Kapittel 5

Seksjon 5.1

Oppgave 5.1.5

Når vi viser at f er kontinuerlig i a ved et $\epsilon - \delta$-bevis, er det lurt å starte med uttrykket $|f(x) - f(a)|$, og finne en størrelse som er større enn denne, der $|x-a|$ inngår, og der vi har begrensinger på de andre leddene som inngår. Valget vårt for δ vil avhenge av det opprinnelige valget av ϵ, skalert med begrensningene på de andre leddene. De følgende oppgavene illustrerer dette.

e)

Vi har at $f(1) = 1$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-1| < \delta$. Vi ser først at

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}.$$

Her har vi allerede $|x-1|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|x|}$. Velger vi $\delta < \frac{1}{2}$ (det vil si $|x-1| < \frac{1}{2}$), så vil $|x| > \frac{1}{2}$, og $\frac{1}{|x|} < 2$. Vi får da

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2\delta.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Vi kan derfor velge $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

f)

Vi har at $f(0) = \frac{1}{3}$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$ for alle x slik at $|x| < \delta$. Vi har at

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x+3-x-3}{3(x+3)}\right| = \left|\frac{2x}{3(x+3)}\right|.$$

Her har vi allerede $|x|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|x+3|}$. Velger vi $\delta < 1$ (det vil si $|x| < 1$), så vil $|x+3| > 2$, og $\frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{2}$. Vi får da

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2x}{3(x+3)}\right| < \left|\frac{2 \times \delta}{3 \times 2}\right| = \frac{\delta}{3}.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < 3\epsilon$. Vi kan derfor velge $\delta = \min(1, 3\epsilon)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

g)

Vi har at $f(4) = 2$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $|\sqrt{x} - 2| < \epsilon$ for alle x slik at $|x - 4| < \delta$. Vi har at

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|}.$$

Her har vi allerede $|x - 4|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|\sqrt{x}+2|}$. Velger vi $\delta < 1$ (det vil si $|x-4| < 1$) ser vi at $|\sqrt{x}+2| > |\sqrt{3}+2| > 3$, og $\frac{1}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{1}{3}$. Vi får da

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \le \frac{\delta}{3}.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < 3\epsilon$. Vi kan derfor velge $\delta = \min(1, 3\epsilon)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

Seksjon 5.2

Oppgave 5.2.6

I et polynom P er det den potensen av høyest grad som vil dominere når x går mot uendelig. I et polynom av odde grad så vil leddet av høyest grad gå mot $-\infty$ når $x \to -\infty$, og mot ∞ når $x \to \infty$. Spesielt kan vi finne en N_1 slik at $P(x) < 0$ når $x < N_1$, og en N_2 slik at $P(x) > 0$ når $x > N_2$. For intervallet $[N_1, N_2]$ har vi derfor at $P(N_1) < 0$, $P(N_2) < 0$, og derfor følger det fra skjæringssetningen at P har minst et nullpunkt på $[N_1, N_2]$.

Oppgave 5.2.7

a)

La oss definere funksjonene $f(t)$ og $g(t)$ ved at de gir oss høyden ved tiden t på den første og den andre dagen, respektive. Kall videre starthøyden for A, og høyden på toppen for B. Da har vi at $f(7) = A, f(15) = B, g(7) = B, g(15) = A$. Definer også $h(t) = f(t) - g(t)$. Vi har nå at $h(7) = f(7) - g(7) = A - B < 0$, og $h(15) = f(15) - g(15) = B - A > 0$. Fra skjæringssetningen følger det nå at det finnes et nullpunkt c for h mellom 7 og 15. Her har vi at $f(c) = g(c)$, slik at c svarer til et tidspunkt mellom kl. 7 og kl. 15 der klatreren befinner seg i samme høyde.

b)

Vi har nå i stedet at $f(7) = A, f(15) = B, g(10) = B, g(16) = A$. Dette gir at $h(10) = f(10) - g(10) = C - B < 0$, og $h(15) = f(15) - g(15) = B - D > 0$, der

$C < B$ er høyden klatreren har kl. 10 første dag, og $D < B$ er høyden klatreren har kl. 15 andre dag. resten av resonnementet er nå som i a), slik at vi finner et tilsvarende tidspunkt mellom kl. 10 og 15 her. Altså har vi også her at det finnes et tidspunkt der høyden er de samme begge dagene.

Oppgave 5.2.12

a)

I summen

$$\left(f(0) - f\left(\frac{1}{N}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{2}{N}\right)\right) + \cdots + \left(f\left(\frac{N-1}{N}\right) - f(1)\right)$$

vil det andre og det tredje leddet kansellere hverandre, det fjerde og det femte. De siste leddene som kansellerer hverandre er det tredje siste og det nest siste. De eneste leddene som ikke kansellerer hverandre er det første og det siste, slik at vi står igjen med $f(0) - f(1)$. Med dette er 0 siden $f(0) = f(1)$ ved antagelse, som var det vi skulle vise. Hvis alle leddene ikke er null, og alle forskjellig fra null har samme fortegn, så må den totale summen bli forskjellig fra null også, som er en motsigelse. Altså finnes det garantert to ledd $\left(f\left(\frac{i}{N}\right) - f\left(\frac{i+1}{N}\right)\right)$ og $\left(f\left(\frac{j}{N}\right) - f\left(\frac{j+1}{N}\right)\right)$ som har motsatt fortegn.

b)

Vi har at $g\left(\frac{i}{N}\right)$ svarer til det i´te leddet i summen fra a), og vi har vist at to av disse leddene, $g\left(\frac{i}{N}\right), g\left(\frac{j}{N}\right)$ har motsatt fortegn. Men da følger det fra skjæringssetningen at det finnes en c (mellom $\frac{i}{N}$ og $\frac{j}{N}$) der $g(c) = 0$.

c)

La c være slik at $g(c) = 0$. Da blir $f(c) - f\left(c + \frac{1}{N}\right) = 0$, slik at $f(c) = f\left(c + \frac{1}{N}\right)$. Vi kan altså sette $d = c + \frac{1}{N}$, for da er jo også $d - c = \frac{1}{N}$.

d)

Vi regner ut

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 - 0 = 0 \\ h(1) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right), \end{aligned}$$

slik at $h(0) = h(1) = 0$. La nå c, d være slik at $d - c = a$. Vi skal vise at, så lenge a ikke er på formen $\frac{1}{N}$ for en eller annen N, så kan ikke $h(c) = h(d)$. Hvis $h(c) = h(d)$ ville

$$h(c) = \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) - c\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) - d\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = h(d).$$

Samler vi leddene her får vi

$$\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) = (d - c)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

Setter vi inn $d = a + c$ kan venstresiden skrives

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi(c+a)}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi c}{a} + \pi\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) = 0,\end{aligned}$$

og da må jo også høyresiden være null, slik at $a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$. Men dette kan skje bare hvis $\frac{\pi}{a}$ er på formen $N\pi$, slik at $a = \frac{1}{N}$, som strider mot antagelsen.

Seksjon 5.3

Oppgave 5.3.3

a)

Anta $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = B$. For enhver ϵ finnes det da konstanter N_1, N_2 slik at $|f(x) - A| < \epsilon$ for $x < N_1$, og $|f(x) - B| < \epsilon$ for $x > N_2$. Men da er f begrenset for $x < N_1$, og for $x > N_2$. f er også begrenset på $[N_1, N_2]$ siden dette er et lukket og begrenset intervall, og dermed er f begrenset på hele tallinjen.

b)

Anta at $f(x_1) < 0$, og at $f(x_2) > 0$. Siden $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så kan vi velge N_1, N_2 slik at $|f(x)| < \min(-x_1, x_2)$ for $x < N_1$ og for $x > N_2$. Men da vet vi at vi ikke kan finnes noen ekstremalverdier til f utenfor $[N_1, N_2]$. Videre vet vi at f har både maksimum og minimum på $[N_1, N_2]$, som dermed må være globale ekstremalverdier.

Oppgave 5.3.5

Vi vet at f har både maksimum og minimum på $[a, b]$, slik at $V_f \subset [a, b]$. Vi påstår at verdimengden er hele $[a, b]$. Dette vil vise at V_f er et lukket og begrenset intervall. Anta nemlig at $d \in [a, b]$. På grunn av skjæringssetningen vil det jo da finnes en c mellom maksimums- og minimumspunktet, der $f(c) = d$. Dette viser at $d \in V_f$, slik at $V_f = [a, b]$.

Oppgave 5.3.6

I et n´te gradspolynom er det leddet av grad n som vil dominere når x går mot $-\infty$ og ∞. Dette går mot ∞ i begge tilfeller, slik at $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. På grunn av dette finnes det for enhver R en N slik at $P(x) > R$ for alle x med $|x| > N$. Siden P er kontinuerlig og $[-N, N]$ er en lukket og begrenset intervall, så har P et minimumspunkt S på dette intervallet. Men da er det klart at vi kan sette $K = \min(R, S)$, der $P(x) > K$ for alle x.

Seksjon 5.4

Oppgave 5.4.2

c)

For å vise at $\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = 3$ trenger vi vise at, til enhver $\epsilon > 0$, så kan vi finne en $\delta > 0$ slik at $|2x^2+1-3| < \epsilon$ for alle δ slik at $|x-1| < \delta$. Vi har at

$$|2x^2+1-3| = |2x^2-2| = 2|x+1||x-1|.$$

Vi har at hvis $\delta < 1$, det vil si $|x-1| < 1$, så vil $|x+1| < 2$, og dermed vil størrelsen over være mindre enn $4|x-1| = 4\delta$, og hvis $\delta < \frac{\epsilon}{4}$ så vil dette igjen være minre enn ϵ. Vi kan altså velge $\epsilon = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4}\right)$.

Oppgave 5.4.4

c)

Vi ser at $f(6) = \lim_{x\to 6^-} = \frac{1}{6}$, siden $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig for $x = 6$. Videre er

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 6^+} f(x) &= \lim_{x\to 6^-} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim_{x\to 6^-} \frac{x+3-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} \\ &= \lim_{x\to 6^-} \frac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Dermed er f kontinuerlig for $x = 6$.

Oppgave 5.4.7

For å vise at $\lim_{x\to a} f[g(x)] = c$ trenger vi, for enhver ϵ, finne en δ slik at $|f[g(x)] - c| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-a| < \delta$.

- Siden $\lim_{x\to b} f(x) = c$ vet vi at det finnes en δ_1 slik at $|f(x) - c| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-b| < \delta_1$.
- Siden $\lim_{x\to a} g(x) = b$ vet vi også at det finnes en δ_2 slik at $|g(x) - b| < \delta_1$ for alle x slik at $|x-a| < \delta_2$.

Hvis $|x-a| < \delta_2$ vil dermed $|f[g(x)] - c| < \epsilon$, slik at vi kan sette $\delta = \delta_2$.