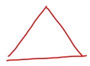
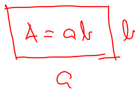
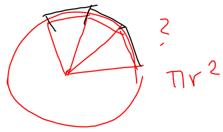
Integrasjon (kap 8)

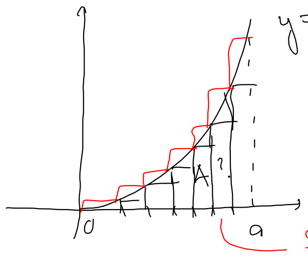
Historisk sett så handler integrasjon om å beregne arealer, volumer og flater.

Utgangspunkt:





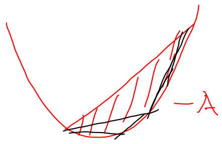




$y = x^n$

$y = x^{3/2}$

Fermat

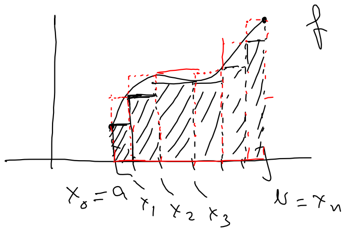


$$\sum_{i=1}^{N} i^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$$

Newton, Leibniz

Trappesummer

Intuitivt utgangspunkt: Beregne integral under en positiv funksjons graf:



Partisjon:

$\Pi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$

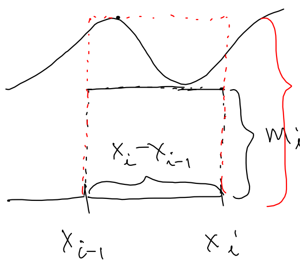
i-te intervall: $[x_{i-1}, x_i]$

Arealet til svarte bokser: $N(\Pi)$ – nedre trappesum til Π – beregnbare

Arealet til røde bokser: $\Phi(\Pi)$ – øvre trappesum til Π. – beregnbar.

Hvis området under funksjonsgrafen har et areal A, så får $N(\Pi) \le A \le \Phi(\Pi)$.

Hvordan beregner man $N(\Pi)$ og $\Phi(\Pi)$



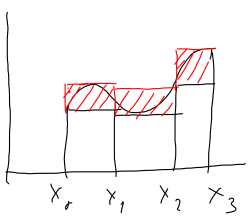
$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

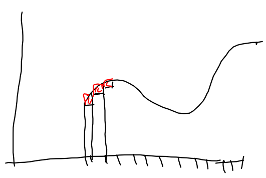
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ ← nedre tilnærming

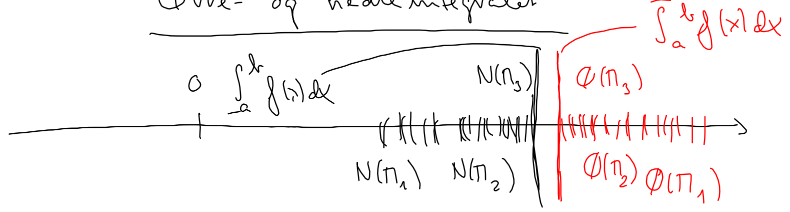
↑ til arealet.

$\Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ ← øvre tilnærming





Øvre- og nedre integralet



$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon av } [a,b]\}$ = nedre-integralet.

$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon av } [a,b]\}$ = øvre-integralet

Generelt er $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$.

<u>Definisjon</u>: Vi sier at f er <u>integrerbar</u> over $[a,b]$ dersom $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$. I så fall definerer vi <u>integralet</u> til f over $[a,b]$ ved

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

Hvis f <u>ikke</u> er integrerbar, så er $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>ikke</u> definert.

<u>Eksempel</u>: Funksjonen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$

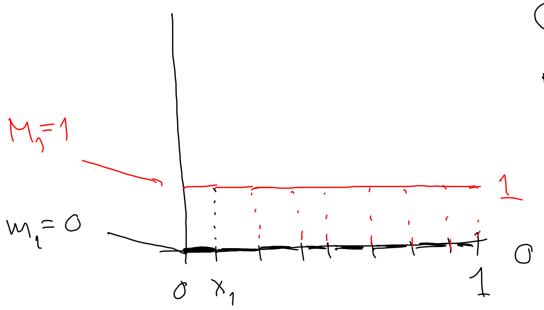
er <u>ikke</u> integrerbar over $[0,1]$ fordi

$$\underline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{mens} \quad \overline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 1$$

<u>Hvorfor</u>: Ta en partisjon Π

$\Phi(\Pi) = 1$

$N(\Pi) = 0$



Oppsummering:

Nedre integral = beste tilnærming nedenfra

$= \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ en part}\} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Øvre integral = beste tilnærming ovenfra

$= \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi \text{ en part}\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

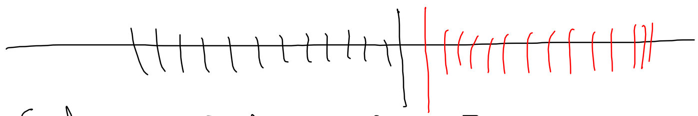
så lenge f er begrenset

Disse eksisterer bestandig og $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Dersom $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, så er f integrerbar og

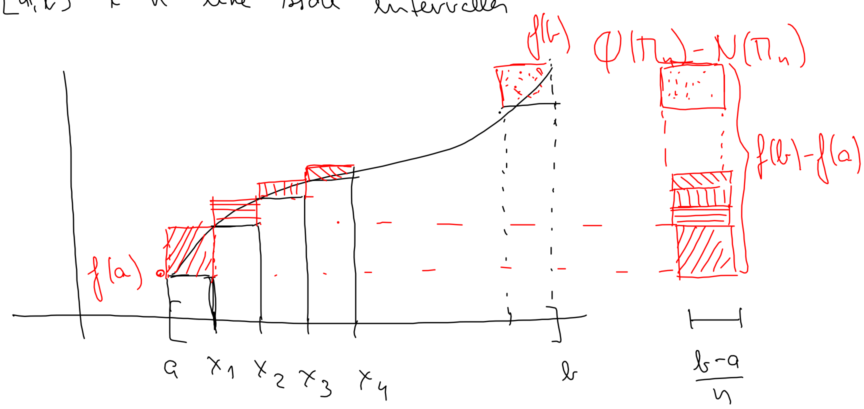
da definerer vi $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Observasjon: Dersom vi kan få $\Phi(\Pi) - N(\Pi)$ så liten vi vil ønske ved å velge Π smart, så er f integrerbar.



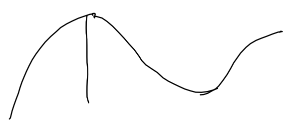
Setning: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er monoton. Da er f integrerbar over $[a,b]$.

Bevis: La Π_n være partisjonen vi får ved å dele inn $[a,b]$ i n like store intervaller



$\Phi(\Pi_n) - N(\Pi_n) = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \to 0$ når $n \to \infty$

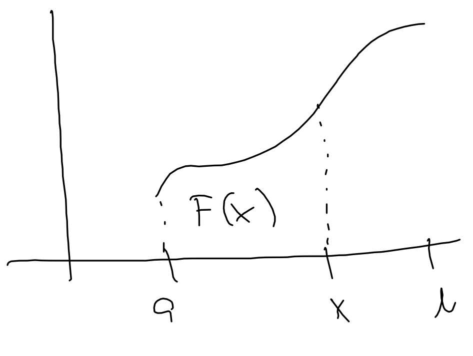
Følgelig er f integrerbar!



<u>Analysens fundamentalteorem:</u> Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er f integrerbar på alle intervall $[a,x]$ for enhver $x\in[a,b]$, og funksjonen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

er kontinuerlig med derivert $F'(x)=f(x)$ i alle $x\in(a,b)$.



$$F'(x)=f(x)$$