MAT 1100: Obligatorisk oppgave 2, H-10

Alle spørsmål vektes likt: 10 poeng. Full skår blir da 110 poeng.

Oppgave 1. Finn de ubestemte integralene:

(**a**)

$$\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx.$$

Løsningsforslag:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x\right| + \frac{3}{2}(\ln|x| - \ln|x+1|) + C$$

(**b**)

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx.$$

Hint: Sett $u = \tan(x)$.

Løsningsforslag: Vi får at $du = (1+u^2)dx$, $\sin^2(x) = u^2/(u^2+1)$, og dermed

$$= \int \frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{\left(1+\frac{u^2}{u^2+1}\right)(u^2+1)}\,du$$
$$= \int \frac{u^2}{(2u^2+1)(u^2+1)}\,du$$
$$= \int \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{2u^2+1}\,du$$
$$= \arctan(u) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u) + C$$
$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C.$$

(**c**)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

Løsningsforslag:

$$= \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}\,dx$$
$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}\,dx$$

For å regne ut det siste integralet setter vi $x+1/2 = \left(\sqrt{3}/2\right)\tan u$. Da får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+\tan^2(u)}}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du$$
$$= \int \frac{du}{\cos(u)}.$$

Ny substitusjon $v = \sin(u)$, $du = dv/\sqrt{1-v^2}$, gir

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dv}{1-v^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\,dv \\
&= \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1+\sin(u)}{1-\sin(u)}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1+\tan^2(u)}+\tan(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}-\tan(u)}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)}{\sqrt{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)}\right| + C.
\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)}{\sqrt{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)}\right| + C.$$

Alternativt kunne vi brukt $x + 1/2 = (\sqrt{3}/2)\sinh u$, da får vi at $dx = \sqrt{3}/2\cosh(u)du$, og at

$$\sqrt{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh(u).$$

Mao.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}\,dx = \int dv = v + C = \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right) + C,$$

slik at

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

(**d**)

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Løsningsforslag: Sett $u = \sqrt{x+1}$, $du = dx/(2\sqrt{x+1})$,

$$= 2\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C = -\cos(\sqrt{x+1}) + C.$$

Oppgave 2. Sett $f(x) = x^x$ for $x > 0$.

(**a**) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$ og avgjør bestem hvor f er konkav/konveks.

Løsningsforslag: Vi får

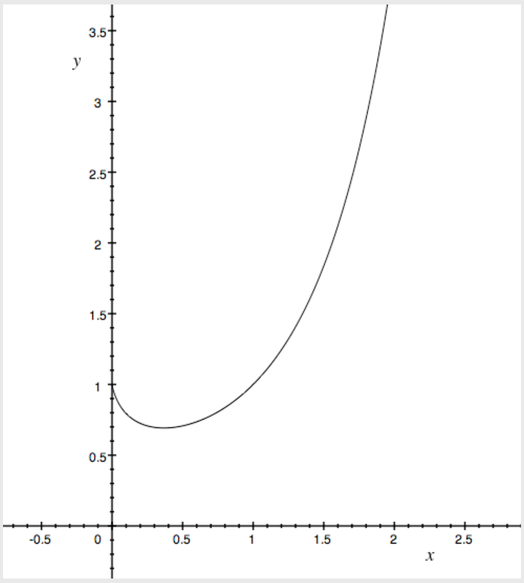
$$f(x) = e^{x\ln(x)},\ f'(x) = e^{x\ln(x)}(1+\ln(x)),\ f''(x) = e^{x\ln(x)}\left((1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x}\right) > 0.$$

Derfor blir f konveks for $x > 0$.

(**b**) Finn $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, og skissér grafen til f på intervallet $(0, 2)$. Hva er minste verdi for f på dette intervallet?

Løsningsforslag: Vi får

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1.$$



Siden f er konveks blir minste verdi der $f'(x) = 0$, dvs. $x = 1/e$, og $f(1/e) = e^{-1/e} \approx 0.6922$.

Oppgave 3. Gitt en to ganger deriverbar funksjon f som er slik at $f(\pi) = 2$, og

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\sin(x)\,dx = 5.$$

Finn $f(0)$. Hint: Bruk delvisintegrasjon.

Løsningsforslag: Vi har at

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx &= -f(x)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi f'(x)\cos(x)\,dx \\ &= f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f''(x)\sin(x)\,dx.\end{aligned}$$

Derfor blir

$$f(0) = \int_0^\pi (f(x) + f''(x))\sin(x)\,dx - f(\pi) = 5 - 2 = 3.$$

Oppgave 4. En funksjon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt.$$

(a) Finn hvor f har lokale maks. og min. verdier. (Du skal ikke finne funksjonsverdiene.)

Løsningsforslag: Vi har at $f'(x) = \sin(x)/(x+1)$. Lokale ekstrempunkter er der $f'(x) = 0$, slik at dette blir $x = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Lokale makspunkter blir $(2n+1)\pi$, og minimum blir $x = 2n\pi$. Dette kan f.eks. fåes fra fortegnskjema.

(b) Vis at $f(x) > 0$ for alle $x > 0$. (Hint: bruk delvisintegrasjon fram til et lokalt min. punkt.)

Løsningsforslag: Hvis alle de lokale minimumsverdiene er større enn null, så vil $f(x) > 0$ for alle x. Vi har at

$$\begin{aligned}
f((2n+2)\pi) &= f(2n\pi) + \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt \\
&= f(2n\pi) + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt \\
&> f(2n\pi) + \frac{1}{(2n+1)\pi+1}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)\,dt + \frac{1}{(2n+1)\pi+1}\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \sin(t)\,dt \\
&= f(2n\pi),
\end{aligned}$$

siden $\sin(t) > 0$ for $t \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ og $\sin(t) < 0$ for $t \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$. Vi har at $f(0) = 0$, som gir $f(2\pi) > 0$, $f(4\pi) > f(2\pi) > 0$ osv.

Oppgave 5. En funksjon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt. \quad \text{(Ikke prøv å regne ut dette integralet!)}$$

(a) Vis at f har en inversfunksjon g.

Løsningsforslag: Vi har at $f'(x) = 1/\sqrt{1+x^3} > 0$ for $x \geq 0$. Altså er f injektiv på denne mengden, og har følgelig en invers.

(b) Vis at

$$g''(x) = \frac{3}{2}(g(x))^2.$$

Løsningsforslag: Vi har at

$$f'(g)g' = 1, \text{ deriverer en gang til og får at } f''(g)(g')^2 + f'(g)g'' = 0.$$

Setter vi inn det første uttrykket så får vi at

$$f''(g) + (f'(g))^3\, g'' = 0, \text{ mao. } g'' = -\frac{f''(g)}{f'(g)^3}.$$

Vi har at

$$f'(g) = (1+g^3)^{-1/2}, \text{ og at } f''(g) = -\frac{1}{2}(1+g^3)^{-3/2}3g^2.$$

Innsatt i uttrykket for g'' gir dette

$$g'' = -\frac{-\frac{1}{2}(1+g^3)^{-3/2}3g^2}{(1+g^3)^{-3/2}} = \frac{3}{2}g^2.$$