MAT1100 - Grublegruppen
Uke 37

Jørgen O. Lye

Bemerkning: Mye av stoffet i dette notatet er å finne i Kalkulus, kapittel 12. Dette kapittelet er leselig etter man vet hva følger er, men er ikke pensum før i MAT1110.

Følger og rekker

Husk at en følge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eller $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ av tall sies å konvergere til et punkt x eller z dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at $|x_n - x| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. For det komplekse tilfellet ser vi på $|z_n - z|$ med den komplekse avstandsfunksjonen, nemlig at hvis $z = x + iy$ og $w = a + ib$ så er $|z - w| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Vi kommer i dette notatet til å holde oss til $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, men definisjonene over generaliserer til $\mathbb{R}^n$: hvis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ så er avstanden definert som $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

Hvis man har en følge $\{x_j\}$, enten reell eller kompleks, kan man danne seg en ny følge, nemlig ved å definere

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$$

Grensen, hvis den finnes, kalles en rekke, og skrives som regel bare

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$$

Det er ikke uvanlig å tenke på dette som en "uendelig sum", men den faktiske definisjonen er ved å se på følgen av delsummer, slik som over.

Funksjonsfølger

Oppsettet over sier at du skal være gitt en følge tall $\{x_n\}$. Hvis du derimot har en følge hvor hvert element er en funksjon $f_n(x)$, så vil du for hver x ha en følge med tall. Dette overføres til rekker på samme måte som over.

Eksempel

Det kanskje mest kjente eksempelet er ved å la $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Hvis man så definerer $S_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ så får man at $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x$ hvor siste likhet er en definisjon av e^x. Det som menes med grensen over er som sagt at gitt et punkt a, enten reelt eller komplekst, og en $\epsilon > 0$, så kan man summere mange nok ledd til at

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} - e^x \right| < \epsilon$$

Konvergenstest for rekker med positive tall

Vi kommer til å få bruk for 2 tester for å avgjøre konvergens. Den første kalles integraltesten, formulert på side 632 i Kalkulus. Det vi skal bruke den til er å argumentere at følgende er sant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} < \infty \text{ for s>1} \\ = \infty \text{ for } s \leq 1 \end{cases}$$

Den andre kalles forholdstesten, og er å finne på side 638 i Kalkulus. Den sier at hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ så konvergerer rekken. Dette forutsetter at alle leddene er positive.

Konvergenstest for rekker av funksjoner

Følgende kalles Weierstrass' M-test. Gitt en følge funksjoner $f_n(x)$, reelle eller komplekse, og anta det finnes tall M_n slik at $|f_n(x)| \geq M_n$ for alle x og alle n. Anta også at $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ til en funksjon $f(x)$. Hvis hver $f_n(x)$ er kontinuerlig, så er $f(x)$ også kontinuerlig.

Eksempel

La $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ igjen, tenkt på funksjoner fra enten $(-R, R) \subset \mathbb{R}$ eller $D(0, R) \subset \mathbb{C}$, hvor $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, dvs en disk med radius R. Da er uansett $|f_n(x)| \leq \frac{R^n}{n!} = M_n$. Hvis vi så bruker testen over ser vi at

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{\frac{R^n R}{n! \cdot (n+1)}}{\frac{R^n}{n!}} = \frac{R}{n+1}$$

For alle R vil $\frac{R}{n+1} \to 0$ når $n \to \infty$. Da vet vi ved testen over at $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergerer, så Weierstrass' M-test sier at $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergerer. Hver $f_n(x)$ er kontinuerlig, så $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer til en kontinuerlig funksjon. Siden dette gjelder komplekse og reelle tall, kan man bytte ut x med ix og få rekkene til sinus og cosinus. Da vet man at disse rekkene også konvergerer, og at sinus og cosinus er kontinuerlige.

Potensrekker

Sannsynligvis den mest brukte formen på rekker er potensrekker, hvor en ikke lar $f_n(x)$ være vilkårlige, men krever at $f_n(x) = c_n(x-a)^n$, hvor c_n er konstanter. Rekken i eksempelet over var en potensrekke, og Taylor-rekker er alltid potensrekker. Potensrekker har en del nyttige egenskaper. Først må man si noe om konvergens.

Konvergensradius

Gitt en potensrekke finnes det et tall R slik at når $|x-a| < R$ så konvergerer rekken til en kontinuerlig funksjon, mens for $|x-a| > R$ så divergerer rekken. $R = 0$ og $R = \infty$ er begge tillatt. R kalles rekkens konvergensradius. Definisjonen er den samme om man jobber med komplekse eller reelle tall. Man finner typisk konvergensradius ved hjelp av forholdstesten. I eksempelet med $f(x) = e^x$ kan man vise at $R = \infty$. Dvs rekken konvergerer for alle x.

Egenskaper

Det er 2 viktige egenskaper potensrekker har, nemlig at man kan derivere og integrere leddvis:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} c_n(x-a)^n$$

og

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n \, dx$$

Dette er ikke så åpenbart som det kanskje ser ut. Det stemmer for alle delsummene, dvs endelige summer. Men både derivasjon og integrasjon er definert ved hjelp av grenser, og det som står over er at man for potensrekker kan bytte rekkefølgen av grensen som definerer integralet/den deriverte, og grensen som definerer rekken. Dette er ikke sant for alle rekker, men det er sant for potensrekker!

Formulering av dette med bevis står på side 669 og 670 i Kalkulus.

Spesielle funksjoner

Når man har fått på plass teorien om rekker er det bare å starte å definere funksjoner. Hvis man vil unngå geometri kan man f.eks. definere sinus og cosinus ved hjelp av rekkene sine, uten å si noe som helst om trekanter. Å definere funksjoner ved følger er en veldig vanlig måte å skaffe seg funksjoner, enten til teoretisk arbeid eller til numeriske formål.

Gamma-funksjonen

For $s > 0$ kan vi definere

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

Man kan bruke delvis-integrasjon og vise at

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Siden også $\Gamma(1) = 1$ får man at for heltall så er $\Gamma(n) = (n-1)!$

Γ-funksjonen er altså en generalisering av fakultet. Videre er det ingenting som hindrer en i å bruke kompleks s, så lenge Re(s)>0. Slik at funksjonen også utvider fakultetsdefinisjonen til komplekse tall!

Hvis man vet at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, så kan man vise ta $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Med notasjonen over betyr dette at $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$.

Riemann-Zeta

Definer følgende funksjon for $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fra setning 12.2.4 på side 633 nevnt tidligere, vet vi at denne konvergerer. Denne kalles Riemann zeta-funksjonen. Den er berømt av 2 grunner. Den ene er observasjonen

$$\zeta(s) = \prod_{\text{p primtall}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Siden vi vet hvordan man opphøyer i komplekse tall er det ikke noe i veien for å utvide denne til mengden $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Analytisk utvidelse

Slik vi har skrevet ned definisjonen av funksjonene over får man divergens når realdelen blir mindre enn 0 eller 1 henholdsvis. Det kan man derimot komme seg unna, ved noe om kalles analytisk utvidelse. Nøkkelresultatet er det følgende, som vi kan bevise når vi har snakket om topologi senere:

Gitt en analytisk funksjon $f : U \to \mathbb{C}$ hvor $U \subset \mathbb{C}$, og et ønske om å utvide denne. Hvis man har 2 analytiske funksjoner F,G fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$, slik at hvis man restrikterer dem til U så er de lik den gitte funksjonen f, dvs. $F|_U = G|_U = f$. Disse kalles analytiske utvidelser. Da må $F = G$. Altså er en analytisk utvidelse unik.

$\Gamma(z)$ utvidet

Siden $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ kan man definere rekursivt $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ for å få med negative realdeler av z. Denne funksjonen vil bli uendelig (ha poler) ved alle negative heltall, men er ellers uproblematisk.

$\zeta(s)$ utvidet

Vi klarer kanskje etterhvert å bevise følgende formel:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Denne definerer $\zeta(s)$ for realdeler mindre enn 1. Faktisk fungerer den for alle $s \neq 1$.