UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Torsdag 12. januar 2017
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) La $f(x, y, z) = x(\cos y)e^z$. Gradienten $\nabla f(1, 0, 1)$ til f i punktet $(1, 0, 1)$ er:

A) $(0, 0, 0)$
B) $(1, 0, 0)$
C) $(1, 1, 0)$
D) $(e, 0, e)$
E) $(1, 1, e)$

Oppgave 2. (3 poeng) Arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (10, 11)$ og $\mathbf{b} = (1, 7)$ er:

A) 59
B) 28
C) 81
D) 87
E) 29

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en funksjon. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Hvis $f''(0)$ fins, så er f kontinuerlig
B) Hvis f er kontinuerlig, så fins $f''(0)$
C) Hvis $f'(0)$ fins, så er f kontinuerlig
D) Hvis $f'(0)$ fins, så fins $f''(0)$
E) Hvis $f''(0)$ fins, så fins $f'(0)$

Oppgave 4. (3 poeng) Substitusjonen $u = \arcsin x$ bringer integralet

$$\int x \arcsin x \, dx$$

over til:

A) $\int u \sin u \, du$
B) $(1/2) \int u \sin 2u \, du$
C) $\int u \sin 2u \, du$
D) $\int \frac{\sin u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$
E) $\int \frac{u \sin u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$

Oppgave 5. (3 poeng) Et fly flyr rett frem i konstant høyde 10 km med konstant hastighet 900 km/h. Det passerer rett over et radiofyr på bakken. Hvor fort øker avstanden mellom flyet og radiofyret når flyet har beveget seg 5 km horisontalt bort fra punktet rett over fyret?

A) 850 km/h
B) 450 km/h
C) $900/\sqrt{5}$ km/h
D) $900/\sqrt{3}$ km/h
E) $900/\sqrt{2}$ km/h

Oppgave 6. (3 poeng) La $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Hvilket utsagn er sant:

A) $M^2 = \begin{pmatrix} 49 & 1 \\ 36 & 1 \end{pmatrix}$
B) Determinanten til M er 0
C) Determinanten til M^2 er 0
D) $M^3 = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 58 & 22 \end{pmatrix}$
E) Determinanten til M^3 er 1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. (3 poeng) La $a > 0$. Volumet av omdreiningslegemet som fås når grafen til $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ på intervallet $[0, a]$ dreies om x-aksen, er lik:

A) $\pi/2$
B) $\pi/(1+a^2)$
C) $\pi(1-a^2)$
D) $\pi \arctan(1+a^2)$
E) $(\pi/2)\ln(a^2+1)$

Oppgave 8. (3 poeng) La k være et reelt tall. Hvilket utsagn om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+k}}\,dx$$

er sant:

A) Integralet diverergerer for alle $k > 0$
B) Integralet konvergerer for alle $k > 0$
C) Integralet konvergerer for alle $k > 1$ og divergerer for alle $k < 1$
D) Integralet konvergerer for alle $k < 1$ og divergerer for alle $k > 1$
E) Integralet konvergerer for alle $k < 0$

Oppgave 9. (3 poeng) Det finnes konstanter A, B, C, D og E slik at brøken

$$\frac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2}$$

kan spaltes opp slik:

A) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+x+1} + Cx^2 + Dx + E$

B) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

C) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

D) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^3} + \dfrac{Bx+C}{x^2} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

E) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x(x^2+x+1)^2} = Ax + B + \dfrac{C}{x} + \dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$

Oppgave 10. (3 poeng) La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være en funksjon. Hvilket av følgende utsagn kan brukes som definisjon av at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$:

A) For alle $M > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|x| < \delta$, så er $f(x) > M$
B) For alle $\epsilon > 0$ fins N slik at hvis $x < N$, så er $|f(x)| > \epsilon$
C) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $x < \delta$, så er $f(x) < \epsilon$
D) For alle $M < 0$ fins N slik at hvis $x < N$, så er $f(x) > M$
E) For alle $M > 0$ fins N slik at hvis $x < N$, så er $f(x) > M$

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11. (10 poeng) Finn femterøttene til det komplekse tallet

$$z = e^{i(5\pi/3)}$$

(Det holder at du skriver røttene på formen $re^{i\theta}$.)

Oppgave 12. (10 poeng) La x være et reelt tall. Finn ut hvilken verdi av x som gir størst verdi for determinanten

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x^3 \\ 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 13.

a) (10 poeng) Finn integralet

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$$

b) (10 poeng) Finn integralet

$$\int x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$$

Oppgave 14. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) & \text{for } x > 0 \\ \pi/2 & \text{for } x = 0 \\ \pi + \arctan(1/x) & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

a) (10 poeng) Vis at f er kontinuerlig i 0.

b) (10 poeng) Avgjør om f er deriverbar i 0, og finn $f'(0)$ hvis den eksisterer.

c) (10 poeng) Finn volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til f på intervallet $[1, \sqrt{3}]$ roteres om y-aksen.

SLUTT