Grublegruppe - Uke 5.
Tirsdag 28.september 16.15-18.00

I en Kalkulusbok kommer du over følgende resultat:

La $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$. Da finnes det en $c \in [a,b]$ slik at

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Oppgave 1. Bestem antagelsene og konklusjonen til resultatet.

Oppgave 2. Hva er den geometriske tolkningen av resultatet?
(a). Lag en tegning av påstanden i resultatet.
(b). Omformuler resultatet til et geometrisk resultat.

Oppgave 3. Finnes det en begrensing på antall punkter i intervallet $[a,b]$ som oppfyller konklusjonen?

Oppgave 4. Undersøk om resultatet er sant hvis
(a). Funksjonen f er diskontinuerlig i minst et punkt i intervallet $[a,b]$.
(b). Funksjonen f er definert på (a,b).
(c). Funksjonen f er definert på $[a,d) \cup (d,b]$.

Oppgave 5. Bytt rollene på antagelsen og konklusjonen. Er påstanden din sann i dette tilfellet? Bevis eller motbevis.

Oppgave 6. Bevis resultatet ved å f.eks. bruke en av følgende teoremer:
(1). Middelverdisetningen.
(2). Skjæringssetningen.

Oppgave 7. Velg deg et annet teorem (f.eks. skjæringssetningen) og still deg selv tilsvarende spørsmal som ovenfor.

Oppgave 8. La $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ og la $x \in [a,b]$. Forklar at $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du$ er en funksjon.
(a). Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $g'(x) = f(x)$.
(b). Vis at $\displaystyle\int_a^b f(u)du = g(b) - g(a)$.

Oppgave 9. La $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Finn minimumsverdien av

$$f(x) = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)}$$

Oppgave 10. La n være et positivt heltall. Hvor mange måter kan vi skrive n som en sum av k positive heltall, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$, der k er et positivt heltall og $a_1 \leq a_2 \leq a_k \leq a_1 + 1$?

Oppgave 11. I trekant ΔABC er $\angle C = \frac{\pi}{2}$ og $\angle BAC = \theta$. Punktet D er valgt på linjestykket AB slik at $|AC| = |AD| = 1$. Punktet E er valgt på linjestykket BC slik at $\angle CDE = \theta$. Normalen på linjestykket BC i punktet E treffer linjestykket AB i F. Regn ut $\lim\limits_{\theta\to 0} |EF|$.