# Plenum 13/11-14

9.4: 8, 10, 11

9.5: 1ace, 3abde, 5, 13, 14

FVLA:

1.1: 1, 2, 3, 5 — c)

1.2: 1, 4, 6, 7, 13, 15, 17, 21, 25

## 9.4: Spesielle teknikker

11) $$\int \frac{\sin^3(2x)}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \sin^3(2x)(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int (2\sin x\cos x)^3(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 8\int \sin^3(x)\cos^3(x)\sin^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx$$

odde!

$$= 8\int \sin^{\frac{5}{2}}(x)\cos^3(x)\,dx = 8\int \sin^{\frac{5}{2}}(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx$$

TRIKS!

$$\boxed{\frac{5}{2}+\frac{4}{2}=\frac{9}{2}}$$

$$= 8\int \sin^{\frac{5}{2}}(x)\cos(x)\,dx - 8\int \sin^{\frac{9}{2}}(x)\cos(x)\,dx$$

$$= 8\int u^{\frac{5}{2}}\,du - 8\int u^{\frac{9}{2}}\,du = 8\,\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 8\,\frac{2}{11}u^{\frac{11}{2}} + C$$

$u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$$= \frac{16}{7}(\sin(x))^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{11}(\sin(x))^{\frac{11}{2}} + C$$

# 9.5: Uegentlige integraler

1) c) $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{u}\,du$ ⊳ Divergerer fra Setning 9.5.8.

$u = x-1$
$du = dx$
$x=1 \Rightarrow u=0$
$x=2 \Rightarrow u=1$

5) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,dx$ ? Gjør generell grensesammenligning med $\frac{1}{x^k}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{\ln x}}{x^{p-k}} = (\Delta) \to \begin{cases} \infty & \text{hvis } p>k \\ 1 & \text{hvis } p=k \\ 0 & \text{hvis } p<k \end{cases}$$

Så hvis $p=k$ eller $p<k$ er grensen $\infty$, og dermed ikke konvergens (grensesml. testen).

Hvis $p>k$:

$$(\Delta) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(p-k)x^{p-k-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(p-k)\underbrace{x^{p-k}}_{\infty \text{ siden } p>k}} = 0 < \infty$$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'H

Så siden $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,dx$ konv. for $k>1$, og $p$ må være større enn $k$, vil $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,dx$ konv. for alle $p>1$.

13.) a) $I_n = \int_0^1 x(\ln x)^n \, dx$

VIS: For alle $n \in \mathbb{N}$ er $I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1}$ : (★)

Induksjonsbevis:

Viser først at (★) er OK for $n=1$:

$$I_1 = \int_0^1 x \ln x \, dx = \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{x=a}^{1} - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx$$

$u = \ln x$
$v' = x$
$\Downarrow$
$v = \frac{1}{2}x^2$
$u' = \frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{a \to 0} a^2 \ln a - \frac{1}{4}$$

M: $\lim_{a \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{a^2} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln a} = \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a^2}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'H

$$= \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1}{a}}{-2\frac{1}{a^3}} = \lim_{a \to 0} -\frac{1}{2} a^2 = \underline{0}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} = \underline{-\frac{1}{4}}$$

$$I_0 = \int_0^1 x \, dx = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = I_1$$

OK for $n=1$.

Hypotese: Anta at (★) holder for alle $n$ opp til og med $k \in \mathbb{N}$.

Vil vise at da er (✱) også sann for $k+1$:

$$I_{k+1} = -\frac{k+1}{2} I_k$$

Induksjonssteg: $I_{k+1} = \int_0^1 x (\ln x)^{k+1} dx$

$$= \lim_{a \to 0} \left[ \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^{k+1} \right]_{x=a}^{1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\cancel{x}} (k+1)(\ln x)^k \frac{1}{2} x^{\cancel{2}} dx}$$

$u = (\ln x)^{k+1}$
$v' = x$
$\Rightarrow$ $v = \frac{1}{2}x^2$
$u' = (k+1)(\ln x)^k \frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{2}(k+1) I_k - \frac{1}{2} \lim_{a \to 0} a^2 (\ln a)^{k+1}$$

M: $\lim_{a \to 0} \underset{\downarrow\, 0}{a^2} \underset{\downarrow\, \infty}{(\ln a)^{k+1}} = \lim_{a \to 0} \frac{(\ln a)^{k+1}}{\frac{1}{a^2}} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" : L'H}}{=} \lim_{a \to 0} \frac{(k+1)(\ln a)^k \frac{1}{a}}{-2a^{-3}}$

$$= -\frac{k+1}{2} \lim_{a \to 0} \frac{(\ln a)^k}{\frac{1}{a^2}}$$

Merk: Samme vil skje når vi fortsetter! Graden til $(\ln a)^{\cdots}$ vil reduseres med én per runde L'H, men vi vil beholde $\frac{1}{a^2}$ i nevneren. Får bare noen ekstra konstanter per runde.

en konstant

$$\lim_{a \to 0} a^2 (\ln a)^{k+1} = \ldots = K \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a^2}} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" : L'H}}{=} K \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1}{a}}{-2\frac{1}{a^3}}$$

$$= C \lim_{a \to 0} a^2 = \underline{0}$$

Så: $I_{k+1} = -\frac{k+1}{2} I_k - \frac{1}{2}\cdot 0 = -\frac{k+1}{2} I_k$

som var det vi ville vise. ∎

VIS:

b) $I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$ $(\square)$

Bevis: $n=1$: VS: $I_1 \overset{a)}{=} -\frac{1}{4}$

HS: $(-1)^1 \frac{1!}{2^{1+1}} = -\frac{1}{4}$

$n+1 = 1+1 = 2$

$2+1 = 3$ ...

Så VS = HS $\Rightarrow$ $(\square)$ er OK for $n=1$.

Hypotese: Anta at $(\square)$ holder for alle $n$ opp til $k \in \mathbb{N}$.

Induksjonssteg: Vil vise at da holder $(\square)$ også for $k+1$:

$$I_{k+1} \overset{a)}{=} -\frac{k+1}{2} I_k \overset{\text{Hypotese}}{=} -\frac{k+1}{2} (-1)^k \frac{k!}{2^{k+1}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{2^{(k+1)+1}}$$

$k! = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$

$(k+1)k!$

$= 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)$

$= (k+1)!$

som er det vi ville vise. ∎