Midtveiseksamen i MAT1100 H-17: Løsningsforslag

Vær oppmerksom på at svaralternativene på eksamen vanligvis vil komme i en annen rekkefølge enn vist nedenfor. Det er fordi systemet automatisk bytter om på svaralternativene for hver enkelt kandidat.

Oppgave 1. Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Da er z lik:

A) $-2\sqrt{3} + 2i$
B) $-2 + 2i\sqrt{3}$
C) $-2\sqrt{3} - 2i$
D) $2\sqrt{3} + 2i$
E) $-2\sqrt{3} - 2i$

Riktig svar: A) $-2\sqrt{3} + 2i$
Begrunnelse: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

Oppgave 2. Det komplekse tallet $z = -4 - 4i$ har polarkoordinater:

A) $r = 4\sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$
B) $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{4}$
C) $r = 4\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
D) $r = 4\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4}$
E) $r = 8, \theta = \frac{3\pi}{4}$

Riktig svar: D) $r = 4\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4}$
Begrunnelse: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$. Videre er $\sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden z ligger i tredje kvadrant, betyr det at $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

Oppgave 3. Dersom $z = \overline{\left(\frac{1+4i}{4-i}\right)}$, så er:

A) $z = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}i$
B) $z = \frac{5}{17} - \frac{4}{17}i$
C) $z = \frac{2}{15} - \frac{2}{3}i$
D) $z = -i$
E) $z = \frac{4}{15} + \frac{3}{5}i$

Riktig svar: D) $z = -i$
Begrunnelse: $z = \overline{\left(\frac{1+4i}{4-i}\right)} = \frac{1-4i}{4+i} = \frac{(1-4i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i-16i+4}{17} = -\frac{17i}{17} = -i.$

Oppgave 4. Ligningen $(1+i)z + 2i = 2iz$ har løsningen:

A) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$
B) $2 + 4i$
C) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$
D) $-\frac{1}{2} + 2i$
E) $1 - i$

Riktig svar: E) $1 - i$.
Begrunnelse: $(1+i)z + 2i = 2iz \iff (1-i)z = -2i \iff z = \frac{-2i}{1-i} = \frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(-i+1)}{2} = 1 - i$

Oppgave 5. Hvis det reelle polynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har 1 og $-i$ som røtter, så er $P(z)$ lik:

A) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1$
B) $*z^3 - z^2 + z - 1$
C) $z^3 - 1$
D) $z^3 + 3z^2 - z + 1$
E) Vi har ikke nok informasjon til å avgjøre hvilket polynom det er

Riktig svar: B) $z^3 - z^2 + z - 1$
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, er $\overline{-i} = i$ også en rot. Dermed er $P(z) = (z-1)(z-i)(z+i) = z^3 - z^2 + z - 1$.

Oppgave 6. Hvis $z = \sqrt{3} + i$, så er z^{38} lik:

A) $2^{38}i$
B) $2^{37}(\sqrt{3} + i)$
C) -2^{37}
D) 2^{38}
E) $*2^{37}(1 + i\sqrt{3})$

Riktig svar: E) $*2^{37}(1 + i\sqrt{3})$
Begrunnelse: Vi har $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ som viser at $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Ved De Moivres formel er da $z^{38} = 2^{38}\left(\cos\frac{38\pi}{6} + i\sin\frac{38\pi}{6}\right) = 2^{38}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ der vi har brukt at $\frac{38\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{3}$. Videre får vi $z^{38} = 2^{38}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{37}(1 + i\sqrt{3})$.

Oppgave 7. Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{7 + 3n^3 + 4n^4}$ er lik:

A) 0

B) $\frac{3}{4}$
C) ∞
D) $\frac{1}{7}$
E) $\frac{3}{7}$
Riktig svar: B) $\frac{3}{4}$
Begrunnelse: Vi har $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-2n^2+1}{7+3n^3+4n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{7}{n^4}+\frac{3}{n}+4\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{7}{n^4}+\frac{3}{n}+4} = \frac{3}{4}$

Oppgave 8. Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^4}{5x^3-4x^4}$ er lik:

A) 0
B) $\frac{2}{5}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{5}$
E) ∞
Riktig svar: D) $\frac{1}{5}$
Begrunnelse: $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^4}{5x^3-4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+2x)}{x^3(5-4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{5-4x} = \frac{1}{5}$

Oppgave 9. Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$ er lik:

A) 1
B) 2
C) ∞
D) 0
E) $*\frac{1}{2}$

Riktig svar: E) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Denne oppgaven kan løses omtrent like greit ved å gange med det konjugerte uttrykket som ved å bruke L'Hôpitals regel. Velger den første metoden: $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} =$
$\lim_{x\to\infty} x\frac{\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$.
Oppgave 10. Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos z}$ er lik:

A) 0
B) 2
C) ∞
D) $\frac{1}{2}$
E) 1

Riktig svar: B) 2
Begrunnelse: Siden dette er "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, kan vi bruke L'Hôpitals regel: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 2e^{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = 2\cdot 1 = 2$.

Oppgave 11. Grenseverdien $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$ er lik:

A) 1
B) 2
C) e^2
D) $\frac{1}{2}$
E) ∞

Riktig svar: C) e^2
Begrunnelse: Vi skriver $x^{\frac{2}{x-1}} = e^{\frac{2\ln x}{x-1}}$. Eksponenten $\frac{2\ln x}{x-1}$ er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, og vi bruker L'Hôpitals regel: $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$. Siden eksponentialfunksjonen er kontinuerlig, har vi dermed: $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{2\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1}} = e^2$.

Oppgave 12. Den omvendte funksjonen til $f(x) = 3\ln(2x+4)$ er:

A) $g(x) = \frac{e^{3x+2}}{4}$
B) Det finnes ingen omvendt funksjon
C) $g(x) = \frac{4e^{x-2}}{3}$
D) $g(x) = \frac{1}{3\ln(2x+4)}$
E) $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}} - 2$

Riktig svar: E) $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}} - 2$.
Begrunnelse: Vi løser ligningen $y = 3\ln(2x+4)$ med henyn på x: $y = 3\ln(2x+4) \iff \frac{y}{3} = \ln(2x+4) \iff e^{\frac{y}{3}} = 2x+4 \iff x = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{3}} - 2$. Det betyr at $g(y) = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{3}} - 2$, dvs. at $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}} - 2$.

Oppgave 13. Funksjonen $f : [-2,\infty) \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = (x+1)e^x$ er injektiv. Hvis g er den omvendte funksjonen, er $g'(1)$ lik:

A) $\frac{1}{2e}$
B) 2
C) 1
D) $\frac{1}{2}$
E) e

Riktig svar: D) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Observer først at $f(0) = (0+1)e^0 = 1$ og at $f'(x) =$

$1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Dermed er $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(0+2)e^0} = \frac{1}{2}$ ved formelen for den deriverte til en omvendt funksjon.

Oppgave 14. Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2 & \text{for } x \geq 0 \\ \\ Ax + B & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

der A og B er konstanter. Hva må A og B være for at f skal være deriverbar i $x = 0$?

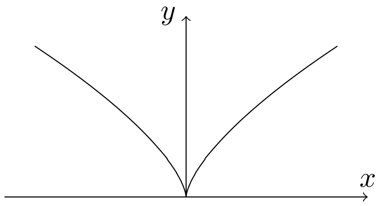
A) $A = 2, B = 3$.
B) $A = 2$, B kan være hva som helst
C) $A = 2, B = 0$
D) Ingen valg av A og B gjør f deriverbar i $x = 0$
E) $B = 3$, A kan være hva som helst

Riktig svar: A) $A = 2, B = 3$.
Begrunnelse: For å være deriverbar i $x = 0$, må funksjonen være kontinuerlig $x = 0$, dvs. vi må ha $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(Ax + B) = B$. Siden $f(0) = e^{2\cdot 0} + 2 = 3$, betyr dette at $B = 3$. For at funksjonen i tillegg skal være deriverbar, må den høyre- og venstrederiverte være like. Den høyrederivert er lik den deriverte til $e^{2x} + 2$ i punktet $x = 0$, altså lik 2, mens den venstrederiverte er lik den deriverte til $Ax + B$ i punktet $x = 0$, altså lik A. For å få likhet må vi ha $A = 2$.

Oppgave 15. Funksjonen $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ er:

A) konkav på hele $\mathbb{R}$
B) konveks på $(-\infty, 0]$ og konkav på $[0, \infty)$
C) konkav på $(-\infty, 0]$ og konveks på $[0, \infty)$
D) konkav på $(-\infty, 0]$ og på $[0, \infty)$, men ikke på hele $\mathbb{R}$
E) konveks på $(-\infty, 0]$ og på $[0, \infty)$, men ikke på hele $\mathbb{R}$

Riktig svar: D) konkav på $(-\infty, 0]$ og på $[0, \infty)$, men ikke på hele $\mathbb{R}$
Begrunnelse: Deriverer vi to ganger, får vi: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ for $x \neq 0$, og $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$ for $x \neq 0$ (legg merke til at f ikke er deriverbar i $x = 0$). Siden $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}(x^4)^{-\frac{1}{3}}$, er $f''(x) < 0$ på begge intervallene $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, og dermed er f konkav på $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. Figuren nedenfor viser at funksjonen ikke er konkav på hele $\mathbb{R}$ (hvis du forbinder et punkt på den "venstre" grenen med et punkt på den høyre "grenen", blir sekanten liggende *over* grafen).



Oppgave 16. Løsningene til annengradsligningen $z^2 - (1+i)z + i = 0$ er:

A) Eneste løsning er i (dobbeltrot)
B) 1 og $-2i$
C) Eneste løsning er 1 (dobbeltrot)
D) i og 2
E) 1 og i

Riktig svar: E) 1 og i
Begrunnelse: Vi bruker annengradsformelen (abc-formelen):

$$z = \frac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot i}}{2 \cdot 1} = \frac{1+i \pm \sqrt{(1+2i-1) - 4i}}{2} = \frac{1+i \pm \sqrt{-2i}}{2}$$

For å komme videre trenger vi kvadratrøttene til $u = -2i$. Siden u har modulus $r = 2$ og argument $\theta = \frac{3\pi}{2}$, har den ene kvadratroten w_0 modulus lik $\sqrt{2}$ og argument lik $\frac{3\pi}{4}$. Dermed er $w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i$. Setter vi dette inn i uttrykket for z, får vi:

$$z = \frac{1+i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \frac{1+i \pm (-1+i)}{2} = \begin{cases} \frac{1+i+(-1+i)}{2} = i \\ \frac{1+i-(-1+i)}{2} = 1 \end{cases}$$

Oppgave 17. Asymptoten til $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$ når $x \to \infty$ er:

A) $y = x + \frac{3}{2}$
B) $y = x$
C) Det finnes ingen asymptote
D) $y = x + 3$
E) $y = x + \frac{1}{3}$

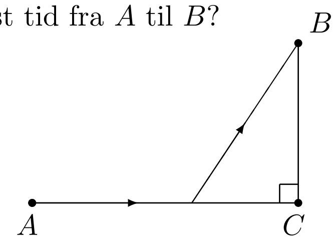
Riktig svar: A) $y = x + \frac{3}{2}$
Begrunnelse: Vi bruker metoden fra seksjon 6.5. Først regner vi ut $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}} = 1$, som vise at $a = 1$. Deretter regner vi ut

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2+3x}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)} = \frac{3}{2}$$

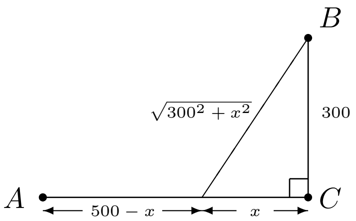
som viser at $b = \frac{3}{2}$. Dermed er $y = ax + b = x + \frac{3}{2}$ en asymptote.

Oppgave 18. En orienteringsløper skal løpe fra punkt A til punkt B på figuren. Hun planlegger å følge veien fra A til C et stykke, og så løpe ut i terrenget i retning B (se pilene på figuren). Avstanden fra A til C er 500 m og avstanden fra C til B er 300 m. Langs veien kan hun løpe med en fart av 5 m/s, mens hun i terrenget løper med en fart av 3 m/s. Hvor langt må hun løpe langs veien for å bruke kortest tid fra A til B?



A) 150 meter
B) 350 meter
C) 275 meter
D) 200 meter
E) 250 meter

Riktig svar: C) 275 meter
Begrunnelse: Innfører vi x som på figuren nedenfor, er tiden hun bruker



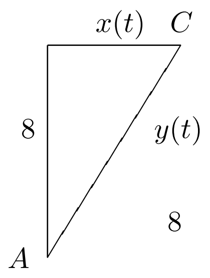
gitt ved $t(x) = \frac{500-x}{5} + \frac{\sqrt{300^2+x^2}}{3}$. Deriverer vi, får vi $t'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{300^2+x^2}}$. Setter vi dette uttrykket lik null, får vi etter litt omstokking at $3\sqrt{300^2+x^2} = 5x$. Vi kvadrerer og får at $9(300^2+x^2) = 25x^2$, som gir $16x^2 = 9 \cdot 300^2$. Siden x må være positiv, betyr dette at $x = \frac{3 \cdot 300}{4} = 225$. Det er lett å sjekke at dette er et minimumspunkt for $t(x)$. Svaret blir dermed 500 m $-$ 225 m $=$ 275 m (husk hva det er spurt etter).

Oppgave 19. Et fly observeres fra et punkt på bakken. Flyet beveger seg horisontalt i en høyde av 8 km over bakken. I det flyets avstand fra observasjonspunktet er 10 km, endrer avstanden seg med 600 km/t. Hvor er farten til flyet i dette øyeblikket?

A) 1000 km/t
B) $\frac{2000}{3}$ km/t
C) 750 km/t
D) 800 km/t

E) 900km/t

Riktig svar: A) 1000 km/t
Begrunnelse: Figuren nedenfor viser den generelle situasjonen med



observasjonspunktet i A og flyet i C. Flyets hastighet er $x'(t)$ og avstanden fra observasjonspunktet ender seg med en hastighet på $y'(t)$. Bruker vi Pytagoras' setning på trekanten på figuren, får vi $y(t)^2 = x(t)^2 + 8^2$, som derivert mhp. t gir $2y(t)y'(t) = 2x(t)x'(t)$. Dette kan omformes til $x'(t) = \frac{y(t)y'(t)}{x(t)}$. I øyeblikket vi er interessert i, er $y(t) = 10$ og $x(t) = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Dermed blir $x'(t) = \frac{10 \cdot 600}{6} = 1000$. Altså er flyets hastighet 1000 km/t.

Oppgave 20. Anta at f er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Dersom det finnes positive tall M og b slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{1+b}$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, så er:

A) f strengt voksende.
B) f strengt avtagende.
C) f strengt avtagende for $x < 0$ og strengt voksende for $x > 0$
D) Det finnes ingen slike funksjoner
E) f er konstant

Riktig svar: E) f er konstant
Begrunnelse: Det holder å vise at $f'(a) = 0$ i et hvilket som helst punkt a, dvs. at $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$. Ifølge antagelsen er

$$|f'(a)| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \lim_{x \to a} |x - a|^b = 0,$$

så $f'(a) = 0$.