Løsningsforslag uke 35, 2016

Vi minner om konjugasjonsreglene:

Proposisjon 3.1.5. *Hvis z og w er komplekse tall, så er*

(*i*) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$,

(*ii*) $\overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w}$,

(*iii*) $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$,

(*iv*) $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$ *for* $w \neq 0$.

Oppgave 3.1.8. Bevis regnereglene for konjugasjon (3.1.5).

Løsning. Skriv $z = a + ib$ og $w = c + id$ for reelle tall a, b, c og d. Regelen (iii) er vist i boken, så vi nøyer oss med de tre andre.

Bevisene for (i) og (ii) er så like at vi tillater oss å skrive $\pm$ og dermed ta begge bevisene i ett. Venstresiden i (i) og (ii) blir

$$\begin{aligned} \overline{z} \pm \overline{w} &= (a - ib) \pm (c - id) \\ &= a \pm c - i(b \pm d), \end{aligned}$$

og høyresiden er lik

$$\begin{aligned} \overline{z \pm w} &= \overline{(a + ib) \pm (c + id)} \\ &= \overline{a \pm c + i(b \pm d)} \\ &= a \pm c - i(b \pm d). \end{aligned}$$

Siden disse uttrykkene er like, er (i) og (ii) bevist. Alternativt, anta at vi har bevist (i) først. Da kan vi bevise (ii) ved å utnytte at $\overline{z} - \overline{w} = \overline{z} + \overline{-w} = \overline{z + (-w)}$.

For (iv) er trikset å utvide brøken med den konjugerte til nevneren. Venstresiden blir da

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \frac{a - ib}{c - id} \\ &= \frac{a(c + id) - ib(c + id)}{(c - id)(c + id)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus

Ved en tilsvarende utregning, eller [Kalkulus, Proposisjon 3.1.4(iv)], har vi at

$$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Det følger dermed at $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$. ∎

Oppgave 3.1.9. Vis at $\overline{z}w$ og $z\overline{w}$ er konjugerte.

Løsning. Alt vi trenger å gjøre er å regne ut at $\overline{\overline{z}w} = z\overline{w}$:

$$\overline{\overline{z}w} = \overline{\overline{z}}\,\overline{w} = z\overline{w}$$

Den første likheten er egenskap (iii) i Proposisjon 3.1.5. Den andre likheten holder fordi $\overline{\overline{z}} = z$ for alle komplekse tall z. ∎

Oppgave 3.2.10. Skisser følgende områder i det komplekse planet:

a) $\{z : |z| = 1\}$,

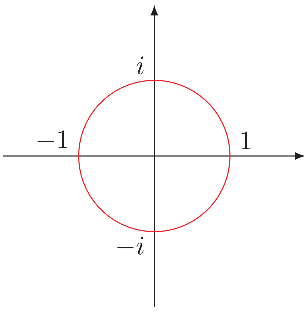
b) $\{z : |z-1| < 2\}$,

c) $\left\{z : |z-(i+1)| \geqslant \frac{1}{2}\right\}$,

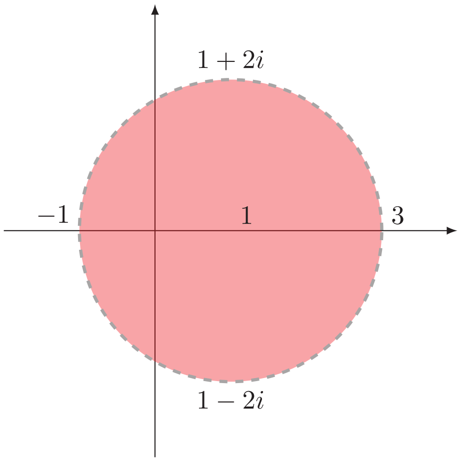
d) $\{z : |z-2| < |z-i+2|\}$.

Løsning. Disse oppgavene kan løses med regning. Da setter man $z = x+iy$ og behandler uttrykket algebraisk slik at man finner en passende parametrisering av området. Det er derimot mye enklere å utnytte det geometriske tolkningen av $|z-w|$ som *avstanden mellom de to komplekse tallene z og w.*

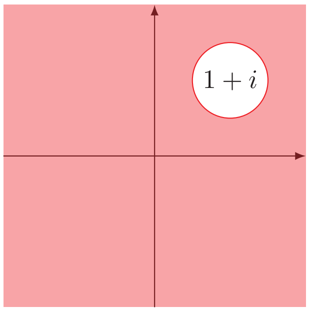
a) Siden $|z|$ kan skrives som $|z-0|$ er dette mengden av alle punkter som har avstand 1 fra origo. Mengden er altså sirkelen med sentrum i origo og radius 1.



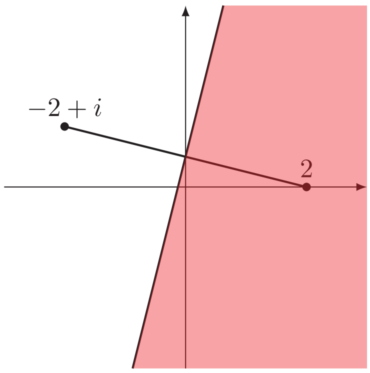
b) Dette er mengden av alle punkter som har avstand *mindre enn* 2 fra punktet 1. Det vil si alle punkter *innenfor* sirkelen med sentrum i 1 og radius 2. Siden ulikheten $<$ er streng, er ikke sirkelranden med i området.



c) Dette området er mengden av alle punkter som har avstand *større enn eller lik* $\frac{1}{2}$ fra punktet $1+i$. Mengden er dermed alle punkter *utenfor* sirkelen med sentrum i $1+i$ og radius $\frac{1}{2}$. Siden ulikheten $\geqslant$ ikke er streng, er sirkelranden med i området.



d) For å kunne bruke den geometriske tolkningen vår må vi først skrive om $|z-i+2| = |z-(-2+i)|$. Området er altså de punktene som har kortere avstand til punktet 2 enn de har til punktet $-2+i$. Punktene som har lik avstand til 2 og $-2+i$ ligger på midtnormalen til linjestykket mellom 2 og $-2+i$. Mengden vi er ute etter er dermed punktene som ligger nedenfor denne midtnormalen.



∎

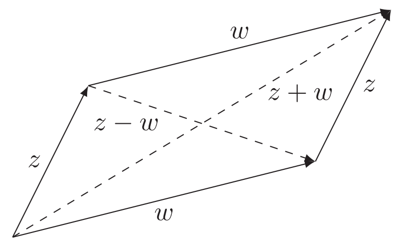
Oppgave 3.2.15. Vis at $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ for alle komplekse tall z og w. Forklar at dette viser at summen av kvadratene til sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene til diagonalene.

Løsning. Den første delen av oppgaven er begynne med venstresiden av den oppgitte likheten og regne:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &\overset{1}{=} (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\ &\overset{2}{=} (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\ &\overset{3}{=} (z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}) + (z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w}) \\ &\overset{4}{=} 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\ &\overset{5}{=} 2|z|^2 + 2|w|^2. \end{aligned}$$

I steg 1 og 5 har vi brukt at $|z|^2 = z\overline{z}$ for alle komplekse tall z. I steg 2 har vi brukt egenskapene (i) og (ii) i Proposisjon 3.1.5. I steg 3 og 4 har vi ganget ut parentesene og ryddet opp i uttrykket.

For den andre delen av oppgaven, betrakt et parallellogram der sidene er z og w betraktet som vektorer. Ved de vanlige reglene for vektorer får vi at diagonalene kan uttrykkes som henholdsvis $z+w$ og $z-w$.



∎

Referanser

[Kalkulus] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. 4. utg. Universitetsforlaget, 2006.

Løsningsforslag uke 36, 2016

Oppgave 3.3.10. Vis at formlene

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \tag{1}$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \tag{2}$$

gjelder for alle komplekse tall z og w.

Løsning. For komplekse tall er sinus og cosinus definert som

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Venstresiden i (1) er dermed

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}.$$

Det er litt mer omfattende å regne ut høyresiden, så vi deler opp stykket og finner først et uttrykk for $\sin z \cos w$:

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)}\right).
\end{aligned}$$

Tilsvarende er

$$\cos z \sin w = \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + e^{-i(z-w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}\right).$$

Totalt er høyresiden i (1) lik

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{-i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + \cancel{e^{-i(z-w)}} - \cancel{e^{i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(2e^{i(z+w)-2e^{-i(z+w)}}\right) \\
&= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}.
\end{aligned}$$

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus

Siden venstre og høyre side i likning (1) er like, ser vi at påstanden stemmer. Gyldigheten av likning (2) bevises på samme måte. ■

Oppgave 3.4.15. Finn alle komplekse løsninger av likningen

a) $z^3 + iz^2 + z = 0$,

b) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Løsning. a) Legg merke til at vi kan faktorisere $z^3 + iz^2 + z = z\big(z^2 + iz + 1\big)$. Nå har vi allerede funnet én rot, nemlig $z = 0$. For å finne de to gjenværende røttene må vi løse andregradslikningen $z^2 + iz + 1 = 0$. De finner vi med abc-formelen:

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{\big(-1 \pm \sqrt{5}\big)i}{2}.$$

b) Oppgaven er å finne kvadratrøttene til $w = 1 + \sqrt{3}i$. Vi begynner med å skrive w på polarform. Modulus til w er $r = \sqrt{1+3} = 2$. Videre, siden både realdelen og imaginærdelen til w er positive ligger w i første kvadrant. Vi har at $\cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. Det følger at $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ fordi w ligger i første kvadrant. Altså er $w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)}$, så $z = \sqrt{w} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)}$. Dermed blir de to kvadratrøttene

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Oppgave 3.5.5. Vis at i er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3.$$

Finn komplekse og reelle faktorisering av $P(z)$.

Vi minner først om et resultat fra pensum i videregående:

Proposisjon 1 (Nullpunktsetningen)**.** *La P være et polynom og a et tall. Da er $P(a) = 0$ hvis og bare hvis $z - a$ er en faktor i P.*

Løsning. En «rot» i et polynom er et annet ord for «nullpunkt». Den første delen av oppgaven er altså å sette inn $z = i$ for å sjekke at $P(i) = 0$:

$$\begin{aligned} P(i) &= i^4 + 2i^3 + 4i^2 + 2i + 3 \\ &= \cancel{1} - \cancel{2i} - \cancel{4} + \cancel{2i} + \cancel{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siden polynomet P bare har reelle koeffisienter, opptrer alle røtter i kompleks-konjugerte par [Kalkulus, Lemma 3.5.3]. Derfor er også $\bar{i} = -i$ en rot i P. Nullpunktsetningen sier dermed at både $z - i$ og $z - (-i) = z + i$ er faktorer i P. Følgelig går også produktet $(z-i)(z+i) = z^2+1$ opp i P. Utfører vi polynomdivisjon finner vi at

$$P(z) = \big(z^2+1\big)\big(z^2+2z+3\big). \tag{3}$$

For å finne de resterende to røttene til P løser vi andregradslikningen

$$z^2+2z+3=0.$$

Den har løsningene $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = 1 \pm \sqrt{2}i$.

Siden ingen av røttene til P er reelle, kan ingen av andregradspolynomene i (3) faktoriseres i reelle, lineære polynomer. Derfor er høyresiden i likning (3) den reelle faktoriseringen til P. Vi kjenner nå alle røttene til P, så den komplekse faktoriseringen blir

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z+i)\Big(z-\Big(1+\sqrt{2}i\Big)\Big)\Big(z-\Big(1-\sqrt{2}i\Big)\Big) \\ &= (z-i)(z+i)\Big(z-1-\sqrt{2}i\Big)\Big(z-1+\sqrt{2}i\Big). \end{aligned}$$

■

Referanser

[Kalkulus] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. 4. utg. Universitetsforlaget, 2006.