Oppgaver

1. For hver funksjon, finn (a) hvor funksjonen f er definert og (b) om det finnes en kontinuerlig funksjon definert på hele $\mathbb{R}$ som er lik f der f er definert.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = 1$ hvis x er rasjonal

(iv) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

(v) $f(x) = \dfrac{x^2-a}{x^2+2ax+a^2}$ der a er et reelt tall.

2. (i) Anta at f tilfredsstiller $|f(x)| \leq |x|$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vis at f er kontinuerlig i 0.

(ii) Finn en slik f som ikke er kontinuerlig i noen andre punkter.

3. Finn en f slik at f ikke er noensteds kontinuerlig, mens $|f|$ er det overalt.

4. Anta at $f(x+y) = f(x)+f(y)$, og at f er kontinuerlig i 0. Vis at f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$.

5*. (i) Vis at hvis vi setter

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

så tilfredsstiller f følgende variant av skjæringssetningen:

> La $a < b$ være reelle tall. Hvis d ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$ finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = d$.

Husk fra en tidligere oppgave at f allikevel ikke er kontinuerlig.

(ii) Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredsstiller følgende egenskap:

> La $a < b$ være reelle tall. Hvis d ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$ finnes en og bare en $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = d$.

Vis at f er kontinuerlig.

(iii) Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredsstiller følgende egenskap:

> La $a < b$ være reelle tall. Hvis d ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$ finnes det endelig mange, og minst en, $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = d$.

Vis at f er kontinuerlig.