Plenum 19-10-12

7.4: 9, 10

7.5: 5, 7, 15

8.2: 1, 5

8.3: 1 b), d), f), g), 3 d), e), 5, 8

7.4: Omvendte funksjoner

9) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kont, injektiv funksjon.

Påstand: f er strengt monoton.

Injektiv betyr: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Anta for motsigelse at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kont. og injektiv, men ikke strengt monoton. Da må det enten finnes

1) $x_1 < x_2$ s.a. $f(x_1) = f(x_2)$ eller

(vokser og så avtar)

2) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$

eller 3) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_3) > f(x_2)$.

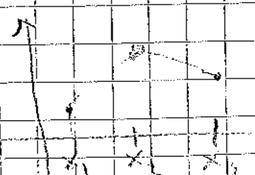
(NB: I alle tilfeller er $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$)

(avtar, og så vokser)

Vi ser på tilfellene separat:

1) Her er det opplagt at f ikke er injektiv, så vi har en motsigelse, og dermed er påstanden OK.

2) Anta $f(x_1) < f(x_3)$ (hvis det er omvendt lar vi x_1 og x_3 bytte roller).



Se på funksjonen $g(x) := f(x) - f(x_3)$.

Da er g kontinuerlig og $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$.

Merk at $g(x_1) = f(x_1) - f(x_3) < 0$ og

$g(x_2) = f(x_2) - f(x_3) > 0$ (fra antagelsen)

Fra skjæringssetningen fins da en $c \in (x_1, x_2)$ s.a.

$g(c) = 0$, dvs. $f(c) = f(x_3)$.

Men dette betyr at $\exists\ c \neq x_3$ ($\in [a,b]$, siden $c \in (x_1, x_2)$, $x_3 > x_2$) s.a. $f(c) = f(x_3)$, men dette motsier at f er injektiv. Dermed har vi en motsigelse, og påstanden er OK.

3): Tilsvarende som 2).

10.) Vis at $f(x) = x e^{\frac{(1-x^2)}{2}}$ er injektiv på $[-1,1]$:

Prøver å derivere for å se om f er strengt voksende eller avtagende:

$$f'(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}} + x e^{\frac{1-x^2}{2}} \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}}$$

$$= e^{\frac{1-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{1-x^2}{2}}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1-x^2}{2}}}_{>0} \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0}$$

≥ 0 for $x \in [-1,1]$ og 0 bare i endepunktene

$\Downarrow$

f er strengt voksende på $[-1,1] \Rightarrow f$ er injektiv på $[-1,1]$.

Finn def. området til den omvendte funksjonen g:

$$D_g = V_f = \{ f(x) : x \in [-1,1] \} = \{ x e^{\frac{1-x^2}{2}} : x \in [-1,1] \} = [-1,1]$$

$\boxed{\text{Def. 7.4.2}}$

f er kont. og strengt voksende: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y)[g'(y)]^2$$

Husk: $g'(1) = \frac{1}{f'(x)}$ der $1 = f(x)$
$\Downarrow$
$x = 1$ hvis $f'(1) \neq 0$:

Nå viser det seg at $f'(1) = 0$, så $g'(1)$ er ikke def. Likevel er $\lim_{y \to 1^-} g'(1) = \infty$ (siden $f'(1) = 0$ og pga Thm. 7.4.6).

Derfor er:

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y)(g'(y))^2 \underset{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{y \to 1^-} \frac{1-y}{\frac{1}{[g'(y)]^2}}$$

$$\underset{\frac{0}{0} \text{ l'Hôpital}}{=} \lim_{y \to 1^-} \frac{-1}{2 f'(x) f''(x)} = \infty$$

Når $y = 1 = f(x)$
er $x = 1$
$\Downarrow$
$f'(x) = 0$

$$\frac{1}{[g'(y)]^2} = \left(\frac{1}{g'(y)}\right)^2 \underset{\text{Thm } 7.4.6}{=} [f'(x)]^2$$ der $y = f(x)$.

7.6: Arcusfunksjonene

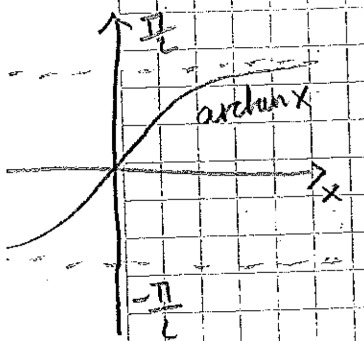
5.) $f(x) = x \arctan x$

a) Hvor er f voksende / avtagende?

$$f'(x) = \underbrace{\arctan x}_{\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} + \underbrace{x \frac{1}{1+x^2}}_{\geq 0 \text{ for } x \geq 0}$$

≥ 0 for $x \geq 0$

≤ 0 for $x \leq 0$



$f'(x)$ – – – – – – 0 ______

f avtagende $\qquad$ f voksende

Så f er avtagende i $(-\infty, 0]$ og voksende i $[0, \infty)$.

b) Hvor er f konveks/konkav?

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ overalt.}$$

$\Rightarrow$ f er konveks (overalt).

c) Asymptoter: Vertikale: f er definert og kont. overalt, så har ingen vertikale asymptoter

Skrå: 1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$.

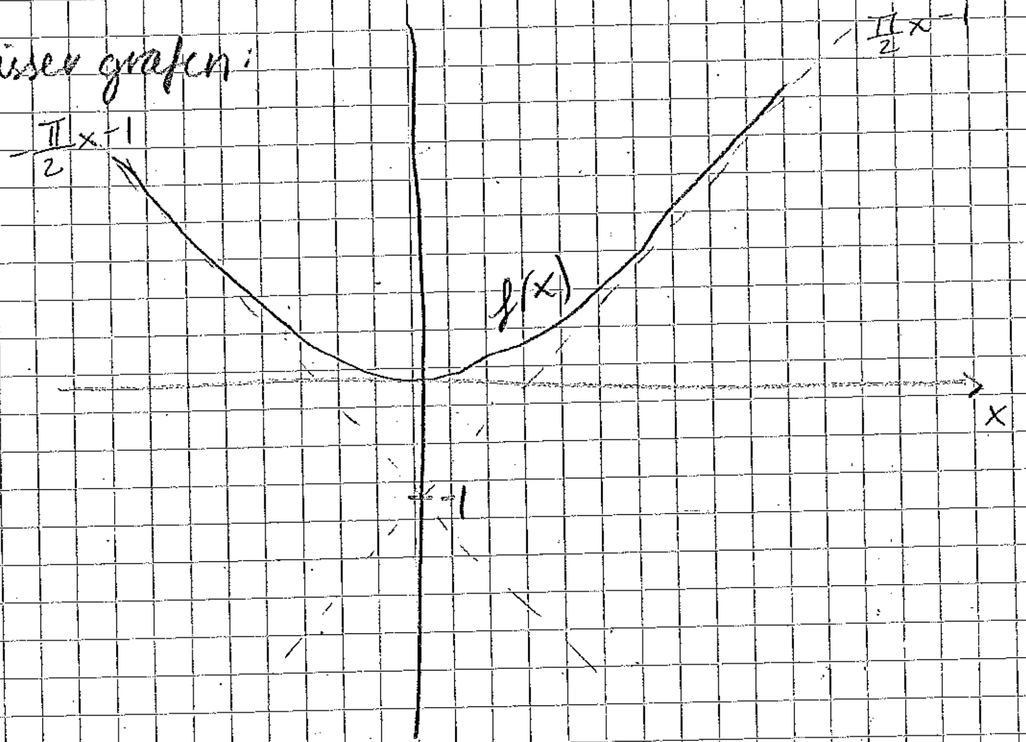
2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [x \arctan x \pm \frac{\pi}{2} x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\arctan x \pm \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$ = "$\frac{\infty}{\infty}$"; L'Hôpital

"$\frac{0}{0}$"; L'Hôpital $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$

Så f har asymptotene $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$.
(når $x \to \pm\infty$ hhv.)

Skisser grafen:



7.) a) Vis at $(*)$: $\frac{1+x}{1+x^2} = 2\arctan x$ har en reell løsning $x = x_0$ og at

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < x_0 < 1.$$

La $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, $g(x) = 2\arctan x$. Dette er kontinuerlige, overalt definerte funksjoner. Se på $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Desuten er $f(1) = 1$, $g(1) = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(1) < g(1)$

Fra skjæringssetningens korollar fins $x_0 \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ s.a. $f(x_0) = g(x_0)$, dvs. at ligningen $(*)$ har en reell løsning $x_0 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

Vil vise at dette er den eneste reelle løsningen:

Se på $h(x) = \frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x$

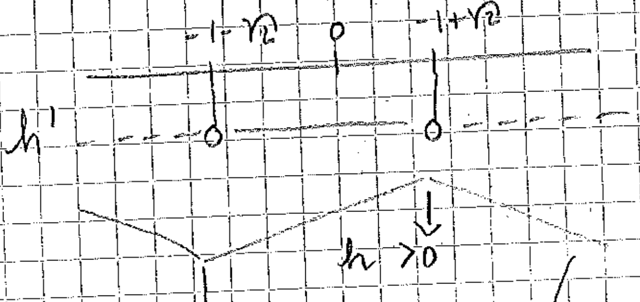
$$h'(x) = \frac{1(1+x^2) - (1+x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -1 \mp \sqrt{2}$$

sjekker fortegn: $h'(0) = 1 > 0$ $\quad h'(-3) = \frac{1+6-9}{(1+9)^2} = \frac{-2}{100} < 0$

$$h'(1) = \frac{1-2-1}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$



$h(-1-\sqrt{2}) > 0$ $\quad$ strengt avtagende

$\Downarrow$

Kun ett nullpunkt!

b) $\varphi(x) := \frac{\arctan x}{(1+x)^2}$ (ikke def. i -1) $\hookrightarrow$ går mot $-\infty$

Hvor er φ strengt voksende og avtagende?

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x)^2 - \arctan x \, 2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x}{(1+x)^3}$$

$\varphi'(x_0) = 0$ fra a), φ' er ikke def i $x = -1$.

og dette er eneste stedet der $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi'(-2) < 0$, $\varphi'(0) \geq 0$, $\varphi'(1) < 0$

$\Downarrow$ $\varphi' \leq 0$ på $(-\infty, -1)$

$\Downarrow$ $\varphi' \geq 0$ på $(-1, x_0]$

$\Downarrow$ $\varphi' \leq 0$ på $[x_0, \infty)$

$\Downarrow$

φ er avtagende på $(-\infty, -1)$ og $[x_0, \infty)$ og voksende på $[-1, x_0]$.

Ser at x_0 må være globalt max hvis ikke φ blir stor mot $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$$

$$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} > 0 \quad (\text{siden } x_0 > 0)$$

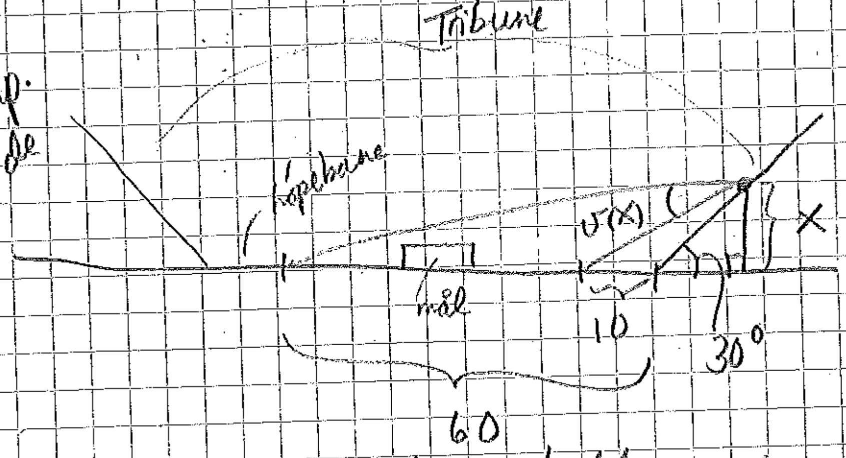
$\Downarrow$

$$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} \text{ er globalt max.}$$

Merk: $$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} \overset{(a)}{=} \frac{\frac{1+x_0}{2(1+x_0^2)}}{(1+x_0)^2}$$

$$= \frac{1+x_0}{2(1+x_0^2)(1+x_0)^2} = \underline{\frac{1}{2(1+x_0^2)(1+x_0)}}$$

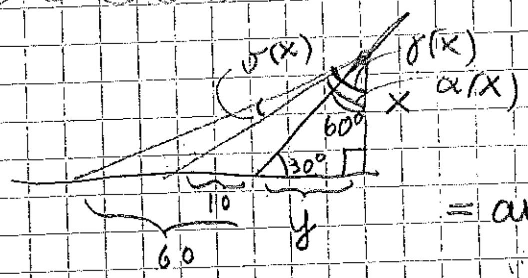
15) A og E på fotballkamp. Hvor skal de sitte?



A: Hvis de sitter x m over ballen er

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$$

a) Hvordan finne formel?



$\tan 60° = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$

$v(x) = \gamma(x) - \alpha(x)$

$= \arctan\left(\frac{60+y}{x}\right)$

$- \arctan\left(\frac{10+y}{x}\right)$

$= \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$

$30°$ $60°$

$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

b) $v'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{-60}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\left(-\frac{10}{x^2}\right)$

$= -\frac{10}{x^2}\left[\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\right]$

c) $\max_x v(x)$: $v'(x) = 0$

$\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}$

$6\left(1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2\right) = 1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2$

$6 + 6\left(\frac{100}{x^2} + 2\sqrt{3}\frac{10}{x} + 3\right) = 1 + \frac{3600}{x^2} + 2\sqrt{3}\frac{60}{x} + 3$

$\cancel{6} + \frac{600}{x^2} + \cancel{\frac{120\sqrt{3}}{x}} + 18 = \cancel{4} + \frac{3600}{x^2} + \cancel{\frac{120\sqrt{3}}{x}}$

$2\cancel{0} = \frac{300\cancel{0}}{x^2}$

$x^2 = 150$

$x = \underline{\sqrt{150}}$ (må ha pos. høyde)