MAT1100: Løsningsforslag til Obligatorisk oppgave 1, H14

Oppgave 1: a) Vi har $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ og $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siden z ligger i første kvadrant, gir dette $\theta = \frac{\pi}{3}$ (legge merke til at også $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, men denne vinkelen ligger ikke i første kvadrant). Polarkoordinatene er altså $r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Siden $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, er

$$z^{14} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{14} = 2^{14}e^{i\frac{14\pi}{3}} = 2^{14}\left(\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$$

Siden $\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$, er $\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ og $\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Altså er

$$z^{14} = 2^{14}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{13} + 2^{13}i\sqrt{3}$$

Oppgave 2: a) Siden $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$, er $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Dermed er

$$P(1+i) = (1+i)^4 - 5(1+i)^2 + 10(1+i) - 6 = -4 + 5\cdot(2i) + 10 + 10i - 6 = 0$$

b) Siden polynomet er reelt, må den konjugerte $1-i$ til $1+i$ også være en rot. Det betyr at $P(z)$ er delelig med

$$(z-(1+i))(z-(1-i)) = ((z-1)-i)((z-1)+i)$$
$$= (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 1 - i^2 = z^2 - 2z + 2$$

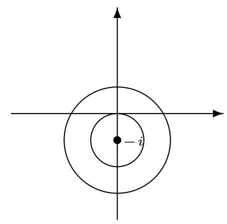
Utfører vi polynomdivisjonen, får vi $P(z) : (z^2-2z+2) = z^2+2z-3$, dvs. $P(z) = (z^2-2z+2)(z^2+2z-3)$. Løser vi ligningen $z^2+2z-3 = 0$, ser vi at $z = 1$ og $z = -3$. Den reelle faktoriseringen er derved

$$P(z) = (z^2-2z+2)(z-1)(z+3)$$

og den komplekse faktoriseringen er

$$P(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))(z-1)(z+3)$$

Oppgave 3: Siden $|z+i| = |z-(-i)|$ er avstanden mellom punktene z og $-i$, ser vi at $|z+i| \geq 1$ dersom avstanden fra z til $-i$ er større enn eller lik 1, dvs. dersom z ligger på eller utenfor sirkelen om $-i$ med radius 1. Tilsvarende er $|z+i| \leq 2$ dersom avstanden fra z til $-i$ er mindre enn eller lik 2, dvs. dersom z ligger på eller innenfor sirkelen om $-i$ med radius 2. A består dermed alle komplekse tall som ligger på eller mellom sirklene om $-i$ med radius 1 og 2, dvs. punktene mellom eller på sirklene på figuren nedenfor.



Oppgave 4: Siden $f(9) = 3$, må vi vise at gitt en $\epsilon > 0$, så finnes det en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-9| < \delta$, så er $|\sqrt{x}-3| < \epsilon$. Setter vi $h = x - 9$, får vi $x = 9 + h$ og

$$|\sqrt{x}-3| = |\sqrt{9+h}-3| = |\frac{(\sqrt{9+h}-3)\sqrt{9+h}+3)}{\sqrt{9+h}+3}|$$

$$= \frac{|h|}{\sqrt{9+h}+3} \leq \frac{|h|}{3}$$

Vi velger $\delta = 3\epsilon$. Hvis $|h| = |x-9| < \delta$ (og x ligger i definisjonsområdet til f), viser regningen ovenfor at

$$|\sqrt{x}-3| \leq \frac{|h|}{3} < \frac{3\epsilon}{3} = \epsilon$$

Dermed har vi vist at f er kontinuerlig i $a = 9$.

En alternativ måte (enklere, men kanskje ikke så generaliserbar) er å observere at siden $\sqrt{9+h}+3 > 1$, er

$$|\sqrt{x}-3| = |\sqrt{9+h}-3| \leq |(\sqrt{9+h}-3)(\sqrt{9+h}+3)| = |h|$$

Velger vi $\delta = \epsilon$, ser at hvis $|h| = |x-9| < \delta$, så er $|\sqrt{x}-3| \leq |h| < \epsilon$. Dette viser igjen at f er kontinuerlig i $a = 9$.

Oppgave 5: a) Anta at følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot x. Da vil følgen $\{x_{n+1}\}$ også konvergere mot x, mens følgen $\frac{x_n^2+4}{5}$ konvergerer mot $\frac{x^2+4}{5}$. Siden disse to følgene er like, må vi ha $x = \frac{x^2+4}{5}$. Denne ligningen er ekvivalent med annengradsligningen $x^2 - 5x + 4 = 0$ som har løsningene $x = 1$ og $x = 4$. Dette betyr at følger av denne typen bare kan konvergere mot 1 eller 4 (men det er i utgangspunktet slett ikke sikkert at de konvergerer i det hele tatt!)

b) Starter vi med $x_1 = 3$, ser vi at $x_2 = \frac{13}{5}$ og $x_3 = \frac{269}{125}$ som indikerer at følgen er avtagende. Er dette riktig, vil den eneste muligheten for konvergens være at følgen avtar mot 1. Vi sjekker dette gjennom et induksjonsbevis der induksjonshypotesen er

$$P_k : 1 < x_k < x_{k-1}$$

for $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Vi ser at P_2 holder ut ifra de verdiene vi allerede har regnet ut. Anta så at P_k er sann. Vi må vise at da er P_{k+1} også sann. Vi observerer først at

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 4}{5} > \frac{1+4}{5} = 1$$

der vi har brukt at $x_k > 1$ ifølge P_k. Bruker vi så at ifølge P_k er $1 \leq x_k < x_{k-1}$, får vi

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 4}{5} < \frac{x_{k-1}^2 + 4}{5} = x_k$$

Til sammen viser dette at $1 < x_{k+1} < x_k$, som betyr at P_{k+1} holder.

Ved induksjon vet vi nå at P_n holder for alle $n = 2, 3, 4 \ldots$, og det betyr at $\{x_n\}$ er en avtagende følge som er nedad begrenset av 1. En slik følge må konvergere ifølge Teorem 4.3.9, og ifølge a) er den eneste mulige grenseverdien 1 (en avtagende følge som starter i 3, kan ikke konvergere mot 4!). Altså er $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

c) Hvis $x_1 = 5$, ser vi at $x_2 = \frac{29}{5} > 5$. Dette gir oss en mistanke om at følgen er voksende i dette tilfellet. Vi viser dette ved induksjon med induksjonshypotese

$$P_k : x_k > x_{k-1}$$

for $k = 2, 3, 4, \ldots$. Vi har allerede sjekket at P_2 holder. Vi antar nå at P_k holder, og observerer at dette gir

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 4}{5} > \frac{x_{k-1}^2 + 4}{5} = x_k$$

som er P_{k+1}. Dette betyr at P_n holder for alle $n \geq 2$, og følgelig er $\{x_n\}$ en voksende følge i dette tilfellet. Følgen kan ikke konvergere siden vi har sett i a) at de eneste mulige grenseverdiene er 1 og 4, og en voksende følge som starter i 5 umulig kan konvergere mot noen av disse. Siden en begrenset, voksende følge konvergerer ifølge Teorem 4.3.9, kan ikke $\{x_n\}$ være begrenset, og følgelig er $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.