Løsningsforslag uke 36, 2016

Oppgave 3.3.10. Vis at formlene

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \tag{1}$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \tag{2}$$

gjelder for alle komplekse tall z og w.

Løsning. For komplekse tall er sinus og cosinus definert som

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Venstresiden i (1) er dermed

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}.$$

Det er litt mer omfattende å regne ut høyresiden, så vi deler opp stykket og finner først et uttrykk for $\sin z \cos w$:

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)}\right).
\end{aligned}$$

Tilsvarende er

$$\cos z \sin w = \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + e^{-i(z-w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}\right).$$

Totalt er høyresiden i (1) lik

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{-i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4i}\left(e^{i(z+w)} + \cancel{e^{-i(z-w)}} - \cancel{e^{i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(2e^{i(z+w)-2e^{-i(z+w)}}\right) \\
&= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}.
\end{aligned}$$

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus

Siden venstre og høyre side i likning (1) er like, ser vi at påstanden stemmer. Gyldigheten av likning (2) bevises på samme måte. ■

Oppgave 3.4.15. Finn alle komplekse løsninger av likningen

a) $z^3 + iz^2 + z = 0$,

b) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Løsning. a) Legg merke til at vi kan faktorisere $z^3 + iz^2 + z = z\big(z^2 + iz + 1\big)$. Nå har vi allerede funnet én rot, nemlig $z = 0$. For å finne de to gjenværende røttene må vi løse andregradslikningen $z^2 + iz + 1 = 0$. De finner vi med *abc*-formelen:

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{\big(-1 \pm \sqrt{5}\big)i}{2}.$$

b) Oppgaven er å finne kvadratrøttene til $w = 1 + \sqrt{3}i$. Vi begynner med å skrive w på polarform. Modulus til w er $r = \sqrt{1+3} = 2$. Videre, siden både realdelen og imaginærdelen til w er positive ligger w i første kvadrant. Vi har at $\cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. Det følger at $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ fordi w ligger i første kvadrant. Altså er $w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)}$, så $z = \sqrt{w} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)}$. Dermed blir de to kvadratrøttene

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Oppgave 3.5.5. Vis at i er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3.$$

Finn komplekse og reelle faktorisering av $P(z)$.

Vi minner først om et resultat fra pensum i videregående:

Proposisjon 1 (Nullpunktsetningen)**.** *La P være et polynom og a et tall. Da er $P(a) = 0$ hvis og bare hvis $z - a$ er en faktor i P.*

Løsning. En «rot» i et polynom er et annet ord for «nullpunkt». Den første delen av oppgaven er altså å sette inn $z = i$ for å sjekke at $P(i) = 0$:

$$\begin{aligned} P(i) &= i^4 + 2i^3 + 4i^2 + 2i + 3 \\ &= \cancel{1} - \cancel{2i} - \cancel{4} + \cancel{2i} + \cancel{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siden polynomet P bare har reelle koeffisienter, opptrer alle røtter i kompleks-konjugerte par [Kalkulus, Lemma 3.5.3]. Derfor er også $\bar{i} = -i$ en rot i P. Nullpunktsetningen sier dermed at både $z - i$ og $z - (-i) = z + i$ er faktorer i P. Følgelig går også produktet $(z-i)(z+i) = z^2+1$ opp i P. Utfører vi polynomdivisjon finner vi at

$$P(z) = \big(z^2+1\big)\big(z^2+2z+3\big). \tag{3}$$

For å finne de resterende to røttene til P løser vi andregradslikningen

$$z^2+2z+3=0.$$

Den har løsningene $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = 1 \pm \sqrt{2}i$.

Siden ingen av røttene til P er reelle, kan ingen av andregradspolynomene i (3) faktoriseres i reelle, lineære polynomer. Derfor er høyresiden i likning (3) den reelle faktoriseringen til P. Vi kjenner nå alle røttene til P, så den komplekse faktoriseringen blir

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z+i)\Big(z-\Big(1+\sqrt{2}i\Big)\Big)\Big(z-\Big(1-\sqrt{2}i\Big)\Big) \\ &= (z-i)(z+i)\Big(z-1-\sqrt{2}i\Big)\Big(z-1+\sqrt{2}i\Big). \end{aligned}$$

■

Referanser

[Kalkulus] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. 4. utg. Universitetsforlaget, 2006.