Orakeltimer:

Mandag: 10-16
Torsdag: 9-13
Sophus Lie Aud.

Seksjon 6.1

10) Vis at $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ved å bruke definisjonen.

Definisjon: La f være en funksjon

Da er $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Løsning: Skal finne $D[\sqrt{x}]$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$(= D[\sqrt{x}])$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h) - x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$ ← grensen til dette eksisterer.

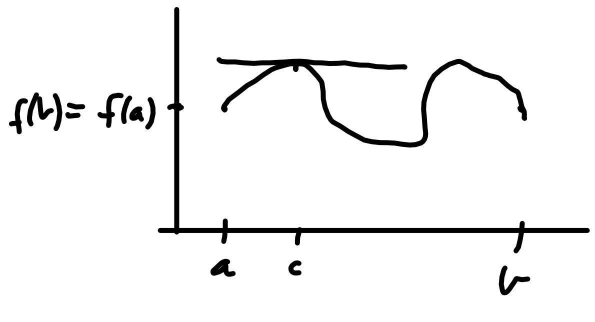
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

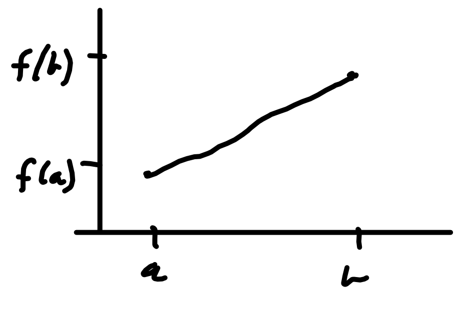
Seksjon 6.2

Rolles teorem:

Anta at $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og deriverbar på (a,b).
Anta at $f(a) = f(b)$, da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at

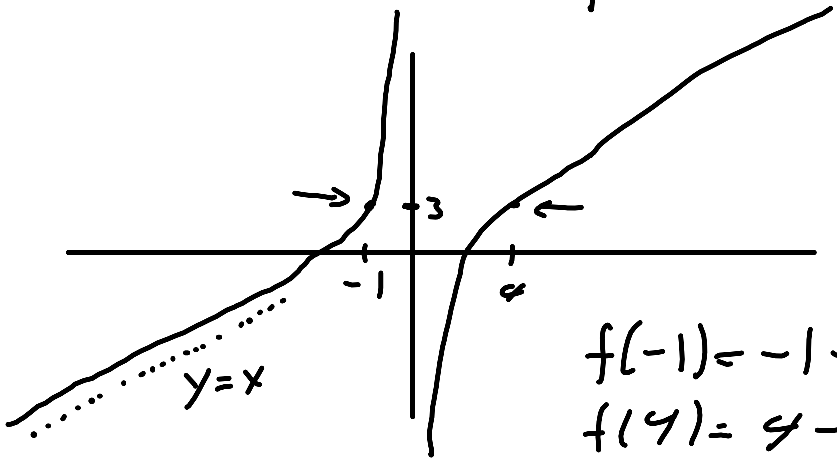
$$f'(c) = 0.$$





5 La $f(x) = x - \frac{4}{x}$. Vis at $f(-1) = f(4)$.

Men det finnes <u>ingen</u> punkter $c \in (-1, 4)$ slik at $f'(c) = 0$.



$f(-1) = -1 + 4 = 3$

$f(4) = 4 - 1 = 3$

Finner den deriverte: $f(x) = x - \frac{4}{x}$

$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$. x^2 er alltid ≥ 0

$\Rightarrow f'(x) > 0$. Men: $x \neq 0$.

Funksjonen er ikke definert i $x = 0$.

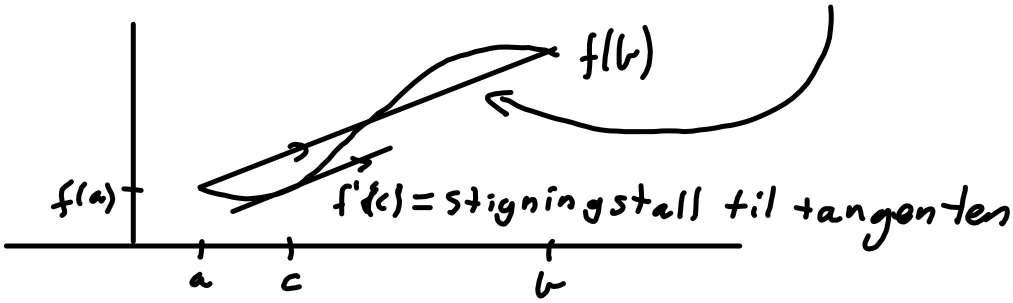
Rolle teorem snakker om en funksjon $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$. Vår funksjon er ikke slik.

Middelverdisetningen:

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar i alle indre punkter i (a,b). Da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(= relative stigningstall)



7 Vis at det mellom 0 og x finnes et tall c ($c \in (0,x)$) slik at $\sin(x) = x\cos(c)$.

Løsning: Skal bruke middelverdisetningen på funksjonen $f(y) = \sin(y)$ på intervallet $[0, x]$.

$\sin(y)$ er kontinuerlig og deriverbar.

$\Rightarrow$ Kan bruke middelverdisetningen.

$\Rightarrow$ det finnes et indre punkt $c \in (0,x)$ slik at $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$\cos(c) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x-0} = \frac{\sin(x)}{x}$$

$\Rightarrow \sin x = x\cos(c)$.

Merk: x kan også være negativ.

$f: [x,0] \to \mathbb{R}$. $\exists\, c \in (x,0)$ s.a

$$\cos(c) = \frac{\sin(0) - \sin(x)}{0-x} = \frac{\sin(x)}{x}$$

$\Rightarrow \underline{\sin(x) = x\cos(c).}$ for en c mellom 0 og x.

Vi skal vise at $|\sin x| \le |x|$ for alle x.

Vi vet at $|\sin(x)| = |x\cos(c)|$
$= |x| \cdot |\cos(c)|$.

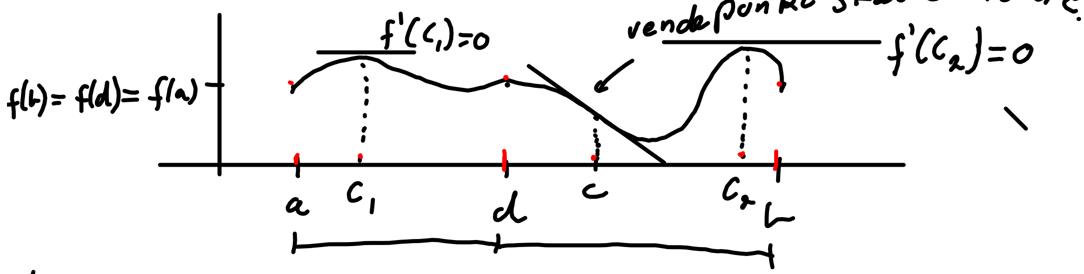
(Vet at $-1 \le \cos(c) \le 1$ gjelder $\forall c$
$\Rightarrow |\cos(c)| \le 1$.)

$\Rightarrow |\sin(x)| \le |x|$. (Gjelder også når $x=0$)

13. Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, og to ganger deriverbar på (a,b), og at

$f(a)=f(d)=f(b)$ for en $d\in(a,b)$.

Vis at det finnes et indre punkt $c\in(a,b)$ slik at $f''(c)=0$.

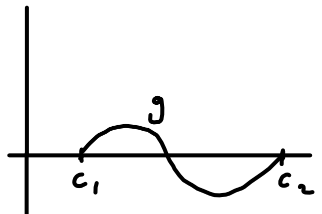


Løsning: Skal bruke Rolles teorem 2 ganger. Vet at $f(a)=f(d)$ og $f(d)=f(b)$.
Ser på intervallet $[a,d]$. Av Rolle teorem finnes en $c_1\in(a,d)$ slik at $f'(c_1)=0$.
Ser på intervallet $[d,b]$. Av Rolles teorem finnes en $c_2\in(d,b)$ med $f'(c_2)=0$.

Definerer $g:[c_1,c_2]\to\mathbb{R}$ ved $g(x)=f'(x)$.

$f'(c_1)=f'(c_2)=0$.

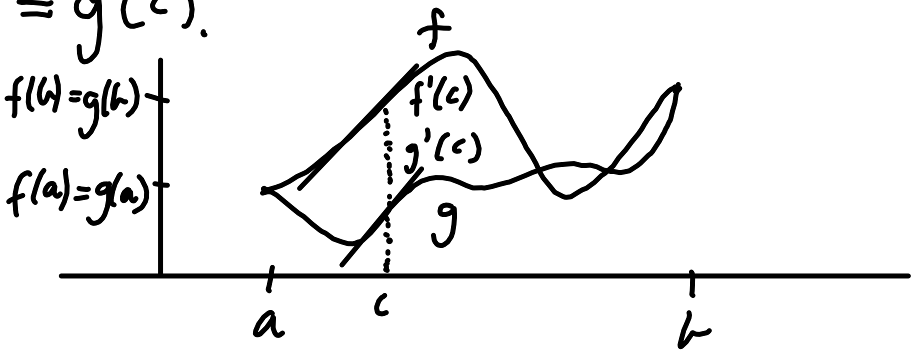
$g(c_1)=g(c_2)=0$



Skal bruke Rolles teorem på funksjonen g.

Det kan vi gjøre siden g er deriverbar, fordi f er dobbelt deriverbar.
Da finnes et punkt $c\in(c_1,c_2)$ hvor $g'(c)=0 \Rightarrow f''(c)=0$. $c\in(a,b)$.

16 La $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ være kontinuerlige og deriverbar på (a,b).
Anta $f(a)=g(a)$ og $f(b)=g(b)$.
Vis at $\exists\, c\in(a,b)$ slik at
$f'(c)=g'(c)$.



Løsning: Definer $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ slik at $h(x)=f(x)-g(x)$. Kan bruke Rolles teorem.
$h(a)=f(a)-g(a)=0$. $h(b)=f(b)-g(b)=0$.
$\Rightarrow h(a)=h(b)$. Da $\exists\, c\in(a,b)$ slik at
$h'(c)=0$.
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$. $\Rightarrow f'(c)-g'(c)=h'(c)=0$.
$\Rightarrow f'(c)=g'(c)$.

20 a) Anta f' er kontinuerlig på $[a,b]$. Vis at det finnes en $K \in \mathbb{R}$ slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \quad \forall\, x,y \in [a,b].$$

Ekstremalverdisetningen:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Da har f har max og min-punkter.

Da har f en øvre og nedre grense.

$\Rightarrow$ f er begrenset. $\Rightarrow |f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Løsning: Skal bruke middelverdi-setningen. Det finnes en $c \in (y,x)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad \text{hvis } y < x.$$

$$\exists c \in (x,y): f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{hvis } x < y.$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

$\Rightarrow$ Kan alltid finne en slik c.

$\Rightarrow f(x) - f(y) = f'(c)(x-y).$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y|$

Fikk oppgitt at f' var kontinuerlig.

$\Rightarrow f'$ er begrenset. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ s.a. $|f'(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,b]$.

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leq K|x-y|$

$\forall\, x,y \in [a,b].$

b) La $f(x) = \sqrt{x}$. Vis at det ikke finnes en K slik at

$$*) \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \quad \forall\, x,y.$$

Løsning: Anta at $\exists K \in \mathbb{R}$ slik at

$$*) \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x-y| \quad \forall\, x,y.$$

Ser at $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$*) \quad \underline{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|} \leq K\underline{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|} \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|.$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq K|\sqrt{x} + \sqrt{y}| \quad \forall\, x,y.$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt{x} + \sqrt{y}| \geq \frac{1}{K}.$$ Kan la x og $y \to 0$.

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \to 0 \Rightarrow$ motstrider at $|\sqrt{x} + \sqrt{y}| \geq \frac{1}{K}$. Gir motsigelse.

$D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. IKKE definert i 0.