Løsninger problemsett 3, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. a) La $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et generelt polynom med heltallige koeffisienter. Anta at den ferdige forkorta heltallbrøken $\frac{p}{q}$ er ei rot i P. Vis at p er en faktor i a_0 og at q er en faktor i a_n.

   b) Bruk dette til å vise at alle rasjonale røtter av $Q(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0$ må være heltallige og gå opp i c_0.

   Løsning:

   a) At $\frac{p}{q}$ er ei rot i P betyr at

   $$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

   Hvis vi nå ganger opp dette med q^n, får vi

   $$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

   som kan skrives

   $$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

   Siden $\frac{p}{q}$ var ferdig forkorta, har ikke p og q noen felles faktorer, så p har heller ikke noen felles faktorer med q^n. Derfor må p dele a_0. Vi kan også skrive ligninga som

   $$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1})$$

   og ser på samme måte at q må være en faktor i a_n. Dette kalles *rational root theorem*.

   b) Dette er et spesialtilfelle av forrige oppgave. Her er $c_m = 1$, så for enhver rasjonal rot $\frac{p}{q}$ av Q må q være en faktor i 1; det vil si at $q = \pm 1$. Enhver brøk på formen $\frac{p}{\pm 1}$ hvor p er et heltall er nødvendigvis sjøl et heltall, så alle rasjonale røtter er også heltall som deler konstantleddet.

2. Polynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har ifølge algebraens fundamentalteorem 3 røtter i $\mathbb{C}$. Kall disse p, q og r. Finn a, b og c uttrykt ved p, q og r, og bruk dette til å løse ligningssystemet

   $$\begin{aligned} p + q + r &= 2009 \\ qr + rp + pq &= -1 \\ prq &= -2009 \end{aligned}$$

   Hvorfor får vi 6 løsninger?

   Løsning: Setning 1.5.5 i Kalkulus sier at hvis p, q og r er røtter i $P(z)$ må $z - p$, $z - q$ og $z - r$ være faktorer i $P(z)$. Derfor er $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c = (z-p)(z-q)(z-r) = z^3 - (p+q+r)z^2 + (qr+rp+pq)z - pqr$, så ved å sammenligne koeffisienter (dette er en teknikk som vil brukes seinere i kurset også), ser vi at vi må ha $a = -(p+q+r)$, $b = qr + rp + pq$ og $c = -pqr$. Dette er et spesialtilfelle av *Viètes/Vietas formler*.

   Ved hjelp av dette ser vi at $Q(z) = (z-p)(z-q)(z-r) = z^3 - 2009z^2 - z + 2009$, så p, q og r må være røtter av Q. Generelt kan ei polynomisk ligning av grad 3 løses ved bruk av grisete formler, men her har vi kjekke oppgave 1b fra over: Den sier at eventuelle rasjonale røtter av P fins i mengden $\{\pm 1, \pm 7, \pm 287, \pm 2009\}$. Vi observerer at $Q(1) = 0$, så 1 er ei rot. Derfra kan man polynomdividere og få ei annengradsligning å løse, eller finne de andre røttene ved inspeksjon. I alle tilfeller får man ± 1 og 2009 som røttene til Q, så $Q(z) = (z+1)(z-1)(z-2009)$, og p, q og r må være -1, 1 og 2009 i en eller annen rekkefølge - i alt $3! = 6$ forskjellige løsninger.

3. Utled formler lignende de i forrige oppgave for 2. gradsligninger og løs i lys av dette oppgave 3.1.10 i Kalkulus.

   Løsning: La $P(X) = (X-z)(X-w) = X^2 - (z+w)X + zw$. Legg merke til at $P(X)$ har røttene z og w. Hvis både $z+w$ og zw er reelle, er $P(X)$ et polynom med reelle koeffisienter, som man ofte skriver $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. ($\mathbb{R}[X]$ kalles ringen av polynomer med reelle koeffisienter i en variabel X, mer om dette og andre ringer i MAT2200 - Grupper, ringer og kropper.) Nå veit vi fra 3.4.8 at slike polynomer enten har 2 reelle røtter, eller 2 komplekskonjugerte røtter. Siden disse er z og w, er vi i mål.

4. a) La $\{x_i\}_{i=1}^n$ og $\{y_i\}_{i=1}^n$ være $2n$ reelle tall og definer polynomet

   $$P(z) = (x_1 z + y_1)^2 + (x_2 z + y_2)^2 + \cdots + (x_n z + y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i z + y_i)^2$$

   Dette er et polynom av grad 2 i z. Skriv det på formen $P(z) = az^2 + bz + c$.

   b) Ei enkel, men viktig ulikhet sier at $r^2 \geq 0$ for alle reelle tall r. Forklar hvorfor $P(z) \geq 0$ for alle reelle z. Vis at P ikke kan ha 2 forskjellige reelle røtter. (Tenk på hvordan grafen til P måtte sett ut.)

   c) Bruk det du kan om annengradsligninger til å vise *Cauchy-Schwarz-ulikheta*:

   $$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

   Løsning:

   a) Ved å ekspandere hvert ledd får vi

   $$P(z) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) z^2 + \left(2\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) z + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

   b) Siden et kvadrat er minst lik 0, og $P(z)$ er summen av n kvadrater, må $P(z) \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. Hvis P hadde 2 forskjellige reelle røtter, måtte grafen nødvendigvis gått under x-aksen. Det har vi akkurat vist at den ikke kan.

   c) Siden P ikke har 2 forskjellige reelle røtter, må vi ha at diskriminanten $b^2 - 4ac \leq 0$. (Se Setning 3.4.8 i Kalkulus.) Derfor får vi

   $$\left(2\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \leq 0$$

   som er ekvivalent til ulikheta vi ønsker å vise.