Før pausen: 6.1.3a, 6.1.6, 6.1.13, 6.2.2a, 6.2.6, 6.2.7, 6.2.9, 6.2.13, (6.2.16, 6.2.20)

Etter pausen: (6.2.7, 6.2.9), 6.3.1c, 6.3.3cde, 6.3.5, 6.3.13, 6.3.6, 6.3.23

6.1.3a) Bruk logaritmisk derivasjon til å derivere: $f(x) = x^2 \cos^4 x \, e^x$.

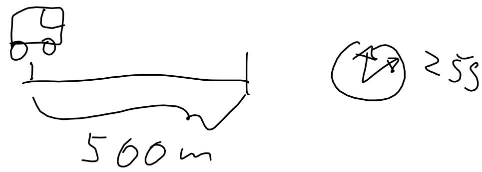
$$f'(x) = f(x)\, D[\ln f(x)]$$

$$= x^2 \cos^4 x \, e^x D\left[\ln\left(x^2 \cos^4 x \, e^x\right)\right]$$

$$= x^2 \cos^4 x \, e^x \, D\left[2 \ln x + 4 \ln|\cos x| + x\right]$$

$$= x^2 \cos^4 x \, e^x \left[\frac{2}{x} + 4 \underbrace{\frac{-\sin x}{\cos x}}_{= \tan x} + 1\right]$$

6.1.6: Fartskontroll:



Strekning : $500\,m = s$

tid : $25\ s = t$

usikkerhet i tid: $\pm 1\,s = \Delta t$

Fart : $v(t) = \frac{s}{t}$

usikkerhet i fart:

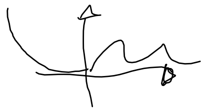
$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) \approx v'(t)\cdot\Delta t = -\frac{s}{t^2}\cdot\Delta t$$

$$= -\frac{500\,m}{(25\,s)^2}\cdot(\pm 1\,s) = -\frac{5\cdot 25\cdot 4}{25\cdot 25}\cdot m/s = -\frac{4}{5}\,m/s = \mp 0.8\,m/s$$

Så usikkerhet i fart er: $\underline{\underline{\pm 0{,}8\,m/s}}$.

6.1.13 La $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{for } x > 0 \\ x^2 & \text{for } x \le 0 \end{cases}$

Er f deriverbar i 0?



Altså eksisterer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \overset{\lim_{h\to 0^+}}{=} \frac{\frac{1-\cos h}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\cos h}{h^2} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{2h} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h}{2}$$

$$= \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

[uten L'H

$$\frac{(1+\cos h)(1-\cos h)}{(1+\cos h)\, h^2} = \frac{1-\cos^2 h}{h^2}$$

$$= \frac{\sin^2 h}{(1+\cos h)\, h^2}$$
]

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0$$

Så $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

Så $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ eksisterer ikke.

Så f er ikke deriverbar i 0.

6.2.7a) Vis at $f(x) = \cos x - x$ har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[0, \pi/4]$

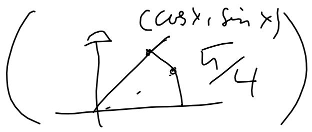
Bevis: $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$

$$f(\pi/4) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} < 0$$

$$\left(8 < \pi^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4} \right)$$

Så fra skjæringssetningen vet vi at det finnes en $c \in [0, \pi/4]$ slik at $f(c) = 0$.

Men, $f'(x) = -\sin x - 1$ og $-\sin x - 1 < 0$ for alle $x \in [0, \pi/4]$.



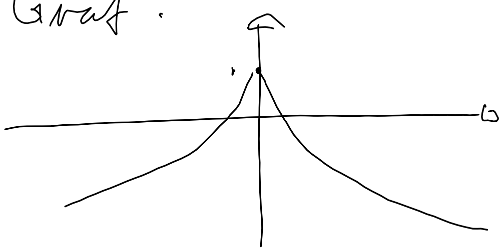
Så f er strengt synkende på $[0, \pi/4]$.

(Så for x i $[0, c)$ så er $x < c$
så $f(x) > f(c) = 0$
og for x i $(c, \pi/4]$ så er $c < x$
så $0 = f(c) > f(x)$)

Dermed er c det eneste nullpunktet til f på $[0, \pi/4]$.

6.2.6

La $f(x) = 1 - x^{2/3}$ Graf:



Vis at $f(-1) = f(1)$, men at det ikke finnes en c i $(-1, 1)$ slik at $f'(c) = 0$. Hvorfor strider ikke dette mot Rolles teorem?

Ser $f(-1) = 1 - (-1)^{2/3} = 1 - \left((-1)^2\right)^{1/3} = 1 - 1^{1/3} = 0$

(forutsetter reelle røtter) $\quad \|$

$f(1) = 1 - 1^{2/3} = 0$

men $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ (for $x \neq 0$) $\left(= -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$

som aldri er lik 0.

men dette strider ikke mot Rolles teorem siden f ikke er deriverbar i 0.

(f - ikke. Siden $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - h^{2/3} - 1}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} -h^{-1/3} = -\infty$)

som ikke eksisterer

6.2.7 Vis at mellom 0 og x finnes en c slik at $\sin x = x\cos c$.

Bevis: Middelverdisetningen anvendt på $f(y) = \sin y$ på intervallet $[0,x]$: så det finnes en c i $(0,x)$ slik at

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}, \qquad f'(c) = \cos c$$

Så $\sin x = x\cos c$.

Vis at $|\sin x| \leq |x|$ for alle x.

Vi vet at $\sin x = x\cos c$ for en $c \in (0,x)$

$\Rightarrow |\sin x| = |x\cos c| = |x|\cdot|\cos c| \leq |x|\cdot 1$

(siden $|\cos c| \leq 1$ for alle c)

6.2.9: Anta $x > -1$

Vis at det finnes c mellom 0 og x

slik at $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2\sqrt{1+c}}$.

Bevis: middelverdisetningen på

$f(y) = \sqrt{1+y}$ på intervallet $[0, x]$:

så det finnes en $c \in (0, x)$ slik at

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = D[1+x] \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

Så $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2\sqrt{1+c}}$

Vis at $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Bevis: Vet at $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2\sqrt{1+c}}$

for en c i $(0, x)$.

men $1 \leq \sqrt{1+c} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} \leq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{2\sqrt{1+c}}}_{= \sqrt{1+x} - 1} \leq \frac{x}{2}$$

Så $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

6.3.1c) Beregn $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan 3x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{3}{\cos^2 3x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 3x}{3}$

$= \frac{\cos^2(3 \cdot 0)}{3}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

6.3.3c Bereqn: $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x} \cdot \sin x \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\sin x \right]}_{=1} \cdot \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \right]$$

$$\overset{L'H}{=} 1 \cdot \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\frac{1}{-\sin x} \right] = \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -1$$

6.3.3d $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{\ln x}\right)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

$= e^{\left(\lim_{x \to 0^+} x \ln x\right)} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

siden e er kontinuerlig

$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\left(1/x\right)} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

6.3.3e) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\cdot x}$

$= e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\sin 1/x\right)} = e^1 = \underline{\underline{e}}$

$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\sin 1/x)}{1/x}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}\cos\frac{1}{x}}{1+\sin 1/x}\right)}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos 1/x}{1+\sin 1/x} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0}$

$= \frac{1}{1}$

6.3.7 Beregn $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \to 0} \cos x \left(\frac{x - \overset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\overset{\parallel}{\tan x}}}{x^3} \right)$$

$$= \overbrace{\lim_{x \to 0} \cos x}^{\cos 0 = 1} \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \overset{L'H}{=}$$

$$1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \left(\frac{\overbrace{\cos^2 x - 1}^{-\sin^2 x}}{3x^2} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x}}_{1} \cdot \lim_{x \to 0} \left(- \frac{\sin^2 x}{3x^2} \right)$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \Bigg(\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{\overset{L'H}{\parallel}} \Bigg)^2 = -\frac{1}{3} \cdot 1^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

6.3.23 La $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{når } x = 0 \end{cases}$

Vis at g er to ganger deriverbar i 0. og finn første og andre derivert i 0.

Bevis: La oss først beregne $f'(x)$ for alle x.

Vil vise $g'(x) = \begin{cases} D\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

siden $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ når x er i $(0,\infty)$ eller i $(-\infty,0)$

vil $g'(x) = D\left[\frac{\sin x}{x}\right]$, siden to funksjoner som er like på et åpent intervall har samme deriverte i det åpne intervallet.

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

Da er $g''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$$

6.3.7

$$\underline{\underline{=}} - \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

6.2.13 Anta f er kontinuerlig på $[a,b]$ og to ganger deriverbar på (a,b), og $f(a) = f(d) = f(b)$ for en $d \in (a,b)$.
Vis at det finnes en $c \in (a,b)$ slik at $f''(c) = 0$.

Bevis: Det finnes en $c_1 \in (a,d)$ slik at
$$\frac{0}{d-a} = \frac{f(d)-f(a)}{d-a} = f'(c_1) \quad \text{(fra middelverdisetningen)}$$
$$f'(c_1) = 0$$

Tilsvarende finnes en $c_2 \in (d,b)$ slik at $f'(c_2) = 0$.

Vi vet at f' er deriverbar. Så middelverdisetningen anvendt på f' på (c_1, c_2) sier at det finnes en c slik at
$$\frac{\overset{0}{f'(c_2)} - \overset{0}{f'(c_1)}}{c_2 - c_1} = f''(c)$$
$$0 = f''(c)$$

Så $f''(c) = 0$. ∎