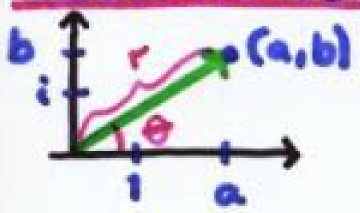
Komplekse tall

$$z = a + ib \quad \text{der } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } i^2 = -1$$

Geometrisk tolkning:



Det komplekse tallet $z = a + ib$ tolkes som punktet/vektoren med koordinater (a,b)

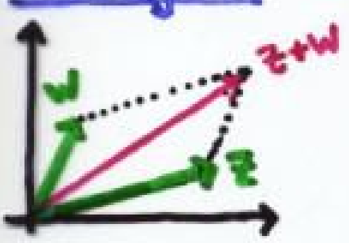
a realdel, b imaginærdel (kartesiske koordinater)
r modulus, θ argument (polar koordinater)

Oversette fra polar- til kartesisk form: $\boxed{a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta}$

Fra kartesisk- til polarform: $\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta = \frac{a}{r},\ \sin\theta = \frac{b}{r}}$

Tolkning av regneoperasjonene:

Addisjon:



Vektoraddisjon

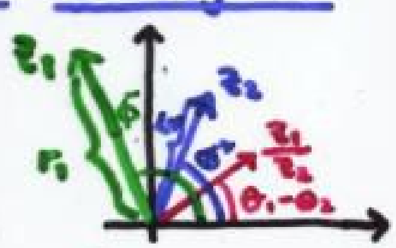
Subtraksjon:

Vektorsubtraksjon

Multiplikasjon:

$z_1 z_2$ har modulus $r_1 r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$

Divisjon:



$\frac{z_1}{z_2}$ har modulus $\frac{r_1}{r_2}$ og argument $\theta_1 - \theta_2$

Eksponentialfunksjon: $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

Spesielt: $e^{ib} = \cos b + i \sin b$

Skrivemåte: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$

Regneregler: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad (e^z)^n = e^{nz}$

De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Komplekse n-te røtter til $z = re^{i\theta}$: $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

($w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$. De øvrige ligger jevnt fordelt langs sirkelen med innbyrdes vinkelavstand på $\frac{2\pi}{n}$)

Komplekse annengradsligninger: $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$

Løsning: $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm w}{2a}$ hvor w er en kvadratrot til $b^2 - 4ac$

Eks 1: (Eksamen H99, oppg 2):

$z = 1 + i\sqrt{3}$, $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) Skriv $\frac{z}{w}$ på formen $a+ib$.

$$\frac{z}{w} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{i^2}}\sqrt{6}}{\sqrt{2}^2-\underset{-1}{\underset{\shortparallel}{i^2}}\sqrt{2}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) Skriv z og w på polarform. Forklar hvordan svaret i a) kan brukes til å regne ut $\cos 15^\circ$ og $\sin 15^\circ$.

$z = 1+i\sqrt{3}$: $\quad r_1 = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \underline{2}$

$\sin\theta_1 = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \underline{60^\circ}$ (siden z ligger i 1. kvadrant)

$w = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$: $\quad r_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \underline{2}$

$\sin\theta_2 = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_2 = \underline{45^\circ}$ (siden w ligger i 1. kvadrant)

Vi vet at $\frac{z}{w}$ har modulus $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

og argument $(\theta_1-\theta_2) = 60^\circ - 45^\circ = \underline{15^\circ}$

Dermed er $\frac{z}{w} = 1\cdot\cos 15^\circ + i\cdot 1\cdot \sin 15^\circ = \cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$

Ved å sammenligne realdelen og imaginærdelen med det vi regnet ut i punkt a) får vi at

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{og} \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Eks 2: Finn $(1+i)^{20}$.

Vi finner først polarkoordinatene til $z = 1+i$.

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$

Ved De Moivres formel får vi dermed at

$$(1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^{20} = \sqrt{2}^{20}\left[\cos\left(20\cdot\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\cdot\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^{10}(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}) = \underline{\underline{-1024}}$$

Eks 3: (Eksamen H2003, oppg 2a)

Vis at $z = 1+i$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - z^2 + 2$

Finn den komplekse og reelle faktoriseringen til $P(z)$.

Vi setter $z = 1+i$ inn i polynomet:

$$P(1+i) = (1+i)^3 - (1+i)^2 + 2 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 - 1 - 2i - i^2 + 2$$

$$= 1 + 3i - 3 - i - 1 - 2i + 1 + 2 = \underline{\underline{0}}$$

Altså er $z = 1+i$ en rot i polynomet.

Siden polynomet er reelt (alle koeffisientene er reelle) vet vi at det konjugerte tallet $\bar{z} = 1-i$ også må være rot i polynomet.

Dermed er $P(z)$ delelig på $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2 - 2z + 2$

Polynomdivisjon: $(z^3 - z^2 + 2) : (z^2 - 2z + 2) = \underline{z+1}$

$$\begin{array}{l} \underline{z^3 - 2z^2 + 2z} \\ \quad z^2 - 2z + 2 \\ \quad \underline{z^2 - 2z + 2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Den reelle faktoriseringen blir: $P(z) = \underline{\underline{(z^2 - 2z + 2)(z+1)}}$

Kompleks faktorisering: $P(z) = \underline{\underline{(z-1-i)(z-1+i)(z+1)}}$