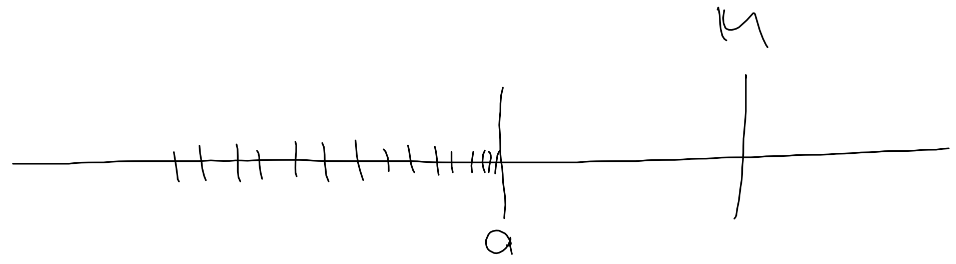
Var det nødvendig å bevise dette!



$\mathbb{Q}$ $\quad a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ a_4 = 1.414, \ldots \longrightarrow \sqrt{2}$

ikke i $\mathbb{Q}$

<u>Eksempel:</u> Se på følgen $\{a_n\}$ definert ved

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 3}{4}$$ rekursiv definisjon

$$a_2 = \frac{a_1^2 + 3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2^2 + 3}{4} = \ldots.$$

Konvergerer følgen, og i så fall mot hva?

Hvis $\{a_n\}$ konvergerer, hva konvergerer den i så fall mot?

Anta $a_n \to a$

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 3}{4}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$a = \frac{a^2 + 3}{4}$$

En eventuell grense a må være en løsning av denne ligningen.

Løser ligningen

$$4a = a^2 + 3 \implies a^2 - 4a + 3 = 0 \implies a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

<u>Konklusjon så langt:</u> Hvis følgen konvergerer, er det mot enten 1 eller 3.

Hypotese: $\{a_n\}$ avtar mot 1

Hvis vi kan vise at følgen er avtagende og begrenset, så vet vi at den konvergerer og 1 er den eneste mulige grensen.

Induksjonsbevis: Vi skal bevise at for alle n er

(*) $1 < a_n < a_{n-1}$

Vet at påstanden gjelder for $n=2$ (siden $a_2 = \frac{7}{4}$, $a_1 = 2$)

Anta at (*) er sann for en n-verdi. Vi må vise at den da også holder for neste. Vi må altså vise at

$$1 < a_{n+1} < a_n$$

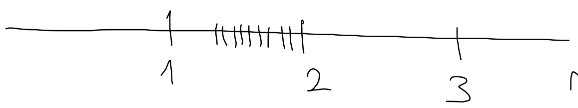
Siden $a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4}$ og $a_n > 1$, så er

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4} > \frac{1^2+3}{4} = 1$$

Dessuten

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4} < \frac{a_{n-1}^2+3}{4} = a_n$$

Dermed har vi vist at følgen er avtagende og at alle leddene er større enn 1. Dette betyr at følgen konvergerer (siden den er avtagende og begrenset), og den eneste mulige grenseverdien er 1.



Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Vi startet med $a_1 = 2$ $\quad a_n = \frac{a_{n-1}^2+3}{4}$

Vil vi også få konvergens mot 1 med andre startverdier?

$|a_1| < 3 \qquad a_n \to 1$

$|a_1| = 3 \qquad a_n \to 3$

$|a_1| > 3 \qquad a_n \to \infty$