Løsningsforslag til underveiseksamen i MAT 1100, 6/10-2008

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Da er z lik:

☐ $-\sqrt{3} - i$
☐ $-\sqrt{3} + i$
☐ $-2\sqrt{3} - 2i$
☐ $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

Riktig svar: c) $-2\sqrt{3} - 2i$.
Begrunnelse: $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2})\right) = -2\sqrt{3} - 2i$.

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -2 + 2i$ har polarkoordinater:

☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{6}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4}$
☐ $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{6}$

Riktig svar: d) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$.
Begrunnelse: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Siden $\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, og θ ligger i 2. kvadrant, er $\theta = \frac{3\pi}{4}$

3. (2 poeng) Dersom $z = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ og $w = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$, så er zw lik:

☐ $16 + 16i\sqrt{3}$
☐ $8 - 8i\sqrt{3}$
☐ $4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$
☐ $-16 + 16i\sqrt{3}$
☐ $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$

Riktig svar: b) $8 - 8i\sqrt{3}$.
Begrunnelse: $zw = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 16e^{i\frac{20\pi}{12}} = 16e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 16(\frac{1}{2} + i(-\frac{1}{2}\sqrt{3})) = 8 - 8i\sqrt{3}$.

4. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2 + n\sqrt{n}}{\sqrt{4n^4 + 9n^3}}$ er lik:

☐ $\frac{9}{2}$
☐ $\frac{9}{4}$
☐ $\frac{1}{3}$
☐ ∞
☐ 9

Riktig svar: a) $\frac{9}{2}$.

Begrunnelse: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n^2+n\sqrt{n}}{\sqrt{4n^4+9n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(9+\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^2\sqrt{4+\frac{9}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4+\frac{9}{n}}} = \frac{9}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$

5. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ er lik:

- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{3}$

Riktig svar: c) $\frac{1}{2}$.

Begrunnelse: Multipliserer oppe og nede med det konjugerte uttrykket:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{e^{x/2}-1}$ er lik:

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 0
- ☐ ∞

Riktig svar: b) 4.

Begrunnelse: Bruker L'Hôpitals regel ("$\frac{0}{0}$"-uttrykk):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{e^{x/2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(\cos 2x)^2}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{(\cos 2x)^2\, e^{x/2}} = 4$$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$ er lik:

- ☐ 1
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$

Riktig svar: c) 0.

Begrunnelse: Bruker L'Hôpitals regel ("$\frac{0}{0}$"-uttrykk):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

8. Den deriverte til $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ er:

☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
☐ $\frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)\sqrt{x^2+1}}$
☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
☐ $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$
☐ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Riktig svar: c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Begrunnelse: Bruker kjerneregelen:

$$D(\ln(\sqrt{x^2+1}+x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} D(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = e^{x^3+1}$ er:

☐ $g(x) = (\ln x - 1)^{\frac{1}{3}}$
☐ $g(x) = e^{((x-1)^{\frac{1}{3}})}$
☐ $g(x) == e^{(-(x-1)^{\frac{1}{3}})}$
☐ $g(x) = \frac{1}{3} \ln |x-1|$
☐ $g(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

Riktig svar: a) $g(x) = (\ln x - 1)^{\frac{1}{3}}$.
Begrunnelse: Løser ligningen $y = e^{x^3+1}$ for x:

$$y = e^{x^3+1} \iff \ln y = x^3 + 1 \iff x^3 = \ln y - 1 \iff x = (\ln y - 1)^{\frac{1}{3}}$$

Bytter vi navn på variablen, får vi $g(x) = (\ln x - 1)^{\frac{1}{3}}$.

10. (2 poeng) Hvis g er den omvendte funksjonen til $f(x) = \ln(2x-1)$, så er $g'(0)$ lik:

☐ $\frac{1}{2}$
☐ $\frac{1}{3}$
☐ 1
☐ 2
☐ $\frac{1}{e}$

Riktig svar: a) $\frac{1}{2}$.
Begrunnelse: Observer at $f(1) = \ln 1 = 0$. Dermed er

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{2}{2\cdot 1-1}} = \frac{1}{2}$$

11. (3 poeng) Hvis $2i$ er en tredjerot til et komplekst tall z så er en annen tredjerot til z lik:

- ☐ $2\sqrt{3} - i$
- ☐ $-\sqrt{3} - i$
- ☐ $-2i$
- ☐ $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- ☐ $1 + i\sqrt{3}$

Riktig svar: b) $-\sqrt{3} - i$.
Begrunnelse: Hvis w_0 er en tredjerot til et kompleks tall z er de to andre tredjerøttene gitt ved: $w_1 = w_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ og $w_2 = w_1\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Vi ser da at

$$w_1 = 2i(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2i(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i$$

(Vi ser forøvrig at den siste tredjeroten blir da

$$(-\sqrt{3} - i)(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} - i$$

som da er (og skal være) forskjellig fra de andre (gale) svar-alternativene)

12. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{hvis } x > 0 \\ \cos(\pi x) + b & \text{hvis } -1 \le x \le 0 \\ e^{x^2-1} & \text{hvis } x < -1 \end{cases}$
(a og b er konstanter). For hvilke verdier av a og b er f kontinuerlig ?

- ☐ $a = 3, b = 2$
- ☐ $a = 2, b = 3$
- ☐ $a = b = 1$
- ☐ $a = b = 2$
- ☐ $a = -2, b = 3$

Riktig svar: a) $a = 3, b = 2$.
Begrunnelse: Lar vi $g(x) = \frac{\sin ax}{x}$ ser vi at $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} a\frac{\sin ax}{ax} = a$. (Her bruker vi at vi vet at $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.) (Merk at denne grensen også blir riktig om $a = 0$.) Sett $h(x) = \cos(\pi x) + b$. Vi har da at $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = \cos 0 + b = 1 + b = f(0)$. Så hvis f er kontinuerlig i 0 må vi ha $a = b + 1$. Videre har vi $\lim_{x\to -1^-} f(x) = e^{1-1} = 1$, mens $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} h(x) = \cos(-\pi) + b = -1 + b = f(-1)$. Så hvis f er kontinuerlig i -1 må vi ha $1 = b - 1$ som gir $b = 2$ og derfor $a = 2 + 1 = 3$. Det er forøvrig opplagt at f blir kontinuerlig i alle andre punkter.

13. (3 poeng) Anta at f er en deriverbar funksjon med $f(x) > 0$.
La $h(x) = f(x)^{\ln f(x)}$. Da er den deriverte, $h'(x)$ lik:

☐ $f'(x)$
☐ $2h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$
☐ $h(x)(\ln f(x))f'(x)$
☐ $\frac{h(x)}{f(x)}f'(x)$
☐ $h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$

Riktig svar: b) $2h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$.
Begrunnelse: Man kan f.eks. bruke logaritmisk derivasjon: $h'(x) = h(x)D(\ln(h(x))$. I dette tilfellet er $\ln(h(x)) = (\ln f(x))^2$. Dermed er $D(\ln h(x)) = 2(\ln f(x))D(\ln f(x)) = 2\ln f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$ Ialt har vi dermed

$$h'(x) = h(x)(2\ln f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}) = 2h(x)\frac{\ln f(x)}{f(x)}f'(x)$$

14. (3 poeng) Funksjonene $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i hele $[a, b]$ og deriverbare i alle indre punkter $c \in (a, b)$. Vi har videre at $f(a) = g(b)$ og $f(b) = g(a)$. Da er følgende påstand alltid riktig:
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = -g'(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = -g(c)$
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ der $f - g$ har en lokal ekstremverdi
☐ Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) + g'(c) = \frac{f(b)-f(a)+g(a)-g(b)}{b-a}$

Riktig svar: b) Det finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = -g'(c)$.
Begrunnelse: La $h(x) = f(x)+g(x)$. Da er $h(a) = f(a)+g(a) = f(a)+f(b) = g(b) + f(b) = h(b)$, så ifølge Rolles teorem finnes det $c \in (a, b)$ der $h'(c) = 0$. Dermed er $f'(c) + g'(c) = 0$, og vi har $f'(c) = -g'(c)$.

15. (3 poeng) Det *reelle* femtegradspolynomet
$P(z) = z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ har 0, i og $-2i$ som røtter.
$P(z)$ er lik:
☐ $z^5 + z^4 - 2z^2$
☐ $z^5 - 3z^3 - z - 4z$
☐ $z^5 + 5z^3 + 4z$
☐ $z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 5z$
☐ $z^5 - 5z^3 - 4z^2 + 1$

Riktig svar: c) $z^5 + 5z^3 + 4z$.
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, må den konjugerte $-i$ til i og den konjugerte $2i$ til $-2i$ også være røtter. Dermed er

$$P(z) = (z-0)(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i) = z(z^2+1)(z^2+4) = z(z^4+5z^2+4) = z^5+5z^3+4z$$

16. (3 poeng) La $f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$ der $x \in [-2, 2]$. Da har f et globalt minimumspunkt for:

☐ $x = 2$
☐ $x = -2$
☐ $x = -1$
☐ $x = 0$
☐ $x = \frac{1}{2}$

Riktig svar: c) $x = -1$.
Begrunnelse: Vi har $f'(x) = (2 + (2x+1)(-2x))e^{-x^2} = (-4x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}$. Vi har

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-8} \Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x = \frac{1}{2}.$$

Vi ser også at $f'(x) < 0$ for $x \in (-2, -1) \cup (\frac{1}{2}, 2)$ og $f'(x) > 0$ for $x \in (-1, \frac{1}{2})$. Av dette følger at $x = -1$ og $x = 2$ er lokale minpunkter og siden $f(-1) = -e^{-1} < f(2) = 5e^{-4}$ er $x = -1$ globalt minpunkt.

17. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = x^2 e^x$ er konkav på intervallet:

☐ $[-1, \infty)$
☐ $(-\infty, -1]$
☐ $[-2 + \sqrt{2}, \infty]$
☐ $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$
☐ $[-2 + \sqrt{3}, \infty)$

Riktig svar: d) $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$.
Begrunnelse: Vi har $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. Fortegnet til $f''(x)$ er bestemt av fortegnet til $x^2 + 4x + 2$. Vi har

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

Vi ser videre at $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ så f blir konkav på $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$.

18. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\pi - 2x)}{\tan x}$ er lik:

☐ 1
☐ 0
☐ ∞
☐ 2
☐ $-\infty$

Riktig svar: b) 0.

Begrunnelse: Bruker L'Hôpitals regel ("$\frac{-\infty}{\infty}$"-uttrykk):

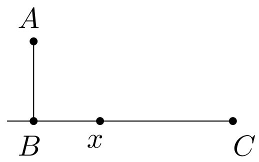
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\pi-2x)}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{-2}{\pi-2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-2\cos^2 x}{\pi-2x}.$$

Her får vi et nytt "$\frac{-\infty}{\infty}$"-uttrykk og vi kan bruke L'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-2\cos^2 x}{\pi-2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-2(2\cos x)(-\sin x)}{-2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -2\cos x \sin x = 0.$$

19. (3 poeng) Du padler i en kajakk og er på et punkt A utenfor en rettlinjet strand. Fra A til nærmeste punkt B på stranda er det 200 meter. Du ønsker å komme til en hytte i strandkanten som ligger i C 500 meter fra B. Du vil padle videre med en hastighet 100 meter per minutt til et punkt på stranda som er x meter fra B og så løpe til hytta i C med en hastighet på 300 meter per minutt (se tegning nedenfor). Hva må x være for at du skal nå hytta raskest mulig ?

- ☐ 0 meter
- ☐ $100\sqrt{3}$ meter
- ☐ $50\sqrt{2}$ meter
- ☐ 200 meter
- ☐ 500 meter



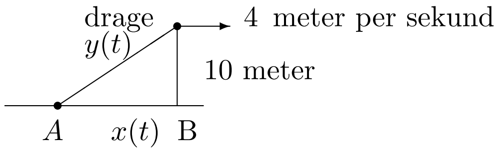
Riktig svar: c) $50\sqrt{2}$ meter
Begrunnelse: Det er klart at vi må ha $x \in [0, 500]$. Bruker vi Pythagoras ser vi at strekningen som padles blir $\sqrt{x^2+200^2}$ og strekningen som løpes er $500-x$. Total tid som går med (målt i minutter) blir da: $T(x) = \frac{\sqrt{x^2+200^2}}{100} + \frac{500-x}{300}$. Vi har

$$T'(x) = \frac{x}{100\sqrt{x^2+200^2}} - \frac{1}{300} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+200^2} = 3x \Leftrightarrow x^2+200^2 = 9x^2$$
$$\Leftrightarrow 8x^2 = 200^2 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}.$$

Det er foøvrig lett å se at $T'(x) < 0$ når $x < 50\sqrt{2}$ og $T'(x) > 0$ når $x > 50\sqrt{2}$ så $x = 50\sqrt{2}$ gir oss minimum.

20. (3 poeng) En jente står stille på bakken og holder i en drage. Hånden som holder i dragen er hele tiden i et fast punkt A. Etter hvert som vinden blåser dragen bortover slipper hun ut mer og mer snor. Dragen er hele tiden 10 meter over et plan gjennom A parallelt med bakken, og dragen beveger seg horisontalt, parallelt med bakken med konstant hastighet 4 meter per sekund. Vi antar at dragesnora som er ute alltid er stram (se tegning nedenfor). Hvor mange meter snor per sekund må slippes ut når lengden på snora som er ute er 20 meter?

- ☐ 2 meter per sekund
- ☐ $3\sqrt{2}$ meter per sekund
- ☐ 4 meter per sekund
- ☐ $2\sqrt{3}$ meter per sekund
- ☐ 1 meter per sekund



<u>Riktig svar:</u> d) $2\sqrt{3}$ meter per sekund

<u>Begrunnelse:</u> La $y(t)$ være lengden av snora som er ute. La B være projeksjonspunktet fra dragen ned til planet gjennom jentas hånd parallell med bakken og $x(t)$ betegne avstanden mellom A og B. (Jeg har her tegnet inn disse størrelsene i figuren gitt i oppgaveteksten) Vi skal da finne $y'(t)$ når $y(t) = 20$. Vi har $x'(t) = 4$ og $y(t)^2 = x(t)^2 + 10^2$. Deriverer vi den siste likningen (og for enkelhets skyld dropper t-en i utrykkene) får vi: $2yy' = 2xx'$ som gir $y' = \frac{xx'}{y} = 4\frac{x}{y}$. Når $y = 20$ er $x = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$, så vi får $y' = 4\frac{10\sqrt{3}}{20} = 2\sqrt{3}$.

Slutt