MAT1100 - Grublegruppen
Notat 11

Jørgen O. Lye

Matrisegrupper

Den store gruppen vi skal se på er

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{\text{inverterbare } n \times n \text{ matriser med koeffisienter i } \mathbb{K}\}$$

Forkortelsen står for den generelle lineære gruppen (general linear group)

I denne gruppen er det undergrupper vi er interessert i. Som vanlig er $\mathbb{K}$ enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Det har egentlig en del konsekvenser hva man velger, men oppsettet ser likt ut. Vi ser på en del eksempler under.

SL

Siden GL stod for den generelle lineære gruppen kan man lure på hva den spesielle er. Det er ikke så vanskelig:

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n\mathbb{K}) \big| \det(A) = 1\}$$

Geometrisk er dette alle lineæravbildninger som ikke endrer volum.

De ortogonale gruppene

$$O(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \big| A^T A = \mathbb{1}\}$$

og

$$SO(n, \mathbb{K}) = \{A \in O(n, \mathbb{K}) \big| \det(A) = 1\}$$

Den første kalles den ortogonale gruppen (siden slike matriser kalles ortogonale), mens SO kalles den spesielle ortogonale gruppen.

Vi har dermed

$$SO(n, \mathbb{K}) \subset O(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$$

La oss se litt på hva disse gruppene betyr geometrisk og hvor de kom fra. Det er best å la $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ akkurat her, siden det er der disse hører hjemme, selv om definisjoner som følger egentlig virker for $\mathbb{C}$. Husk at for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så er indreproduktet/prikkproduktet gitt ved $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Hvis man så endrer alle vektorene i $\mathbb{R}^n$ med en lineæravbildning (man ganger med en matrise), altså man sender $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, så vil man endre dette indreproduktet til $(A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{y}$. Dersom man krever av A at den ikke skal endre dette indreproduktet, så må man ha $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Det kan bare gå dersom $A \in O(n, \mathbb{R})$. En vanlig måte å definere gruppen $O(n, \mathbb{R})$ er derfor gruppen av alle matriser som ikke endrer indreproduktet til $\mathbb{R}^n$.

Geometrisk er det faktisk slik at $O(n, \mathbb{R})$ er alle rotasjoner og alle speilinger i $\mathbb{R}^n$, mens $SO(n, \mathbb{R})$ er alle rotasjonene. I 2 dimensjoner, $n = 2$, så er $SO(2\mathbb{R})$ ganske grei. Da kan alle ting skrives som

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dette er en rotasjon med θ mot klokken, som man kan sjekke ved å tegne litt. For å se at for $n = 2$, så må alle matriser kunne skrives slik, kan vi regne litt. Generelt sett må man kunne skrive

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Så kommer kravene.

$$A^T A = \mathbb{1} \implies \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ganger man ut dette får vi ligningene

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$ab + cd = 0$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

I tillegg kommer $\det(A) = ad - bc = 1$. Hvis man velger å skrive $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$ motivert av den første ligningen, og $b = \sin\phi$, $d = \cos\phi$ motivert av den siste ligningen, så vil ligningen i midten gi

$$\cos\theta \sin\phi + \sin\theta \cos\phi = \sin(\phi + \theta) = 0$$

Denne har en løsninger $\phi = -\theta + n\pi$. Som gir (bruk at $\sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1} \sin\theta$ og $\cos(n\pi - \theta) = (-1)^n \cos\theta$)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & (-1)^{n+1} \sin\theta \\ \sin\theta & (-1)^n \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dette er hvordan en generell matrise i $O(2,\mathbb{R})$ ser ut. Så må vi bruke betingelsen som gjør $SO(2,\mathbb{R})$ spesiell, nemlig $\det(A) = 1$

$$(-1)^n \cos^2\theta + (-1)^n \sin^\theta = 1$$

Som medfører at $n = 0$ (eller et partall om man vil). Så A kan faktisk skrives på den formen jeg påstår. Man kan gruble litt over hvorfor ting i $O(2,\mathbb{R})\backslash SO(2,\mathbb{R})$ er speilinger. Man kan også svare på spørsmålet: er dette en gruppe? Dvs bare speilingene. Dette spørsmålet gjelder i generell dimensjon. Hint: merk at speilingene må ha $\det(A) = -1$, siden $\det(A^TA) = \det(A)^2 = 1$, så $\det(A) = \pm 1$ og alle $\det(A) = 1$-dyr er rotasjoner.

Siden vi har $SO(2,\mathbb{R})$ på plass er ikke $SO(3,\mathbb{R})$ mye verre. Velg en av de 3 aksene, x, y eller z. En rotasjon om denne aksen er bare en 2-dimensjonal rotasjon. Hvis man roterer om x-aksen f.eks så skal ikke x-aksen røres. Jeg påstår derfor at man kan skrive

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

For en rotasjon om y-aksen skriver man

$$A_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dere kan selv tenke dere frem til/gjette hva en rotasjon om z-aksen må se ut som. Man kan bruke fornuften sin til å overbevise seg om at alle rotasjoner i rommet kan skrives som en rotasjon om en og en akse. Dvs en generell $A \in SO(3,\mathbb{R})$ kan skrives som

$$A = A_x(\theta)A_y(\phi)A_z(\psi)$$

Hvis man vil kan man gange ut dette beistet, men jeg får personlig lite ut av resultatet.

De unitære gruppene

Man kan godt definere $SO(n,\mathbb{C})$ som komplekse matriser med $A^TA = \mathbb{1}$, men det er ikke de mest naturlige for $\mathbb{C}$. Først trenger jeg litt notasjon. Hvis A er en $m \times n$ matrise, så definer $A^\dagger$ til å være $\overline{(A^T)}$. Dvs man transponerer matrisen, så komplekskonjugerer man alt i matrisen. Prikkproduktet til $\mathbb{C}^n$ kan da skrives (en søylevktor er en $n \times 1$-matrise)

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{w}$$

Hvis man bruker MAT1100 sin konvensjon må denne formelen skrives

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{w}}$$

Jeg mistenker denne formelen er hovedgrunnen til at fysikere vil kompleks-kunjugerer den venstre vektoren og ikke den høyre.

Gruppen $U(n)$ er da alle matrisene som bevarer indreproduktet til $\mathbb{C}^n$. Som i likhet med det reelle tilfellet betyr dette at $A^\dagger A = \mathbb{1}$. Vi kan derfor skrive

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \big| A^\dagger A = \mathbb{1}\}$$

Analogt med tilfellet over har man også $SU(n)$:

$$SU(n) = \{A \in U(n) \big| \det(A) = 1\}$$

Disse gruppene er veldig viktige, selv om de ser litt eksotiske ut. Den nest-viktigste gruppen i Standardmodellen er nemlig

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

Poincaré-gruppen

Vi skal nå over i spesiell relativitetsteori. La $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$ være koordinatene til det 4-dimensjonale tidrommet, ofte kalt Minkowski-tidrommet. Foreløpig mener jeg bare $\mathbb{R}^4$. Siden relativ bevegelse endrer avstander og tidsintervaller, vil ikke avstanden mellom 2 punkter i rommet ($\mathbb{R}^3$), dvs. $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ være uavhengig av referansesystem. Det finnes derimot en del størrelser som er det. Hvis x og x' er 2 punkter i tidrommet, så vil

$$\Delta s^2 = (x_0 - x_0')^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2 - (x_3 - x_3')^2$$

være uendret av såkalte Lorentz-tranfsormasjoner. Fysisk svarer dette til at man enten skifter til et referansesystem som beveger seg i konstant hastight relativt til det gamle, eller så er det nye referansesystemet rotert i forhold til det gamle. Eller en blanding. I tillegg har man også tidsinversjon (man bytter fortegn på tiden) og rominversjon (man speiler hele rommet). Hvis man ser på gruppen av matriser som ikke speiler hverken tid eller rom, skrives den gjerne

$$SO(1,3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \big| x \mapsto \Lambda x \text{ endrer ikke } \Delta s^2, \det(\Lambda) = 1\}$$

hvor 1 betyr at du har en tidsdimensjon, 3 betyr at du har 3 romdimensjoner. Merk at hvis man skrives bare x istedenfor $(x - x')$, så kan Δs^2 skrives som

$$\Delta s^2 = x^T \eta x$$

hvor

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kravet på Λ er derfor at hvis $x \mapsto \Lambda x$, $y \mapsto \Lambda y$, så skal man ha

$$\Delta s^2 \mapsto x^T \Lambda^T \eta \Lambda y = x^T \eta y$$

Så vi må kreve at

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

I tillegg ville vi ha $\det(\Lambda) = 1$. Man kan merke seg at bytter man ut η med $\mathbb{1}$ så får man presist $SO(4, \mathbb{R})$. Dette er altså en generalisering av rotasjoner, og man kan godt tenke på Lorantz-transformasjonene som generaliserte tidromsrotasjoner.

For å se nøyere på hva slags rotasjoner dette er, kan man i likhet med $SO(2, \mathbb{R})$-eksempelet skrive opp

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(dette er for 1+1 dimensjon), og se på kravene

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Man får da ligningene

$$a^2 - c^2 = 1$$

$$d^2 - b^2 = 1$$

$$ab - cd = 0$$

fra matrisene. Skriver man $a = \cosh(\theta)$, $d = \cosh(\phi)$, $c = \sinh(\theta)$, $b = \sinh(\phi)$ Ser man f.eks fra determinantkravet at

$$\theta = \phi$$

slik at man ender opp med

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

Dette er en hyperbolsk rotasjonsmatrise. Mangelen på minus er korrekt. Det vi har argumentert for er at rotasjoner og "boosts" (det å endre et referansesystem sin bevegelse i forhold til et annet) kan samlet sett tenkes på som hyperbolske rotasjoner.

Overskriften er Poincaré-gruppen, men vi har bare snakket om Lorentz-gruppen. Poincaré-gruppen er den større gruppen hvor man også kan translatere i tid og rom. Man tillater altså

$$x \mapsto \Lambda x + a$$

hvor a er en vektor i $\mathbb{R}^4$. Poincaré-gruppen er med andre ord affine transformasjoner. Poincaré-gruppen er kanskje den viktigste gruppen i teoretisk fysikk. Ihvertfall i høy-energifysikk. Man skriver gjerne $\mathcal{P}$ for denne gruppen.

En liten bemerkning er at $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{P}$ hvor $\mathbb{R}^4$ er gruppen med addisjon som operasjon, og hvor man identifiserer denne med translasjonene i $\mathcal{P}$. Man har også at $SO(3, \mathbb{R}) \subset \mathcal{P}$.

Möbius og Lorentz

Gruppen $SL(2, \mathbb{C})$ har fått et eget navn, nemlig Möbius-gruppen. Vi skal ikke gå inn på alt det gøye man kan gjøre med denne gruppen. Det vi derimot skal bruke den til er å lage oss en homomorfi mellom $SO(1, 3)$ og $SL(2, \mathbb{C})$. Oppsettet er som følger Gitt et punkt i tidrommet $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, lag følgende matrisene

$$A = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Determinanten er nemlig litt interessant:

$$\det(A) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Gitt en $M \in SL(2, \mathbb{C})$ kan vi derfor la M virke på et punkt i tidrommet ved

$$x \mapsto A \mapsto MAM^\dagger$$

Man kan godt sjekke dette er en homomorfi. Det man også kan vise er et den er $2-1$. Med det mener jeg at for hvert element i $SO(1, 3)$ finnes det 2 elementer i $SL(2, \mathbb{C})$ som oppfører seg som den gitte Lorentz-transformasjonen.

Uten at vi egentlig har gått inn på nok topologi til å si dette, kan man vise at $SL(2, \mathbb{C})$ er den doble overdekningen til Lorentz-gruppen. Derfor kalles også $SL(2, \mathbb{C})$ av og til for $\mathrm{Spin}(1, 3)$. Denne doble overdekningen er opphavet til spinn slik man møter det i kvantemekanikk, og er grunnen til at fermioner er forskjellig fra bosoner.

Overdeknikng og rotasjoner

Man kan i samme ånd som over vise at $SU(2)$ er en dobbel overdekning av $SO(3, \mathbb{R})$. Slik at Spin(3)= $SU(2)$.