Løsningsforslag til Oblig 1, MAT 1100, H-07

Oppgave 1:

a) Ganger med den konjugerte til nevneren oppe og nede:

$$\frac{7+i}{2-i} = \frac{(7+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{14+7i+2i+i^2}{2^2-i^2} = \frac{13+9i}{5} = \frac{13}{5}+\frac{9}{5}i$$

b) Legg merke til at $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ ligger i annet omløp, og at vi like godt kan bruke $\frac{\pi}{3}$ som argument. Vi har

$$a = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

$$b = r\sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

så $z = 2 + 2i\sqrt{3}$.

c) Vi har $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$. Videre er $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Siden z ligger i fjerde kvadrant, betyr dette at $\theta = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Oppgave 2: Skriver først z på polarform. Vi får

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Siden z ligger i tredje kvadrant, gir dette $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Vi har altså $z = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

Den første kvadratroten er gitt ved

$$w_0 = 2^{\frac{1}{2}}e^{(\frac{4\pi}{3}i)/2} = \sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Den andre kvadratroten er (tenk geometrisk):

$$w_1 = -w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Oppgave 3: For å vise at $1+i$ er en rot, setter vi inn i polynomet:

$$P(1+i) = (1+i)^4 - (1+i)^3 - 6(1+i)^2 + 14(1+i) - 12 =$$

$$= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 - 1 - 3i + 3 + i - 6 - 12i + 6 + 14 + 14i - 12 = 0$$

Altså er $1+i$ en rot.

Siden polynomet er reelt, vet vi at da er også det konjugerte tallet $1-i$ en rot. Dermed er $P(z)$ delelig med både $z-(1+i)$ og $z-(1-i)$, og også med produktet $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2-2z+2$. Utfører vi polynomdivisjonen, får vi:

$$
\begin{array}{rl}
z^4 - z^3 - 6z^2 + 14z - 12 & : \ z^2 - 2z + 2 = \ z^2 + z - 6 \\
\underline{-(z^4 - 2z^3 + 2z^2)} & \\
z^3 - 8x^2 + 14z - 12 & \\
\underline{-(z^3 - 2z^2 + 2z)} & \\
-6z^2 + 12z - 12 & \\
\underline{-(-6z^2 + 12z - 12)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Dermed vet vi at $P(z) = (z^2+z-6)(z^2-2z+2)$. Løser vi annengradsligningen $z^2+z-6=0$, får vi

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Dermed er

$$P(z) = (z^2+z-6)(z^2-2z+2) = (z-2)(z+3)(z-(1+i))(z-(1-i))$$

som viser at røttene er $2, -3, 1+i, 1-i$. Den komplekse faktoriseringen til $P(z)$ er

$$P(z) = (z-2)(z+3)(z-(1+i))(z-(1-i))$$

og den reelle er

$$P(z) = (z-2)(z+3)(z^2-2z+2)$$

Oppgave 4: Vi må vise at gitt en $\epsilon > 0$, finnes det alltid et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at $|c_n - L| < \epsilon$ for alle $n \geq N$ — med andre ord slik at $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$ når $n \geq N$.

Siden $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, finnes det et tall $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ når $n \geq N_1$. Tilsvarende finnes det et tall $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$ når $n \geq N_2$. Velger vi N til å være det største av tallene N_1 og N_2, ser vi at når $n \geq N$, så er

$$L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon$$

. Dermed er påstanden bevist.