Utvidet fasit til prøveeksamen i MAT 1100 — Høst 2006

DEL 1

1. Riktig svar e): $\cos(xyz^2) - xyz^2\sin(xyz^2)$. Hint: Bruk både produktregel og kjerneregel.

2. Riktig svar a): $(0,1)$. Hint: Funksjonen vokser fortest i den retningen gradienten peker. Gradienten er $\nabla f(2,-1) = (0, 8e^{-2})$, men siden vi bare er interessert i retningen den peker i, kan vi forenkle uttrykket til $(0,1)$.

3. Riktig svar b): $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$. Hint: Substituer $u = x^2$.

4. Riktig svar d): $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$. Hint: Sjekk reglene på side 447 i *Kalkulus*.

5. Riktig svar e): $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Hint: Delvis integrer med $u = \ln x$, $v' = x$.

6. Riktig svar b): $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Hint: Du kan for eksempel sette $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ og løse ligningssystemet du får når du multipliserer ut venstresiden i ligningen $AX = I_2$. Se eksempel 2 i seksjon 1.6 i *Flervariabelanalyse med lineær algebra* dersom du trenger flere hint.

7. Riktig svar b): $\pi^2 - 2\pi$. Hint: Formelen for volumet av et omdreiningslegeme om y-aksen gir $V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$. Dette integralet løses ved delvis integrasjon.

8. Riktig svar c): integralet divergerer. Hint: Løs integralet ved å substituere $u = \ln x$. Når b går mot uendelig, vil $\ln b$ gå mot uendelig, og dermed vil også $\ln(\ln b)$ gå mot uendelig (men uhyre langsomt!).

9. Riktig svar e): $\mathbf{H}'(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$. Hint: Ifølge kjerneregelen er $\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$. Setter vi $\mathbf{a} = (1,2)$, blir $\mathbf{G}(\mathbf{a}) = (1,-3,0)$, og vi får

$$\mathbf{H}'(1,2) = \mathbf{F}'(1,-3,0)\mathbf{G}'(1,2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

10. Riktig svar b): $\nabla T(\mathbf{r}(t))$ står alltid normalt på hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Hint: Siden dyret alltid befinner seg et sted temperaturen er $20°$, må vi ha $T(\mathbf{r}(t)) = 20$. Deriverer vi på begge sider, får vi fra kjerneregelen (etter litt opprydning) at $\nabla T(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. Følgelig står $\mathbf{r}'(t)$ normalt på $\nabla T(\mathbf{r}(t))$.

DEL 2

Oppgave 1

a) Tredjerøtter: $w_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $w_1 = -2$, $w_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Hint: Skriv $z = -8$ på polarform $z = 8e^{i\pi}$, Da er $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$. De andre røttene finner du ved å bruke prosedyren i seksjon 3.4 i *Kalkulus*. En alternativ løsningsmåte er å observere at -2 er en rot, og så polynomdividere $z^3 + 8$ på $z + 2$. Du blir da sittende igjen med en annengradsligning som er lett å løse.

Kompleks faktorisering: $z^3+8 = (z+2)(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})$. Hint: Observer at røttene i dette polynomer er de tredjerøttene du nettopp har funnet.

Reell faktorisering: $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$. Hint: Multipliser sammen faktorene med konjugerte røtter.

b) $A = -1$, $B = 1$ og $C = 2$: Hint: Vanlig prosedyre for delbrøkoppspalting. Se seksjon 9.3 i *Kalkulus* hvis du trenger hjelp.

c) $-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4)+\sqrt{3}\arctan(\frac{x-1}{\sqrt{3}})+C$: Hint: Bruk oppspaltingen fra punkt b). Har du problemer med å integrere $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$, så konsulter eksempel 9.3.5 og 9.3.6 i *Kalkulus*.

d) $-\frac{\ln(x^3+8)}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln(x^2 - 2x + 4) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) + C$ Hint: Bruk først delvis integrasjon med $u = \ln(x^3 + 8)$, $v' = \frac{1}{x^2}$, og deretter resultatet i c).

Oppgave 2

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 225 \\ 100 \end{pmatrix}$. Hint: Synes du det er vanskelig å sette opp matrisen direkte, kan det være lurt å gå veien om ligninger. Vi får da

$$\begin{gathered} x_{n+1} = \text{antall unger i år } n+1 = \\ = \text{antall unger til dyr som var unge voksne året før } + \\ + \text{antall unger til dyr som var fullvoksne året før} \\ + \text{antall unger til dyr som var eldre året før } = \\ = 0.5y_n + 2z_n + 0.5u_n \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y_{n+1} = \text{antall unge voksne i år } n+1 = \\ = \text{overlevende av dyr som var unger året før} = 0.5x_n \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_{n+1} = \text{antall fullvoksne i år } n+1 = \\ = \text{overlevende av dyr som var unge voksne året før} = 0.75y_n \end{gathered}$$

ß

$$z_{n+1} = \text{antall eldre i år } n+1 =$$
$$= \text{overlevende av dyr som var fullvoksne året før} = 0.5z_n$$

.

b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2b \\ \frac{4}{3}c \\ 2d \\ 2a - 8d - \frac{4}{3}c \end{pmatrix}$. Hint: Ganger du ut høyresiden i ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ får du fire ligninger med fire ukjente som du må løse.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} & -8 \end{pmatrix}$. Hint: Du kan bruke ligningen fra b) med $\mathbf{b}$ lik hhv. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Vekstfaktoren er 1.032 mens fordelingen blir som mellom komponentene til egenvektoren: unger 50%, unge voksne 24%, fullvoksne 18%, eldre, 8%. Hint: Siden enhver vektor $\mathbf{x}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av egenverdier, har vi

$$\mathbf{x} = x\mathbf{v} + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4$$

der $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer med egenverdier hhv. λ_1, λ_2, λ_3. Dersom startfordelingen er gitt av $\mathbf{x}$, vil fordelingen etter n år være gitt ved

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n\mathbf{x} = x\lambda^n\mathbf{v} + x_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + x_3\lambda_3^n\mathbf{v}_3 =$$

$$= \lambda^n \left(x\mathbf{v} + x_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^n \mathbf{v}_1 + x_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^n \mathbf{v}_2 + x_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^n \mathbf{v}_3 \right)$$

Siden λ er den største egenverdien (i tallverdi), vil $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^n$ $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^n$, $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^n$ gå mot 0 når n vokser. Veksten er dermed styrt av faktoren $\lambda^n = 1.032^n$ mens fordelingen blir mer og mer lik $\mathbf{v}$.

Oppgave 3

a) Alle de deriverte er 0. Formelen holder følgelig. Fullstendig løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3\cdot 0}{h^6+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3\cdot h}{0^6+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hr_1, 0+hr_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3r_1^3\cdot hr_2}{h^6r_1^6+h^2r_2^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{hr_1^3 r_2}{h^4 r_1^6 + r_2^2} = 0$$

Siden alle de deriverte er null, har vi $f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$.

b) Funksjonen er ikke deriverbar i $\mathbf{0}$. Fullstendig løsning: Velger vi punkter på kurven $y = x^3$, får vi

$$f(x, x^3) = \frac{x^3 \cdot x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \frac{1}{2}$$

Nærmer vi oss $\mathbf{0}$ langs denne kurven, vil $f(x, x^3)$ ikke nærme seg $f(\mathbf{0})$. Funksjoner er derfor ikke konntinuerlig i $\mathbf{0}$. Siden alle deriverbare funksjoner er kontinuerlige (se setning 2.4.8 i heftet), kan den heller ikke være deriverbar,