Løsningsforslag uke 38, 2016

Teorem 5.2.1 (Skjæringssetningen)**.** *Anta at* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *er en kontinuerlig funksjon hvor* $f(a)$ *og* $f(b)$ *har motsatte fortegn. Da finnes det et tall* $c \in (a,b)$ *slik at* $f(c) = 0$.

Teorem 5.3.5 (Ekstremalverdisetningen)**.** *La* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har* f *både maksimums- og minimumspunkter.*

Oppgave 5.3.5. Anta at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Vis at verdimengden $V_f = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ er et lukket, begrenset intervall.

Løsning. Ekstremalverdisetningen sier at f har et minimumspunkt $x_{\min}$ og et maksimumspunkt $x_{\max}$. La $f_{\min} = f(x_{\min})$ og $f_{\max} = f(x_{\max})$. Per definisjon av ekstremalverdier har vi at $V_f \subseteq [f_{\min}, f_{\max}]$.

Hvordan viser vi at $V_f = [f_{\min}, f_{\max}]$? Det gjør vi ved å vise den omvendte inklusjonen, nemlig at $V_f \supseteq [f_{\min}, f_{\max}]$. Altså må vi vise at hvis $y \in [f_{\min}, f_{\max}]$, så er $y \in V_f$. Konkret betyr det at for hver $y \in [f_{\min}, f_{\max}]$ må vi vise at det finnes et tall $c \in [a,b]$ slik at $f(c) = y$.

Definer funksjonen $g(x) = f(x) - y$. Da er $g(x_{\min}) \leqslant 0$ og $g(x_{\max}) \geqslant 0$. Fra skjæringssetningen vet vi da at det finnes et punkt c slik at $g(c) = 0$. Det betyr at $f(c) = y$, som var det vi skulle vise. ■

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus
19. september 2016