UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus-prøveeksamen
Eksamensdag:	27. november 2010.
Tid for eksamen:	10:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen innholder 7 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt, eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hver av de 5 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunnne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Del 1

Oppgave 1. (3 poeng). Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^3 y^2) \text{ er:}$$

A $3x^2y^2$
✓**B** $3/x$
C $3x^2/y^2$
D $3xy^2$
E $3y^2/x$

Oppgave 2. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz + x^2,$$

vokser i punktet $(1, 1, -1)$ raskest i retningen

A $(1, 1, 1)$
B $(-1, 1, -1)$
✓**C** $(1, -1, 1)$
D $(0, 0, 2)$
E f vokser ikke i $(1, 1, -1)$

Oppgave 3. (3 poeng). Arealet av trekanten med hjørner $(-2, 2)$, $(1, 1)$ og $(-1, 2)$ er

A $3/2$
B 1
✓**C** $1/2$
D 0
E $-1/2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4. (3 poeng). Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ er:}$$

A $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✓**C** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 5. (3 poeng). Volumet til rotasjonslegemet som framkommer ved å rotere området $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{x}$ om y-aksen er

A π

✓**B** $4\pi/5$

C $3\pi/5$

D $2\pi/5$

E $\pi/5$

Oppgave 6. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x) = x - \ln(|x|)$$

A er konveks på $\mathbb{R}$

B er større enn x for alle x

C er mindre enn x for alle x

✓**D** er konveks på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$

E har asymptote $y = x + 1$ når $x \to \infty$

Oppgave 7. (3 poeng). Følgen gitt ved $a_0 = \pi$,

$$a_{n+1} = \frac{4 + a_n}{1 + a_n} \quad \text{for } n > 0, \text{ er konvergent.}$$

Da blir grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A e

B π

✓**C** 2

D 1

E 0

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Oppgave 8. (10 poeng). Finn alle røttene i polynomet

$$F(z) = z^3 - 3z^2 + 5z - 3,$$

og skriv $F(z)$ som et produkt av to reelle polynomer $P(z)$ og $Q(z)$, der $P(z)$ er et førstegradspolynom, og $Q(z)$ et andregradspolynom.

Løsningsforslag: Siden dette er en eksamensoppgave, så prøver vi om $z = 1$ er en rot... og det er det! Altså er $P(z) = z - 1$. Da får vi at $F(z) : (z-1) = z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2 = Q(z)$. Vi ser at Q har røtter $1 \pm i\sqrt{2}$, så da har vi alle røttene $\{1, 1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}$.

Oppgave 9. (10 poeng). Hvilke punkter i det komplekse planet har $|z| \leq \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$?

Løsningsforslag: For det første er $0 \leq |z|$, slik at dersom $z = x + iy$, så må $y \geq -x$. Vi har at $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$ eller $2xy \geq 0$. Tilsammen har vi at $y \geq -x$ og $xy \geq 0$, dette er tilfredsstilt dersom (x, y) ligger i første kvadrant, mao. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Oppgave 10. (10 poeng). Regn ut integralet

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Løsningsforslag: Vi får at

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Oppgave 11. (10 poeng). La A være en $n \times n$ matrise slik at $A^2 = \mathbf{0}$ (null matrisen). Vis at da er $(I_n - A)^{-1} = (I_n + A)$.
Vis videre at

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

tilfredstiller $A^2 = \mathbf{0}$ og regn ut

$$\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Løsningsforslag: Vi bruker at $A^2 = \mathbf{0}$ og skriver

$$I = I - A^2 = (I + A)(I - A),$$

dermed må $(I - A)^{-1} = (I + A)$. For 2×2 matrisen får vi

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tilslutt ser vi at matrisen vi skal regne ut inversen til er $I - A$, slik at inversen blir

$$I + A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 12. (10 poeng, men vanskelig). La f være en kontinuerlig deriverbar funksjon som tilfredstiller:

i) $f(y) = y$ for et tall y,

ii) $f'(x) > 0$ for alle x, og

iii) $f(x) < x$ for alle $x > y$.

La $a_0 > y$ og definér en følge $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ved at $a_n = f(a_{n-1})$ for $n \geq 1$. Vis at $\lim_{n\to\infty} a_n = y$.

Løsningsforslag: Vi må vise at følgen er konvergent, og at grensen blir y. For å vise konvergens, kan vi prøve å vise at a_n er nedtil begrenset av y, og avtagende. I så fall vil følgen konvergere, sett $a = \lim a_n$, og a vil tilfredstille $a = f(a)$, som impliserer at $a \leq y$, altså må $a = y$.
Vi har at $a_0 > y$, jeg ønsker å bruke induksjon til å si at $a_n > y$. Anta $a_{n-1} > y$, da har vi

$$a_n - y = f(a_{n-1}) - f(y) = f'(c)(a_{n-1} - y),$$

ved Rolles teorem, og $c \in (y, a_{n-1})$. Derfor blir høyresiden positiv, og $a_n > y$ for alle n. Videre har vi at $a_n = f(a_{n-1}) < a_{n-1}$ pga. iii) over. Altså konvergerer følgen mot y.

SLUTT