Inverse matriser

Alle matriser er kvadratiske i dag:

Forrige gang: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ identitetsmatrisen

$$AI_n = I_nA = A.$$

Definisjon: Vi sier at B er en invers matrise til A dersom

$$AB = I_n \text{ og } BA = I_n$$

Vi sier at A er inverterbar dersom den har en invers matrise.

Setning: En matrise A har höyst én invers matrise

Bevis: Anta at både B og C er inverse matriser til A. Vi må vise at $B = C$.

$$\underline{B} = I_nB = (\underbrace{CA}_{I_n})B \overset{\text{assosiativ lov}}{=\!=} C(\underbrace{AB}_{I_n}) = CI_n = \underline{C}.$$

Hvis A er en inverterbar matrise, betegner vi den inverse matrisen med A^{-1} (altså $AA^{-1} = I_n$, $A^{-1}A = I_n$)

Eksempel: Finn den inverse matrisen B til $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Setter $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$. Da $BA = I_2$, dvs

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x-y \\ z+2u & 2z-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ligninger:

$x+2y=1$	$z+2u=0$
$2x-y=0$	$2z-u=1$
$\underline{y=2x}$	$z=-2u$
$x+2(2x)=1$	$2(-2u)-u=1$
$5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$	$-5u=1 \Rightarrow u=-\frac{1}{5}$
$y=\frac{2}{5}$	$z=\frac{2}{5}$

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ har den egenskapen at $BA = I_2$

Må også ha at $AB = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5} & \frac{2}{5}-\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5} & \frac{4}{5}+\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>HURRA!</u>

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ er den inverse matrisen til A!

Setning: Hvis $AB = I_n$, så er også $BA = I_n$. Når man skal sjekke om B er en invers matrise til A, holder det dermed å sjekke den ene av likhetene $AB = I_n$ og $BA = I_n$.

Eksempel: Pröv å finne den inverse matrisen B til $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Setter $B = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$ og krever at $BA = I_2$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+4y \\ u+2z & 2u+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x+2y=1$	$u+2z=0$
$2x+4y=0$	$2u+4z=1$
$2x+4y=2$	$2u+4z=0$
Ingen löswing	Ingen losning

Matriseligning: Hvordan löser man ligning $\vec{y} = A\vec{x}$ (for $\vec{x}$)

Anta at A er inverterbar: Bruker A^{-1} på begge sider

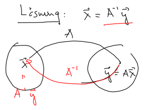
$$A^{-1}\vec{y} = A^{-1}(A\vec{x})$$

$$A^{-1}\vec{y} = \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n}\vec{x}$$

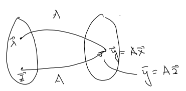
$$A^{-1}\vec{y} = I_n\vec{x} = \vec{x}$$

Lösning: $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

A^{-1} er den motsatte transformasjonen av A



Ingen invers:



Setning: Hvis A og B er inverterbare, så er AB inverterbar og

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Bevis: Vi må vise at $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

$$(AB)\underbrace{(B^{-1}A^{-1})}_{C} = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A(\overbrace{(BB^{-1})}^{I_n}A^{-1}) = A(I_nA^{-1}) = AA^{-1} = \underline{\underline{I_n}}$$

$(AB)C = A(BC)$

Determinanter

Til hver kvadratiske matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ hører det et tall, $\det(A)$ eller $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, som kalles determinanten til A.

2×2-tilfellet

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}$$

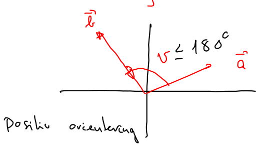
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = \underline{\underline{10}}$$

To vektorer: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

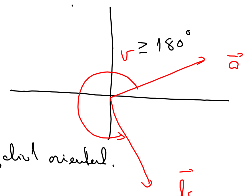
førstevektor annenvektor

Orientering av vektorpar $(\vec{a}, \vec{b})$

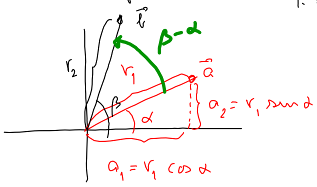
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$



$(\vec{a}, \vec{b})$ er positivt orientert dersom vinkelen v fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er mindre enn $180°$



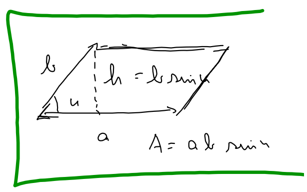
Se nærmere på $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \cos\alpha & r_1 \sin\alpha \\ r_2 \cos\beta & r_2 \sin\beta \end{vmatrix} = r_1 r_2 \cos\alpha \sin\beta - r_1 r_2 \sin\alpha \cos\beta$



$$= r_1 r_2 \left[\underbrace{\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha}_{\sin(\beta - \alpha)}\right]$$

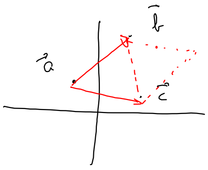
$$= r_1 r_2 \sin(\beta - \alpha)$$

Setning: Fortegnet til $\det(\vec{a}, \vec{b})$ er positivt hvis paret $(\vec{a}, \vec{b})$ har positiv orientering og negativt hvis paret har negativ orientering. Tallverdien $|\det(\vec{a}, \vec{b})|$ er lik arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



Eksempel: Finn arealet til trekanten med hjørner $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (3,4)$, $\vec{c} = (-1,3)$.

Arealet er halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av vektorer $\vec{b} - \vec{a}$ og $\vec{c} - \vec{a}$



$$A = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 \cdot 2 - 3(-3) \right|$$

$$= \frac{1}{2} |2 + 9| = \underline{\frac{11}{2}}$$

Kladd: $\vec{b} - \vec{a}$
$= (3,4) - (2,1) = (1,3)$
$\vec{c} - \vec{a} = (-1,3) - (2,1)$
$= (-3,2)$

3x3-determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{3x3-matrise}$$

OBS

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Eksempel:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\big(0 \cdot 1 - (-1)4\big) + 1\big(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2\big) + 2\big(1 \cdot 4 - 0 \cdot 2\big)$$

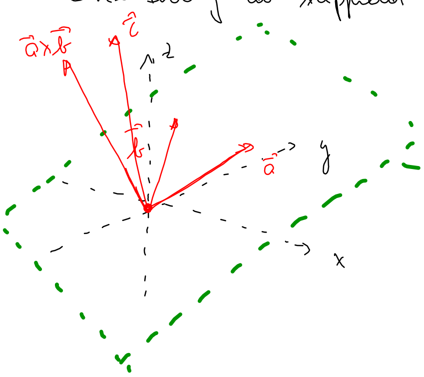
$$= 12 + 3 + 8 = \underline{\underline{23}}$$

Tre vektorer: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Setning: Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er lik $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Volumet til pyramiden utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er derved $\frac{1}{6} |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Orientering av trippelet $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:



planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ er positivt orientert om $\vec{c}$ ligger på samme side av planet som $\vec{a} \times \vec{b}$.

Det vises at trippelet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ er positivt orientert når $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ er positiv.