MER LINEÆR ALGEBRA

H 2012

1

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Hva er $M^2 = M \cdot M$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 4\cdot 2 & 3\cdot 4 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & 2\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}}$$

C

(2x2) - matrise

$A\ (n \times m)$ $\quad B\ (p \times q)$

$A + B$ hvis de har samme størrelse ($n = p$ og $m = q$)

$A \cdot B$ hvis $p = m$, $A \cdot B$ er en $(n \times q)$ - matrise

$A \cdot B \neq B \cdot A$

#2013

8

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ thus $M^8 = M^4 \cdot M^4$

$M^4 = M^2 \cdot M^2$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0(-1) + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^8 = M^4 \cdot M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E

H2015

4

$\vec{a} = (5, 3, -1)$

$\vec{b} = (2, 4, -6)$

$\vec{c} = (0, 2, x^2)$

Vi skal regne volumet av <u>PARALLELLEPIPEDET</u> utspent av de tre vektorene.

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$
$$= |\det M|$$

PYRAMIDE

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$
$$= \frac{1}{6}|\det M|$$

$$V = \left| \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & x^2 \end{vmatrix} \right| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot (4 \cdot x^2 - 2(-6)) - 3(2x^2 - 0(-6)) - (2 \cdot 2 - 0 \cdot 4)$$

$$= 20x^2 + 60 - 6x^2 - 4$$

$$= \underline{\underline{14x^2 + 56}}$$

A

H 2014 - 20 poeng

12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}02 & 0{,}01 \\ -0{,}2 & -0{,}04 & 0{,}98 \end{pmatrix}$$

a) Vis ved REGNING at den inverse matrisen er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ For $(n \times n)$-matriser $A \cdot B = I_n = B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}02 & 0{,}01 \\ -0{,}2 & -0{,}04 & 0{,}98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 sett med 3 lineære likninger i 3 variabler.

$$\begin{cases} a + 0{,}2d + 0{,}1g = 1 \\ 0{,}1a + 1{,}02d + 0{,}01g = 0 \\ -0{,}2a - 0{,}04d + 0{,}98g = 0 \end{cases}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}02 & 0{,}01 \\ -0{,}2 & -0{,}04 & 0{,}98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0{,}2\cdot(-0{,}1) + 0{,}1\cdot 0{,}2 & 1\cdot(-0{,}2) + 0{,}2\cdot 1 & 1\cdot(-0{,}1) + 0{,}1\cdot 1 \\ 0{,}1\cdot 1 + 1{,}02\cdot(-0{,}1) + 0{,}01\cdot 0{,}2 & 0{,}1\cdot(-0{,}2) + 1{,}02\cdot 1 & 0{,}1\cdot(-0{,}1) + 0{,}01\cdot 1 \\ -0{,}2\cdot 1 + (-0{,}04)(-0{,}1) + 0{,}98\cdot 0{,}2 & (-0{,}2)(-0{,}2) + (-0{,}04)\cdot 1 & (-0{,}2)(-0{,}1) + 0{,}98\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Tre fiskeslag X, Y, Z

Samlet bestand

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I ett år var bestanden $\begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \vec{r}_{n+1}$

$$\vec{r}_{n+1} = A \cdot \vec{r}_n$$

Hvor stor var bestanden året før?

Skal finne $\vec{r}_n$

$$B \cdot \vec{r}_{n+1} = B \cdot A \vec{r}_n$$
$$= I_3 \cdot \vec{r}_n$$
$$= \vec{r}_n$$

SJEKK

$$\vec{r}_n = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}}}$$

Bestanden året før var $\underline{\begin{pmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}}$

H 2015 - 50 poeng!

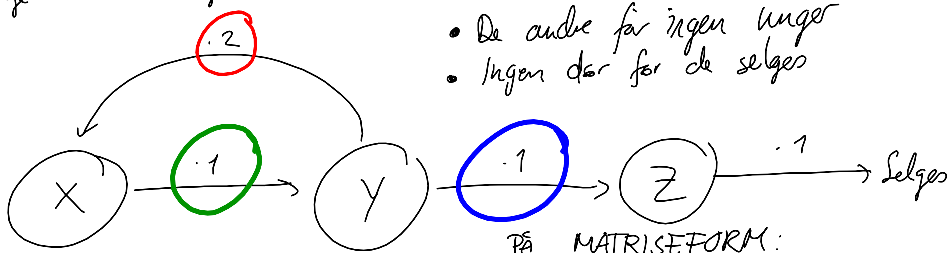
12 Lille Per og kaninavl

x_n = Antall hunkaniner som er 0 år
y_n = — " — 1 år
z_n = — " — 2 år

i sommersesong n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

- Kaniner selges når de er 3 år.

a)
- Hvert år blir alle kaniner ett år eldre
- Hver ettårige hunkanin gir to hunkaninunger (om våren)
- De andre får ingen unger
- Ingen dør før de selges



$$x_{n+1} = 2 \cdot y_n = 0 \cdot x_n + 2 \cdot y_n + 0 \cdot z_n$$

$$y_{n+1} = x_n = x_n + 0 \cdot y_n + 0 \cdot z_n$$

$$z_{n+1} = y_n = 0 \cdot x_n + y_n + 0 \cdot z_n$$

PÅ MATRISEFORM:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b) Regn ut det M og avgjør om M er inverterbar
(= har en invers)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Er det $M = 0$, så finnes ingen invers matrise!

c) $M^4 = M^2 \cdot M^2$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2 & 0 \\ 1\cdot 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

d) Skal finne M^{2n}

$$M^6 = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2 & 0 \\ 1\cdot 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^2 & 0 \\ 1\cdot 2^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kanskje $M^{2n} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 1\cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

INDUKSJON:

1. OK for $n = 1, 2, 3$. $\quad$ (M^2, M^4, M^6) ($n=1$, $n=2$, $n=3$)
2. Anta ok for M^{2n}
3. Se på $M^{2n} \cdot M^2$

$$M^{2(n+1)} = M^{2n} \cdot M^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^{n} & 0 \\ 2^{n} & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

v/ induksjon har vi funnet $M^{2n} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$

e) Hvor mange hunkaniner har lille Per i sesong n?
Han starter med en hunkaninunge

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{n+1} = M \cdot \vec{r}_n$$

$$\boxed{\vec{r}_n = M^n \cdot \vec{r}_0}$$

- Deler opp i partall og oddetall sesonger
- PARTALL: $n = 2k$

$$\vec{r}_n = M^{2k} \cdot \vec{r}_0$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2^{k-1} & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{k-1} \\ 0 \\ 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{hunkaninunger} \\ \\ \leftarrow \text{2årige} \end{matrix}$$

Antall hunkaniner i sesong $n = 2k$ er $3\cdot 2^{k-1} = \left(3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\right)$

- ODDETALL $n = 2k+1$

$$\vec{r}_n = M^{2k} \cdot M \cdot \vec{r}_0$$
$$= M \cdot \underbrace{M^{2k} \cdot \vec{r}_0}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{k-1} \\ 0 \\ 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

ettåringe $\longrightarrow$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot 2^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

Antall hunkaniner i sesong $n = 2k+1$ er $2\cdot 2^{k-1}$

H 20/12

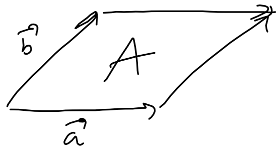
10

PARALLELLOGRAM

$\vec{a} = (1,7)$

$\vec{b} = (2,4)$

Arealet av parallellogrammet $= |\det M|$



$$A = \left| \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right| = |1 \cdot 4 - 2 \cdot 7|$$

$$= \underline{\underline{10}}$$

Arealet av trekant $= \frac{1}{2} |\det M|$