MAT 1100: Obligatorisk oppgave 2, H-10

Innlevering: *Senest torsdag 11. november, 2010, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller med datamaskin, men besvarelsen skal uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.*

Obligen skal leveres med en egen forside som du finner på
`www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v10/obliger.xml`

(det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På samme side finner du regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk!

Instruksjoner:
Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60 poeng (vekten til hver oppgave står på), og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

OBS: Dette oppgavesettet er vanskelig! Ikke gi opp av den grunn, dere har (eller bør ha) god tid, dere kan bruke alle hjelpemidler; internett, studenter som er kommet lengre i studiet, lærebøker etc. Dere kan tilogmed ringe noen venner...
Alle spørsmål vektes likt: 10 poeng. Full skår blir da 110 poeng.

Oppgave 1. Finn de ubestemte integralene:

(**a**)
$$\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx.$$

(**b**)
$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx.$$

Hint: Sett $u = \tan(x)$.

(**c**)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

(**d**)
$$\int \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Oppgave 2. Sett $f(x) = x^x$ for $x > 0$.

(**a**) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$ og avgjør bestem hvor f er konkav/konveks.

(**b**) Finn $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, og skissér grafen til f på intervallet $(0, 2)$. Hva er minste verdi for f på dette intervallet?

Oppgave 3. Gitt en to ganger deriverbar funksjon f som er slik at $f(\pi) = 2$, og
$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\sin(x)\,dx = 5.$$
Finn $f(0)$. Hint: Bruk delvisintegrasjon.

Oppgave 4. En funksjon $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved
$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt.$$

(**a**) Finn hvor f har lokale maks. og min. verdier. (Du skal ikke finne funksjonsverdiene.)

(**b**) Vis at $f(x) > 0$ for alle $x > 0$. (Hint: bruk delvisintegrasjon fram til et lokalt min. punkt.)

Oppgave 5. En funksjon $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt. \quad \text{(Ikke prøv å regne ut dette integralet!)}$$

(**a**) Vis at f har en inversfunksjon g.

(**b**) Vis at
$$g''(x) = \frac{3}{2}(g(x))^2.$$