Løsninger problemsett 2, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. (En klassiker) En gammel sjørøver gjemte på sine eldre dager en skatt ned på en øy med følgende instrukser til den som måtte ønske å grave den fram: "På øya er det kun en kokospalme, et banantre og en galge. Start ved galgen, gå til kokospalmen, plukk en kokosnøtt, vend 90 grader mot klokka og gå deretter like mange skritt som det var fra galgen til palmen. Legg fra deg nøtta. Start så på ny ved galgen, gå til banantreet, vend denne gang 90 grader med klokka og gå igjen like mange skritt som det var fra galgen til treet. Skatten ligger nå begravd midt mellom der du står og kokosnøtta."

   Du bestemmer deg for å få fatt i denne skatten, og drar derfor til øya. Der viser det seg at galgen er råtna slik at du kun er i stand til å finne kokospalmen og banantreet. Oppdraget kan nå synes umulig, men heldigvis kan du så mye om komplekse tall at du allikevel er i stand til å finne skatten. Hvordan?

   Løsning: Tegn kartet i det komplekse planet og la kokospalmen være i punktet K, banantreet i B og galgen i G. Kokosnøtta legger du fra deg i $K + i(G - K)$ (tegn!), mens du etter å ha gått fra banantreet havner i $B - i(G - B)$. Skatten befinner seg nå midt mellom disse punktene, nemlig i $\frac{1}{2}(K + iG - iK + B - iG + iB) = \frac{1}{2}(K + B) + \frac{1}{2}i(B - K)$ som er uavhengig av hvor galgen var plassert i utgangspunktet. Tolkninga av dette blir at du kan finne skatten ved å starte ved kokospalma, gå halve veien til banantreet, vende 90 grader med klokka og gå like mange skritt som du gjorde før du vendte. Her ligger skatten begravet.

2. Vis ved hjelp av definisjonen av en konvergent følge at $a_n = \frac{n!}{n^n}$ konvergerer.

   Løsning: Siden

$$|a_n - 0| = |\frac{n!}{n^n}| = |\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}| \leq |1 \cdot 1 \dots 1 \cdot \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$$

   så lenge $n > \epsilon^{-1}$, konvergerer a_n mot 0.

3. Anta at a_n, b_n og c_n er følger slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle n. Anta dessuten at både a_n og c_n konvergerer mot en grense L. Vis at at b_n også konvergerer mot L.

   Løsning: Siden a_n og c_n begge konvergerer mot L, vil vi for alle $\epsilon > 0$ ha at $|a_n - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ så lenge $n > N_a$ for noen N_a. Tilsvarende er $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$ når $n > N_c$ for noen N_c. Men dette betyr at $L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon \Rightarrow |b_n - L| < \epsilon$ for alle n som er større enn både N_a og N_c.

4. Vis at hvis $0 < a < \alpha$, er $a < \sqrt{\alpha a} < \alpha$. Forklar at følgen gitt ved $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n}$ er konvergent og finn $\lim_{n\to\infty} a_n$. Hva er $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$?

   Løsning: Ikke nå, dette ligner for mye på ei oppgave på obligen. Hvis du er interessert i et løsningsforslag, kan du pirke borti meg når alle obligfrister er ute.

5. La $d : X \times X \to \mathbb{R}$ være en metrikk. (Det vil si at $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ og $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ for alle $x, y, z \in X$.) Vis at $d(x,y) \geq 0$ for alle $x, y \in X$.

   Løsning: Velger vi $z = x$ i det siste metrikk-kravet, får vi $d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x)$. Ved det første kravet er venstresida 0, og ved det andre kravet er høyresida $2d(x,y)$ slik at vi har $0 \leq 2d(x,y)$ eller $0 \leq d(x,y)$.

6. Er følgende funksjoner metrikker på $\mathbb{R}$?

   a) $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x = y \\ 1 & \text{hvis } x \neq y \end{cases}$

   b) $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

   c) $d(x,y) = \sin(x-y)$

   d) $d(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{hvis } y \geq x \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$

   e) $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$

   Løsning:

   a) Ja. Vi har rett fra definisjonen av d at $d(x,y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$. Hvis $x \neq y$, er $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. Hvis $d(x,z) > d(x,y) + d(y,z)$, må $d(x,z) = 1 \Leftrightarrow x \neq z$ og $d(x,y) = d(y,z) = 0$. Men dette betyr at $x = y$ og $y = z$ som igjen betyr at $x = z$. Altså er $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (Du har akkurat vært vitne til et bevis ved motsigelse, også kjent som *reductio ad absurdum*. Vi antar at noe (her at $d(x,z) > d(x,y) + d(y,z)$) er sant. Hvis dette leder til en motsigelse, betyr det at antagelsen vår var feil (her at $d(x,z) > d(x,y) + d(y,z)$ ikke er sant, altså er $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$)).

   b) Ja. Det enkleste her er å bruke oppgave 7 under på metrikken $d(x,y) = |x-y|$.

   c) Nei. Vi har at $d(\pi, 0) = \sin(\pi) = 0$ som motsier at $d(x,y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

   d) Nei. Symmetrikravet $d(x,y) = d(y,x)$ er ikke oppfylt: $d(2,0) = 1 \neq 2 = d(0,2)$.

   e) Ja. At $d(x,y) = \log(1 + |x-y|) = 0$, er ekvivalent til $1 + |x-y| = 1$ som betyr at $x = y$. Siden $|x-y| = |y-x|$, er også $d(x,y) = d(y,x)$. Som vanlig byr trekantulikheta på mest bry:

   $$\begin{aligned} \log(1+|x-z|) &\leq \log(1+|x-y|) + \log(1+|y-z|) \\ &= \log(1+|x-y|+|y-z|+|x-y|\cdot|y-z|) \end{aligned}$$

   Ved (den vanlige) trekantulikheta er $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ og siden $|x-y| \cdot |y-z| \geq 0$, må ulikheta holde.

7. Vis at hvis d er en metrikk, er også $d' = \frac{d}{1+d}$ en metrikk.

   Løsning: Vi sjekker at de 3 krava for en metrikk er oppfylt for d' ved å bruke at d oppfyller de samme krava.

   I) $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

   II) $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$

   III) La for notasjonens skyld $Y = d(x,z)$, $Z = d(x,y)$ og $X = d(y,z)$. Da må vi vise at

   $$\frac{Y}{1+Y} \leq \frac{Z}{1+Z} + \frac{X}{1+X}.$$

   Ganger vi opp brøkene sitter vi igjen med $Y \leq X + Z + 2XZ + XYZ$ etter at støvet har lagt seg. Dette må gjelde siden $Y = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = Z + X$ og både $2XZ \geq 0$ og $XYZ \geq 0$.