder det å påvise én konkret $\epsilon > 0$ for hvilket det *ikke finnes* noen $N \in \mathbb{N}$ slik at ulikheten fra definisjonen holder. Fordi merk at definisjonen krever at *for enhver* $\epsilon > 0$ må det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at nevnte ulikhet gjelder. Dermed er det nok å finne en ϵ der ulikheten ikke gjelder; da er kravet i definisjonen allerede ikke oppfylt.

Eksempel 1.15. Vi viser at følgen $\{a_n\}$, $a_n = n$, *ikke* konvergerer.

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Anta (for kontradiksjon) at følgen konvergerer mot et tall $a \in \mathbb{R}$. Vi velger oss $\epsilon = 1$ og ser på ulikheten som definisjonen sier skal gjelde: det må finnes en $N \in \mathbb{N}$ tilhørende denne $\epsilon = 1$ slik at

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Altså

$$\begin{aligned} |n-a| < 1 \quad &\text{for alle } n \geq N \quad \Longleftrightarrow \\ -1 < n-a < 1 \quad &\text{for alle } n \geq N \quad \Longleftrightarrow \\ a-1 < n < a+1 \quad &\text{for alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Siste ulikhet forteller altså $n \in (a-1, a+1)$ for alle $n \geq N$. Dette betyr at alle heltall større enn eller lik N ligger i intervallet $(a-1, a+1)$. Dette er absurd, så det kan ikke finnes en $N \in \mathbb{N}$ for vår $\epsilon = 1$ iht. definisjonen. Ergo er ikke kravet i definisjonen av konvergens oppfylt, så denne følgen konvergerer ikke mot noe tall a.

Legg også merke til at i resonnementet over gjøres det ingen essensiell bruk av $\epsilon = 1$. Vi kunne ha bestemt oss for en annen konkret verdi for ϵ, eller bare arbeidet med en generell ϵ. Men dette var spesielt for dette eksempelet, og i andre tilfeller kan det være mye lettere å bestemme seg for en konkret verdi for ϵ når man skal utarbeide et motbevis til konvergens.

Gitt to følger, kan man bruke de vanlige regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon mellom de to gitte følgene til å få en ny følge; man bare utfører regneoperasjonene leddvis: gitt to følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ kan vi således danne oss nye følger $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ og $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ (sistnevnte, gitt $b_n \neq 0$). For å lette arbeidet med å finne grenseverdier til følger, vil det være nyttig å ha noen grunnleggende regneregler for grenseverdier. Vi utarbeider disse her (dette er 4.3.3 i Kalkulus s. 189).

Regneregler for grenseverdier La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to konvergente følger med $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Da gjelder

$$\begin{aligned} &(1) \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b, \\ &(2) \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b, \\ &(3) \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b, \\ &(4) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \text{ dersom } b \neq 0. \end{aligned}$$

Punktene (1)-(2) forteller at man kan ta lim inn i parenteser av summer og differenser. Punktene (3)-(4) forteller at man kan ta lim, faktorvis, inn i paranteser av produkter og brøker.

Bevis. Punkt (1) og punkt (3) er vist i læreboken, så vi hopper over disse. Vi viser punkt (2) og punkt (4) som ikke er vist i læreboken.

(2): La $\epsilon > 0$ være gitt. Vi ønsker $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| < \epsilon \text{ for alle } n \geq N.$$

Vi finner først at

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |a_n - a + b - b_n| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

der vi har brukt trekantulikheten for å få den siste ulikheten (punkt (iii) fra diskusjonen over om absoluttverdi, her med $a_n - a$ for x og $b_n - b$ for y). Videre har vi per def. av $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ at det tilsvarende $\frac{\epsilon}{2}$ må finnes en $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ for alle $n \geq N_1$, og likeledes per def. av $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ at det tilsvarende $\frac{\epsilon}{2}$ må finnes en $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ for alle $n \geq N_1$. Vi velger nå N til å være det største av tallene N_1 og N_2, altså $N = maks\{N_1, N_2\}$, og vi får at

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

for alle $n \geq N$.
(4): La $\epsilon > 0$ være gitt (vilkårlig). Vi må finne $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \epsilon \text{ for alle } n \geq N.$$

Vi regner

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right|.$$

Vi tar for oss telleren først. Husk at a og b er bestemte konstanter, og det er a_n og b_n som er de varierende størrelsene. Vi vet at leddene a_n nærmer seg a, og leddene b_n nærmer seg b, så for å kunne bruke denne informasjonen legger vi til uttrykket $-ab + ab$ til telleren. Dette er jo lik 0, så da har vi ikke forandret telleren, og nytten ligger i det at vi blir i stand til å bruke trekantulikheten og deretter apellere til at differensene $a_n - a$ og $b_n - b$ blir små:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| \\
&= \frac{|a_n b - ab + ab - ab_n|}{|b_n b|} \leq \frac{|a_n b - ab| + |ab - ab_n|}{|b_n b|} \\
&= \frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \\
&= \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a| \cdot |b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|}.
\end{aligned}$$

Nå må vi behandle nevnerne. Det er $|b_n|$ i nevnerne som er den varierende størrelsen. Per def. av $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finnes det en $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$. (Dette kan vi begrunne ved å tenke oss at hvis vi hadde betraktet en liten ϵ', så hadde vi iht. definisjonen fått en N slik at $b_n \in (b - \epsilon', b + \epsilon')$ for alle $n \geq N$. Vi kan lett ordne det slik at $\frac{1}{2}b$ ligger *utenfor* intervallet $(b-\epsilon', b+\epsilon')$ ved å velge ϵ' liten nok. Dette medfører at $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$. Man bør lage en tegning på den reelle tallinjen for å illustrere ideen og overbevise seg selv om resonnementet). Nå fortsetter vi regnestykket vårt over, og får

$$\begin{aligned}\frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a| \cdot |b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} &< \frac{|a_n - a|}{\frac{1}{2}|b|} + \frac{|a| \cdot |b - b_n|}{\frac{1}{2}|b|^2} \\ &= \frac{2|a_n - a|}{|b|} + \frac{2|a| \cdot |b - b_n|}{|b|^2}.\end{aligned}$$

Per def. av $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ finnes det tilsvarende $\frac{\epsilon|b|}{4}$ en $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon|b|}{4} \text{ for alle } n \geq N_2.$$

Per def. av $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ finnes det tilsvarende $\frac{\epsilon|b|^2}{4|a|}$ en $N_3 \in \mathbb{N}$ slik at

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon|b|^2}{4|a|} \text{ for alle } n \geq N_3.$$

Vi velger nå N til å være $N = maks\{N_1, N_2, N_3\}$. Dette gir oss

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2|a_n - a|}{|b|} + \frac{2|a| \cdot |b - b_n|}{|b|^2} &< \frac{2}{|b|}\frac{\epsilon|b|}{4} + \frac{2|a|}{|b|^2}\frac{\epsilon|b|^2}{4|a|} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{for alle } n \geq N.\end{aligned}$$

□

Definisjon 1.16. Vi sier at følgen $\{a_n\}$ *divergerer mot uendelig* (∞) dersom det for ethvert tall $c \in \mathbb{R}$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \geq c$ for alle $n \geq N$. Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Følgen $\{a_n\}$ *divergerer mot minus uendelig* ($-\infty$) dersom det for ethvert tall $c \in \mathbb{R}$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \leq c$ for alle $n \geq N$. Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Eksempel 1.17. Vi viste i eksempel 1.15 at følgen gitt ved $a_n = n$ ikke konvergerte. La oss vise at denne følgen divergerer mot ∞. Gitt et tall $c \in \mathbb{R}$, la N være f.eks. $c + 1$ rundet oppover til nærmeste heltall. Da fås $a_n = n \geq c$ for alle $n \geq N$. Altså $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Noen ganger kan en følge verken konvergere eller divergere mot ∞ eller $-\infty$. Da kan vi si at følgen bare *divergerer*, eller man kan si at grenseverdien *ikke eksisterer*.

Eksempel 1.18. Betrakt følgen $\{d_n\}$ fra eksempel (1.6) som var gitt ved $d_n = (-1)^n$. Denne følgen divergerer ikke mot ∞ eller $-\infty$. Dette ser vi umiddelbart da -1 og 1 er de eneste tallene som fremkommer i følgen. Men denne følgen konvergerer heller ikke. La oss vise at følgen ikke konvergerer. Anta (for kontradiksjon) at følgen konvergerer mot en grenseverdi

$d = \lim_{n\to\infty} d_n$. Da, tilhørende $\epsilon = \frac{1}{2}$, finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|d_n - d| < \frac{1}{2}$ for alle $n \geq N$. Altså

$$\begin{aligned}
|(-1)^n - d| < \frac{1}{2} \text{ for alle } n \geq N \quad &\iff \\
-\frac{1}{2} < (-1)^n - d < \frac{1}{2} \text{ for alle } n \geq N &\iff \\
d - \frac{1}{2} < (-1)^n < d + \frac{1}{2} \text{ for alle } n \geq N &\iff \\
(-1)^n \in (d - \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2}) \text{ for alle } n \geq N.&
\end{aligned}$$

Man har at lengden til et intervall er differansen mellom endepunkt og startpunkt. For intervallet $(d-\frac{1}{2}, d+\frac{1}{2})$ er lengden altså $d+\frac{1}{2}-(d-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$. Leddene i følgen vår er $1 = (-1)^n$ når n er partall, og $-1 = (-1)^n$ når n er oddetall. Tallene 1 og -1 har avstand 2 mellom seg: $1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Den siste setningen i regnestykket vårt over viser at både 1 og -1 ligger i intervallet $(d - \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2})$ som hadde lengde 1. Dette er absurd, da tallene 1 og -1 har avstand 2 mellom seg. Altså kan *ikke* følgen $\{(-1)^n\}$ være konvergent. Vi sier at $lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ ikke eksisterer.

Eksempel 1.19. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. La $c \in \mathbb{R}$ være gitt. Vi ønsker $N \in \mathbb{N}$ slik at $\sqrt{n} \geq c$ for alle $n \geq N$. Vi ser at $n \geq c^2$ vil sikre at $\sqrt{n} \geq c$. Derfor lar vi N være et heltall større enn c^2 (bare velg et). Da fås at $\sqrt{n} \geq c$ når $n \geq N$.

Eksempel 1.20. Finn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$. Til dette kan vi bruke det vi etablerte i eksempel 1.4, nemlig at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, og regneregel (3) for grenseverdier. Da får vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Eksempel 1.21. Finn $\lim_{n\to\infty} n^2$. Vi kan prøve å bruke det vi fant i eksempel 1.17, nemlig at $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, og igjen regneregel (3) for grenseverdier:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n \cdot n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Men her er det et problem: overgangen "$\infty \cdot \infty = \infty$" er ikke formelt sett korrekt, da $\infty \notin \mathbb{R}$, altså "∞" er ikke et reelt tall. Vi bruker det bare som en notasjon og vi har ikke etablert noen regneoperasjoner for det. Derfor er det bedre å bruke definisjonen av divergens: la $c \in \mathbb{R}$, og la $N \in \mathbb{N}$ være et naturlig tall større enn $\sqrt{c}$. Da fås $n^2 \geq c$ for alle $n \geq N$, og $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ er etablert. Det følger ved liknende resonnement at $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$ for enhver potens $p \geq 1$ (bruk p-te rot istedenfor kvadratrot).

Eksempel 1.22. Finn $\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+2n}{16n^2-4n^3}$. Hvis man umiddelbart begynner å bruke regneregler (4), (1) og (2), så kommer man til

$$\frac{\lim_{n\to\infty} 8n^3 + \lim_{n\to\infty} 2n}{\lim_{n\to\infty} 16n^2 - \lim_{n\to\infty} 4n^3}$$

som skulle gi $\frac{\infty+\infty}{\infty-\infty}$. Men fra dette er det vanskelig å konkludere noe. Det blir enklere hvis vi først omskriver den opprinnelige brøken. La oss forkorte med høyeste potens av n, som er 3 i vårt tilfelle. Vi deler altså over og under brøken med n^3 (dette forandrer ikke brøken):

$$\frac{8n^3 + 2n \quad : n^3}{16n^2 - 4n^3 \quad : n^3} = \frac{8 + \frac{2}{n^2}}{\frac{16}{n} - 4},$$

og vi får videre at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 2n}{16n^2 - 4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{2}{n^2}}{\frac{16}{n} - 4} = \frac{\lim_{n\to\infty} 8 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} \frac{16}{n} - \lim_{n\to\infty} 4}$$
$$= \frac{8+0}{0-4} = \frac{8}{-4} = -2.$$

Definisjon 1.23. En følge $\{a_n\}$ kalles *voksende* dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n. Følgen kalles *avtagende* dersom $a_{n+1} \leq a_n$ for alle n. Vi bruker ordet *monoton* som et fellesnavn på voksende og avtagende følger. En følge $\{a_n\}$ kalles *begrenset* dersom det finnes et positivt tall $M \in \mathbb{R}$ slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.

Vi kommer nå til hovedsatsen i avsnitt 4.3 (dette er Teorem 4.3.9 i Kalkulus på s.193). Her anvendes kompletthetsprinsippet på en fundamental måte, noe som illustrerer viktigheten av kompletthetsprinsippet.

Teorem 1.24. *En monoton, begrenset følge er alltid konvergent.*

Bevis. Anta at $\{a_n\}$ er en voksende, begrenset følge, la oss si begrenset av et tall $M \in \mathbb{R}$, altså $|a_n| \leq M$ for alle n. Da kan vi betrakte følgen som en mengde

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{a_n \mid \quad n \in \mathbb{N}\},$$

og det følger at mengden er ikke-tom og oppad begrenset (nettopp av tallet M). Ved kompletthetsprinsippet har mengden A en minste øvre skranke $a = \sup A$. Vi hevder at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. La $\epsilon > 0$ være gitt. Vi trenger å finne $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Vi vet at $a_n \leq a$ for alle n, da a er en øvre skranke for mengden A (og dermed større enn eller lik samtlige ledd fra følgen). Det må finnes et ledd a_N i følgen som er slik at $a_N > a - \epsilon$, for hvis ikke, da ville $a - \epsilon$ ha vært en øvre skranke, men $a - \epsilon < a$ ville motsi at a var minste øvre skranke. Nå vet vi det finnes en N slik at $a_N > a - \epsilon$. Følgen var voksende, så det vil si at alle etterfølgende ledd også må tilfredsstille samme ulikhet: $a_n > a - \epsilon$ for alle $n \geq N$. Nå får vi

$$a - \epsilon < a_n \leq a < a + \epsilon \text{ for alle } n \geq N.$$

Vi dropper å skrive den mellomste a, og fortsetter utregningen

$$\begin{aligned} a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \text{ for alle } n \geq N \quad &\iff \\ -\epsilon < a_n - a < \epsilon \text{ for alle } n \geq N \quad &\iff \\ |a_n - a| < \epsilon \text{ for alle } n \geq N. & \end{aligned}$$

Dermed har vi vist at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, og teoremet er bevist for voksende, begrensede følger. Det gjenstår å bevise teoremet for avtagende, begrensede følger.
La $\{b_n\}$ være en avtagende, begrenset følge. Definér følgen $\{a_n\}$ ved $a_n = -b_n$. Da er $\{a_n\}$ en voksende, begrenset følge, og vi viste nettopp at følgen vil konvergere mot en grenseverdi, la oss si $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Nå får vi

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-b_n) = -\lim_{n\to\infty} b_n.$$

Altså har vi $a = -\lim_{n\to\infty} b_n$, som gir at $\lim_{n\to\infty} b_n = -a$, og vi har funnet grenseverdien til følgen b_n. Vi kan også bemerke at denne grenseverdien er største nedre skranke for mengden $\{b_n\}$ (se også forrige forelesningsnotater, der vi utledet kompletthetsprinsippet for største nedre skranker, der vi nettopp viste denne relasjonen) akkurat som grenseverdien for en voksende, begrenset følge $\{a_n\}$ var minste øvre skranke for mengden $\{a_n\}$. $\square$

Før vi gir eksempler på bruk av dette teoremet, trenger vi et par nyttige verktøy. Først registrerer vi en enkel men nyttig observasjon om konvergente følger. La $\{a_n\}$ være en konvergent følge, med $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Da har man også $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Og $\lim_{n\to\infty} a_{n+100} = a$, og for den saks skyld $\lim_{n\to\infty} a_{n+458321} = a$. Altså, man kan øke indekseringstallet n her (idet man tar lim) uten at grenseverdien tar skade av det. Grunnen til dette kan illustreres slik:

$$\begin{aligned} \text{For å finne } \lim_{n\to\infty} a_n &\text{ betrakter man } \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\} \\ \text{For å finne } \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &\text{ betrakter man } \{a_2, a_3, a_4, \ldots\} \\ \text{For å finne } \lim_{n\to\infty} a_{n+100} &\text{ betrakter man } \{a_{101}, a_{102}, a_{103}, a_{104}, \ldots\} \end{aligned}$$

Altså, selve sekvensen (følgen) blir forskjøvet en del plasser mot venstre, men dette har ingen innvirkning på hva som skjer i følgen ”langt, langt borte mot høyre”. Vi kan enkelt vise dette mer formelt. La oss ta $\lim_{n\to\infty} a_{n+100}$ som eksempel. La $\epsilon > 0$. Per def. av $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Nå har vi også at $n + 100 > n \geq N$, og det vil spesielt medføre $|a_{n+100} - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. (Faktisk kunne vi ha erstattet N med $N - 100$ og fortsatt fått den ønskede ulikheten til å gjelde).

Det som altså skjer er at "man kommer i mål fortere".

Det er en bevisteknikk, kalt *bevis ved induksjon*, som vil være nyttig for oss når vi f.eks. skal vise at en følge er voksende eller avtagende. Denne teknikken er også viktig i sin egen rett, og svært anvendelig ellers. Dette er fra avsnitt 1.2 i Kalkulus (s.35).

Induksjonsprinsippet Anta for hver $n \in \mathbb{N}$ at vi har en påstand P_n. Altså, at vi har en samling av påstander (matematiske utsagn)

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

og anta at følgende to krav er oppfylt:

(1) P_1 er sann.

(2) Dersom P_m er sann for en $m \in \mathbb{N}$, da er P_{m+1} sann også. Mao. $P_m \Rightarrow P_{m+1}$.

Da er alle påstandene P_n ($n \in \mathbb{N}$) sanne. Dette er klart da vi får implikasjonene

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow \ldots$$

Eksempel 1.25. Vi skal avgjøre om følgen $\{a_n\}$ konvergerer. Følgen er definert ved

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 1, \qquad \text{for } n \geq 2. \end{aligned}$$

La oss regne ut noen av leddene i følgen.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \text{ var gitt}, \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \\ a_3 &= \frac{\frac{3}{2}}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \\ a_4 &= \frac{\frac{7}{4}}{2} + 1 = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Følgen begynner altså som

$$\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots\}$$

Det ser ut som følgen er voksende og begrenset av 2 (dette er foreløpig kun en gjetning basert på de første leddene i følgen). La oss prøve å bevise ved induksjon at følgen er slik vi tror: voksende ($a_n \leq a_{n+1}$ for alle n) og begrenset av 2 ($a_n \leq 2$, alle leddene er allerede positive, så vi trenger ikke bruke absoluttverdi). Vi definerer påstandene P_n ved

$$P_n : \quad a_n \leq a_{n+1} \text{ og } a_n \leq 2.$$

Vi ønsker å vise at alle disse påstandene P_n er sanne (for dette vil nettopp etablere at følgen er voksende og begrenset av 2). Det holder å sjekke at krav (1) og (2) fra induksjonsprinsippet er oppfylt. Påstand P_1 er i vårt tilfelle $a_1 \leq a_2$ og $a_1 \leq 2$. Vi har at $a_1 = 1$ og $a_2 = \frac{3}{2}$. Det stemmer altså at $a_1 \leq a_2$ og at $a_1 \leq 2$. Så påstand P_1 er sann, og krav (1) er dermed oppfylt. Vi sjekker så krav (2); hvorvidt $P_m \Rightarrow P_{m+1}$ for $m \in \mathbb{N}$. Anta P_m (for en vilkårlig $m \in \mathbb{N}$), dvs. anta $a_m \leq a_{m+1}$ og $a_m \leq 2$. Vi skal fra dette utlede $P_{m+1}: \ a_{m+1} \leq a_{m+2}$ og $a_{m+1} \leq 2$. Vi husker at vi antar $a_m \leq a_{m+1}$, og dette medfører

$$a_{m+1} = \frac{a_m}{2} + 1 \leq \frac{a_{m+1}}{2} + 1 = a_{m+2},$$

altså har vi vist at $a_{m+1} \leq a_{m+2}$. Deretter husker vi at vi antar $a_m \leq 2$, og dette medfører

$$a_{m+1} = \frac{a_m}{2} + 1 \leq \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2,$$

altså har vi vist at $a_{m+1} \leq 2$. Dermed har vi vist at P_{m+1} også holder, og vi har dermed vist at $P_m \Rightarrow P_{m+1}$. Begge kravene i induksjonsprinsippet er oppfylt, så alle påstandene P_n er sanne, hvilket for oss betyr at følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset. Ved teorem 1.24 konkluderer vi at følgen må konvergere, og la oss kalle grenseverdien $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Vi skal finne denne grenseverdien. Til dette bruker vi observasjonen vi registrerte tidligere, nemlig at $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ i vårt tilfelle her. Da får vi fra relasjonen

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$$

at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + 1,$$

altså fås ligningen

$$a = \frac{a}{2} + 1,$$

som vi kan løse for den foreløpig ukjente a:

$$\begin{aligned} a - \frac{a}{2} &= 1 \\ a(1 - \frac{1}{2}) &= 1 \\ a(\frac{1}{2}) &= 1 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Vi har dermed funnet grenseverdien.

Eksempel 1.26. Følgen $\{a_n\}$ gitt ved

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{2}}, \text{ for } n \geq 2.$$

Vi regner ut at de første få leddene i følgen blir

$$\{1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}, \dots\} = \{1, 0.7071, 0.5946, \dots\}$$

hvor vi også viser grove desimaltilnærminger til de første få leddene. Vi tror at følgen er avtagende (foreløpig ren gjetning, og generelt kan man selvsagt ikke konkludere noe som hest ut ifra bare å ha sett noen få ledd - dette er farlig praksis i beste fall). Vi våger også å spekulere i hva grenseverdien kan være. La oss kalle grenseverdien $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, og dette gir da

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n}{2}}.$$

Først en liten digresjon: vi bør presisere at det er legitimt å trekke lim inn i kvadratroten. Denne operasjonen står ikke i regnereglene vi etablerte over, men vi kan utlede dette ved hjelp av regneregel (3) på denne måten:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}\sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = a.$$

Denne utregningen viser at $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Videre har vi at

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} \cdot \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Denne utregningen viser at $\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$. Vi konkluderer fra begge disse utregningene at vi må ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n},$$

fordi begge uttrykkene er lik $\sqrt{a}$. (Vi kan også etablere dette ved å apellere til kontinuiteten til kvadratrotfunksjonen. Men kontinuerlige funksjoner kommer vi til senere i kurset). Tilbake til utregningene våre; vi får nå

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2}},$$

med andre ord $a = \sqrt{\frac{a}{2}}$, og denne ligningen kan vi løse for den ukjente a:

$$a = \sqrt{\frac{a}{2}}$$
$$a^2 = \frac{a}{2}$$
$$a^2 - \frac{a}{2} = 0$$
$$a(a - \frac{1}{2}) = 0.$$

Det er to løsninger til ligningen, $a = 0$ og $a = \frac{1}{2}$. Men kun ett av disse tallene kan være grenseverdien, og vi må nå avgjøre hvilket. Vi tror at følgen er avtagende (dette skal vi snart vise), og vi ser at følgen er ihvertfall nedad begrenset av 0 (det er klart at alle leddene i følgen er positive tall). Men det kan hende at følgen faktisk er nedad begrenset av $\frac{1}{2}$, og det vil resultere i at $\frac{1}{2}$ må være grenseverdien. Vi undersøker om dette er tilfelle. La oss forsøke å bevise dette ved induksjon. Vi definerer påstandene

$$P_n : \quad a_n \geq a_{n+1} \text{ og } a_n \geq \frac{1}{2}.$$

Først sjekker vi påstand P_1. Vi har $a_1 = 1$ og $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, slik at $a_1 \geq a_2$ holder, og vi har $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Påstand P_1 er dermed sann. Nå viser vi at $P_m \Rightarrow P_{m+1}$ for $m \in \mathbb{N}$. Så vi antar P_m, dvs. $a_m \geq a_{m+1}$ og $a_m \geq \frac{1}{2}$. Da gjelder at

$$a_{m+1} \geq \sqrt{\frac{a_{m+1}}{2}} = a_{m+2}$$

og

$$a_{m+1} = \sqrt{\frac{a_m}{2}} \geq \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Dermed har vi vist at $P_{m+1} : \quad a_{m+1} \geq a_{m+2}$ og $a_{m+1} \geq \frac{1}{2}$ holder. Dette etablerer $P_m \Rightarrow P_{m+1}$. Ved induksjonsprinsippet følger det at alle påstandene P_n (for alle $n \in \mathbb{N}$) er sanne, altså:

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ og } a_n \geq \frac{1}{2} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Følgen vår $\{a_n\}$ er avtagende og nedad begrenset av $\frac{1}{2}$. Vi hadde to mulige kandidater for grenseverdien, nemlig 0 og $\frac{1}{2}$. Nå konkluderer vi at $\frac{1}{2}$ må være grenseverdien, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.