Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 6

I kapittel 6 minner oppgavene mer om de du er vant til fra skolematematikken i den forstand at de er mindre teoripregede enn i foregående kapittel, men de illustrerer likevel nye regnemessige teknikker det kan være lurt å få med seg. De mest teoripregede oppgavene er knyttet til seksjon 6.2, og gir nyttige innblikk i ulike anvendelser av middelverdisetningen.

Oppgave 6.1.3

Vi skal bruke logaritmisk derivasjon (setning 6.1.9).

a) $f(x) = x^2 \cos^4 x \, e^x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|x^2 \cos^4 x \, e^x| = \ln|x^2| + \ln|\cos^4 x| + \ln|e^x| \\
&= 2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= \frac{2}{x} + \frac{4}{\cos x}(-\sin x) + 1 \\
&= \frac{2}{x} - 4\tan x + 1 \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] = \underline{\underline{x^2 \cos^4 x \, e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)}}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{17}} \, e^{x^2} \tan x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|(\sin x)^{\frac{1}{17}}| + \ln|e^{x^2}| + \ln|\tan x| \\
&= \frac{1}{17}\ln|\sin x| + x^2 + \ln|\tan x| \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= \frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x} \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] \\
&= \underline{\underline{(\sin x)^{\frac{1}{17}} \, e^{x^2} \tan x \left(\frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x}\right)}}
\end{aligned}$$

d) $f(x) = x^{2\cos x} \ln x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|x^{2\cos x} \ln x| = \ln|x^{2\cos x}| + \ln|\ln x| \\
&= 2\cos x \ln x + \ln|\ln x| \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= 2(\cos x)' \ln x + 2\cos x(\ln x)' + (\ln|\ln x|)'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sin x \ln x + \frac{2\cos x}{x} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] \\
&= \underline{\underline{x^{2\cos x}\ln x\left(\frac{2\cos x}{x} - 2\sin x\ln x + \frac{1}{x\ln x}\right)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.1.6

I en fartskontroll måler politiet at en bilist bruker $t = 25$ sekunder på en strekning som er $s = 500$ meter. Det er en usikkerhet på $\Delta t = 1$ sekund i tidsmålingen. Bruker vi teknikken fra eksempel 6.1.7 til å anslå usikkerheten i målingen av farten $v(t) = \frac{s}{t}$, får vi at den er

$$\Delta v \approx v'(t)\Delta t = \frac{-s}{t^2}\Delta t = \frac{-500}{25^2}\cdot 1 = -0{,}8$$

det vil si en usikkerhet på 0,8 m/s.

Oppgave 6.1.9

Vi skal vise at $D[x^2] = 2x$ direkte fra definisjonen av den deriverte.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}[x^2] &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.2.3

Vi skal vise at $f(x) = 2 - x^3$ og $g(x) = \ln(2+x)$ har nøyaktig ett skjæringspunkt i intervallet $[0,1]$.

Siden begge funksjonene er kontinuerlige og $f(0) = 2 > \ln 2 = g(0)$, $f(1) = 1 < \ln 3 = g(1)$, så har grafene minst ett skjæringspunkt i intervallet $[0,1]$.

Nå er $f'(x) = -3x^2 < 0$ og $g'(x) = \frac{1}{2+x} > 0$ for alle $x \in (0,1)$, slik at f er strengt avtagende og g er strengt voksende i $[0,1]$. Derfor kan grafene ha høyst ett — og dermed nøyaktig ett — skjæringspunkt i intervallet $[0,1]$.

Oppgave 6.2.5

Vi lar $f(x) = x - \frac{4}{x}$. Da er $f(-1) = -1 + 4 = 3$ og $f(4) = 4 - 1 = 3$, d.v.s. $f(-1) = f(4)$. Deriverer vi funksjonen, ser vi at $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$ er strengt positiv for alle $x \neq 0$. At f' ikke har noe nullpunkt i intervallet $(-1,4)$, er ikke i strid med Rolles teorem, fordi $f(x)$ ikke er deriverbar (ikke engang definert) for $x = 0$.

Oppgave 6.2.7

Vi skal vise at det mellom 0 og et tall x alltid finnes en c slik at $\sin x = x\cos c$. Dette er opplagt riktig for $x = 0$, så vi antar at $x \neq 0$. Vi setter $f(x) = \sin x$. Da f er kontinuerlig og deriverbar på intervallet $[0, x]$, finnes det ved middelverdisetningen en $c \in (0, x)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

Siden $f'(c) = \cos c$, gir dette at $\cos c = \frac{\sin x}{x}$, det vil si at $\sin x = x\cos c$. Og da $|\cos c| \leq 1$, har vi ialt

$$|\sin x| = |x\cos c| = |x||\cos c| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

I fremstillingen ovenfor har vi stilltiende antatt at $x > 0$. Dersom $x < 0$, gjennomfører vi isteden resonnementet med intervallet $[x, 0]$.

Oppgave 6.2.8

Vi antar $x > -1$ og skal vise at det alltid finnes et tall c mellom 0 og x slik at $\ln(1 + x) = \frac{x}{1+c}$. Dette er opplagt riktig for $x = 0$, så vi antar at $x \neq 0$.

Funksjonen $f(x) = \ln(1 + x)$ er definert og kontinuerlig for alle $x > -1$. Ved middelverdisetningen finnes det da en c mellom 0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

Siden vi også har

$$f'(c) = \frac{1}{1 + c}$$

gir dette

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{1 + c}$$

som er ekvivalent med at

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c}$$

For $x > 0$ er også $c > 0$, og dermed $\frac{1}{1+c} < 1$. Multiplikasjon med x gir $\frac{x}{1+c} < x$. For $-1 < x < 0$ er også $-1 < c < 0$, og addisjon med 1 gir $0 < 1 + c < 1$, slik at $\frac{1}{1+c} > 1$. Multiplikasjon med x (som nå altså er negativ) gir da også i dette tilfellet $\frac{x}{1+c} < x$, slik at vi får

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c} < x$$

for alle $x > -1$.

Oppgave 6.3.1

Vi skal bruke L'Hôpitals regel til å finne de oppgitte grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = \frac{2\cdot 1}{1} = \underline{\underline{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \underline{\underline{1}}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-1} = \underline{\underline{1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6x}$ eksisterer ikke.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$

Oppgave 6.3.3

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{0}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\ln x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\sin\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\sin\frac{1}{x})} = \underline{\underline{e}}$

Mellomregning:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\sin\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \\ &\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x})/(1+\sin\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = 1\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 6.3.9

$\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(e^x+\sin x)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}} = \underline{\underline{e^2}}$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+\cos x)/(e^x+\sin x)}{1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x} = \frac{1+1}{1+0} = 2$$

Oppgave 6.3.17

Vi skal finne tallet a slik at

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \sqrt{e}$$

For å unngå for mye regning, kan vi benytte oss av den velkjente grensen $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Vi starter med å omforme uttrykket

$$\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \left(1+\frac{1}{ax}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right)^{\frac{1}{a}}$$

Benytter vi nå at $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax} = e$, får vi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = e^{\frac{1}{a}}$$

Vi ønsker altså at $e^{\frac{1}{a}} = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, det vil si at vi må ha $a = \underline{\underline{2}}$.

Alternativ løsning:

Vi kunne også ha omskrevet uttrykket ved hjelp av eksponentialfunksjonen på vanlig måte, for deretter å bruke L'Hôpital på eksponenten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right)}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right)} = e^{\frac{1}{a}}$$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{ax}\right)}{x^{-1}}$$

som ved substitusjonen $t = \frac{1}{x}$ blir

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+\frac{t}{a})}{t} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+\frac{t}{a}}\frac{1}{a}}{1} = \frac{1}{a}$$

Fra $e^{\frac{1}{a}} = \sqrt{e}$ ser vi at $a = \underline{\underline{2}}$.

Oppgave 6.3.22

Vi skal avgjøre om funksjonen f definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{for } x > 0 \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig og deriverbar i null. Vi ser på de ensidige grensene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1-\cos x}{x^3} - \frac{1}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x^3}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x - 2x}{6x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - 2}{12x}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x}{12} = 0$$

og

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x} = 0$$

Siden de ensidige grensene er like, eksisterer altså den tosidige grensen $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$, slik at funksjonen f blir deriverbar i punktet $x = 0$. Men dermed er f også kontinuerlig i $x = 0$ ved setning 6.1.8.

Oppgave 6.5.5

Vi skal finne eventuelle asymptoter for funksjonen

$$f(x) = \frac{x\ln(x^2)-1}{\ln x} = \frac{2x\ln x - 1}{\ln x} = 2x - \frac{1}{\ln x}$$

Siden $\ln x$ bare er definert for positive verdier av x, og blir null for $x = 1$, blir funksjonens definisjonsområde $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$. Funksjonen er kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde, så de eneste kandidatene til vertikale asymptoter er $x = 0$ og $x = 1$.

La oss først undersøke hva som skjer når x nærmer seg 0 ovenfra:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

Altså har vi ingen vertikal asymptote for $x = 0$.

Vi undersøker så hva som skjer når x nærmer seg 1. Her blir

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = \mp\infty$$

Dermed har vi en vertikal asymptote for $x = 1$.

Vi bruker metoden i 6.5.5 for å finne eventuelle skråasymptoter.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x\ln x}\right) = 2$$

Siden denne grensen eksisterer, regner vi videre ut

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\ln x} = 0$$

Dette viser at linjen $y = 2x$ er en skråasymptote for funksjonen.