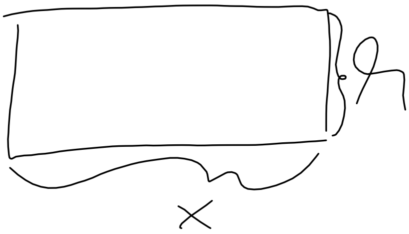
7.1.9 a) Vis at det største rektangulære arealet som kan lages med en gitt omkrets c er et kvadrat:

Bevis: 

Omkrets: $c = 2\cdot x + 2\cdot y$

Arealet: $A = x\cdot y$

Så $\frac{c}{2} - x = y$, så $A(x) = x\cdot y$

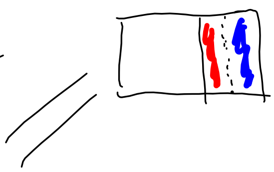
$= x\cdot\left(\frac{c}{2} - x\right)$

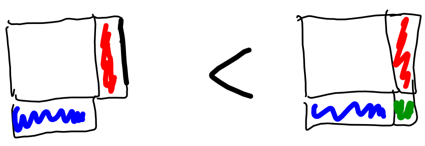
maksimere $A(x)$: $A'(x) = \frac{c}{2} - 2x$

Så $A'(x) = 0 \iff x = \frac{c}{4}$

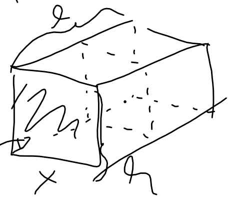
Så $y = \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} = x$ så det vil være et kvadrat. $\boxtimes$

Geometrisk bevis:

Anta  er størst



b) Rektangulær pakke:



og $l + c \le 300$

der $c = 2x + 2h$

$A(x,h)$

og $l \ge x$ og $l \ge h$.

Finn det største volumet som kan sendes i posten.

Volum: $l \cdot A(x,h) = V$, men

$A(x,h)$ er størst når $x = h$

Volum: $V = l \cdot x^2$

videre så $l + 2x + 2h = l + 4x \le 300$

(men siden vi skal maksimere, er $l + 4x = 300$)

så $l = 300 - 4x$

Så $V(x) = (300 - 4x) \cdot x^2 = 4(75 - x)x^2$

$V'(x) = 0 = 4 \cdot 2 \cdot 75 \cdot x - 4 \cdot 3 \cdot x^2$

$= 3 \cdot 4x(2 \cdot 25 - x) = 3 \cdot 4x(50 - x)$

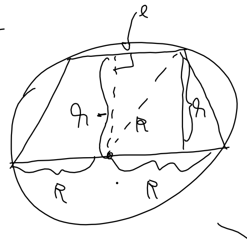
Så $x = 50$ er beste sidelengde

Så $l = 300 - 4 \cdot 50 = 100$

Så $V = l \cdot x^2 = 100 \cdot 50^2 = 250000\ cm^3$

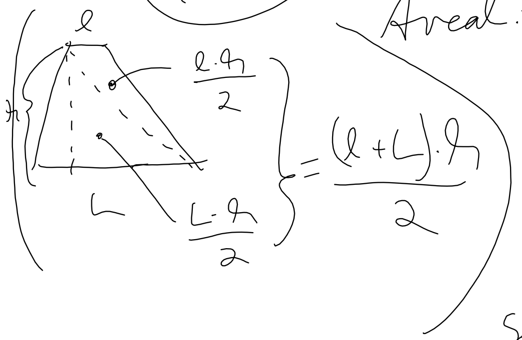
er største volum vi kan sende.

7.1.15



Finn det største arealet et slikt trapes kan ha

Areal: $\frac{(2R+l)\cdot h}{2}$



Pytagoras:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = R^2$$

Så $l = 2\sqrt{R^2 - h^2}$

$$\text{Så } A(h) = \frac{\left(2R + 2\sqrt{R^2-h^2}\right)\cdot h}{2} = \left(R + \sqrt{R^2-h^2}\right)\cdot h$$

$$A'(h) = R + \sqrt{R^2-h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{R^2-h^2}}$$

$$A'(h) = 0 \iff R + \sqrt{R^2-h^2} = \frac{h^2}{\sqrt{R^2-h^2}}$$

$$R\sqrt{R^2-h^2} + R^2 - h^2 = h^2$$

$$R\sqrt{R^2-h^2} = 2h^2 - R^2$$

$$R^2\left(R^2-h^2\right) = \left(2h^2 - R^2\right)^2$$

$$\cancel{R^4} - R^2h^2 = 4h^4 - 4h^2R^2 + \cancel{R^4}$$

$$3R^2h^2 = 4h^4$$

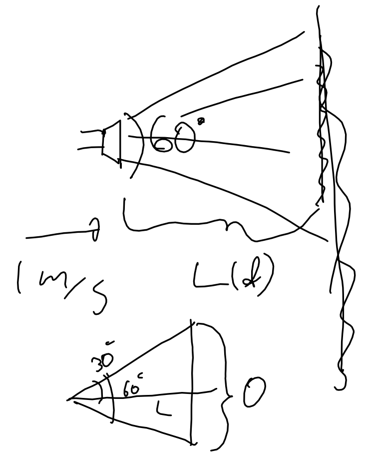
$$\frac{3}{4}R^2 = h^2 \quad \text{så } h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$l = 2\sqrt{R^2-h^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{3}{4}R^2} = R$$

$$\Rightarrow A = (2R+R)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}$$

er det maksimale arealet.

7.2.7 ute på kvelden med lommelykt.



Hvor mye minker den opplyste delen av gjerdet med per sekund?

$O(t)$ = opplyst området av gjerdet ved tidspunktet t

$O(t) = 2 \cdot L(t) \cdot \tan 30°$

$L(t) = L_0 - v \cdot t$, der L_0 er avstand når $t = 0$

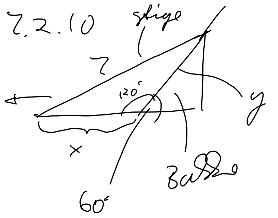
$O(t) = 2(L_0 - v \cdot t)\tan 30°$

$O'(t) = -2 \cdot v \cdot \tan 30° = 2 \cdot 1\,m/s \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,m/s$

$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

minker området med per tidsenhet

7.2.10



Vis at $x^2 + xy + y^2 = 49$

Cosinussetningen gir

$$x^2 - 2 \cdot \cos 120° \cdot xy + y^2 = 7^2$$

$$x^2 + x \cdot y + y^2 = 49.$$

Ved $t=0$, så er $x(0) = 3$ og $x'(0) = 2\,m/s$.

Finn $y'(0)$?

Siden $x(t)^2 + x(t)y(t) + y(t)^2 = 49$

så vi deriverer

$$2x(t)x'(t) + x'(t)y(t) + x(t)y'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Så vi løser for $y'(t)$.

$$\big(2y(t) + x(t)\big)\, y'(t) = -\big(2x(t) + y(t)\big)\, x'(t)$$

$$y'(t) = -\frac{(2x(t) + y(t))}{2y(t) + x(t)}\, x'(t)$$

$x(0) = 3\,m$

$x'(0) = 2\,m/s$

$x(0)^2 + x(0)y(0) + y(0)^2 = 49$

Finner $y(0)$:

$$3^2 + 3y(0) + y(0)^2 = 49$$

$$y(0)^2 + 3y(0) - 40 = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{(y(0) - 5)(y(0) + 8)}$$

Så $y(0) = 5$

$$y'(0) = -\left(\frac{(2 \cdot 3 + 5)}{2 \cdot 5 + 3}\right) \cdot 2$$

$$= -\frac{11 \cdot 2}{13} = -\frac{22}{13}\,m/s$$

Så stigen beveger seg nedover med hastigheten $\frac{22}{13}$ m/s.

7.4.1e) $f(x) = x^2+2x+3$ $D_f = [-1, \infty)$

Vis at f er injektiv og f^{-1}.

$f'(x) = 2x+2 \geq 0$ for alle $x \in D_f$

> 0 for alle $x \in (-1,\infty)$

Så f er injektiv.

$y = x^2+2x+3$

$y-2 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$

$\sqrt{y-2} = x+1$

$\sqrt{y-2}-1 = x$, som er definert på $[2, \infty)$

7.4.5 Vis at $f(x) = \tan 2x$ er injektiv på $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

$$(\tan 2x)' = \frac{2}{(\cos 2x)^2} > 0 \text{ for alle } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

så f er injektiv på $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Finn $g'(1)$, der g er den omvendte funksjonen til f.

Da er $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{f'(\frac{\pi}{8})}$

$= \dfrac{\cos^2(2 \cdot \frac{\pi}{8})}{2} = \dfrac{\cos^2(\frac{\pi}{4})}{2} = \dfrac{1}{4}$

$g(1) = \frac{\pi}{8}$, siden $g(1) = x$ slik

at $\tan 2x = 1$ altså $\sin 2x = \cos 2x$

altså når $2x = \frac{\pi}{4}$, altså $x = \frac{\pi}{8}$.