Løsningsforslag oblig 1 Mat 1100 høst 2015

Oppgave 1

$$(z-i)\cdot(z-(1+5i))\cdot(z-(-2))$$

$$= (z-i)\cdot(z-1-5i)\cdot(z+2)$$

$$= (z^2 - z - 5iz - iz + i - 5)\cdot(z+2)$$

$$= z^3 - z^2 - 5iz^2 - iz^2 + iz - 5z + 2z^2 - 2z - 10iz - 2iz + 2i - 10$$

$$= z^3 + (1-6i)z^2 + (-7-11i)z + (-10+2i)$$

Altså $c_0 = \underline{\underline{-10+2i}}$, $c_1 = \underline{\underline{-7-11i}}$, $c_2 = \underline{\underline{1-6i}}$

Oppgave 2

a) Teksten sier at $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{8a_n^2 + 1681}{9}}$ for alle $n \geq 1$.

b) Vi lar $n \to \infty$ på begge sider i likningen fra a).
Hvis følgen konvergerer mot L, må vi da ha

$$a_{n+1} \to L \quad \text{og} \quad a_n \to L.$$

Ergo

$$L = \sqrt{\frac{8L^2 + 1681}{9}}$$

Vi løser med hensyn på L:

$$L^2 = \frac{8L^2 + 1681}{9}$$

$$9L^2 = 8L^2 + 1681$$

$$L^2 = 1681$$

$$L = \sqrt{1681} = 41$$

Her brukte vi at vi åpenbart må ha $L \geq 0$, siden $a_n \geq 0$ for alle n. Altså:

Hvis følgen konvergerer, må den konvergere mot $\underline{\underline{41}}$.

c) Vi prøver å vise at følgen er oppad begrenset av 41.

Vi vet at $a_1 < 30 < 41$.

Anta $a_n < 41$. Da er

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{8a_n^2 + 1681}{9}} < \sqrt{\frac{8 \cdot 41^2 + 1681}{9}} = 41$$

Dermed har vi bevist ved induksjon at $a_n < 41$ for alle n.

d) Vi har

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{8a_n^2 + 1681}{9}} > \sqrt{\frac{8a_n^2 + a_n^2}{9}} = \sqrt{a_n^2} = a_n,$$

der vi brukte at $41 > a_n$ for alle n.

Altså er følgen voksende.

e) Siden følgen er voksende og oppad begrenset, konvergerer den ved kompletthetsegenskapen for følger.

f) Fra b) og e) får vi at følgen konvergerer mot 41.

Ergo ligger skatten nedgravd 41 meter rett innover land fra baksiden av klippen.

Oppgave 3

a) $P(2i) = (2i)^4 - 4(2i)^3 + 33(2i)^2 - 16 \cdot 2i + 116$

$= 16 + 3\cancel{2}i + 33(-4) - 3\cancel{2}i + 116 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}(2i)^2 &= 4(-1) = -4 \\ (2i)^3 &= -4 \cdot 2i = -8i \\ (2i)^4 &= (-4)\cdot(-4) = 16\end{aligned}}$$

Ergo er $z = 2i$ en rot

b) Siden $P(z)$ kun har reelle koeffisienter, vet vi at $z = -2i$ også er en rot. Vi har

$$(z - 2i)\cdot(z + 2i) = z^2 + 4$$

Polynomdivisjon:

$$(z^4 - 4z^3 + 33z^2 - 16z + 116) : (z^2 + 4) = z^2 - 4z + 29$$

$$\begin{array}{l}
\underline{z^4 + 4z^2} \\
\quad -4z^3 + 29z^2 - 16z + 116 \\
\quad \underline{-4z^3 - 16z} \\
\qquad\qquad 29z^2 + 116 \\
\qquad\qquad \underline{29z^2 + 116} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ergo $P(z) = (z^2 - 4z + 29)\cdot(z^2 + 4)$

Vi sjekker så videre faktorisering av $(z^2 - 4z + 29)$:

$z^2 - 4z + 29 = 0$ gir

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-116}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm i \cdot 10}{2} = \begin{cases} 2 + 5i \\ 2 - 5i \end{cases}$$

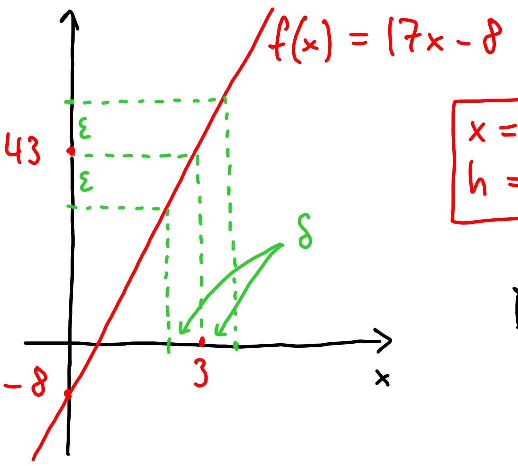
Kompleks faktorisering:

$$\underline{\underline{P(z) = (z-2i)\cdot(z+2i)\cdot(z-(2+5i))\cdot(z-(2-5i))}}$$

c) Reell faktorisering:

$$\underline{\underline{P(z) = (z^2+4)\cdot(z^2 - 4z + 29)}}$$

<u>Oppgave 4</u>



$$|f(x) - f(3)| = |(17x - 8) - 43|$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3+h \\ h &= x-3 \end{aligned}}$$

$$= |17(3+h) - 8 - 43|$$

$$= |17 \cdot h| = 17 \cdot |h|$$

Dette er mindre enn en gitt $\varepsilon > 0$ hvis $17 \cdot |h| < \varepsilon$, dvs. $|h| < \frac{\varepsilon}{17}$

Vi kan altså velge $\delta = \frac{\varepsilon}{17}$. Se figur.

Dermed har vi bevist at f er kontinuerlig i $x = 3$.