Problemsett 5, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Jensens ulikhet sier at hvis f er en reell konveks funksjon på et intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, gjelder for alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ og vekter $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ at
$$\frac{\sum a_j f(x_j)}{\sum a_j} \geq f\left(\frac{\sum a_j x_j}{\sum a_j}\right).$$
Den mest brukte varianten er den hvor alle vektene $a_j = \frac{1}{n}$ er like og summerer til 1. Da tar ulikheta formen
$$\frac{1}{n}\sum f(x_j) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum x_j\right).$$
   a) Bevis Jensens ulikhet, for eksempel ved induksjon på n.
   b) Vis at hvis g er konkav istedenfor konveks, men at betingelsene ellers er som i innledninga, gjelder
   $$\frac{\sum a_j g(x_j)}{\sum a_j} \leq g\left(\frac{\sum a_j x_j}{\sum a_j}\right).$$
   (Hint: Se på funksjonen $-g$.)
   c) La T være en trekant med innvendige vinkler α, β og γ. Bruk Jensens ulikhet på funksjonen $\sin x$ til å vise at $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
   d) (Eksamen MAT1100 H04.) Løs oppgave 7.1.15 i Kalkulus.
   e) Vis at av alle n-goner innskrevet i en gitt sirkel har det regulære størst areal.
   f) (Eksempel fra MAT1110.) Vi har en 1 meter lang ståltråd som skal deles i maksimalt tre biter. Hver bit skal så bøyes sammen til et kvadrat. Hva er det minste samlede areal disse kvadratene kan ha?
   g) La $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Vis ved hjelp av funksjonen $f(x) = -\log(x)$ AM-GM-ulikheta
   $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$
   (Venstresida definerer det aritmetiske gjennomsnittet (mean på engelsk) av $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mens høyresida definerer det geometriske gjennomsnittet av de samme talla.)
   h) Et punkt (x, y, z) ligger i første oktant (der $x, y, z > 0$) i rommet og er slik at produktet xyz av koordinatene er lik 1. Hva er den minste mulige avstanden fra punktet til origo?
   i) Vis Nesbitts ulikhet: For positive tall a, b og c er
   $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hvilke av følgende påstander om f gjelder alltid? Bevis eller gi et moteksempel.
   a) Kontinuerlig og surjektiv $\Rightarrow$ monoton.
   b) Kontinuerlig og monoton $\Rightarrow$ surjektiv.
   c) Monoton og surjektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.
   d) Monoton og injektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.
   e) Kontinuerlig og injektiv $\Rightarrow$ monoton.
   f) Kontinuerlig og monoton $\Rightarrow$ injektiv.
   g) Bijektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.