Eksamen

P lenum

1a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(xy)\right) = y\frac{\partial}{\partial x}(\cos xy)$

$= y \cdot (-\sin(x \cdot y)) \cdot y = \underline{\underline{-y^2 \cdot \sin(xy)}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot \cos(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot \cos(xy) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\cos(xy)$

$= 1 \cdot \cos(x \cdot y) + y \cdot (-\sin x \cdot y) \cdot x$

$= \underline{\underline{\cos(xy) - xy\sin(x \cdot y)}}$ er de partiellderiverte til f

b) f vokser raskest i retningen $\nabla f(\underline{a})$ i punktet $\underline{a} = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

$\nabla f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})\right)$

$= \left(-y^2\sin(xy), \cos(xy) - xy \cdot \sin(x \cdot y)\right)$

$= \left(-1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\frac{\pi}{4})\right)$

$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1, 1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$

Den retningsderiverte $f'(a, u)$

$= \nabla f(\underline{a}) \cdot \underline{u}$ (setning 2.4.5 i FVA)

og $\underline{u} = \frac{\nabla f(\underline{a})}{|\nabla f(\underline{a})|}$, så da blir

Så da er $\nabla f(\underline{a}) \cdot \underline{u} = \nabla f(\underline{a}) \cdot \frac{\nabla f(\underline{a})}{|\nabla f(\underline{a})|}$

$= \frac{|\nabla f(\underline{a})|^2}{|\nabla f(\underline{a})|} = |\nabla f(\underline{a})| = f'(\underline{a}; \underline{u})$

$|\nabla f(\underline{a})| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1, 1 - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + (1 - \frac{\pi}{4})^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right)}$

$= \underline{\underline{\sqrt{1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}}}}$ er den retningsderiverte langs $\underline{u}$.

2 Pyramiden er utspent av vektorene:

$\underline{x} = \underline{b} - \underline{a} = (2,1,2) - (1,-1,2) = (1,2,0)$

$\underline{y} = \underline{c} - \underline{a} = (3,-1,1) - (1,-1,2) = (2,0,-1)$

$\underline{z} = \underline{d} - \underline{a} = (-1,3,-1) - (1,-1,2) = (-2,4,-3)$

Volumet til pyramiden gitt som

$\frac{1}{6} \cdot |\det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})|$ (setning 1.8.4 FVA)

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6} \cdot \Big(0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (4)$$

$$- 2 \cdot \big(2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-2) \big) \Big) = \frac{1}{6} \cdot \big(4 - 2 \cdot (-6-2) \big)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \big(4 - 2 \cdot (-8) \big) = \frac{1}{6} \cdot (4 + 16) = \frac{20}{6} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

3

3a) Fra beskrivelsen ser vi at

$$y_1 = 0.45 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3$$

$$y_2 = 0.15 x_1 + 0.5 x_2 + 0.4 x_3$$

$$y_3 = 0.4 x_1 + 0.25 x_2 + 0.3 \cdot x_3$$

Så der må $A = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.25 & 0.3 \\ 0.15 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix}$

siden da er $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

d) Vi vet $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 24 \end{pmatrix}$

siden $B = A^{-1}$ vil da $BA\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 46 & 6 & -54 \\ -65 & -5 & 75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 24 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}}}$$

Så P leverte 20 tonn

Q —"— 40 tonn

R —"— 20 tonn.

Hvis $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$ da må

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 46 & 6 & -54 \\ -65 & -5 & 75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ -65\cdot 30 - 5\cdot 30 + 75\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ -70\cdot 30 + 75\cdot 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ -70\cdot 2\cdot 15 + 75\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 15\cdot(-70\cdot 2 + 70 + 5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 15\cdot(-70+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ -15\cdot 65 \end{pmatrix}$$

Så produsent R leverer

$x_3 = -65\cdot 15 = -40^2 + 25^2 = -975$

tonn, det er umulig.

4a) $I = \int x^3 e^{x^2} dx$, Bruker substitusjonen

$u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, så

$x^3 e^{x^2} = \frac{1}{2} u'(x) \cdot u(x) e^{u(x)}$, så

$\int x^3 e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} u'(x) \cdot u(x) e^{u(x)} dx$

$= \frac{1}{2} \int u(x) e^{u(x)} u'(x) dx = \frac{1}{2} \int u e^u du$

Må beregne $\int u e^u du$

Bruker delvis integrasjon,

Deler: $v = u \Rightarrow v' = 1$

$w' = e^u \Rightarrow w = e^u$

så $\int u e^u du = \int v \cdot w' du = v \cdot w - \int v' \cdot w \, du$

$= u \cdot e^u - \int 1 \cdot e^u du = u e^u - e^u + C$

så $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(u e^u - e^u + C) = \underline{\underline{\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C'}}$

4b)

$$\underline{I} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5}\,dx$$

Substitusjon: $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$

$$I = \int \frac{u'(x)\,dx}{(u(x))^2+2u(x)+5} = \int \frac{du}{u^2+2u+5}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+2u+1+4} = \int \frac{du}{(u+1)^2+4}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{u+1}{2}\right)^2+1} = \underline{I}$$

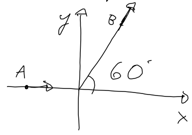
Substitusjon $v = \frac{u+1}{2}$, $v' = \frac{1}{2}$

$$\underline{I} = \frac{1}{2}\int \frac{\overset{(=\frac{1}{2})}{v'}\,du}{v^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{1}{2}\arctan v + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u+1}{2}\right) + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x+1}{2}\right)+C}}$$

5 (Litt annen løsning enn i løsningsforslaget, så se på det)

Vi plasserer et koordinatsystem med origo i krysset og x-akse langs veien til A.



Ved tiden $t=0$, så er posisjonen til A er $(-3,0)$

og — " — til B er $5\cdot(\cos 60°, \sin 60°)$

Ved et vilkårlig tidspunkt t er posisjonen til A: $\underline{a}(t) = (-3,0) + 80\cdot t(1,0)$

— " — B: $\underline{b}(t) = 5\cdot(\cos 60°, \sin 60°) + 70\cdot t(\cos 60°, \sin 60°)$

$$= (5+70t)\cdot(\cos 60°, \sin 60°) = (5+70t)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Avstanden mellom A og B er

$$f(t) = |\underline{a}(t) - \underline{b}(t)|$$

$$= \left|\left(-3+80t-\frac{5}{2}-35t, -(5+70t)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

Vi ønsker å finne $f'(0)$.

$$f(t) = \left|\left(-\frac{11}{2}+45t, -(5+70t)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{11}{2}+45t\right)^2 + \frac{3}{4}(5+70t)^2}$$

Da er $f'(t) = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{11}{2}+45t\right)\cdot 45 + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot(5+70t)\cdot 70}{2\sqrt{\left(-\frac{11}{2}+45t\right)^2+\frac{3}{4}(5+70t)^2}}$

Da er $f'(0) = \dfrac{2\cdot\frac{-11}{2}\cdot 45 + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 5\cdot 70}{2\sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot 5^2}}$

$$= \frac{-11\cdot 9\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot 35}{2\sqrt{\frac{121}{4}+\frac{3\cdot 5^2}{4}}}$$

$$= \frac{5(-11\cdot 9 + 3\cdot 35)}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{121+75}}$$

$$= \frac{5\cdot(-99+105)}{\sqrt{196}} = \frac{5\cdot 6}{14}$$

$$= \frac{5\cdot 3}{7} = \underline{\underline{\frac{15}{7}}}$$

a

Siden $h(x) = f(x)\,g'(x) - f'(x)\cdot g(x)$

vil $h'(x) = \big(f(x)g'(x)\big)' - \big(f'(x)g(x)\big)'$

$= \underline{f'(x)\,g'(x)} + f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x) - \underline{f'(x)\,g'(x)}$

$= f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x)$, som var det vi skulle vise.

b) Fra a) har vi

$h'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)\,g(x)$

$= f(x)\cdot\big(a\,g'(x) + b\cdot g(x)\big) - \big(a\,f'(x) + b\cdot f(x)\big)\cdot g(x)$

(siden $f(x)$ og $g(x)$ løser $y'' = ay' + by$)

$= a\,f(x)\,g'(x) + \underline{b\,f(x)\,g(x)} - a\cdot f'(x)\cdot g(x) - \underline{b\cdot f(x)\,g(x)}$

$= a\big(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\big) = a\,h(x).$

9) (Antar $h(x) \neq 0$)

Fra b) har vi at $h'(x) = ah(x)$.

Så $\frac{h'(x)}{h(x)} = a$. Vi integrerer på begge sider og får $\int \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \int a\, dx$.

Bruker substitusjonen $h(x) = h = u$, $u' = h'(x)$

Da er $\int \frac{h'(x)\, dx}{h(x)} = \int \frac{dh}{h} = \ln|h(x)| + C_1$

og $\int a\, dx = ax + C_2$. Så

$$\ln|h(x)| + C_1 = ax + C_2$$

$$\Rightarrow |h(x)| = e^{C_2 - C_1} e^{ax}$$

$$\Rightarrow h(x) = Ke^{ax} \vee h(x) = -Ke^{ax}$$

Så $h(x) = Ce^{ax}$ for en eller annen C.

d) Siden $f(x) = e^x$ så er $f'(x) = e^x$ og $f''(x) = e^x$. Så

$$2 \cdot f'(x) - f(x) = 2e^x - e^x = e^x = f''(x)$$

Så f løser differensialligningen.

Vi ser på $h(x) = f(x) \cdot g'(x) - f'(x) g(x)$

Fra c) vet vi at $h(x) = Ce^{ax} = Ce^{2x}$ for en C. Altså er

$$f(x) g'(x) - f'(x) g(x) = Ce^{2x}$$

$$= e^x g'(x) - e^x g(x) = Ce^{2x}$$

$$\Rightarrow g'(x) - g(x) = Ce^x$$

Vi vet at $g'(x) - g(x) = Ce^x$,

Da er $g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = C$,

$\left(g(x)e^{-x}\right)' =$, ved integrasjon er den

$$g(x)e^{-x} = Cx + A$$

Så $g(x) = Cxe^x + Ae^x$, for noen konstanter A og C.

Ved innsetting sjekker man at alle y på formen $Cxe^x + Ae^x$ løser diff. ligningen.