6.1: 1) g) $f(x) = x \cdot \cos(\ln x)$

$$f'(x) = \cos(\ln x) + \cancel{x}(-\sin(\ln x))\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$$

h) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$ $\left(\cos(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x^2}$$

$\left(\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}\right)$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$+ \cos(\sqrt{x})(-2)\frac{1}{x^3}$$

$\boxed{\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}}$

$$= \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\cos(\sqrt{x})}{x^3}$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

$$\left(= \frac{-x^2\sin(\sqrt{x}) - 4x^{\frac{3}{2}}\cos(\sqrt{x})}{2x^{\frac{9}{2}}}\right)$$

3.) a) $f(x) = x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$

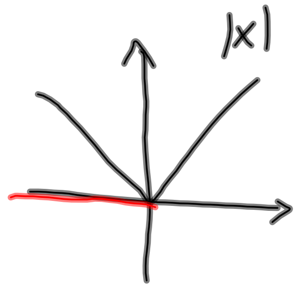
$$f'(x) = f(x)\, D[\ln|f(x)|]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x\, D[\ln|x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x|]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x\, D[\ln(x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x)]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x\, D[2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x]$$

$$\overset{(*)}{=} \underline{\underline{x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)}}$$



$\underline{(*)}$: $D[\ln|\cos x|] = -\tan(x)$?

$D[\ln|f(x)|] = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

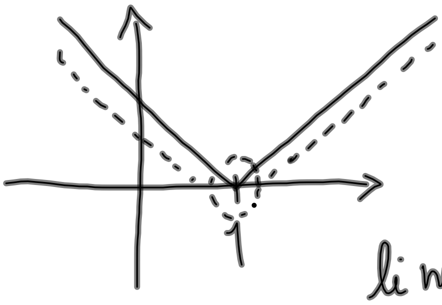
__Eks:__

$\underline{\cos x < 0}$: $D[\ln|\cos x|]$

$$= D[\ln(-\cos x)] = \frac{1}{-\cos x} \sin x$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\underline{\tan x}$$

11.) a) $f(x) = |x-1|$:



$f'(1)$ eksisterer hvis og bare hvis:

$$\underbrace{\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{VS} = \underbrace{\lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{HS}$$

VS: $\displaystyle \lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1_-} \frac{1-x-0}{x-1} = \underline{-1}$

HS: $\displaystyle \lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1_+} \frac{x-1-0}{x-1} = \underline{1}$

Så: $$\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

og dermed eksisterer ikke $f'(1)$.

6.2: 7.) Anta først at $x = 0$. Da stemmer dette, siden $\sin 0 = 0 \sin 0$ (så $c = 0$ virker).

Anta deretter at $x > 0$. La $f(x) = \sin x$.

Siden f er kont. og deriverbar på $[0, x]$, fins det fra <u>middelverdisetningen</u> en $c \in (0, x)$ s.a.

$$\underset{\displaystyle \cos c}{\overset{\parallel}{f'(c)}} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Downarrow$$

Det fins $c \in (0, x)$ s.a. $x \cos c = \sin x$.

(Tilsvarende hvis $x < 0$).

<u>Vis</u>: $|\sin x| \leq |x| \;\forall\; x$ (for alle x):

Husk at $|\cos c| \leq 1$. Derfor er:

$$|x \cos c| = |\sin x|$$

$$|x| \geq |x|\,|\cos c| = |\sin x|$$

$\boxed{|\cos c| \leq 1}$ Dermed er: $|\sin x| \leq |x|$.

8.) Anta $x=0$. Da er påstanden OK
$\left(c=0 \text{ funker; } \ln(1) = \frac{0}{1+0} \right)$

Anta $x \neq 0$. $f(x) = \ln(1+x)$, er definert, kont. og deriverbar for alle $x > -1$. Fra middelverdisetningen fins det en $c \in (0, x)$ s.a.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Vet: $f'(c) = \frac{1}{1+c}$, så derfor er

$$\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{1+c} = \ln(1+x) \qquad (\star)$$

Vil vise $\ln(1+x) \leq x$:

Anta $x=0$: OK $(\ln 1 \leq 0)$

Anta $x > 0$: Da er $c > 0$, og dermed er

$$\frac{1}{1+c} < 1$$

Gange m/x: $$\frac{x}{1+c} < x$$

$$\Updownarrow \ (*)$$

$$\ln(1+x) < x$$

Til slutt, anta $-1 < x < 0$: Da er $-1 < c < 0$

Adderer 1: $$0 < c+1 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c+1} > 1$$

$$\Downarrow$$ (ganger m/x. OBS! $-1 < x < 0$)

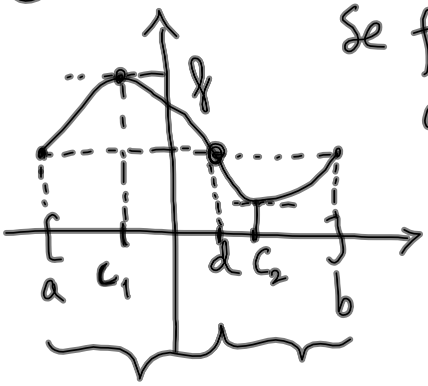
$$\frac{x}{c+1} < x$$

$$\Downarrow \ (*)$$

$$\ln(x+1) < x \rightsquigarrow \text{OK!}$$

Altså er $\ln(x+1) < x$ for alle $x > -1$.

13.) f kont. i $[a,b]$, 2· deriv. bar, $f(a)=f(d)=f(b)$, $d\in(a,b)$:



Se først på $[a,d]$. Her er f kont. og deriverbar. Fra middelverdiset. fins $c_1\in(a,d)$ s.a.

$$f'(c_1)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}=0.$$

Se på $[d,b]$. Her er også f kont. og deriverbar. Fra middelverdiset. fins $c_2\in(d,b)$ s.a.

$$f'(c_2)=\frac{f(b)-f(d)}{b-d}=0.$$

La $g(x)=f'(x)$. Se på $[c_1,c_2]$. Her er g kont. og deriverbar (siden f er $2\times$ deriv. bar). Fra middelverdiset. fins $c\in(c_1,c_2)$ s.a.

$$\underline{f''(c)}=g'(c)=\frac{g(c_2)-g(c_1)}{c_2-c_1}=\frac{0-0}{c_2-c_1}=\underline{0}$$

Dermed er påstanden vist.

20.) a) $\underline{|f(x) - f(y)| \le K|x-y|}$:

Først:

$x = y$: OK

Anta $\underline{x \neq y}$: Anta $y < x$ (hvis omvendt: bytt navn!)

Middelverdiset: $c \in (y, x)$ s.a.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \, |f'(c)|$$

f' kont., $[a, b]$ lukket & begrenset

$\Downarrow$ (Ekstremalverdiset.)

f' er begrenset: $|f'(x)| \le K$ for alle $x \in [a, b]$

Da: $|f(x) - f(y)| \le K|x-y|$, $x \in [a, b]$.

b) $\underline{f(x) = \sqrt{x}}$: Bruk motsigelse. Anta fins slik K. Velg $x = \frac{1}{4K^2}$: $\left|\frac{1}{x}\right| = 2K \nleq K$.

Strider ikke mot a): f' ikke er def. i $x = 0$.