Løsningsforslag til underveiseksamen i MAT 1100, 9/10-2007

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 2$, $\theta = \frac{11\pi}{6}$. Da er z lik:
☐ $-\sqrt{3} - i$
☐ $1 - i\sqrt{3}$
☐ $-2i$
☐ $-\sqrt{3} + i$
☐ $\sqrt{3} - i$

Riktig svar: e) $\sqrt{3} - i$.
Begrunnelse: $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2})\right) = \sqrt{3} - i$.

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ har polarkoordinater:
☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 8, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{4}$
☐ $r = 8, \theta = \frac{13\pi}{6}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{15\pi}{6}$

Riktig svar: c) $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{4}$.
Begrunnelse: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4$. Siden $\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, og θ ligger i tredje kvadrant, er $\theta = \frac{5\pi}{4}$

3. (2 poeng) Dersom $z = 3e^{i\frac{5\pi}{12}}$ og $w = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$, så er zw lik:
☐ $-6i$
☐ $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$
☐ $3 - 3i\sqrt{3}$
☐ $-3 - 3i\sqrt{3}$
☐ $-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$

Riktig svar: a) $-6i$.
Begrunnelse: $zw = 3e^{i\frac{5\pi}{12}}2e^{i\frac{13\pi}{12}} = 6e^{\frac{18\pi}{12}i} = 6e^{\frac{3\pi}{2}i} = 6\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 6(0 + i(-1)) = -6i$.

4. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}-2n^2}$ er lik:
☐ $\frac{7}{4}$
☐ $-\frac{3}{2}$
☐ ∞
☐ $-\frac{7}{2}$
☐ $\frac{3}{4}$

Riktig svar: d) $-\frac{7}{2}$.

Begrunnelse: $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}-2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(7+3n^{-\frac{3}{2}})}{n^2(4n^{-\frac{3}{2}}-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+3n^{-\frac{3}{2}}}{4n^{-\frac{3}{2}}-2} = \frac{7+0}{0-2} = -\frac{7}{2}$

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = x\cot x$ er:

☐ $-\frac{1}{\sin(x^2)}$
☐ $\cot x + \frac{x}{1+x^2}$
☐ $\cot x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
☐ $\cot x - \frac{x^2}{2\sin^2 x}$
☐ $\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$

Riktig svar: e) $\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$.
Begrunnelse: Bruker produktregelen: $D(x\cot x) = 1\cdot\cot x + x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$.

6. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arcsin(e^x)$ er:

☐ $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$
☐ $\frac{e^x}{\arccos(e^x)}$
☐ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
☐ $\arccos(e^x)e^x$
☐ $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Riktig svar: e) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.
Begrunnelse: Bruker kjerneregelen: $D(\arcsin(e^x)) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$ er lik:

☐ $-\frac{1}{2}$
☐ 1
☐ ∞
☐ 0
☐ 2

Riktig svar: a) $-\frac{1}{2}$.
Begrunnelse: Bruker L'Hôpitals regel ("$\frac{0}{0}$"-uttrykk): $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}$.

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}-x}$ er lik:

☐ $\frac{2}{3}$
☐ $\frac{1}{2}$
☐ 2
☐ 0
☐ 1

Riktig svar: a) $\frac{2}{3}$.
Begrunnelse: Multipliserer opp og nede med det konjugerte uttrykket:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{x^2+3x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+3/x}+1\right)}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+3/x}+1}{3} = \frac{2}{3}$$

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = 2\ln 3x + 4$ er:
- ☐ $g(x) = 2e^{3x} + 4$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2\ln 3x+4}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{6}e^{x} + \frac{2}{3}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}-2}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2}e^{4x-3}$

Riktig svar: d) $g(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}-2}$.
Begrunnelse: Løser ligningen $y = 2\ln 3x + 4$ for x:

$$y = 2\ln 3x + 4 \iff \ln 3x = \frac{y}{2} - 2 \iff 3x = e^{\frac{y}{2}-2} \iff x = \frac{1}{3}e^{\frac{y}{2}-2}$$

Bytter vi navn på variablen, får vi $g(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}-2}$.

10. (2 poeng) Hvis g er den omvendte funksjonen til $f(x) = x^3 + 5x + 2$, så er $g'(2)$ lik:
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 5

Riktig svar: b) $\frac{1}{5}$.
Begrunnelse: Observer at $f(0) = 2$. Dermed er

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3\cdot 0^2 + 5} = \frac{1}{5}$$

11. (3 poeng) Kvadratrøttene til det komplekse tallet $1 + i$ er:
- ☐ $\pm 2i$
- ☐ $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$
- ☐ $\pm\sqrt[4]{2}i$
- ☐ $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$
- ☐ $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/12}$

Riktig svar: b) $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.

Begrunnelse: $z = 1+i$ har polarkoordinater $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$ (siden vektoren halverer første kavadrant). Dermed har kvadratroten w_0 modulus $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ og argument $(\frac{\pi}{4})/2 = \frac{\pi}{8}$. Dette gir $w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ og $w_1 = -\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.

12. (3 poeng) Anta at $h(x) = f(x)^{g(x)}$, der f og g er to deriverbare funksjoner og $f(x) > 0$. Da er den deriverte $h'(x)$ lik:

- ☐ $g(x)f(x)^{g(x)-1}$
- ☐ $h(x)\ln(f(x))$
- ☐ $h(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$
- ☐ $e^{g(x)\ln(f(x))}$
- ☐ $h(x)e^{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

Riktig svar: c) $h(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$.

Begrunnelse: Man kan f.eks. bruke logaritmisk derivasjon: $h'(x) = h(x)D(\ln(h(x))$. I dette tilfellet er $\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln f(x)$. Dermed er $D(\ln h(x)) = g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$. Ialt har vi dermed

$$h(x) = h(x)D(\ln h(x)) = h(x)\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{x}}$ er lik:

- ☐ 0
- ☐ $e^{-\frac{1}{3}}$
- ☐ e
- ☐ -3
- ☐ e^3

Riktig svar: e) e^3.

Begrunnelse: Vi har $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\ln(1+\sin x)}{x}}$.

Mellomregning: $\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+\sin x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+\sin x}\cdot\cos x}{1} = 3$.

Altså er $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{x}} = e^3$.

14. (3 poeng) Det *reelle* tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har 3 og $1-i$ som røtter. $P(z)$ er lik:

- ☐ $z^3 - z^2 - 7z + 3$
- ☐ $z^3 - 2z^2 - z - 6$
- ☐ $z^3 - 5z^2 + 8z - 6$
- ☐ $z^3 - 7z^2 + 10z + 6$
- ☐ $z^3 - z^2 - z - 6$

Riktig svar: c) $z^3 - 5z^2 + 8z - 6$.
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, må den konjugerte $1+i$ til $1-i$ også være en rot. Dermed er

$$P(z) = (z-3)(z-(1-i))(z-(1+i)) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$$

15. (3 poeng) Når $x \to \infty$, har funksjonen $f(x) = x\cos(x^{-\frac{1}{2}})$ asymptoten:
- ☐ $y = x$
- ☐ $y = \frac{1}{2}x - 1$
- ☐ $y = x - \frac{1}{2}$
- ☐ $y = x + 1$
- ☐ $y = x + \frac{1}{4}$

Riktig svar: c) $y = x - \frac{1}{2}$.
Begrunnelse: Vi regner først ut

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(x^{-\frac{1}{2}})}{x} = \lim_{x\to\infty} \cos(x^{-\frac{1}{2}}) = \cos 0 = 1$$

Dette betyr at hvis $f(x)$ har en asymptote $y = ax + b$, så er $a = 1$. Neste skritt er å regne ut:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (x\cos(x^{-\frac{1}{2}}) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^{-\frac{1}{2}}) - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(x^{-\frac{1}{2}})(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = -\frac{1}{2}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = x^{-\frac{1}{2}}$. Dermed er $y = x - \frac{1}{2}$ en asymptote når $x \to \infty$.

16. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{hvis } x < 0 \\ 3e^{2x} & \text{hvis } x \geq 0 \end{cases}$
(A og B er konstanter). For hvilke verdier av A og B er f deriverbar i 0?
- ☐ $A = 6, B = 3$
- ☐ $A = 3, B = 2$
- ☐ $A = 2, B = 3$
- ☐ $A = 3, B = 3$
- ☐ $B = 3$ og alle verdier for A

Riktig svar: a) $A = 6, B = 3$.
Begrunnelse: Lar vi $g(x) = 3e^{2x}$ for *alle* x, ser vi at $g(0) = 3$ og $g'(0) = 6$. Hvis $h(x) = Ax + B$ for *alle* x, har vi tilsvarende $h(0) = B$ og $h'(0) = A$. For å få (kontinuitet og) deriverbarhet i 0, må vi ha $B = 3$ og $A = 6$. (Sjekk at du skjønner hvorfor dette blir riktig — begrunnelsen er litt knapp!)

17. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 2x + 1$ er konkav på intervallet:

☐ $[1, 4]$
☐ $[-4, 4]$
☐ $(-\infty, -1]$
☐ $[-4, 1]$
☐ $[4, \infty)$

Riktig svar: d) $[-4, 1]$.
Begrunnelse: Vi har $f'(x) = 4x^3+18x^2-48x+2$ og $f''(x) = 12x^2+36x-48 = 12(x-1)(x+4)$. Fortegnlinje viser at $f''(x) \leq 0$ for $x \in [-4, 1]$. Altså er f konkav på $[-4, 1]$.

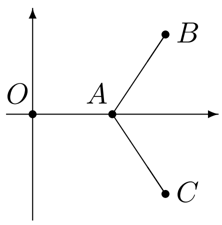
18. (3 poeng) Funksjonene $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i hele $[a, b]$ og deriverbare i alle indre punkter $c \in (a, b)$. Funksjonene har samme verdi i endepunktene av intervallet, dvs. $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$. Da er følgende påstand alltid riktig:

☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = g(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ der den ene funksjonen har et lokalt maksimum og den andre et lokalt minimum
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = g''(c)$
☐ Ingen av de foregående påstandene behøver å holde

Riktig svar: b) Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$.
Begrunnelse: La $h(x) = f(x) - g(x)$. Da er $h(a) = h(b) = 0$, så ifølge Rolles teorem finnes det $c \in (a, b)$ der $h'(c) = 0$. Dermed er $f'(c) - g'(c) = 0$, og vi har $f'(c) = g'(c)$.

19. (3 poeng) Figuren nedenfor viser en arbeidstegning over et kabelarbeid. En kabel skal føres fra origo O til et punkt A på x-aksen. Fra A skal det gå to kabler videre, én til punktet B med koordinater $(5, 3)$ og én til punktet C med koordinater $(5, -3)$. Hvor skal punktet A plasseres for at den totale kabellengden skal bli kortest mulig?

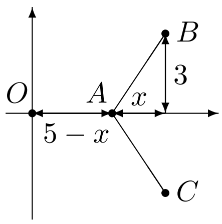
☐ $(5 - \sqrt{3}, 0)$
☐ $(5, 0)$
☐ $(5 - \sqrt{2}, 0)$
☐ $(3, 0)$
☐ $(\sqrt{5}, 0)$



Riktig svar: a) $(5 - \sqrt{3}, 0)$
Begrunnelse: La x være som på figuren nedenfor. Da er den totale kabellengden $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{3^2 + x^2} = 5 - x + 2\sqrt{9 + x^2}$. Deriverer for å finne

minimum:

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}}$$



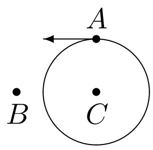
Løser vi ligningen $f'(x) = 0$, får vi

$$-1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} = 0 \iff 2x = \sqrt{9+x^2} \implies 4x^2 = 9 + x^2 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

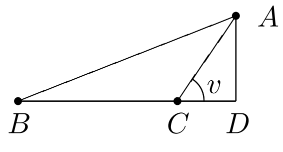
Det er lett å sjekke at $x = \sqrt{3}$ er det minimumspunktet vi leter etter. A må derfor plasseres i $(5-\sqrt{3}, 0)$.

20. (3 poeng) En mann står stille og ser sin datter kjøre karusell. Figuren nedenfor viser situasjonen sett ovenfra. Karusellen fører jenta rundt i en sirkelbane med radius 6 meter, og den bruker ett minutt på hver omdreining. Avstanden fra faren B til sentrum C i karusellen er 8 meter. Hvor fort avtar avstanden mellom far og datter når datteren er i punkt A på figuren (dvs. i punktet der $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$)?

- ☐ 15π meter/minutt
- ☐ 12π meter/minutt
- ☐ $5\sqrt{2}\pi$ meter/minutt
- ☐ 9.6π meter/minutt
- ☐ 8π meter/minutt



Riktig svar: d) 9.6π meter/minutt.
Begrunnelse: Figuren nedenfor viser den generelle situasjonen: Faren står i B, datteren er i punktet A og sentrum i karusellen er C. Vinkelen v endrer seg med en fart av 2π radianer per minutt.



I den rettvinklede trekanten BDA er side $BD = 8 + 6\cos v$ og side $AD = 6\sin v$. Avstanden $x = BA$ mellom far og datter er dermed gitt ved

$$x^2 = (8+6\cos v)^2 + (6\sin v)^2 = 64 + 96\cos v + 36\cos^2 v + 36\sin^2 v = 100 + 96\cos v$$

(du kunne også ha funnet denne sammenhengen ved å bruke cosinussetningen). Deriverer vi ligningen

$$x^2 = 100 + 96 \cos v$$

med hensyn på t og bruker at $v'(t) = 2\pi$, får vi

$$2xx' = -96 \sin v \cdot v' = -198\pi \sin v$$

Altså er

$$x' = -\frac{96\pi \sin v}{x}$$

I den situasjonen vi er interessert i, er $v = \frac{\pi}{2}$. Dermed er $\sin v = 1$ og

$$x^2 = 100 + 96 \cos(\frac{\pi}{2}) = 100$$

dvs. $x = 10$. Dermed er

$$x' = -\frac{96\pi}{10} = -9.6\pi$$

Avstanden avtar altså med 9.6π meter i minuttet.

Bemerkning: Det er også mulig å løse oppgaven (noe kortere!) ved dekomponering av hastighet.