Deriverbarhet

Husk:

Retningsderivert: $f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$

Partiellderiverte:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a},\vec{e}_i)$ = deriverer f mhp. x_i som om alle de andre variablene er konstanter.

Gradienten: $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$

deriverbar

Uformell regning: Hvis f er en "snill" funksjon, så

$$f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) \approx \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Definisjon: Vi sier at f er deriverbar i punktet $\vec{a}$ dersom

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} \quad \Rightarrow f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + \sigma(\vec{r})$$

går mot null raskere enn $\vec{r}$, dvs

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0.$$

Setning: Anta at de partiell deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eksisterer i en omegn rundt $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$. Da er f deriverbar i $\vec{a}$.

Teorem: Anta at f er deriverbar i punktet $\vec{a}$. Da er

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Bevis: Vi har

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(h\vec{r}) + \sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(\cancel{h}\vec{r})}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h\vec{r})\,\|\vec{r}\|}{\|h\vec{r}\|} = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + 0 = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

$\square$

Eksempel: La $f(x,y) = x^3y^2$, $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{r} = (2,1)$.

Regn ut $f'(\vec{a},\vec{r})$.

Skal bruke formelen $f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$

kont. $\Downarrow$ f er deriverbar

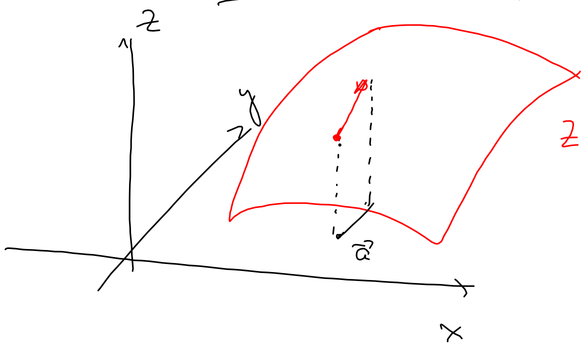
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = 3\cdot 1^2(-1)^2 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = 2\cdot 1^3\cdot(-1) = -2.$$

Gradienten: $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\right) = (3,-2).$

$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} = (3,-2)\cdot(2,1) = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 = 6-2 = \underline{\underline{4}}$$

Geometrisk tolkning av gradienten



Står i $\vec{a}$. I hvilken retning vokser funksjonen raskest?

Vi må finne den enhetsvektoren $\vec{u}$ slik at $f'(\vec{a},\vec{u})$ er størst mulig.

$$f'(\vec{a},\vec{u}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u} = |\nabla f(\vec{a})|\cdot\overbrace{|\vec{u}|}^{1}\cos\alpha = |\nabla f(\vec{a})|\underbrace{\cos\alpha}_{\alpha=0} = |\nabla f(\vec{a})|$$

når $\alpha = 0$, dvs når $\nabla f(\vec{a})$ og $\vec{u}$ er parallelle.

Setning: Funksjonen vokser raskest i den retningen som gradienten peker, og hvis $\vec{u}$ er enhetsvektoren i denne retningen, så er $f'(\vec{a},\vec{u}) = |\nabla f(\vec{a})|$

Eksempel: Anta at $f(x,y) = x\cdot e^{x+y}$. I hvilken retningen vokser funksjonen raskest når vi står i punktet $\vec{a} = (1,-2)$. Hvis $\vec{u}$ er enhetsvektoren i denne retningen, hva er da $f'(\vec{a},\vec{u})$?

Vi må finne gradienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot e^{x+y} + x e^{x+y}\cdot 1 = (1+x)e^{x+y} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = (1+1)e^{1+(-2)} = 2e^{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot e^{x+y}\cdot 1 = x\cdot e^{x+y} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 1\cdot e^{1-2} = e^{-1}.$$

$$\nabla f(1,-2) = \underline{(2e^{-1}, e^{-1})} = \underline{e^{-1}(2,1)}$$

Funksjonen vokser raskest i retningen $\vec{r} = (2,1)$ eller – om man vil – $(2e^{-1}, e^{-1})$.

Hvor fort vokser funksjonen?

$$f'(\vec{a},\vec{u}) = |\nabla f(\vec{a})| = |e^{-1}(2,1)| = e^{-1}|(2,1)| = e^{-1}\sqrt{2^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}e^{-1}}}$$

Høyere ordens deriverte

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; f', f'', f''', \dots$

$f(x,y) \; : \; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y},$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Eksempel: $f(x,y) = x^2y^2 + xy^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + y^3) = 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + y^3) = 4xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 3xy^2) = 4xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + 3xy^2) = 2x^2 + 6xy$$

Definisjon: Hvis $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er en funksjon av n variable, lar vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

betegne resultatet av først å derivere mhp x_j og deretter mhp. x_i

Setning: Dersom de annenordens partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ er kontinuerlige i $\bar{a}$, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})$$

"Blandede partiell deriverte" er like.

Forelesers system: $f(x,y,z,u)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial u \partial y \partial u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right)\right)$$

Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

$\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – hvordan deriverer vi dem? Hittil har vi bare sett på funksjoner $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Husk at:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Idé: Deriverer $\vec{F}$ ved å derivere komponentvis

Jacobi-matrisen:

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \\ \nabla F_m \end{array}$$

Eksempel: $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2+y \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{array}$

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy+1 \end{pmatrix} \text{ – Jacobi}$$

Definisjon: $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er deriverbar i punktet $\vec{a}$ dersom hver av komponentene F_i er deriverbar i $\vec{a}$. Alternativt betyr dette at

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) - \vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$$

går mot null raskere enn $\vec{r}$, dvs at

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{|\vec{\sigma}(\vec{r})|}{|\vec{r}|} = 0.$$

Setning: Dersom alle de partiellderiverte $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ er definert i en omegn om $\vec{a}$ og kontinuerlige i $\vec{a}$, så er $\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$.

→ tirsdag: Repetisjon ved Tom

torsdag: Jonas gjennomgår prøveeksamen.

Start på repetisjon:

Kalkulus: Kap 3 om komplekse tall
- i forbindelse med delbrøk.
- komplekse nullpunkt

Kap 4: Følger - grenseverdier → ingen L'Hôpital - gange med konjugate
→ må kunne definisjonen.

Kap 5: Kontinuitet:
- definisjon, delt forskrift. $f(x)=\begin{cases} Ax+B \\ 2e^{x}+3 \end{cases}$
- skjæringssetning, ekstremalverdisetning.

Kap 6: Derivasjon:
- definisjon
- Middelverdisetning
- ~~L'Hôpital~~
- ~~konveks/konkav~~ asymptoter

Kap 7:
- Maks/min
- koblede hastigheter
- omvendte funksjoner
- cot
- arcus funksjoner