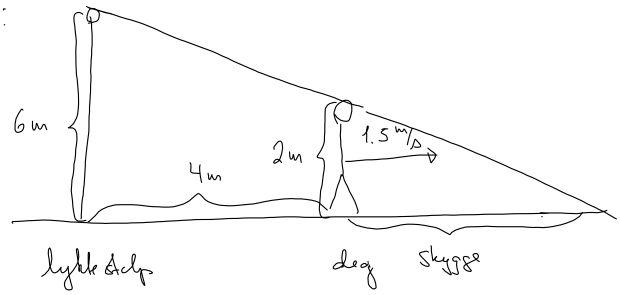
Ord om livet:

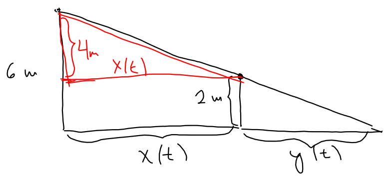
Koblede hastigheter

Eksempel:



Hvor fort vokser skyggen din?

Generell



$x'(t) = 1.5$

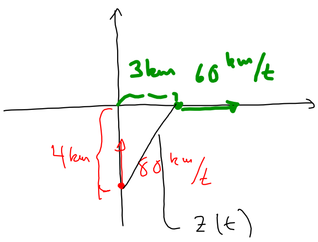
$y'(t) = \,?$

Formlike trekanter $\dfrac{x(t)}{4} = \dfrac{y(t)}{2} \quad \Big|\; 4$

$x(t) = 2y(t)$

$x'(t) = 2y'(t) \implies y'(t) = \dfrac{x'(t)}{2} = \dfrac{1.5}{2} = \underline{\underline{0.75 \text{ m/s}}}$

Eksempel:

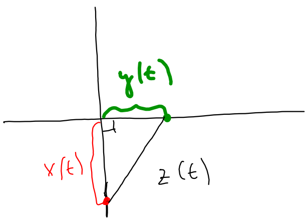


Kommer bilene nærmere hverandre i luftlinje

$z'(t) \; ?$

$\underline{x'(t) = -80}$

$y'(t) = 60$



Pythagoras: $z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$

Deriverer: $\cancel{2}z(t)z'(t) = \cancel{2}x(t)x'(t) + \cancel{2}y(t)y'(t)$

$$(*) \quad z'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{z(t)}$$

I vårt øyeblikk: $x(t) = 4, \; x'(t) = -80, \; y(t) = 3, \; y'(t) = 60$

$z(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

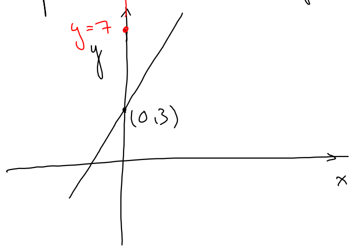
Dermed: $z'(t) = \dfrac{4(-80) + 3 \cdot 60}{5} = \dfrac{-320 + 180}{5}$

$= \dfrac{-140}{5} = \underline{\underline{-28 \text{ km/t}}}.$

17

7.4 Omvendte funksjoner

$f(x) = 2x+3$, $y = 2x+3$



Hvis vi kjenner x, kan vi regne ut y.

$7 = 2x+3 \Rightarrow 4 = 2x$

$\underline{\underline{x = 2}}$

$17 = 2x+3 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow \underline{\underline{x=7}}$

<u>Når er funksjonsverdien lik y?</u>

$y = 2x+3 \Rightarrow y-3 = 2x$

$\underline{\underline{x = \frac{y-3}{2}}}$

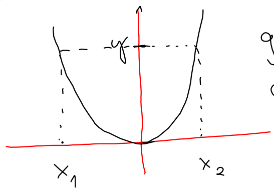
$y = 100$: $x = \frac{100-3}{2} = \frac{97}{2} = \underline{\underline{48.5}}$

Vi har funnet en ny funksjon $x = g(y) = \frac{y-3}{2}$

som er en omvendt funksjon av f.

<u>Generell idé:</u> Har en funksjon $y=f(x)$. Ønsker å løse for x slik at vi får en omvendt funksjon $x = g(y)$.

<u>Eksempel:</u> $\underline{y = x^2}$

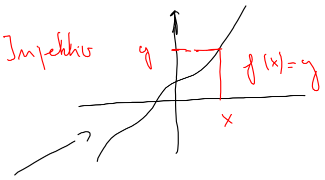


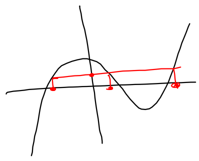
$g(y) = x_1$

$g(y) = x_2$

<u>Definisjon:</u> En funksjon kalles <u>injektiv</u> dersom det til hver y finnes høyst én x slik at $y = f(x)$. Sagt på en annen måte: Hvis $x_1 \neq x_2$, så er $f(x_1) \neq f(x_2)$.

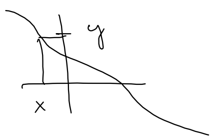
Injektiv





ikke-injektiv

<u>Setning:</u> Strengt voksende og strengt avtagende funksjoner er injektive.



<u>Eksempel:</u> Vis at $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 17$ er injektiv.

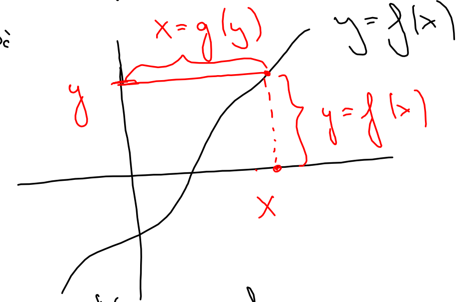
$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 2 > 0$

Altså er f strengt voksende og dermed injektiv.

Omvendte funksjoner

La $f: D_f \to V_f$ være en injektiv funksjon. Da vil det for hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $y = f(x)$. Den omvendte funksjonen $g: V_f \to D_f$ er definert ved at $g(y) = x$. Altså:

$$x = g(y) \iff y = f(x)$$



Eksempel: Vis at $f(x) = e^{x^3+2x}$ er injektiv og finn den omvendte funksjonen.

Deriverer: $f'(x) = \underbrace{e^{x^3+2x}}_{>0} \underbrace{(3x^2+2)}_{>0} > 0$

Dette betyr at f er strengt voksende og dermed injektiv.

Prøver å finne den omvendte funksjonen

$y = e^{x^3+2x}$ prøver å løse for x:

Tar ln på begge sider

$$\ln(y) = x^3 + 2x$$

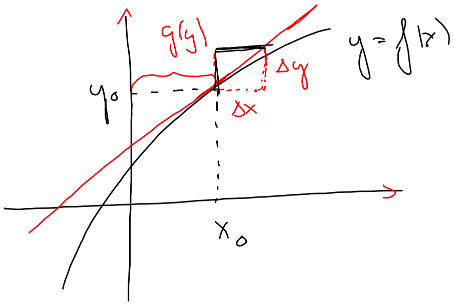
$x^3 + 2x - \ln(y) = 0$ løse for x.

← 3. grads ligning, greier ikke å

Kan vi likevel skaffe oss informasjon om den omvendte funksjonen

Teorem: Anta at f er en strengt voksende eller strengt avtagende funksjon som er deriverbar i et punkt x_0 med $f'(x_0) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen g deriverbar i punktet $y_0 = f(x_0)$ og

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



$$f'(x_0) = k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

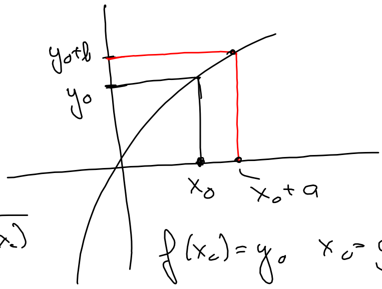
$$g'(y_0) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Litt mer regneteknisk:

$$g'(y_0) = \lim_{b\to 0} \frac{g(y_0+b) - g(y_0)}{b}$$

$$= \lim_{b\to 0} \frac{\cancel{x_0}+a - \cancel{x_0}}{f(x_0+a) - f(x_0)} = \lim_{b\to 0} \frac{a}{f(x_0+a)-f(x_0)}$$

$$= \lim_{\underbrace{b\to 0}_{\Downarrow \; a\to 0}} \frac{1}{\frac{f(x_0+a)-f(a)}{a}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



$f(x_0) = y_0 \quad x_0 = g(y_0)$

$f(x_0+a) = y_0 + b, \; x_0 + a = g(y_0+b)$

Eksempel: $f(x) = e^{x^3+2x}$ $\quad g$ er omvendt funksjon

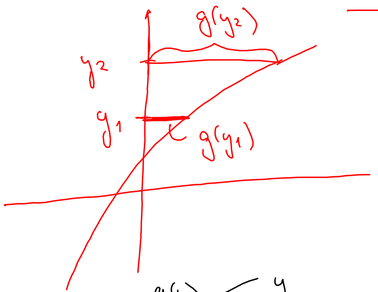
Hva er $g'(1)$? $\quad x_0 = 0, \; y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

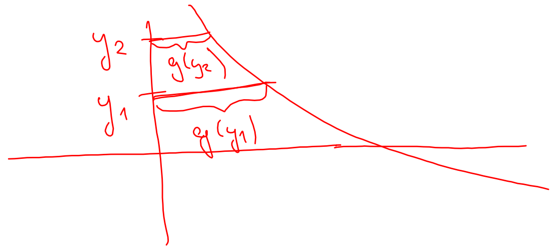
$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

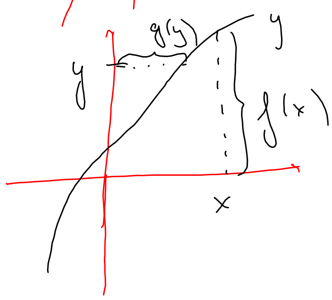
$$f'(x) = e^{x^3+2x}(3x^2+2), \quad f'(0) = \underbrace{e^{0^3+2\cdot 0}}_{1} \underbrace{(3\cdot 0^2+2)}_{2} = 2$$

Setning: Anta at f er en strengt voksende/avtagende og kontinuerlig funksjon. Da er den omvendte funksjonen også strengt voksende/avtagende og kontinuerlig.



$y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$

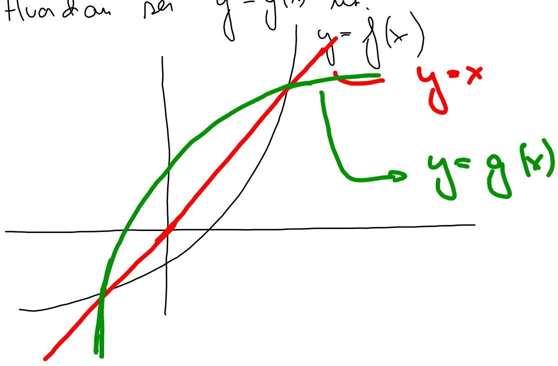




Hvordan ser grafen til den omvendte funksjonen ut?

$y = f(x)$ er den opprinnelige funksjonen $\Rightarrow x = g(y)$

Hvordan ser $y = g(x)$ ut.



Grafen til $y = g(x)$ er speilingen til $y = f(x)$ om linjen $y = x$.

Eksempel: $f(x) = e^x$ og $g(x) = \ln x$ er omvendte funksjoner