Grublegruppa 5. sept. 2011: Metriske rom

Ivar Staurseth
ivarsta@math.uio.no

Innledning, definisjoner...

I forrige uke så vi på konvergens av følger. Vi så fra definisjonen at det var avgjørende å ha et begrep om *avstand* mellom par av elementer. Vi måtte for eksempel kunne vite sikkert når avstanden mellom x_n og x er mindre enn et lite tall ϵ, eller sagt matematisk: $|x_n - x| < \epsilon$.

Det er bare fantasien som begrenser hva slags mengder vi kan definere følger i, for eksempel kan vi tenke oss en følge av fornavn. I mengden av fornavn er det imidlertid vanskelig å snakke om avstand. Noen vil kanskje si at avstanden mellom Per og Petter er mindre enn mellom Per og Gregorius, men det er en smaksak og smaksaker er aldri veldefinert.

Når vi har observert denne forskjellen, er det naturlig å spørre seg selv *hva som skal til* for å ha et avstandsmål som fungerer - slik at vi kan drive matematisk analyse, dvs. snakke om konvergens (og, som vi kommer til siden: kontinuitet, deriverbarhet mm.). I dag skal vi generalisere avstandsbegrepet og se på *metriske rom*:

Definisjon 1. *Et metrisk rom er et par (X,d), hvor X er en mengde og d en funksjon $d : X \times X \to \mathbb{R}$ som tar to elementer i X og returnerer et reelt tall, og som oppfyller følgende:*

- $d(x, y) \geq 0$ *for alle par* $x, y \in X$
- $d(x, y) = 0$ *hvis og bare hvis* $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ *for alle* $x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *for alle* $x, y, z \in X$ *(trekantulikheten)*

Vi legger ikke andre begrensninger på X enn at det skal være en mengde. Kun fantasien begrenser hva den består av. Funksjonen d er selve *avstandsmålet* på mengden vår. Vi kaller den en *metrikk* på X. Den skal være definert for alle par av elementer, x og y i X, og gir oss avstanden, $d(x, y)$ mellom x og y. Imidlertid krever vi at den skal oppføre seg slik vi forventer at en avstand skal oppføre seg.

Et metrisk rom består altså av to ting: en mengde og et avstandsmål/metrikk på mengden. Hvis d_1 og d_2 er to *forskjellige* metrikker på én og samme mengde, X, så skiller vi altså mellom de *to* metriske rommene (X, d_1) og (X, d_2). Hvis metrikken er underforstått utfra sammenhengen skriver vi gjerne det metriske rommet (X, d) bare som X. (F.eks. betyr $\mathbb{R}$ de reelle tallene, med standardmetrikken $d(x, y) = |x - y|$ når ingen annen metrikk er spesifisert.)

Eksempel 1. *La X være en mengde, og la $d_T : X \times X \to \mathbb{R}$ være definert ved:*

$$d_T(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

Da er d_T en metrikk på X, og (X, d_T) er et metrisk rom. d_T kalles den trivielle metrikken på X

For å vise at d_T er en metrikk må vi ta for oss de fire punktene i definisjonen over. Siden $d_T(x, y)$ alltid er enten 1 eller 0 er det klart at punkt 1 er oppfylt: $d_T(x, y) \geq 0$.

Siden $d_T(x, y) = 0$ kun når $x = y$ er også punkt 2 oppfylt. Det samme er $d_T(x, y) = d_T(y, x)$ (punkt 3).

Så er det punkt 4. Vi skal vise at $d_T(x, z) \leq d_T(x, y) + d_T(y, z)$ for alle $x, y, z \in X$. La oss begynne med venstresiden. Dersom $x \neq z$ er $d_T(x, z) = 1$. Da får vi på høyresiden: $d_T(x, y) + d_T(y, z)$. Disse to leddene kan ikke begge være 0, siden det vil være ekvivalent med at $x = y$ og $y = z$ som medfører at $x = z$. (som vi har antatt at ikke er tilfelle.) Høyresiden er altså på formen $1 + 0$ eller $1 + 1$, og i begge tilfeller er punkt 3 oppfylt.

Dersom $x = z$ får vi 0 på venstresiden. Hva vi får på høyresiden kommer an på y. Hvis $y = z = x$ får vi 0 også på høyresiden. Hvis y er forskjellig fra x og z får vi 2 på høyresiden. I begge tilfeller er punkt 3 oppfylt.

Vi har altså vist at d_T er en metrikk. Den er er helt uavhengig av X. Alle tenkelige mengder kan altså bli et metrisk rom vha. denne nokså kjedelige metrikken, hvor avstanden fra et punkt til seg selv er 0 og avstanden til alle andre punkt er 1.

Nå skal vi se at en metrikk på en mengde X gjør det mulig å snakke om konvergens av følger i X

Konvergens av følger i metriske rom

Definisjon 2. *La (X, d) være et metrisk rom. En følge $\{x_n\}$ i (X, d) er en (uendelig) liste av elementer i X, indeksert med de naturlige tallene: $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, ..., x_{1814}, ..., x_{1905}, ..., x_{2011}, ...$.*

Definisjon 3. *En følge $\{x_n\}$ i et metrisk rom (X, d) er konvergent med grense $x \in X$ dersom vi for alle $\epsilon > 0$ kan finne en $N > 0$ slik at $d(x_n, x) < \epsilon$ for alle $n > N$.*

Definisjonen er identisk med definisjonen av konvergens i $\mathbb{R}$, men vi har byttet ut $|x - y|$ med det generelle $d(x, y)$

Eksempel 2. *Vi skal se på mengden $C[0, 1]$ som består av alle kontinuerlige funksjoner $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Elementene her er altså reelle, kontinulerlige funksjoner som er definert på det lukkede intervallet $[0, 1]$. Vi skal legge en metrikk på $C[0, 1]$ ved å definere $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$*

Vi definerer en følge $\{f_n(x)\}$ i $C[0, 1]$ ved $f_n(x) = \frac{1}{n}x$. Denne følgen er konvergent og konvergerer mot den konstante funksjonen $f(x) = 0$.

For å vise dette må vi begynne med en gitt ϵ og utlede en funksjon $N(\epsilon)$ som garanterer oss at $d(f_n, f) < \epsilon$ for alle $n > N(\epsilon)$

$d(f_n, f) = \int_0^1 |\frac{1}{n}x - 0|dx = \int_0^1 \frac{1}{n}xdx = \frac{1}{2n}$. Vi ser at $\frac{1}{2n} < \epsilon$ hvis og bare hvis $n > \frac{1}{2\epsilon}$.

For enhver $\epsilon > 0$ (uansett hvor liten) finnes det altså en passende $N = \frac{1}{2\epsilon}$, som er slik at for alle $n > \frac{1}{2\epsilon}$ er $d(f_n(x), f(x)) < 0$. Eksistensen av en slik N for alle ϵ garanterer oss at følgen av funksjoner $\{f_n(x)\}$ konvergerer mot den konstante funksjonen $f(x) = 0$

Oppgaver (1-3 er oppgaver fra forrige uke om konvergens i $\mathbb{R}$)

Oppgave 1. *La* $\{x_n\}$ *være gitt ved* $x_n = \frac{3n^2-2n^3}{7n^4}$. *Vis at følgen konvergerer mot* 0 *ved hjelp av definisjonen av konvergens.*

Oppgave 2. *La* $\{x_n\}$ *være gitt ved* $x_n = \frac{n\cos n}{7n^2} + 2011$. *Vis at følgen konvergerer mot* 2011 *ved hjelp av definisjonen av konvergens.*

Oppgave 3. *La* $\{x_n\}$ *og* $\{y_n\}$ *være to følger i* $\mathbb{R}$ *som konvergerer mot henholdsvis* x *og* y. *Vis at følgen* $\{z_n\}$ *gitt ved* $z_n = a_n - b_n$ *konvergerer mot* $a - b$ *ved å bruke definisjonen av konvergens.*

Oppgave 4. *La* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *være tre følger i* $\mathbb{R}$ *som er konvergente med grenser henholdsvis* x, y *og* z. *Vis at følgen* $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ *i* $\mathbb{R}^3$ *er konvergent med grense* (x, y, z) *når vi gir* $\mathbb{R}^3$ *standardmetrikken* $d((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$

Oppgave 5. *La* $\mathbb{R}^2$ *være det euklidske planet og definer* $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ *for alle par av punkter* (x_1, x_2) *og* (y_1, y_2) *i* $\mathbb{R}^2$. *Vis at* d *oppfyller kravene til en metrikk.*

Oppgave 6. *La* $\mathbb{T}$ *være mengden av alle T-bane-stasjoner i Oslo. Definer følgende metrikk:*

- *Hvis* $T_1 \neq T_2$ *lar vi* $d_{\mathbb{T}}(T_1, T_2)$ *være summen av antall meter togskinne fra* T_1 *til Stortinget T-banestasjon og antall meter skinne fra Stortinget T-banestasjon til* T_2.
- *Dersom* $T_1 = T_2$ *lar vi* $d_{\mathbb{T}}(T_1, T_2) = 0$.

Er $(\mathbb{T}, d_{\mathbb{T}})$ *et metrisk rom?*

Oppgave 7. *Per og Kari liker ikke metrikken i forrige oppgave. De bor langs samme T-bane-skinne og de synes det er teit at avstanden mellom dem skal gå via Stortinget. Det skaper avstand i forholdet deres. Samlivsterapeuten foreslår en ny metrikk på* $\mathbb{T}$*:*

- $d_{\heartsuit}(T_1, T_2) = 0$ *hvis* $T_1 = T_2$
- $d_{\heartsuit}(T_1, T_2) =$ *antall meter skinne mellom* T_1 *og* T_2 *hvis* T_1 *og* T_2 *ligger langs samme linje (fysiske togskinne)*
- $d_{\heartsuit}(T_1, T_2) = d_{\mathbb{T}}(T_1, T_2)$ *hvis* T_1 *og* T_2 *ligger langs forskjellige linjer/skinner*

Har samlivsterapeuten greid å lage et metrisk rom $(\mathbb{T}, d_{\heartsuit})$*?*

Oppgave 8. *La* (X, d_T) *være et metrisk rom, hvor* d_T *er den diskrete metrikken på X.(Se eksempel 1) Hva kan du si om de konvergente følgene i* (X, d_T)*?*

Oppgave 9. *La* (X, d) *være et metrisk rom, og la* $\{x_n\}$ *og* $\{y_n\}$ *være følger i* (X, d) *som konvergerer mot henholdsvis* x *og* y *i* (X, d)*. Konstruer en ny følge* $\{z_n\}$ *ved å la* $z_n = d(x_n, y_n)$*. Vis at* $\{z_n\}$ *er konvergent med grense* $d(x, y)$ *(Hint: Bruk trekantulikheten to ganger på de fire punktene* x_n, x, y, y_n*)*

Oppgave 10. *La* (X, d) *være et metrisk rom, og definer* $\rho(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$*. Vis at* ρ *oppfyller kravene til en metrikk, dvs. at* (X, ρ) *er et metrisk rom.*

Oppgave 11. *Se på eksempel 2 på side 3. Vis at metrikken vi definerer på* $C[0, 1]$*:* $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ *oppfyller kravene til en metrikk.*