UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus-prøveeksamen
Eksamensdag:	27. november 2010.
Tid for eksamen:	10:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen innholder 7 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt, eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hver av de 5 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunnne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Del 1

Oppgave 1. (3 poeng). Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^3y^2) \text{ er:}$$

A $3x^2y^2$

B $3/x$

C $3x^2/y^2$

D $3xy^2$

E $3y^2/x$

Oppgave 2. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz + x^2,$$

vokser i punktet $(1, 1, -1)$ raskest i retningen

A $(1, 1, 1)$

B $(-1, 1, -1)$

C $(1, -1, 1)$

D $(0, 0, 2)$

E f vokser ikke i $(1, 1, -1)$

Oppgave 3. (3 poeng). Arealet av trekanten med hjørner $(-2, 2)$, $(1, 1)$ og $(-1, 2)$ er

A $3/2$

B 1

C $1/2$

D 0

E $-1/2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4. (3 poeng). Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ er:}$$

A $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 5. (3 poeng). Volumet til rotasjonslegemet som framkommer ved å rotere området $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{x}$ om y-aksen er

A π

B $4\pi/5$

C $3\pi/5$

D $2\pi/5$

E $\pi/5$

Oppgave 6. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x) = x - \ln(|x|)$$

A er konveks på $\mathbb{R}$

B er større enn x for alle x

C er mindre enn x for alle x

D er konveks på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$

E har asymptote $y = x + 1$ når $x \to \infty$

Oppgave 7. (3 poeng). Følgen gitt ved $a_0 = \pi$,

$$a_{n+1} = \frac{4 + a_n}{1 + a_n} \quad \text{for } n > 0, \text{ er konvergent.}$$

Da blir grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A e

B π

C 2

D 1

E 0

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Oppgave 8. (10 poeng). Finn alle røttene i polynomet

$$F(z) = z^3 - 3z^2 + 5z - 3,$$

og skriv $F(z)$ som et produkt av to reelle polynomer $P(z)$ og $Q(z)$, der $P(z)$ er et førstegradspolynom, og $Q(z)$ et andregradspolynom.

Oppgave 9. (10 poeng). Hvilke punkter i det komplekse planet har $|z| \leq \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$?

Oppgave 10. (10 poeng). Regn ut integralet

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Oppgave 11. (10 poeng). La A være en $n \times n$ matrise slik at $A^2 = \mathbf{0}$ (null matrisen). Vis at da er $(I_n - A)^{-1} = (I_n + A)$.
Vis videre at

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

tilfredstiller $A^2 = \mathbf{0}$ og regn ut

$$\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Oppgave 12. (10 poeng, men vanskelig). La f være en kontinuerlig deriverbar funksjon som tilfredstiller:

i) $f(y) = y$ for et tall y,

ii) $f'(x) > 0$ for alle x, og

iii) $f(x) < x$ for alle $x > y$.

La $a_0 > y$ og definér en følge $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ved at $a_n = f(a_{n-1})$ for $n \geq 1$. Vis at $\lim_{n\to\infty} a_n = y$.

SLUTT