MAT1100 - Grublegruppen
Notat 8

Jørgen O. Lye

Partielle differensialligninger

Definisjonen av en partiell differensialligning er like enkel som den er vid. En partiell differensialligning, ofte kalt PDE (partial differential equation), er en ligning hvor en funksjon opptrer sammen med partiellderiverte. Husk at hvis $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ er en funksjon i n variable, dvs

$$f : U \to \mathbb{R}$$

med $U \subset \mathbb{R}$ en åpen delmengde, så er de i'te partiellderiverte definert som

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots x_i + h, \cdots x_n) - f(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n)}{h}$$

Med andre ord skal man bare derivere som man alltid har gjort, og man later som de andre variablene er konstanter. Eksempelvis: $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + \sin(y)\right) = 2xy$.

PDE'er oppstår typisk når man vil modellere størrelser som endrer seg både i tid og rom. Det finnes mange eksempler, hvor historisk sett har de fleste kommet fra fysikk. Geometri og finans er 2 andre kilder til PDE'er. Før vi går videre på den generelle teorien kan vi se på noen eksempler.

Eksempler på PDE'er

I alle eksemplene unntatt Maxwells ligninger kommer jeg til å skrive n som dimensjonen på rommet. De fleste realistiske eksempler har $n = 3$, men det finnes bruksområder for $n = 2$, samt teoretisk interesse av $n > 3$. $n = 1$ er ofte brukt til å illustrere teorien.

Bølgeligningen

Bølgeligningen sier følgende

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

Her betyr $u(t, \mathbf{x})$ typisk amplituden til en bølge. c er bølgehastigheten. Hvis bølgene man ønsker å modellere er elektromagnetiske bølger, så vil c være lyshastigheten. Hvis man modellerer lydbølger, så er c lydhastigheten. Generelt sett er ikke egentlig c en konstant. Ikke engang hvis c er lyshastigheten. Lyshastigheten er bare konstant i vakuum, ikke f.eks. i luft. Det er derimot vanlig å forenkle til tilfellet hvor c er konstant.

Varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{2}$$

Denne ligningen har flere bruksområder. Den har navnet sitt etter når $u(t, \mathbf{x})$ modellerer temperaturen ved tiden t og i punktet $\mathbf{x}$. α er da en konstant som forteller noe om varmeledningsevnen til det man ser på. α vil typisk heller ikke være en konstant, men det er vanlig å jobbe med den som om den var det.

Bruksområde nummer 2 er diffusjon. $u(t, x)$ vil da måle konsentrasjonen av noe (populært blant akademikere er en melkeskvett i kaffe) som funksjon av tid og rom. Ligningen vil altså gi svaret på "Anta man tilsetter en dråpe melk til en kopp kaffe. Hvordan sprer melken seg?"

Schrödingerligningen

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j^2} + V(\mathbf{x})\Psi \tag{3}$$

Her vil $\Psi(t, \mathbf{x})$ være en kompleks funksjon som modellerer en partikkel på følgende måte. Hvis $V \subset \mathbb{R}^n$, så har løsningen egenskapen at

$$\int_V |\Psi(t, \mathbf{x})|^2 \, d^n x = p(t)$$

hvor $p(t)$ er en sannsynlighet for å finne partikkelen man modellerer innenfor området V ved tidspunktet t. $\hbar$ er en naturkonstant, mens m er partikkelens masse. $V(\mathbf{x})$ er en potensiale partikkelen opplever. Hvis man modellerer elektroner rundt atomkjerner bruker man typisk et Coulomb-potensiale, f.eks. Det er en egen liten industri å lage seg potensialer som er realistiske nok til å beskrive den fysikken du vil, men som også er enkle nok til at man klarer å løse Schrödinger-ligningen, om enn bare numerisk.

Maxwells ligninger

La $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Da er Maxwells ligninger følgende 4 ligninger:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \tag{4d}$$

Størrelsene som inngår er som følger. $\mathbf{E}$ er et elektrisk felt, $\mathbf{B}$ er et magnetisk felt, ρ er ladningstettheten, som godt kan være en funksjon. μ_0 og ϵ_0 er 2 konstanter. $\mathbf{J}$ er strømtettheten; strøm per areal.

Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \tag{5}$$

Dette er på mange måter grunnlaget for fluidmekanikk. Hele ligningen brukes sjelden. Symbolene betyr følgende. ρ er tettheten (av væsken, f.eks vannet), gjerne som en funksjon av tid og rom. $\mathbf{v}$ er væskens hastighet i punktet $\mathbf{x}$ og ved tiden t. p er trykket. $\mathbf{T}$ er deler av spenningen (mekanisk spenning, ikke elektrisk). $\mathbf{f}$ er ytre krefter som virker på fluidet (fluid er fellesbetegnelse på væske og gass).

Navier-Stokes er veldig viktig i mange anvendelser av fluidmekanikk. Inkludert simulering av grafikk i spill. Den er også notorisk vanskelig å ha med å gjøre generelt sett. De samme som betaler 1 million dollar for et bevis eller moteksempel mot Riemann-hypotesen gir også den samme prisen for å bevise at Navier-Stokes alltid har glatte løsninger. Dvs funksjoner som er uendelig ganger deriverbare. Merk at man ikke ber om løsninger. Det er nok å vise at løsninger finnes, noe man her ikke har klart!

Hva er en løsning?

Med en (klassisk) løsning av en PDE skal vi mene en funksjon som kan puttes inn på begge sider av likhetstegnet. Videre skal den tilfredsstille eventuelle initialbetingelser og randbetingelse, som jeg skal definere hva er. Husk at for en ordinær differensialligning, en ODE, så trenger man like mange initialbetingelser som den høyeste deriverte. Dette kan man tenke på som følger. Hvis man har ligningen

$$y''(t) = f(y', y, t)$$

så er

$$y'(t) = \int_{t_0}^{t} f \, d\tau + y'(t_0)$$

og

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau) \, d\tau + y(t_0)$$

Her har jeg bare brukt analysens fundamentalteorem. Man trenger altså å vite $y'(t_0)$ og $y(t_0)$. Dette var for ODE'er. Hvis så $y = y(t, x)$, så kan man gjøre det samme, bortsett fra at nå vil man ha $y(t_0, x)$ og $\frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x)$. Dvs initialbetingelsene er x-avhengige. Man har også noen x-deriverte som vil sørge for analoge krav: $y(t, x_0)$ må være kjent for alle t. Disse oppfører seg matematisk som initialbetingelser, men siden de liksom sier noe om rommet og ikke tiden kalles disse randbetingelser.

Vi skal se på eksempler for dette.

Separasjon av variable

Hvis man har en PDE med ukjent funksjon $u(t, x)$ (i 1 romvariabel her for notasjonens skyld), så kan man gjette på en løsning av formen $u(t, x) = f(t) \cdot g(x)$. Dette er er en gjetning som ikke alltid virker. Men den virker ofte nok til at den er verdt å snakke om. Hvis man i tillegg har et unikhetsresultat for løsningene sine, så vet man at dersom denne gjetningen fører frem så har man ikke mistet noen løsninger. Å bevise slike unikhetsteoremer er derfor en stor del av hva som gjøres på teorisiden av PDE-teori.

Dette trikset kalles separasjon av variable, og vi skal se hvordan det virker i praksis og hvorfor det er lurt under.

Linearitet

En siste kommentar før vi ser på eksempler løsninger. Man kan tenke seg at man skriver en PDE som

$$D(f) = 0$$

hvor D er summer av partiellderiverte, andre kjente funksjoner, konstanter, osv. I eksemplene over har vi

$$D(u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right) u$$

for bølgeligninge, mens

$$D(u) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(\mathbf{x})\right) u$$

for Schrödinger-ligningen. Man sier at PDE'en er lineær hvis $D(\alpha u + \beta v) = \alpha D(u) + \beta D(v)$ for funksjoner u og v og tall α, β. Ikke alle PDE'er er lineære. Navier-stokes f.eks er ikke det.

Fordelen ved linearitet er at dersom u og v er løsninger, så er automatisk $u + v$ det også!.

Løsninger ved hjelp av Fourier

Vi skal bruke en del av triksene på varmeligningen. For enkelhetsskyld gjør vi det i i én romdimensjon, selv om akkurat dette trikset fungerer i flere dimensjoner.

Ligningen er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La oss anta vi ser på intervallet $[-\pi, \pi]$, og la oss anta at $u(t, -\pi) = u(t, \pi) = 0$. Siden u modellerer temperatur, så vil dette svare til at vi har en tynn stav med lengde 2π som vi har en fast temperatur i endepunktene til enhver tid. Ved eventuelt å bytte ut u med $u - C$ så har vi antatt at temperaturen i endepunktene er 0, i en eller annen måleenhet. Dette er et eksempel på randbetingelser.

Vi antar at løsningen separerer. Dvs. vi skriver $u(t, x) = f(t)g(x)$. Innsatt i ligningen får en da at

$$g(x)\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha f(t)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

Deler man på f, g og α på begge sider får man

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{f}f'(t) = \frac{1}{g}g''(x)$$

Høyresiden er uavhengig av t, mens venstresiden er uavhengig av x. Magien er at da må begge sider være lik en konstant! A priori kan denne være positiv eller negativ. For å spare en del regning gjetter vi her på negativ. Det er en grubleoppgave å sjekke hva som skjer om man gjetter positiv! Kall denne konstanten $-\lambda$.

Den første ligningen vi får er

$$f'(t) = -\lambda\alpha f(t)$$

som har løsningen

$$f(t) = Ae^{-\lambda\alpha t}$$

hvor A er en konstant.

Den andre ligningen er

$$g''(x) = -\lambda g(x)$$

med løsningene

$$g(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x) + C\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Randbetingelsene oversetter til at $g(-\pi) = g(\pi) = 0$. Dvs

$$-B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + C\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

$$B\sin(\sqrt{\lambda\pi}) + C\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

La oss anta at $C = 0$. Dette kan man gjøre, siden ligningparet kan omformes til å være $B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = C\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, og da må enten C eller B være 0. Nøyaktig hvilken som er riktig er avhengig av mer detaljer fra problemet, nemlig man må si noe om $\frac{\partial u}{\partial x}$ ved $x = -\pi$ og $x = \pi$. Dette har jeg glattet over. Kravet på sinus ved $C = 0$ blir

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \implies \sqrt{\lambda}\pi = n\pi$$

med $n \in \mathbb{Z}$ Altså

$$\lambda = n^2$$

Alt i alt kan vi da skrive en løsning som

$$u_n(t, x) = e^{-n^2\alpha t}\sin(nx)$$

hvor jeg har skrevet u_n for å understreke at vi har mange løsninger (en for hver $n \in \mathbb{Z}$). Vi trenger derimot bare $n \in \mathbb{N}$, siden $n < 0$ bare gir en konstant i forskjell, nemlig -1.

Vi har en betingelse vi ikke har brukt, nemlig initialbetingelsen. Man skal ha at

$$u(0,x) = u_0(x)$$

hvor høyresiden er en kjent funksjon, og hvor vi har valgt at $t_0 = 0$. Dette svarer til at vi opprinnelig må kjenne varmefordelinger for å kunne forutsi hvordan utviklingen ser ut. Det er ikke sikkert at $u_0(x) = u_n(0,x)$ for noen n. Men merk at varmeligningen er lineær. Så $u(t,x) = \sum c_n u_n$ er også en løsning. Spørsmålet er derfor: kan man skrive enhver funksjon $u_0(x)$ som

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$$

Dette er hvordan Fourier kom borti Fourier-rekker. Som vi har påstått er svaret veldig ofte ja, selv om Fourier selv ikke klarte å vise dette.

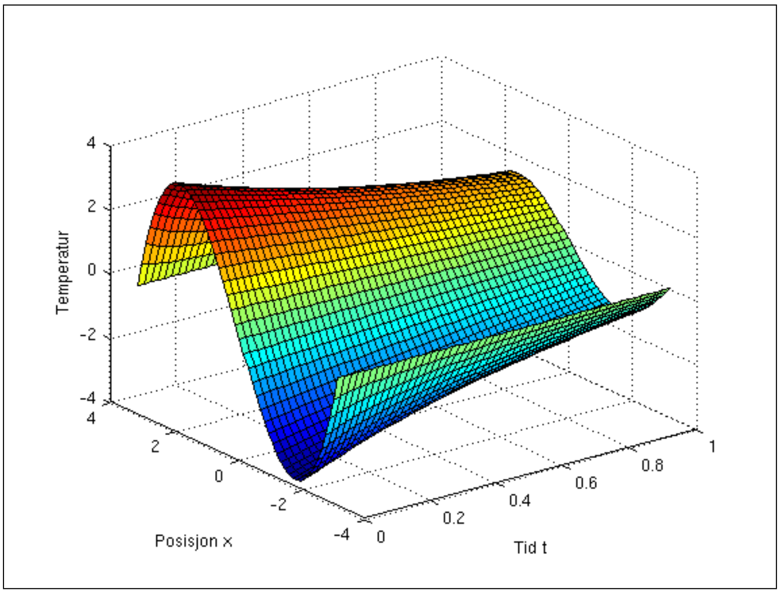
Alt i alt har vi da at løsningen av varmeligningen med randbetingelser $u(t, -\pi = u(t,\pi) = 0$ og initialbetingelse $u(0,x) = u_0(x)$ er

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \alpha t} \sin(nx)$$

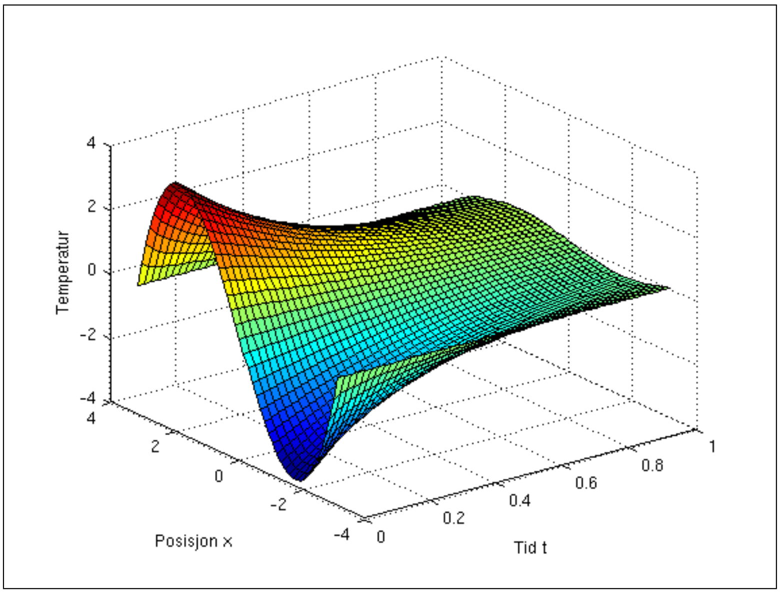
hvor $c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) u_0(x)\, dx$

Dette er kanskje det vanligste bruksområdet for Fourier-rekker. Et lignende oppsett fungerer for bølgeligningen også.

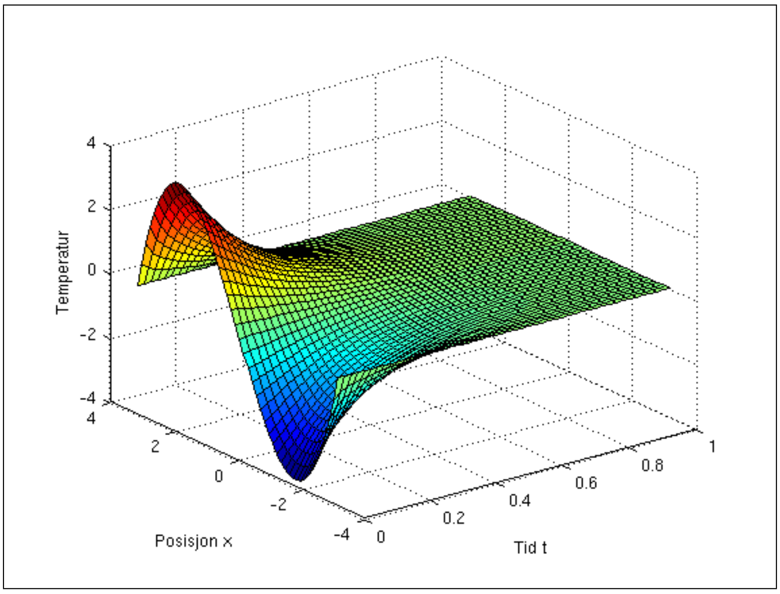
Hvis en antar initialtilstand $u_0(x) = -x(x^2 - \pi^2)$ så får man plottene vedlagt som figur 1 til 3 for 3 forskjellige verdier av α. Plottene er frembragt ved å bruke formelen vår over med en trunkert Fourier-rekke (15 ledd er tatt med). Koeffisientene c_n har MATLAB regnet ut numerisk ved en iterativ Simpsons metode. Merk at den fysiske tolkningen av α er en varmeledningsevne. Jo høyere α, dess fortere fordeles temperaturne langs staven. Siden endepunktene har fiksert temperatur 0 vil temperaturen i hele staven gå mot 0. α bestemmer hvor fort dette går.



Figur 1: Løsning av varmeligningen som i teksten. $\alpha = 1$



Figur 2: Løsning av varmeligningen som i teksten. $\alpha = 2.5$



Figur 3: Løsning av varmeligningen som i teksten. $\alpha = 5$