Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 5

I kapittel 5 har mange av oppgavene et mer teoretisk preg enn du er vant til fra skolematematikken, og jeg har derfor lagt vekt på å lage løsningsforslag til oppgaver som involverer de formelle definisjonene av kontinuitet (kap 5.1) og grenseverdi (kap 5.4), og som illustrerer hvordan man kan anvende skjæringssetningen (kap 5.2) og ekstramalverdisetningen (kap 5.3) på ulike måter.

Oppgave 5.1.5

Vi minner om at funksjonen f er kontinuerlig i punktet $a \in D_f$ hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x-a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

a) Vi skal vise at $f(x) = 2x + 1$ er kontinuerlig i punktet $x = 2$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x-2| < \delta \implies |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

Vi har

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |(2x+1) - (2\cdot 2 + 1)| \\ &= |2x + 1 - 5| \\ &= 2|x-2| \end{aligned}$$

Velger vi nå $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, blir

$$|f(x) - f(2)| = 2|x-2| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

når $|x-2| < \delta$.

b) Vi skal vise at $f(x) = x^2$ er kontinuerlig i punktet $x = 3$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x-3| < \delta \implies |f(x) - f(3)| < \varepsilon$$

Funksjonsdifferensen kan skrives slik:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(3)| &= |x^2 - 3^2| \\ &= |(x+3)(x-3)| \\ &= |x+3||x-3| \end{aligned}$$

For å holde faktoren $|x+3|$ under en fast skranke velger vi å begrense oss til intervallet $(2,4)$, hvor $|x-3| < 1$, slik at $|x| < 4$ og dermed

$|x+3| < 7$. Hvis vi i tillegg sørger for at faktoren $|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$, får vi ialt

$$|f(x) - f(3)| = |x+3||x-3| < 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Dette blir følgelig oppfylt for alle x slik at $|x-3| < \delta$ dersom vi velger $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7})$.

e) Vi skal vise at $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig i punktet $x = 1$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x-1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Funksjonsdifferensen kan skrives slik:

$$|f(x) - f(1)| = \left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}$$

For at denne skal bli mindre enn ε når x ligger i en δ-omegn om 1, må vi sørge for at x holder seg unna origo. Dette kan vi få til ved først å velge $\delta_1 = \frac{1}{2}$. Da blir $|x| > \frac{1}{2}$ dersom $|x-1| < \delta_1$, slik at

$$|f(x) - f(1)| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$$

Sørger vi samtidig for at $|x-1| < \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, får vi videre at

$$|f(x) - f(1)| < 2|x-1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Setter vi derfor $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$, har vi nå ialt vist at $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ for alle x slik at $|x-1| < \delta$.

Oppgave 5.1.6a

Vi skal vise at

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

er diskontinuerlig i punktet $x = 0$. Velger vi nemlig en ε slik at $0 < \varepsilon < 1$, vil $f(x) = x + 1 > (\varepsilon - 1) + 1 = \varepsilon$ for alle $x \in (\varepsilon - 1, 0)$. Men det betyr at $|f(x) - f(0)| = f(x) > \varepsilon$ for alle x i dette intervallet. Uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$ vil det derfor finnes en x (faktisk uendelig mange) i intervallet $(-\delta, \delta)$ slik at $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$. Altså er funksjonen diskontinuerlig i punktet $x = 0$.

Oppgave 5.2.2a

Vi skal vise at $f(x) = \ln x + x$ har nullpunkt i intervallet $(0,1)$. Siden $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, kan vi finne en x_0 i intervallet $(0,1)$ slik at $f(x_0) < 0$. Vi kan for eksempel velge $x_0 = 1/e$, som gir $f(1/e) = (-\ln e) + 1/e = -1 + 1/e < 0$. Siden $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$, og funksjonen f er kontinuerlig i intervallet $[\frac{1}{e}, 1]$, følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(\frac{1}{e}, 1)$ og dermed også i det større intervallet $(0,1)$.

Oppgave 5.2.3b

Vi skal vise at grafene til $f(x) = \sin x$ og $g(x) = x^3$ skjærer hverandre i intervallet $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. I endepunktene av intervallet har f og g verdiene

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 < \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} < \frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} < 1, \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 > 1$$

Siden $f(\frac{\pi}{6}) > g(\frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{3}) < g(\frac{\pi}{3})$ og begge funksjonene er kontinuerlige i intervallet $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, så må grafene skjære hverandre ved korollar 5.2.2 i Kalkulus.

Oppgave 5.2.4

La $f(x) = \tan x$ og $g(x) = x$. Da har vi

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > \frac{\pi}{4} = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 < \frac{3\pi}{4} = g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Vi ser av en figur (tegn grafen selv!) at det *ikke* finnes noe tall $c \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ slik at $f(c) = g(c)$. Dette er likevel ikke i strid med korollar 5.2.2, da funksjonen f ikke er kontinuerlig i intervallet (den er diskontinuerlig for $x = \frac{\pi}{2}$).

Oppgave 5.2.6

Vi skal vise at ethvert polynom av odde grad har minst én reell rot. La

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_0 \\ &= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) \end{aligned}$$

være et polynom av grad n, det vil si at $a_n \neq 0$. Hvis n er et oddetall, vil faktoren x^n i uttrykket ovenfor skifte fortegn med x. For tilstrekkelig store verdier av $|x|$ vil faktoren i parentes ha samme fortegn som det første leddet a_n, idet de øvrige leddene i parentesen går mot null når $|x|$ vokser. Det finnes derfor et (stort) tall $x_0 > 0$ slik at $f(x_0)$ og $f(-x_0)$ har motsatte fortegn. (De behøver ikke derfor være motsatt like store.) Siden funksjonen f er kontinuerlig på intervallet $[-x_0, x_0]$, har den et nullpunkt i intervallet $(-x_0, x_0)$ ifølge skjæringssetningen.

Oppgave 5.2.7

En fjellklatrer starter fra bakken klokken 7 og når toppen klokken 15. Neste dag starter hun nedstigningen klokken 7 og er nede klokken 15.

a) Vi skal vise at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager. Vi lar fjellets høyde være H. Vi lar så $f(t)$ stå for klatrerens høyde over bakken ved et klokkeslett t under oppstigningen og $g(t)$ høyden under nedstigningen. Begge funksjonene er kontinuerlige, og siden $f(7) = 0 < H = g(7)$ og $f(15) = H > 0 = g(15)$, må funksjonsgrafene skjære hverandre for en verdi $t_0 \in (7, 15)$ ifølge korollar 5.2.2 til skjæringssetningen. Det betyr at hun er like høyt oppe ved klokkeslettet t_0 begge dager.

b) Nå antar vi at hun begynner nedstigningen klokken 10 i steden for 7, og at hun er nede klokken 16. Siden hun ikke er oppe før klokken 15 den første dagen, må $f(10) < H = g(10)$. Og siden hun når toppen klokken 15, er hun der klokken 16 også, så vi må ha $f(16) = H > 0 = g(16)$. På samme måte som i punkt a) kan vi derfor trekke den konklusjon at hun også i dette tilfelle er like høyt oppe ved et klokkeslett $t_1 \in (10, 16)$ begge dager.

Oppgave 5.2.8

Vi skal vise at en kontinuerlig funksjon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ har et fikspunkt, det vil si at det finnes en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = x$.

La $g : [0, 1] \to [0, 1]$ være identitetsfunksjonen $g(x) = x$. Siden f antar verdier i intervallet $[0, 1]$, har vi at $f(0) \geq 0 = g(0)$ og $f(1) \leq 1 = g(1)$. Da f (og g) er kontinuerlige, finnes det ved korollar 5.2.2 en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = g(x)$, altså $f(x) = x$.

Oppgave 5.3.2

a) Siden $g(x) = x$ er kontinuerlig for alle x, blir $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}$ kontinuerlig for alle $x \neq 0$ ifølge setning 5.1.2. Funksjonen f er dermed kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde (så f er kontinuerlig ifølge definisjon 5.1.8).

b) Siden $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, er ikke funksjonen begrenset på intervallet $[-1,1]$ og har dermed ingen maksimums- eller minimumspunkter. Dette strider ikke mot ekstremalverdisetningen, siden f ikke er definert for $x = 0$, og dermed ikke er definert på hele intervallet $[-1,1]$.

Oppgave 5.3.4

Vi antar at $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig og at grenseverdiene av $f(x)$ når x nærmer seg a ovenfra og b nedenfra eksisterer. Vi skal vise at f er begrenset. Siden $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to b^-} f(x)$ eksisterer, kan vi utvide f til en kontinuerlig funksjon definert på det lukkede intervallet $[a,b]$ slik at $f(a) = \lim_{x\to a^+} f$ og $f(b) = \lim_{x\to b^-} f$. Dermed kan vi benytte ekstremalverdisetningen som sikrer at f har maksimums- og minimumsverdi(er) på $[a,b]$. Dette betyr at f er begrenset på $[a,b]$, og dermed også begrenset på det mindre intervallet (a,b).

Oppgave 5.3.5

Anta at $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig. Vi skal vise at verdimengden $V_f = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ er et lukket, begrenset intervall.

Vi viser at V_f er lik det lukkede, begrensede intervallet $[f_{\text{min}}, f_{\text{max}}]$ ved å vise inklusjon begge veier.

Inklusjonen $V_f \subseteq [f_{\text{min}}, f_{\text{max}}]$ er oppfylt per definisjon av minimum og maksimum. På den annen side sikrer ekstremalverdisetningen at den kontinuerlige funksjonen f oppnår sitt minimum og maksimum på det lukkede, begrensende intervallet $[a,b]$, så f_{min} og f_{max} er med i V_f. Og skjæringssetningen sikrer oss at alle verdier d mellom f_{min} og f_{max} også er med i V_f: Den kontinuerlige funksjonen $g(x) = f(x) - d$ er jo negativ i minimumspunktet til f og positiv i maksimumspunktet, og har derfor et mellomliggende nullpunkt c. Men det betyr nettopp at $f(c) = d$. Dermed har vi også vist den omvendte inklusjonen $V_f \supseteq [f_{\text{min}}, f_{\text{max}}]$.

Oppgave 5.4.2

a) Vi skal vise at $\lim_{x\to 2} 3x = 6$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi produsere en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-2| < \delta$ så er $|3x-6| < \varepsilon$. Dette oppnår vi ved å velge $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, idet vi da får $|3x-6| = 3|x-2| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

b) Vi skal vise at $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi produsere en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-3| < \delta$ så er $|x^2-9| < \varepsilon$. La $h = x-3$. Da er $x = h+3$, slik at vi får

$$|x^2 - 9| = |(h+3)^2 - 9| = |h^2 + 6h + 9 - 9| = |h||h+6|$$

Her ser vi at den andre faktoren $|h+6|$ holder seg mindre enn 7 dersom vi velger $|h|<1$. Sørger vi samtidig for at den første faktoren $|h|$ er mindre enn $\frac{\varepsilon}{7}$, vil produktet holde seg mindre enn ε. Begge disse kravene blir oppfylt dersom vi velger $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7})$. For hvis $|h| = |x-3| < \delta$, så er $|x^2-9| = |h||h+6| < \delta \cdot 7 = \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$.

c) Vi skal vise at $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-4| < \delta$ så er $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$. Ved hjelp av tredje kvadratsetning ser vi at

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{|x-4|}{2}$$

Velger vi $\delta = 2\varepsilon$, ser vi at hvis $|x-4| < \delta$ så er

$$|\sqrt{x}-2| < \frac{|x-4|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Oppgave 5.4.3

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{7x^2+4x^4}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7+4x^2}{3x-2} = \frac{7+0}{0-2} = \underline{\underline{-\frac{7}{2}}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+2x+7}{\sqrt{x}-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-4} = \frac{8+0+0}{0-4} = \underline{\underline{-2}}$$

c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

Oppgave 5.4.4a

Vi skal avgjøre om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{for } x \leq 1 \\ -4\cos(\pi x) & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

er kontinuerlig i punktet $x = 1$. Vi ser på de ensidige grensene

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -4\cos(\pi x) = -4\cos\pi = 4$$

Siden $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, eksisterer ikke den tosidige grensen $\lim_{x \to 1} f(x)$, så funksjonen f er ikke kontinuerlig i $x = 1$.