Løsning til underveiseksamen i MAT 1100 høst 2009

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 8$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Da er z lik:

☐ $-4 + 4i\sqrt{3}$
☐ $-4 - 4i\sqrt{3}$
☐ $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$
☐ $-4\sqrt{3} - 4i$
☐ $-8 - 8i\sqrt{3}$

Riktig løsning: $-4 - 4i\sqrt{3}$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -3 + 3i$ har polarkoordinater:

☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}$
☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 3\sqrt{3}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$
☐ $r = 3\sqrt{3}, \theta = \frac{5\pi}{6}$

Riktig løsning: $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$

3. (2 poeng) Dersom $z = \overline{(2+i)(3-i)}$, så er:

☐ $z = 5 - i$
☐ $z = 7 - i$
☐ $z = 7 + 5i$
☐ $z = 7 + i$
☐ $z = 12 - 3i$

Riktig løsning: $z = 7 - i$

4. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \cos\sqrt{1-x^2}$ er:

☐ $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \sin\sqrt{1-x^2}$
☐ $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \sin\sqrt{1-x^2}$
☐ $2x \sin\sqrt{1-x^2}$
☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin\sqrt{1-x^2}$
☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin x$

Riktig løsning: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin\sqrt{1-x^2}$

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$ er:

- ☐ $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Riktig løsning: $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{6x^4-3x^6+7x^7}{7x^4+3x^6+6x^7}$ er lik:

- ☐ $\frac{6}{7}$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{7}{6}$

Riktig løsning: $\frac{6}{7}$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-1}{x}$ er lik:

- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ 1

Riktig løsning: $\frac{1}{2}$

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ er lik:

- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 2
- ☐ 1

Riktig løsning: ∞

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{5}, x > 2$ er:

- ☐ $g(x) = e^{-5x+2}$
- ☐ Det finnes ingen omvendt funksjon
- ☐ $g(x) = e^{5x-2}$
- ☐ $g(x) = 5\ln(x+2)$
- ☐ $g(x) = e^{5x} + 2$

Riktig løsning: $g(x) = e^{5x} + 2$

10. (2 poeng) Funksjonen $f(x) = x^2 - 2x$ er injektiv på intervallet:
- ☐ $(-\infty, 1]$
- ☐ $[-1, \infty)$
- ☐ hele $\mathbb{R}$
- ☐ $[0, \infty)$
- ☐ $[0, 2]$

Riktig løsning: $(-\infty, 1]$

11. (3 poeng) Den deriverte til $x^{\sin x}$ er lik:
- ☐ $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$
- ☐ $\cos(x)\ x^{\sin x - 1}$
- ☐ $x^{\sin x}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{x}\right)$
- ☐ $-x^{\sin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $x^{\sin x}\ln(\sin x)$

Riktig løsning: $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

12. (3 poeng) Det *reelle* tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ har $z = 1 + i$ som rot. De andre røttene er:
- ☐ $1 - i$ og 3
- ☐ $1 - i$ og i
- ☐ $1 - i$ og 2
- ☐ $1 - i$ og -3
- ☐ Har ikke nok informasjon til å finne dem

Riktig løsning: $1 - i$ og -3

13. (3 poeng) Anta at f er en deriverbar funksjon med $f(x) > 0$.
La $h(x) = f(x)\ln f(x)$. Da er den deriverte, $h'(x)$ lik:
- ☐ $f'(x)\ln f(x)$
- ☐ $\frac{\ln f(x)}{f(x)} f'(x)$
- ☐ $\ln f(x) + f'(x)$
- ☐ $f'(x)(\ln f(x) + 1)$
- ☐ $\frac{\ln f(x)}{f(x)} f'(x)$

Riktig løsning: $f'(x)(\ln f(x) + 1)$

14. (3 poeng) Løsningene til annengradsligningen $z^2 - 4z + 6 = 0$ er:
- ☐ $1 \pm i\sqrt{2}$
- ☐ $2 \pm i\sqrt{2}$
- ☐ $2 \pm i$
- ☐ $2 \pm i\sqrt{3}$
- ☐ Ligningen har ingen komplekse løsninger

Riktig løsning: $2 \pm i\sqrt{2}$

15. (3 poeng) Når $x \to \infty$, har funksjonen $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x}$ asymptoten:

☐ $y = 2x + \frac{1}{2}$
☐ Den har ingen asymptote
☐ $y = x + \frac{1}{2}$
☐ $y = 2x + 1$
☐ $y = x + 2$

Riktig løsning: $y = 2x + \frac{1}{2}$

16. (3 poeng) Funksjonen f er definert for $x \geq 0$ ved $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$. Funksjonen er konkav på mengden:

☐ $[\frac{1}{6}, \infty)$
☐ Ingen steder
☐ $[0, \infty)$
☐ $[0, 6]$
☐ $[6, \infty)$

Riktig løsning: $[6, \infty)$ (Her er det desverre en feil i oppgaven; f er bare definert ikke definert i $x = 0$, men dette er uvesentlig for hvor den er konkav.)

17. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \\ 1 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$. Da er $f'(1)$ lik:

☐ 1
☐ eksisterer ikke
☐ 0
☐ $-\frac{1}{2}$
☐ $\frac{1}{4}$

Riktig løsning: $-\frac{1}{2}$

18. (3 poeng) Du skal bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at følgen $x_n = \frac{3n-5}{2n}$ har grenseverdi $\frac{3}{2}$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor stor må du velge N for at $|x_n - \frac{3}{2}| < \epsilon$ når $n \geq N$?

☐ større enn $\min\{\frac{\epsilon}{4}, 1\}$
☐ større enn $\frac{1}{\epsilon}$
☐ større enn $\max\{\epsilon^2, 1\}$
☐ større enn $\frac{5}{2\epsilon}$
☐ større enn $\frac{3}{5\sqrt{\epsilon}}$

Riktig løsning: større enn $\frac{5}{2\epsilon}$

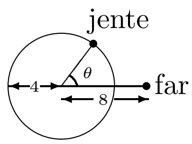
19. (3 poeng) En eske skal ha kvadratisk bunn, men ingen topp. Volumet til boksen skal være 4 dm^3. Hvor høy må boksen være for at overflatearealet (bunn+sidevegger) skal bli minst mulig?

☐ $\sqrt[3]{4}$ dm
☐ $\frac{3}{2}$ dm

- ☐ 1 dm
- ☐ $\frac{3}{4}$ dm
- ☐ Vi kan få arealet så lite vi måtte ønske

Riktig løsning: 1 dm

20. (3 poeng) En jente sitter på en karusell som bruker 4 sekunder på hver omdreining. Stedet hun sitter er 4 m fra karusellens akse. Faren står 8 m fra aksen for å ta et bilde av jenta. Figuren viser situasjonen sett ovenfra. Hvor raskt avtar avstanden mellom de to i det øyeblikket vinkelen θ er $\frac{\pi}{3}$?



- ☐ $\frac{15}{8}\pi$ m/s
- ☐ $2\sqrt{2}\pi$ m/s
- ☐ 2π m/s
- ☐ $2\sqrt{3}\pi$ m/s
- ☐ $\sqrt{3}\pi$ m/s

Riktig løsning: 2π m/s

Slutt