Løsningsforslag til underveiseksamen i MAT 1100, 14/10-03

Oppgaveteksten står i kursiv i begynnelsen av hver oppgave.

Oppgave 1. *Den deriverte til* $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ *er:*
Riktig svar: e) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.
Begrunnelse: Vi bruker kjerneregelen:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

Oppgave 2 *Den deriverte til* $f(x) = x^2 \arctan x$ *er:*
Riktig svar: a) $2x \cdot \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$
Begrunnelse: Vi bruker produktregelen:

$$f'(x) = 2x \cdot \arctan x + x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \cdot \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

Oppgave 3. *Det komplekse tallet* $\frac{1+2i}{1-i}$ *er lik:*
Riktig svar: b) $\frac{-1+3i}{2}$
Begrunnelse: Ganger med den konjugerte oppe og nede:

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1+i+2i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2}$$

Oppgave 4. *Polarkoordinatene til det komplekse tallet* $\sqrt{3} - i$ *er:*
Riktig svar: e) $r = 2, \theta = -\frac{\pi}{6}$
Begrunnelse: Vi har $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ og $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siden tallet ligger i fjerde kvadrant, må $\theta = -\frac{\pi}{6}$ (som forøvrig er det samme som $\theta = \frac{11\pi}{6}$).

Oppgave 5. *Et komplekst tall har polarkoordinater* $r = 8, \theta = \frac{5\pi}{4}$. *Tallet er:*
Riktig svar: a) $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$
Begrunnelse: Vi har $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 8(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 8(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$.

Oppgave 6. *Det komplekse tallet* $e^{\frac{7\pi i}{3}}$ *er lik:*
Riktig svar: b) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Begrunnelse: Vi bruker at $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ og får at: $e^{\frac{7\pi i}{3}} = e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{3}} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Oppgave 7. *Det* reelle *polynomet* $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ *har 2 og i som røtter. Da er* $P(z)$ *lik:*
Riktig svar: e) $z^3 - 2z^2 + z - 2$
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, vil den konjugerte $-i$ til i også være en rot. Dermed har vi $P(z) = (z-2)(z-i)(z+i) = (z-2)(z^2+1) = z^3 - 2z^2 + z - 2$

Oppgave 8. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{2x}$ *er lik:*
Riktig svar: c) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Vi bruker L'Hopitals regel: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{2} = \frac{1}{2}$.

Oppgave 9. $\lim_{x\to\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2})$ *er lik:*
Riktig svar: b) -1
Begrunnelse: Vi omformer uttrykket og bruker deretter L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1$$

Oppgave 10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cot x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$ *er lik:*
Riktig svar: e) e^{-2}
Begrunnelse: Vi omformer først uttrykket $(\cot x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{\ln(\cot x)}{x-\frac{\pi}{4}}}$, og bruker så L'Hopital på eksponenten:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cot x)}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{1} = \frac{\frac{1}{1}\cdot(-\frac{1}{\frac{1}{2}})}{1} = -2$$

Altså er

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cot x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\cot x)}{x-\frac{\pi}{4}}} = e^{-2}$$

Oppgave 11. *Når* $x\to\infty$ *har* $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$ *asymptoten:*
Riktig svar: a) $y = x + \frac{3}{2}$
Begrunnelse: Vi følger oppskriften i seksjon 6.5. Først ser vi på

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}} = 1$$

Dette betyr at dersom funksjonen har en asymptote $y = ax + b$ når $x\to\infty$, så er $a = 1$. Vi ser så på:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)} = \frac{3}{2}$$

Altså er $y = x + \frac{3}{2}$ en asymptote.

Oppgave 12.*Funksjonen* $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \textit{når } x \leq 0 \\ ax + 1 & \textit{når } x > 0 \end{cases}$ *er deriverbar i 0 når* a *er lik:*
Riktig svar: d) $a = 2$
Begrunnelse: Det er flere måter å løse denne oppgaven på. Her er en variant: Definer funksjoner g og k (for alle x) ved $g(x) = x^3+2x+1$ og $k(x) = ax+1$. Da er $g'(x) = 3x^2 + 2$ og $k'(x) = a$, og følgelig er

$$\lim_{h\to 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = g'(0) = 2$$

og

$$\lim_{h\to 0+} \frac{k(0+h) - k(0)}{h} = k'(0) = a$$

Siden $\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = 2$ og $\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = k'(0) = a$, ser vi at f er deriverbar i 0 dersom $a = 2$.

Oppgave 13. *Funksjonen* $f(x) = x^3+5x+3$ *har en omvendt funksjon* f^{-1}. *Den deriverte* $(f^{-1})'(3)$ *er lik:*
Riktig svar: d) $\frac{1}{5}$
Begrunnelse: Vi ser at $f(0) = 3$ og at $f'(0) = 5$. Dermed er

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$$

Oppgave 14. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *er lik:*
Riktig svar: a) $\frac{\pi}{4}$
Begrunnelse: Vi har

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Oppgave 15. $\int \frac{2t}{\sin^2(t^2)}\,dt$ *er lik:*
Riktig svar: e) $-\cot(t^2) + C$
Begrunnelse: Vi setter $u = t^2$. Da er $du = 2t\,dt$, og vi får:

$$\int \frac{2t}{\sin^2(t^2)}\,dt = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C = -\cot(t^2) + C$$

Oppgave 16. *Det komplekse tallet* $(1 + i\sqrt{3})^{11}$ *er lik:*
Riktig svar: b) $2^{10}(1 - i\sqrt{3})$
Begrunnelse: Skriver $z = 1 + i\sqrt{3}$ på polarform: $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$. Dermed er:

$$z^{11} = 2^{11}e^{\frac{11i\pi}{3}} = 2^{11}e^{\frac{12i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2^{11}e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2^{11}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$$

$$= 2^{11}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^{10}(1 - i\sqrt{3})$$

Oppgave 17. *Funksjonen* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$ *er injektiv på intervallet:*
Riktig svar: c) $[2, \infty)$
Begrunnelse: Deriverer funksjonen og faktoriserer:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x+3)(x-2)$$

Vi ser at funksjonen er voksende på intervallene $(-\infty, -3]$ og $[2, \infty)$. Det betyr at f er injektiv på intervallet $[2, \infty)$.

Oppgave 18. *Du skal bruke definisjon av kontinuitet til å vise at funksjonen* $f(x) = 5x + 3$ *er kontinuerlig i punktet* $a = 2$*. Gitt* $\epsilon > 0$*, hvor liten må du velge* $\delta > 0$ *for at* $|f(x) - f(2)| < \epsilon$ *når* $|x - 2| < \delta$*?*
Riktig svar: d) $\frac{\epsilon}{5}$
Begrunnelse: Setter $h = x - 2$. Da er $x = 2 + h$, og vi har:

$$|f(x) - f(2)| = |5(2 + h) + 3 - (5 \cdot 2 + 3)| = |5h|$$

Skal dette uttrykket være mindre enn ϵ, må vi ha $h < \frac{\epsilon}{5}$. Det får vi til ved å velge $\delta = \frac{\epsilon}{5}$.

Oppgave 19. *Hvilken ulikhet gjelder for alle* $x > 0$*?*
Riktig svar: a) $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$
Begrunnelse: For å se at denne ulikheten holder, bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = \arctan x$ på intervallet $[0, x]$. Setningen sier da at det finnes en c, $0 < c < x$, slik at

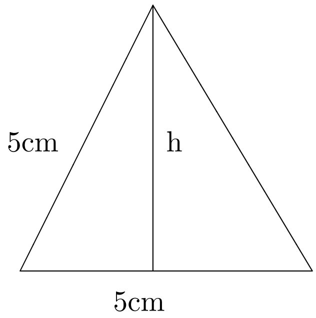
$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1 + c^2} > \frac{1}{1 + x^2}$$

der vi det siste skrittet har brukt at $c < x$. Bruker vi at $\arctan 0 = 0$, får vi:

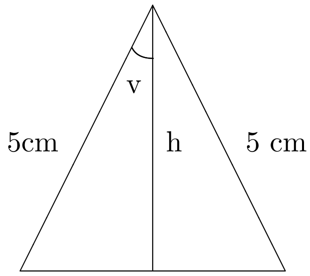
$$\frac{\arctan x}{x} > \frac{1}{1 + x^2}$$

Ulikheten følger ved å gange over x (husk at $x > 0$).

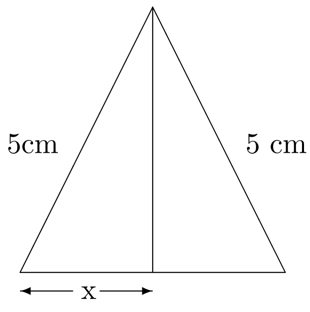
Oppgave 20. *I en likebeint trekant er de to like sidene 5 cm hver. Det største arealet trekanten kan ha er:*
Riktig svar: c) $\frac{25}{2}$
Begrunnelse: Det er mange måter å finne svaret på. Den enkleste er rent geometrisk. På figuren nedenfor har vi lagt trekanten slik at den ene av de like lange sidene er grunnlinje. Siden arealet er gitt ved $A = \frac{1}{2}gh$, der $g = 5$cm og der h maksimalt kan være 5cm, ser vi at den største verdien til A er $\frac{25}{2}$.



Oppgaven kan selvfølgelig også løses som en tradisjonell maks-min-oppgave. Det enkleste er nok da å bruke vinkelen v på figuren nedenfor som variabel. Da ser vi at grunnlinjen er $2 \cdot 5 \sin v$ og høyden $5 \cos v$. Dermed er arealet gitt ved $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \sin v \cdot 5 \cos v = 25 \sin v \cos v$. Husker vi at $2 \sin v \cos v = \sin 2v$, kan dette uttrykket skrives som $A = \frac{25}{2} \sin 2v$. Siden $\sin 2v$ oppnår sin største verdi 1 for $2v = \frac{\pi}{2}$, ser vi at den maksimale verdien til A er $\frac{25}{2}$ (kommer man ikke på formelen for $\sin 2v$, finner man greit maksimalverdien til $A = 25 \sin v \cos v$ ved derivasjon).



Du kan også løse oppgaven ved å innføre størrelsen x på figuren nedenfor.



Da er høyden i trekanten gitt ved $h = \sqrt{25 - x^2}$ og arealet blir $A(x) = x\sqrt{25 - x^2}$. Du kan nå finne maksimalpunktet ved derivasjon, men utregningene blir litt styggere enn ovenfor.