$\boxed{\text{Matriser}}$

En <u>$(m \times n)$ - matrise</u> er et tallskjema med m rader (linjer) og n søyler.

<u>eks.</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 16 \end{pmatrix}$ er en (2×3) - matrise

Notasjon: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

F. eks. $A_{13} = -1$

Generelt: A_{ij} = tallet som er på linje i, søyle j.

<u>eks.</u> ICA: Brød 24.50, 1 ℓ melk 14.90, 1 ℓ juice 18.90

KIWI: Brød 25.90, 1 ℓ melk 12.90, 1 ℓ juice 17.90

Barnehagen trenger hver mandag:

<u>Ertekroken (store barn)</u>	<u>Masalusa (småbarnsavd.)</u>
7 brød	3 brød
5ℓ melk	2ℓ melk
1ℓ juice	0ℓ juice

Kan samle informasjonen i matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan da regne ut:

ICA: 264.90 for Erlekrok, 103.30 for Masalusa
KIWI: 263.70 — " — , 103.50 — " —

Kan samle denne infoen i matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Matrisen C kalles produktet av A og B, og vi skriver

$$AB = A \cdot B = C$$

Altså:

$$\begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Vi kan regne ut matriseproduktet slik:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 3 \\ & & & 5 & 2 \\ & & & 1 & 0 \\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & & \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & & \end{array}$$

Her skal det stå:

$$24.50 \cdot 7 + 14.90 \cdot 5 + 18.90 \cdot 1 = 264.90$$

Produktet kommer frem her!

Definisjon av matrisemultiplikasjon

Vi finner hva som skal stå på hver plass i produktmatrisen ved å ta skalarprodukt av linjen og søylen som <u>peker inn mot plassen</u> når vi lager et "kryss".

eks.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|ccc} & & 7 & 0 & 1 \\ & & 2 & -1 & 5 \\ \hline 5 & 1 & 37 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \end{array} = \begin{bmatrix} 37 & -1 & 10 \\ 4 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Annen regning med matriser

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar (tall) foregår komponentvis. Å <u>transponere</u> en matrise betyr å bytte linjer med søyler.

eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 19 & 7 \end{bmatrix}$$

transponert

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem Regneregler for matriser

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$ og $A(B-C) = AB - AC$

(3) $(B+C)A = BA + CA$ og $(B-C)A = BA - CA$

(4) $(sA)B = A \cdot (sB) = s(AB)$ for alle tall s

(5) $A + B = B + A$, men $AB \neq BA$ generelt

(6) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Bevis (2) - (6) er "greie" å sjekke (droppes, se bok).

For å begrunne (1), utvider vi barnehageeksemplet.

Antall avdelinger med	Leverandør 1	Leverandør 2
Ertekrok-matbehov	4	1
Masalur-matbehov	3	2

Samler leverandør-info i matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får nå

$$(AB)D = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ \hline 264.90 & 103.30 & 1369.50 & 471.50 \\ 263.70 & 103.50 & 1365.30 & 470.70 \end{array}$$

L1 hos ICA

L2 hos ICA

L2 hos KIWI

L1 hos KIWI

På den annen side:

$$BD = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ \hline 7 & 3 & 37 & 13 \\ 5 & 2 & 26 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

Hvor mange brød trenger L2?

Hvor mange liter melk trenger L2?

Hvor mange liter juice trenger L2?

$$A(BD) = \begin{array}{ccc|cc} & & & 37 & 13 \\ & & & 26 & 9 \\ & & & 4 & 1 \\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & & \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & & \square \end{array}$$

Hvor mye L2 betaler hos KIWI

Vi ser at det ikke er tilfeldig at dette blir lik $(AB)D$. Matrisenes formater og tall kan endres til vilkårlige matriser. Ergo gir dette en generell begrunnelse for at $A(BD) = (AB)D$. Regelen kan så sjekkes algebraisk. $\square$

Matriselikninger. Matriser som avbildninger

eks. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$ kan skrives som matriselikningen $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Her er

$$\begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 4 & 2 & 4x+2y \\ -1 & 3 & -x+3y \end{array}$$

Så matriselikningen sier at $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\square$

En $(n \times n)$-matrise A kan oppfattes som en funksjon

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ved at punktene oppfattes som søylevektorer og vi ganger med A fra venstre.

eks. $n = 2\,, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$A(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

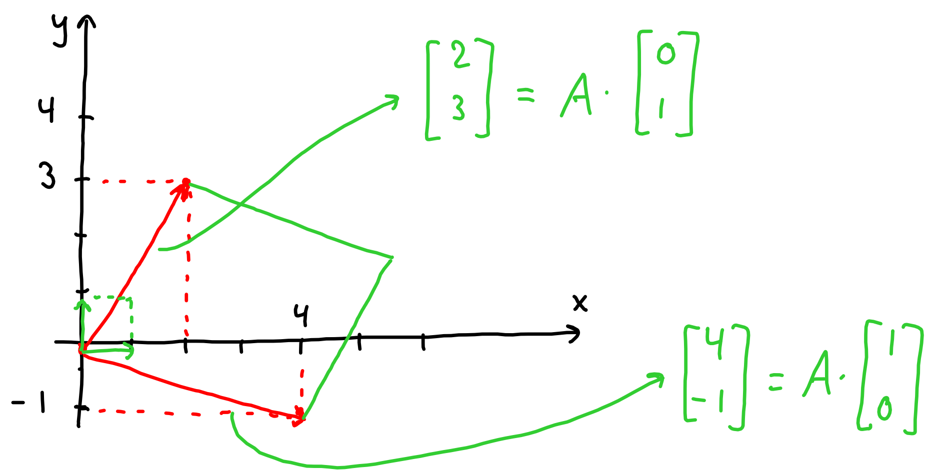
For eksempel:

$$A(5,7) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 5 \\ & & 7 \\ \hline 4 & 2 & 34 \\ -1 & 3 & 16 \end{array} = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \end{bmatrix} = (34,16)$$

$$A(1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 0 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = (4,-1)$$

$$A(0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & & 1 \\ \hline 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (2,3)$$

Så: En matrise avbilder alltid standardbasisvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ over på søylevektorene sine.



Identitetsmatriser

er matrisene

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{osv.}$$

Disse oppfører seg som tallet 1 ved matrisemultiplikasjon:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

for alle matriser A slik at produktene er definert.

eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & \pi \\ & & \sqrt{2} \\ \hline 1 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En $(n \times n)$-matrise A kalles inverterbar hvis det fins en $(n \times n)$-matrise A^{-1} slik at

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

der I_n er identitetsmatrisen av størrelse $(n \times n)$. Hvis A ikke er inverterbar, kalles den singulær.

A^{-1} kalles den inverse matrisen til A.

eks. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har invers matrise

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/14 & -2/14 \\ 1/14 & 4/14 \end{bmatrix}$$

Vi har nemlig:

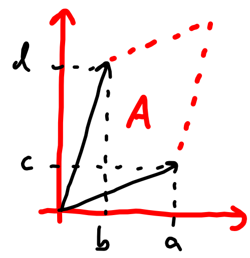
$$A \cdot A^{-1} = \begin{array}{cc|cc} & & 3/14 & -2/14 \\ & & 1/14 & 4/14 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Generelt:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s/d & -q/d \\ -r/d & p/d \end{bmatrix} \quad \text{der } d = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$$

Flere resultater om determinanter og matriser

① Absolutverdien av $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.



② $\det(A) = \det(A^T)$ for alle kvadratiske matriser A.

③ A er inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ — " — " —

④ $\det I = 1$, for alle identitetsmatriser I

⑤
- Byttes to linjer i en determinant, skifter den fortegn
- Ganger vi alle tall i en linje med et tall s, så multipliseres determinanten med s.
- Legger vi s ganger en linje til en annen linje, endres ikke determinanten.

Bevis ① La $\vec{x} = (a, c, 0)$
$\vec{y} = (b, d, 0)$

$$\text{Areal parallellogram} \overset{\text{vet}}{=} |\vec{x} \times \vec{y}| = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left| \vec{e}_1 \cdot 0 - \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|$$

②-⑤ : Pekte og snakket. □

Matrisedynamikk

- Tiden regnes i tidspunkter $t = 0, 1, 2, \ldots$
- Tilstanden til systemet ved tid $t = n$ er gitt ved en tilstandsvektor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{(Her: Todimensjonalt tilfelle)}$$

- Vi regner oss ett hakk fremover i tiden ved å gange tilstandsvektoren med en overgangsmatrise M:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{for } n \geq 0.$$

eks. Mat 1100 har 300 studenter. Hver student kan være i to tilstander: (1) Lese (2) Sove

- Hvis en student leser i dag, er det helt sikkert at hun/han sover i morgen
- Hvis en student sover i dag, er sannsynligheten 50% for at vedkommende leser i morgen, og 50% for at studenten fortsatt sover da.

La x_n og y_n være antall studenter som hhv. leser og sover ved tid $t = n$, der $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Anta at

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(alle leser første dag)}$$

Skal finne overgangsmatrisen M.

<u>Løsning</u> Vi finner x_{n+1} og y_{n+1} uttrykt ved x_n og y_n.

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{antall som leser på dag } n+1) = \frac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} = (\text{— " — sover — " —}) = x_n + \frac{1}{2} y_n \end{cases}$$

dvs.
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0 x_n + \frac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} = 1 \cdot x_n + \frac{1}{2} y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{dvs. } \underline{\underline{M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

For eksempel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 300 \\ & & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 300 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Gå bakover i tiden:

Gang med M^{-1} (hvis den fins)

To hakk fremover i tiden:

$$M(MX) = (M \cdot M) \cdot X \overset{\text{def}}{=} M^2 X$$