Løsningsforslag uke 37, 2016

Oppgave 4.3.3b). Finn grenseverdien $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$.

Løsning. Alle grenseverdiene i oppgave 4.3.3 involverer et «$\infty - \infty$»-uttrykk. Trikset er det samme hver gang, så vi nøyer oss med deloppgaven som krever mest regning.

Trikset er å gange både teller og nevner med den «konjugerte» til «$\infty - \infty$»-uttrykket. Her er den «konjugerte» til $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ lik $\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}$. Vi får dermed

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{(\cancel{n}+\sqrt{n})-\cancel{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{n}}} + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1.
\end{aligned}$$

Siden 1 er konstant og $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, så er $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Totalt er grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 = \sqrt{1+0}+1 = 2.$$

■

Oppgave 4.3.11. Vis at dersom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ og $a_n \leqslant \mathbf{c}_n \leqslant b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så er $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus 4. september 2016

Løsning. Her må vi bruke definisjonen av konvergens. Det vil si at for enhver $\epsilon > 0$ må vi finne et naturlig tall N slik at $|c_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geqslant N$.

Siden følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer mot A, finnes det tall N_a og N_b slik at $|a_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geqslant N_a$ og $|b_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geqslant N_b$. Ettersom $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ har vi at $|c_n - A| \leqslant \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\}$. Velg nå N til å være $\max\{N_a, N_b\}$. Da er $|c_n - A| \leqslant \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\} < \epsilon$ for alle $n \geqslant N$, som var det vi ville vise. ■

Oppgave 4.3.18. Definer rekursivt en følge $\{x_n\}$ ved $x_1 = 1$ og $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geqslant 1$.

a) Vis, ved induksjon på n, at $x_n < x_{n+1}$ for alle naturlige tall n.

b) Vis at følgen $\{x_n\}$ konvergerer og bestemt grensen.

c) Undersøk konvergensen av følgen $\{y_n\}$, der $y_1 = 1$ og $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$ for $n \geqslant 1$.

Løsning. a) Påstanden stemmer for $n = 1$ fordi $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$.

Anta nå at påstanden gjelder for $n = k$, altså at $x_k < x_{k+1}$. Vi vil vise at $x_{k+1} < x_{k+2}$. Vi har at

$$x_{k+2} = \sqrt{2x_{k+1}} > \sqrt{2x_k} = x_{k+1},$$

der ulikheten $\sqrt{2x_{k+1}} > \sqrt{2x_k}$ følger av induksjonshypotesen.

b) Fra a) har vi at følgen er monoton. [Kalkulus, Teorem 4.3.9] sier at det da er nok å vise at følgen er begrenset for å bevise at den konvergerer. Vi påstår at $\{x_n\}$ er oppad begrenset av 2 og skal bevise det ved induksjon. Beviset fungerer også for enhver grense som er større enn 2, så det gjør ingenting om du har gjettet på noe annet enn 2. Påstanden er riktig for $n = 1$ fordi $x_1 = 1 < 2$. Anta så at $x_k < 2$. Da har vi at $x_{k+1} = \sqrt{2x_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Vi har nå vist at $x_n < 2$ for alle n, så $\{x_n\}$ er begrenset og dermed konvergent.

For å bestemme grensen, la $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Da er også $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, så vi har

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \sqrt{2x}.$$

Kvadrerer vi likningen $x = \sqrt{2x}$ får vi $x^2 = 2x$, som kan skrives som $x(x-2) = 0$. De eneste mulige grenseverdiene er $x = 0$ og $x = 2$. Siden $x_1 = 1 > 0$ og følgen er voksende, må $x = 2$.

c) Vi skal begrunne at følgen $\{y_n\}$ divergerer. Det gjør vi ved å først vise at følgen er voksende, men at den eneste mulige grenseverdien er 0. Dette er umulig ettersom $y_1 = 1$.

Vi begynner på samme måte som i oppgave a). Vi har at $y_1 = 1 < \sqrt{3} = y_2$. Anta så at $y_k < y_{k+1}$. Vi vil vise at $y_{k+1} < y_{k+2}$. Vi har

$$y_{k+2} = \sqrt{2y_{k+1} + y_{k+1}^2} > \sqrt{2y_k + y_k^2} = y_{k+1}.$$

Alternativt kan vi bruke at

$$y_{k+2} = \sqrt{2y_{k+1} + y_{k+1}^2} > \sqrt{y_{k+1}^2} = y_{k+1}.$$

I begge tilfellene har vi brukt både induksjonshypotesen og at $y_1 = 1$. Nå er induksjonstrinnet bevist, så følgen $\{y_n\}$ er voksende.

Til slutt, la oss gjøre som i oppgave b) og anta for motsigelse at at $\{y_n\}$ har en grenseverdi som vi kaller y. Vi får da at

$$y = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to infty} \sqrt{2y_n + y_n^2} = \sqrt{2y + y^2}.$$

Kvadrerer vi likningen $y = \sqrt{2y + y^2}$ får vi $y^2 = 2y + y^2$ som reduserer til $2y = 0$, altså $y = 0$. Dette er umulig, fordi $y_1 = 1$ og $y_{n+1} > y_n$ for alle n. Følgelig divergerer $\{y_n\}$ mot uendelig. ■

Referanser

[Kalkulus] Tom Lindstrøm. *Kalkulus.* 4. utg. Universitetsforlaget, 2006.