Kapittel 4

Seksjon 4.1

Oppgave 4.1.3

b)

Differenslikningen $x_{n+2}+2x_{n+1}+4x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2+2r+4 = 0$, som har røtter

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Velger vi $r = -1 + i\sqrt{3}$ finner vi at r har modulus $\sqrt{1+3} = 2$, og argument gitt ved $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, som gir at $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Setning 4.1.16 gir derfor at den generelle løsningen på kompleks form er

$$x_n = Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n = C(-1+i\sqrt{3})^n + \overline{C}(-1-i\sqrt{3})^n,$$

mens den generelle løsningen på reell form er

$$x_n = E2^n \cos(2\pi n/3) + F2^n \sin(2\pi n/3).$$

Oppgave 4.1.4

a)

Differenslikningen $x_{n+2}-3x_{n+1}+3x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2-3r+3 = 0$, som har røtter $r = \frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2} = \frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$. Velger vi roten $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ så kan vi skrive den generelle løsningen på kompleks form som

$$x_n = C\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \overline{C}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

$\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ har modulus $\sqrt{9+3}/4 = \sqrt{3}/2$, og argument $\theta = \arctan(\sqrt{3}/3) = \pi/6$. Den generelle løsningn på reell form kan dermed skrives

$$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos(n\pi/6) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \sin(n\pi/6).$$

Oppgave 4.1.5

a)

Differenslikningen $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2+r-6 = 0$, som har løsning $r = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$, som gir røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = -3$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = C2^n + D(-3)^2$. Setter vi inn for initialverdiene får vi likningene

$$
\begin{aligned}
C + D &= 9\\
2C - 3D &= -2.
\end{aligned}
$$

Løser vi disse får vi at $C = 5$ og $D = 4$, slik at løsningen blir $x_n = 5\cdot2^n+4\cdot(-3)^n$.

b)

Differenslikningen $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2-r+1 = 0$, som har løsning $r = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Velger vi $r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ så ser vi at r har modulus 1, og argument gitt ved $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{3}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$
x_n = E1^n\cos(n\pi/3) + F1^n\sin(n\pi/3) = E\cos(n\pi/3) + F\sin(n\pi/3).
$$

$x_0 = 2$ og $x_1 = 1$ gir likningene

$$
\begin{aligned}
E &= 2\\
E\frac{1}{2} + F\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1.
\end{aligned}
$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F = 0$, slik at løsningen blir $2\cos(n\pi/3)$.

d)

Differenslikningen $x_{n+2}+2x_{n+1}+2x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2+2r+2 = 0$, som har løsning $r = -1 \pm i$. Velger vi $r = -1 + i$ så ser vi at r har modulus $\sqrt{2}$, og argument gitt ved $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$
x_n = E(\sqrt{2})^n\cos(n3\pi/4) + F(\sqrt{2})^n\sin(n3\pi/4).
$$

$x_0 = 1$ og $x_1 = -2$ gir likningene

$$
\begin{aligned}
E &= 1\\
-E\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + F\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} &= -2.
\end{aligned}
$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F = E - 2 = -1$, slik at løsningen blir

$$
x_n = (\sqrt{2})^n\cos(n3\pi/4) - (\sqrt{2})^n\sin(n3\pi/4).
$$

Oppgave 4.1.9

Siden første siffer skal være 1 er det klart at vi må ha at $a_1 = 1$. Siden neste siffer ikke kan være 1 hvis forrige var 1, så er det klart at andre siffer må være 0. Dermed må vi også ha $a_2 = 1$, siden det bare er en mulighet for de to første sifrene. Dette forklarer initialbetingelsene.

La oss så forklare hvorfor vi har at $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ for $n > 2$. Alle sekvenser av lengde n kan splittes i to kategorier: de som slutter med 0, og de som slutter med 1. Siden to enere ikke kan følge etter hverandre så må sistnevnte slutte med 01. Observer nå følgende:

1. For sekvenser av lengde n som slutter med 0 så kan de første $n-1$ sifrene velges vilkårlig, slik at vi her har a_{n-1} muligheter.
2. For sekvenser av lengde n som slutter med 01 så kan de første $n-2$ sifrene velges vilkårlig, slik at vi her har a_{n-2} muligheter.

Legger vi sammen disse to mulighetene får vi at $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n > 2$.

Differenslikningen kan også skrives $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, som har karakteristisk likning $r^2 - r - 1 = 0$ med røtter $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Den generelle løsningen på differenslikningen er derfor $a_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Setter vi $a_1 = a_2 = 1$ får vi likningene

$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1,$$

som kan skrives

$$C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) = 2$$
$$C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) = 2.$$

Hvis vi trekker disse fra hverandre får vi at $2C + 2D = 0$, slik at $D = -C$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $2C\sqrt{5} = 2$, slik at $C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, og dermed $D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Dermed blir løsningen

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Oppgave 4.1.13

a)

Likningen vi skal frem til kan skrives som $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{5}{4}x_{n-2}$. Det første leddet svarer til de som var syke for en uke siden, og som fremdles er syke (25% av de som var syke). Det andre leddet svarer til de som er blitt smittet av de som hadde sykdommen for to uker siden.

b)

Den karakteristiske likningen er $r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{5}{4} = 0$, som har løsninger -1 og $5/4$. Den generelle løsningen er dermed $x_n = C(-1)^n + D(5/4)^n$. Initialverdiene er $x_0 = 190$, $x_1 = 260$, som gir likningene $C + D = 190$, $-C + (5/4)D = 260$, som gir $C = -10$, $D = 200$. Dette gir løsningen $x_n = -10(-1)^n + 200(5/4)^n$. Vi ser at $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

c)

Den nye differenslikningen blir $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{3}{4}x_{n-2}$ som har røtter 1 og $-3/4$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = C + D(-3/4)^n$. Initialverdiene gir $C + D = 190$, $C - (3/4)D = 260$, som gir $C = 230$, $D = -40$. Dette gir løsningen $x_n = 230 - 40(-3/4)^n$. Vi ser nå at $\lim_{n\to\infty} x_n = 230$. Anta til slutt at sykdommen er enda mindre smittsom, slik at antall syke tilfredsstiller differenslikningen $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - cx_{n-2} = 0$, med $c < 3/4$. Den karakteristiske likningen har da røtter $\frac{1/4 \pm \sqrt{1/16+4c}}{2}$. Når $c < 3/4$ har vi at $1/16 + 4c < 1/16 + 3 = 49/16$, slik at $\sqrt{1/16 + 4c} < 7/4$. Vi har da at

$$|r_i| = |\frac{1/4 \pm \sqrt{1/16 + 4c}}{2}| \leq 1/8 + \frac{\sqrt{1/16 + 4c}}{2} < 1/8 + 7/8 = 1.$$

Dermed blir begge røttene i den karakteristiske likningen mindre enn 1 i absoluttverdi, og dermed blir $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Oppgave 4.1.14

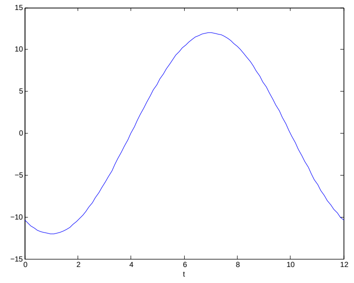
Den karakteristiske likningen er $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$, som har røtter $r = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{2} = \sqrt{3}/2 \pm i/2$. Setter vi $r = \sqrt{3}/2 + i/2$ ser vi at $\rho = 1$ og $\theta = \pi/6$, slik at den generelle løsningen er $x_n = E\cos(n\pi/6) + F\sin(n\pi/6)$. Initialverdiene $x_1 = -12$, $x_3 = -6$ gir likningene

$$\begin{aligned} E\sqrt{3}/2 + F/2 &= -12 \\ F &= -6, \end{aligned}$$

som gir at $E = \frac{2}{\sqrt{3}}(-12+3) = -6\sqrt{3}$. Løsningen blir dermed $x_n = -6\sqrt{3}\cos(n\pi/6) - 6\sin(n\pi/6)$. For å finne hvilken måned det er kaldest varmest, så kan vi sette den deriverte til funksjonen $f(t) = -6\sqrt{3}\cos(t\pi/6) - 6\sin(t\pi/6)$ lik 0. Vi får da $f'(t) = \frac{\pi}{6}\left(6\sqrt{3}\sin(t\pi/6) - 6\cos(t\pi/6)\right) = 0$. Derfor må vi ha at $\tan(t\pi/6) = \sqrt{3}/3$, slik at $t\pi/6 = \pi/6$ eller $t\pi/6 = 7\pi/6$, slik at $t = 1$ eller $t = 7$. Fra Figur 1 ser vi at minumum inntreffer ved $n = t = 1$ (1. februar), og maksimum inntreffer ved $n = t = 7$ (1. august).

Oppgave 4.1.15

Siden en hunn har både en mor og en far så er det klart at $x_1 = 2$. Siden moren har både mor og far, og faren bare har en mor, så er det klart at $x_2 = 3$, og at vi har to hunnbier og en hannbie to generasjoner tilbake. Siden hver hunnbie har to foreldre, og hannbien bare har en mor, så er det klart at $x_3 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Mer generelt, legg merke til at siden enhver bie i generasjon $n - 1$ har nøykatig



Figur 1: Temperatur i klimamodellen i Oppgave 4.1.4

en bie som mor fra generasjon n, så er antall hunnbier i generasjon n lik x_{n-1}. Videre er antall hannbier etter n generasjoner lik antall hunnbier i generasjon $n-1$ (siden det bare er hunnbiene som har en far fra forrige generasjon), og antall hunnbier i generasjon $n-1$ svarer igjen til x_{n-2}. Legger vi sammen antall hunnbier og hannbier får vi at $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Vi ser her at vi har samme differenslikning som i Oppgave 4.1.9, slik at vi har den generell løsningen $x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Setter vi inn $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$ får vi likningene

$$
\begin{aligned}
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 2 \\
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 3,
\end{aligned}
$$

som kan skrives

$$
\begin{aligned}
C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) &= 4 \\
C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) &= 6.
\end{aligned}
$$

Hvis vi trekker disse fra hverandre får vi at $2C + 2D = 2$, slik at $D = 1 - C$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $C + 1 - C + \sqrt{5}(C - 1 + C) = 4$, som gir at $\sqrt{5}(2C-1) = 3$, og dermed

$$
C = \frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
$$

hvor vi gjenkjente $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ fra utregninger ovenfor. Til slutt får vi

$$D = 1 - C = 1 - (\frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).
\end{aligned}$$

som er uttrykket for hvor mange forfedre en hunn har n generasjoner tilbake. La til slutt y_n være antall forfedre en hann har n generasjoner tilbake. Siden en hann bare har en mor så er det klart at generasjonstreet til en hann ser likt ut som for en hunn, med unntak av et ekstra generasjonsledd helt i begynnelsen. Derfor er

$$y_n = x_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Vi legger merke til at løsningen vi fikk både for x_n og y_n er det samme som den vi fant i Oppgave 4.1.9, med den ene forskjellen at sekvsensen er forsinket med en eller to elementer. Og hvis du ser nærmere på løsningen fra 4.3.9 så er $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, som jo er initialbetingelsene i denne oppgaven. Derfor kunne vi spart oss utregningene i denne oppgaven hvis vi allerede hadde sett at vi må få samme følge som i Oppgave 4.1.9.

Seksjon 4.2

Oppgave 4.2.1

a)

Den homogene likningen blir her $x_{n+1} - 2x_n = 0$, som har generell løsning $x_n = A2^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = Bn + C$ og får

$$\begin{aligned}
B(n+1) + C - 2(Bn + C) &= n \\
-Bn + B - C &= n,
\end{aligned}$$

som gir likningene

$$\begin{aligned}
-B &= 1 \\
B - C &= 0,
\end{aligned}$$

som gir $B = C = -1$, slik at $x_n^p = -n - 1$. Den generelle løsningen kan dermed skrives $x_n = A2^n - n - 1$.

Oppgave 4.2.5

a)

Den homogene likningen $x_{n+1} - 2x_n = 0$ har generell løsning $x_n^h = A2^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = B$, og får da $-B = 2$, slik at $B = -2$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = -2 + A2^n$. Siden $x_0 = 4$ får vi at $4 = -2 + A$, slik at $A = 6$. Løsningen blir derfor $x_n = -2 + 6 \times 2^n$.

b)

Den homogene likningen $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - 6r + 8 = 0$, som har røtter 2 og 4. Den generelle løsningen på den homogene likningen blir dermed $x_n^h = A2^n + B4^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = Cn + D$, og får da

$$\begin{aligned} C(n+2) + D - 6(C(n+1) + D) + 8(Cn + D) &= 9n \\ 3Cn - 4C + 3D &= 9n, \end{aligned}$$

som gir at

$$\begin{aligned} 3C &= 9 \\ -4C + 3D &= 0, \end{aligned}$$

som gir at $C = 3$ og $D = 4$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = A2^n + B4^n + 3n + 4$. Setter vi inn initialbetingelsene får vi likningene

$$\begin{aligned} A + B + 4 &= 3 \\ 2A + 4B + 7 &= 3, \end{aligned}$$

som gir $A = 0$, $B = -1$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = -4^n + 3n + 4$.

Oppgave 4.2.18

a)

Ut fra teksten i oppgaven tar vi ut $(1.02)^n a$ kroner det n'te året. Med renter på pengene fra året før får vi $1.06x_n$ kroner året etter, siden rentesatsen er 6%. Derfor får vi at

$$x_{n+1} = 1.06x_n - (1.02)^n a.$$

Initialbetingelsen blir $x_0 = 10$, siden vi starter med 10 millioner kroner på konto.

b)

Den generelle løsningen av den homogene likningen er $x_n^h = A(1.06)^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = c(1.02)^n$. Innsetting gir $c(1.02)^{n+1} = 1.06c(1.02)^n - (1.02)^n a$, som kan forenkles til $1.02c = 1.06c - a$, som gir $c = 25a$. Dene generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^h + x_n^p = 25a(1.02)^n + A(1.06)^n$. Setter vi inn $x_0 = 10$ får vi $25a + A = 10$, som gir $A = 10 - 25a$. Løsningen blir derfor

$$x_n = 25a(1.02)^n + (10 - 25a)(1.06)^n.$$

Når n går mot ∞ er det her leddet $(10-25a)(1.06)^n$ som vil dominere. Hvis vi vil alltid ha penger må vi derfor ha at $10-25a \geq 0$, som gir at $a < 0.4$. 400000 kroner er derfor det største beløpet vi kan ta ut det første året hvis vi aldri skal slippe opp for penger på kontoen.

c)

$x_{80} = 0$ gir

$$\begin{aligned}25a(1.02)^{80} + (10-25a)(1.06)^{80} &= 0\\ 25a(1.06^{80} - 1.02^{80}) &= 10 \times 1.06^{80}\\ a &= \frac{2}{5(1-(1.02/1.06)^{80})},\end{aligned}$$

som gir $a = 0.4193$, eller 419300kr. Vi kan altså ta ut litt mer penger per år hvis vi skal gå tom for penger etter 80 år. Dette høres jo rimelig ut.

Oppgave 4.2.21

a)

Andelen av vann fra springen i bassenget etter påfyll er S/V. Andelen gammelt vann i bassenget etter påfyll er $1-S/V$. Siden førstnevnte har saltkonsentrasjon K, mens sistnevnte har saltkonsentrasjon c_{n-1}, så følger det at $c_n = (1-S/V)c_{n-1} + (S/V)K$.

b)

Med de oppgitte tallene får vi likningen $c_n = \left(1-\frac{10}{100}\right)c_{n-1} + \frac{10}{100}0.1 = 0.9c_{n-1} + 0.01$, som kan skrives som $c_n - 0.9c_{n-1} = 0.01$. Den homogene likningen har generell løsning $c_n^h = C(0.9)^n$. For å finne en partikulær løsning c_n^p prøver vi med $c_n^p = A$ og får da at $A - 0.9A = 0.01$, slik at $A = 0.1$. Den generelle løsningen blir dermed $c_n = c_n^h + c_n^p = 0.1 + C(0.9^n)$. Initialbetingelsen $c_0 = 1$ gir at $1 = 0.1 + C$, slik at $C = 0.9$, og dermed blir $c_n = 0.1 + 0.9(0.9)^n = 0.1 + (0.9)^{n+1}$. For at saltkonsentrasjon skal bli halvert må vi ha at $c_n = 0.5$, slik at $0.1 + (0.9)^{n+1} = 0.5$. Dermed blir $(0.9)^{n+1} = 0.4$, slik at $(n+1)\ln(0.9) = \ln(0.4)$, slik at

$$n = \frac{\ln(0.4)}{\ln(0.9)} - 1 \approx 7.68.$$

Vi må derfor velge $n \geq 8$.

Seksjon 4.3

Oppgave 4.3.9

a)

Ganger vi ut får vi at

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}) \\
= \quad & x^n - x^{n-1}y \\
& +x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 \\
& +x^{n-2}y^2 - x^{n-3}y^3 \\
& \ldots \\
& +x^2y^{n-2} - xy^{n-1} \\
& +xy^{n-1} - y^n.
\end{aligned}$$

Vi ser her at alle ledd i summen på høyre side kansellerer bortsett fra det første og det siste, slik at vi står igjen med $x^n - y^n$, som var det vi skulle frem til.

b)

Setter vi først $n = 3$ i formelen fra a), og deretter $x = \sqrt[3]{n+1}$ og $y = \sqrt[3]{n}$ (legg merke til at her brukes nå n ikke som potensen som forekommer i a), dette kan være et forvirringsmoment i oppgaven!), så får vi først

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})((\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2) \\
= \quad & (\sqrt[3]{n+1})^3 - (\sqrt[3]{n})^3 = n+1-n = 1.
\end{aligned}$$

Etter divisjon får vi da

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2}.$$

c)

Bruker vi resultatet fra b) finner vi først at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\sqrt[3]{1} + (\sqrt[3]{1})^2} \\
&= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

d)

Setter vi først $n = 4$ og deretter $x = \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}$, $y = 1$ i formelen fra a) får vi at

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1\right) \\
&= \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^4 - 1^4 = 1+\frac{1}{n}-1 = \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

som gir at

$$n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Lar vi n gå mot uendelig her ser vi at høyresiden går mot $\frac{1}{1+1+1+1} = \frac{1}{4}$.

Oppgave 4.3.11

La $\epsilon > 0$ være gitt. Siden a_n og b_n begge konvergerer mot A så finnes det en N_1 og en N_2 slik at $|a_n - A| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for $n \geq N_1$, og $|b_n - A| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for $n \geq N_2$. La $N = \max(N_1, N_2)$. For $n \geq N$ har vi da at

$$\begin{aligned}
|c_n - A| &= |c_n - a_n + a_n - A| \leq |c_n - a_n| + |a_n - A| \leq |b_n - a_n| + |a_n - A| \\
&= |b_n - A + A - a_n| + |a_n - A| \\
&\leq |b_n - A| + |A - a_n| + |a_n - A| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,
\end{aligned}$$

som var det vi trengte vise.

Oppgave 4.3.17

Hvis følgen definert ved $a_0 = 0$ og $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ er konvergent, så kan vi finne grenseverdien a ved å la n gå mot uendelig på hver side i $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, og vi får da $a = \frac{a}{2} + 1$, som gir at $a = 2$ er eneste mulige grenseverdi. Videre, hvis $a_n < 2$ så er det klart at $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < 1 + 1 = 2$, og det følger ved induksjon at følgen er oppad begrenset av 2. Videre er

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} > 1 - 1 = 0,$$

slik at følgen er voksende. Siden følgen er voksende og oppad begrenset vet vi at den er konvergent, og 2 må være grenseverdien siden det er den eneste mulige grenseverdien.

Oppgave 4.3.18

a)

Hvis $x_n < 2$ så er det klart at $x_{n+1} < \sqrt{2 \times 2} = 2$, og det følger ved induksjon at alle $x_n < 2$. Det at $x_{n+1} > x_n$ er det samme som at $x_{n+1}^2 = 2x_n > x_n^2$, som er det samme som at $2 > x_n$, som vi allerede har vist. Derfor er følgen voksende.

b)

I a) viste vi at følgen er både voksende og oppad begrenset, og den er derfor konvergent. Grenseverdien må oppfylle $x = \sqrt{2x}$, som betyr at $x^2 = 2x$, som betyr at $x = 2$.

c)

Hvis følgen definert ved at $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$ har en grense y, så må $y = \sqrt{2y + y^2}$, som gir at $y = 0$. Følgen er opplagt voksende siden $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2} > \sqrt{y_n^2} = y_n$. Følgen kan da umulig konvergere mot 0 siden startverdien er 1, og eneste mulighet er at følgen går mot uendelig.