Følger (4.3)

En følge er en uendelig sekvens av tall:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Kan starte andre steder

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

eller

$$a_{-17}, a_{-16}, \ldots, a_0, a_1, \ldots$$

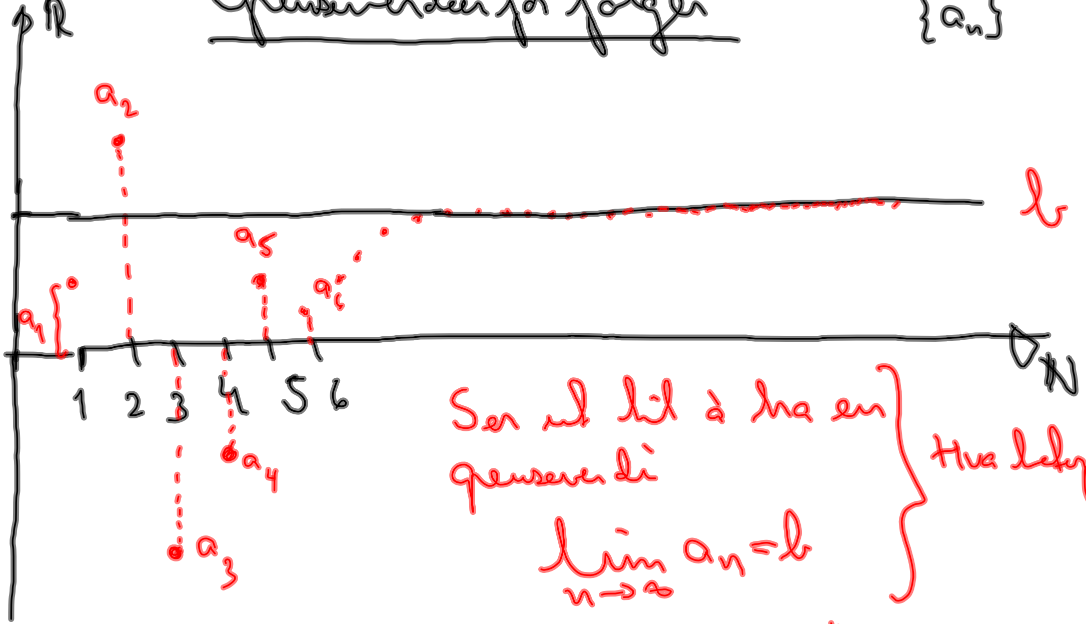
Kortfattet skrivemåte $\{a_n\}$ evt. $\{a_n\}_{n=-17}^{\infty}$

Eksempel: (i) $1, 2, 3, 4, \ldots$ $\{n\}$ evt $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

(ii) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ evt $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(iii) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ $\{\sqrt{n}\}$ evt $\ldots$

Grenseverdier for følger $\{a_n\}$



Ser ut til å ha en grenseverdi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

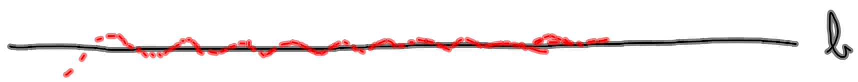
Hva betyr dette?

Forslag: "At det n-te leddet nesten blir b"

"a_n nærmer seg b når n går mot uendelig"

"Vi kan få a_n så nær b vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor."

presisering



10, $11^{\underline{30}}$, $13^{\underline{30}}$, $15^{\underline{00}}$

12 etasje SV-bygningen

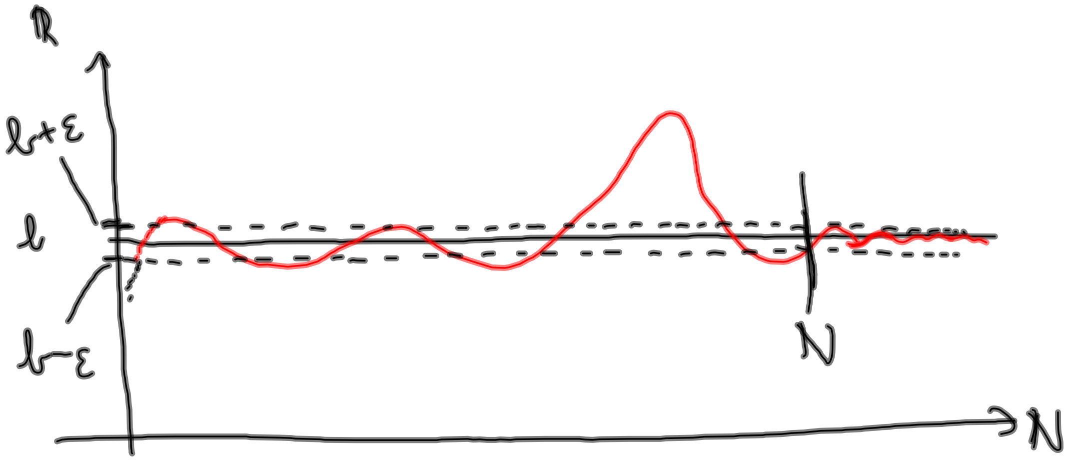
arrangert og betalt !!

Skal prøve å presisere forslaget:

"Vi kan få a_n så nær b vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor"

Hvor nær?

Hvor stor er lit?



<u>Definisjon</u>: Følgen $\{a_n\}$ <u>konvergerer</u> <u>mot</u> b dersom det for hver $\forall \varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$.

Vi sier at a_n nærmer seg b som grense når $n \to \infty$.

<u>Notasjon</u>: $\lim_{n \to \infty} a_n = b$

Regneregler for grenseverdier. Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ forutsatt at $B \neq 0$.

To grunnleggende måter å regne ut grenseverdier på:

1. Bruk definisjonen
2. Bruk reglene ovenfor

I tillegg finnes det ulike triks.

<u>Eksempel</u>: Bruk definisjonen til å vise at $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1$

(Husk: Vi må vise at til hver $\varepsilon>0$, finnes det en $N\in\mathbb{N}$ slik at $\underbrace{\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right|}<\varepsilon$ når $n\geq N$.)

Vi har $\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right| = \left|1-\frac{2}{n}-1\right| = \frac{2}{n}$

Hvordan får jeg $\boxed{\frac{2}{n}<\varepsilon}$? $\frac{2}{\varepsilon}<n$

Hvis vi velger $N>\frac{2}{\varepsilon}$, så er $n>\frac{2}{\varepsilon}$ for alle $n\geq N$.

Da vil $\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right| = \underline{\frac{2}{n}<\varepsilon}$ HURRA!.

Definisjonen brukes i hvert fall når nødvendigheten/forelesere tvinger oss.

Gevreisen lim via regnereglene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(7-\frac{1}{n})}{\lim(3+\frac{1}{n^2})} = \frac{\lim_{n\to\infty} 7 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

I praksis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

trekker ut høyeste potens

Eksempel: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2}{2-4n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}(1+\frac{3}{n^2})}{\cancel{n^4}(\frac{2}{n^4}-4)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{3}{n^2})}{(\frac{2}{n^4}-4)} = \frac{1}{-4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

Ekzempel: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cancel{n}}=$$

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}+1}=\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$