Inverst Funksjonsteorem
MAT1100 – KALKULUS

Simon Foldvik
29. Oktober 2017

1. Introduksjon

Vi skal i dette dokumentet bevise en global og en lokal versjon av inverst funksjonsteorem i én variabel. Kort oppsummert handler disse teoremene om inversfunksjoner og hvordan de arver egenskaper fra de opprinnelige funksjonene, deriblant monotonisitet og deriverbarhet. Vi skal også studere hvordan, i disse tilfellene, de deriverte til inversfunksjonene kan uttrykkes ved de deriverte til de opprinnelige funksjonene.

Med inverst funksjonsteorem som verktøy skal vi definere og studere egenskaper ved elementærfunksjonene.[1] Spesielt skal vi se hvordan potens- og eksponentialfunksjoner, logaritmiske og trigonometriske funksjoner fremkommer, blant annet, som inversfunksjoner av kjente funksjoner og deretter studere noen av deres egenskaper.

Poenget her er ikke å vise egenskaper vi «allerede vet» om disse funksjonene på en mer komplisert måte; poenget er heller å gi en tilfredsstillende teoretisk redegjørelse for hvordan disse funksjonene kan defineres, og hvorfor de har de egenskapene de har. Dette gjøres tradisjonelt ved hjelp av rekkeutvikling, men vi skal av pedagogiske årsaker ikke benytte denne fremgangsmåten.

Innhold

2. Inverst Funksjonsteorem

2.1. **Terminologi.** I denne seksjonen skal vi utvikle den nødvendige terminologien for å kunne formulere og bevise de versjonene av inverst funksjonsteorem som er annonsert i innledningen.

[1]Materialet om elementærfunksjoner vil ikke bli behandlet i dette dokumentet, som kun inngår som pedagogisk supplement i emnet MAT1100 ved Universitetet i Oslo.

2.1.1. *Komposisjon.* Vi minner om at dersom X, Y og Z er mengder og $g\colon X \to Y$ og $f\colon Y \to Z$ er funksjoner, så er $f \circ g\colon X \to Z$ (*komposisjonen av f med g*; uttales «f ring g») funksjonen definert ved

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad (x \in X).$$

Følgende diagram illustrerer situasjonen:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Oppgave 2.1.1. Vis at komposisjon er assosiativt; det vil si at

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

for alle funksjoner f, g og h slik at komposisjonene over gir mening.

2.1.2. *Injeksjoner og Bijeksjoner.* La X og Y være to mengder. En funksjon $f\colon X \to Y$ kalles en *injeksjon*, eller sies å være *injektiv*, dersom det for hver $y \in Y$ finnes på det meste ett punkt $x \in X$ slik at $f(x) = y$. Med andre ord, f er injektiv dersom det for alle $u \in X$ og $v \in X$ er slik at $f(u) = f(v)$ medfører $u = v$.

Eksempel 2.1.1. La $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ være funksjonen definert ved $f(x) = x^2$ for $x > 0$. Dersom $0 < u < v$, er

$$f(u) = u^2 < v^2 = f(v),$$

slik at $f(u) < f(v)$. Dette viser at f er strengt voksende, og dermed at den er injektiv.

Definisjon 2.1.2 (Bijeksjon)**.** La X og Y være to mengder, og anta at $f\colon X \to Y$ er en funksjon. Man sier at f er en *bijeksjon*, eller f sies å være *bijektiv*, dersom det for alle $y \in Y$ finnes nøyaktig ett punkt $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Bemerkning. Funksjonen f fra Eksempel 2.1.1 er injektiv men ikke bijektiv. Dette har med å gjøre at det finnes punkter i $\mathbf{R}$ som ikke oppnås som noen funksjonsverdi av f.

I begrepet injektiv ligger det at «forskjellige punkter sendes til forskjellige punkter», men for at $f\colon X \to Y$ skal være en injeksjon, stilles det ikke noe krav om at det for alle $y \in Y$ faktisk skal eksistere et punkt $x \in X$ slik at $f(x) = y$; det er dette som skiller injeksjoner fra bijeksjoner.

Til tross for at injektive funksjoner ikke nødvendigvis er bijektive, finnes det en naturlig måte å danne en bijeksjon fra en injeksjon. La oss igjen betrakte en funksjon $f\colon X \to Y$; vi betegner dens verdimengde med

$$f(X) = \{f(x) \colon x \in X\}.$$

Dersom f er injektiv og vi definerer funksjonen $g\colon X \to f(X)$ ved

$$g(x) = f(x) \quad (x \in X),$$

er g en bijeksjon som «opererer» på samme måte som f. Vi kan med andre ord danne en bijeksjon fra en injeksjon ved å begrense *kodomenet*, og vi vil gjøre dette videre i dokumentet uten ytterlige kommentarer.

2.1.3. *Inversfunksjoner.* Anta at $f\colon X \to Y$ er en bijeksjon. Da kan man definere en funksjon $g\colon Y \to X$ på følgende måte: dersom $y \in Y$, la x være det entydige punktet i X slik at $f(x) = y$ (et slikt punkt x eksisterer og er entydig ettersom f er bijektiv), og sett $g(y) = x$.

Vi har følgende likheter for alle $x \in X$ og alle $y \in Y$:

$$g(f(x)) = x \quad \text{og} \quad f(g(y)) = y. \tag{1}$$

Dersom vi innfører funksjonene $\mathrm{id}_X : X \to X$ og $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ ved $\mathrm{id}_X(x) = x$ og $\mathrm{id}_Y(y) = y$, for alle $x \in X$ og alle $y \in Y$, kan likhetene i (1) uttrykkes ved

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{og} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

Av åpenbare grunner kaller man g *inversfunksjonen til* f, og man betegner den med $g = f^{-1}$. Følgende diagram illustrerer samspillet mellom f og dens invers:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

Bemerkning. Det er de bijektive funksjonene som har inversfunksjoner. Til tross for dette skal vi også tillate oss å snakke om inversfunksjoner av injektive funksjoner. For anta at $F\colon X \to Y$ er en injeksjon, og la $f\colon X \to F(X)$ være bijeksjonen indusert av F ved å begrense dens kodomene, slik som i siste avsnitt av Seksjon 2.1.2. Da har f en inversfunksjon $f^{-1}\colon F(X) \to X$, og vi skal omtale denne som inversfunksjonen til F og betegne den med F^{-1}.

Oppgave 2.1.2. Anta at X og Y er to mengder og at $f\colon X \to Y$ er en funksjon. Vis at f er en bijeksjon hvis og bare hvis det finnes en funksjon $g\colon Y \to X$ slik at

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{og} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y\,. \tag{2}$$

Vis videre at dersom $h\colon Y \to X$ og $k\colon Y \to X$ er to funksjoner som tilfredsstiller (2) (erstatt g), så er $h = k$.

Med andre ord, eksistensen av en funksjon g som tilfredsstiller (2) karakteriserer bijektive funksjoner fullstendig, og disse relasjonene karakteriserer også f^{-1}.

Oppgave 2.1.3. Anta at X og Y er mengder og at $f\colon X \to Y$ er en bijeksjon. Vis at da er også $f^{-1}\colon Y \to X$ en bijeksjon, og

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Hint. Bruk Oppgave 2.1.2.

Oppgave 2.1.4. Anta at X, Y og Z er mengder og at $g\colon X \to Y$ og $f\colon Y \to Z$ er bijeksjoner. Vis at da er også $f \circ g\colon X \to Z$ en bijeksjon, og

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Tolk dette ut ifra følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"'] & Z \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"'] \\
X & Y \arrow[l, "g^{-1}"] & Z \arrow[l, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

2.1.4. *Diffeomorfier.* Vi vil være spesielt interesserte i funksjoner som innehar en viss grad av «glatthet». Mer presist vil vi i hovedsak være interesserte i funksjoner som har kontinuerlige deriverte av første orden.

Med mindre noe annet er påpekt, vil vi i resten av dokumentet la $\mathcal{I}$ betegne et åpent og ikke-tomt intervall i $\mathbf{R}$. Vi tillater også at intervallet $\mathcal{I}$ er ubegrenset, for eksempel ved at det er lik $\mathbf{R}$ selv.

Definisjon 2.1.3 (Kontinuerlig Deriverbar Funksjon)**.** Anta at $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$ er et åpent intervall og at $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ er en funksjon definert på $\mathcal{I}$. Vi sier at f er *kontinuerlig deriverbar* dersom f er deriverbar og f' er en kontinuerlig funksjon på $\mathcal{I}$.

Vi betegner mengden av alle kontinuerlig deriverbare funksjoner på $\mathcal{I}$ med $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Dersom $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, er ikke f bare deriverbar, men den deriverte varierer jevnt (kontinuerlig) på $\mathcal{I}$.

I Seksjon 2.2 skal vi finne betingelser på $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ som sikrer at den er injektiv, at dens verdimengde $f(\mathcal{I})$ er et åpent intervall, og videre at $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(\mathcal{I}))$. En slik funksjon kalles en diffeomorfi.

Definisjon 2.1.4 (Diffeomorfi)**.** La $\mathcal{I}$ være et åpent intervall og anta at $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ er en funksjon. Vi sier at f er en *diffeomorfi av klasse* $\mathcal{C}^1$ dersom den er injektiv, dersom $f(\mathcal{I})$ er et åpent intervall, og dersom $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ og $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(\mathcal{I}))$.[2]

Med andre ord, en diffeomorfi av klasse $\mathcal{C}^1$ på $\mathcal{I}$ er en kontinuerlig deriverbar injeksjon hvis verdimengde er et åpent intervall og som har en kontinuerlig deriverbar inversfunksjon.

Oppgave 2.1.5. La $\mathcal{I} = \mathbf{R}$ og definér funksjonen $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Vis at f er deriverbar på $\mathcal{I}$, men at f' ikke er kontinuerlig i punktet 0.

Denne oppgaven viser at det finnes deriverbare funksjoner på $\mathcal{I}$ som ikke er kontinuerlig deriverbare.

Hint. Vis at $f'(0) = 0$, og betrakt følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gitt ved $x_n = 1/\sqrt{2\pi n}$ for $n \geq 1$. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -\infty,$$

og bruk dette til å forklare hvorfor f' ikke er kontinuerlig i punktet 0.

2.2. **Global Formulering.** Vi har nå utviklet den nødvendige terminologien for å formulere den globale versjonen av inverst funksjonsteorem, men vi skal først formulere og bevise noen hjelperesultater. Ikke bare er disse resultatene interessante i seg selv, men de vil også vise seg nyttige for å bevise hovedteoremet i denne seksjonen.

[2]Strengt talt krever man bare at $\mathcal{I}$ og $f(\mathcal{I})$ skal være åpne mengder, men vi skal av pedagogiske årsaker kun benytte begrepet i denne mer restriktive forstanden.

2.2.1. *Hjelperesultater.* Vi skal først karakterisere verdimengden til visse type funksjoner, og deretter skal vi se hvordan visse bijeksjoner har kontinuerlige inversfunksjoner. Inverst funksjonsteorem vil gi betingelser på en funksjon tilstrekkelige for å garantere at den har en kontinuerlig deriverbar inversfunksjon.

Proposisjon 2.2.1. *Anta at $\mathcal{I}$ er et åpent intervall og at $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig og strengt monoton funksjon. Da er verdimengden $f(\mathcal{I})$ det åpne intervallet gitt ved $f(\mathcal{I}) = (m, M)$, hvor $m = \inf f(\mathcal{I})$ og $M = \sup f(\mathcal{I})$.*[3]

Bevis. Vi skal bevise resultatet i det tilfellet hvor f er strengt voksende. Resultatet for tilfellet hvor f er strengt avtagende overlates til leseren.

Anta at f er strengt voksende. Det holder å vise at vi har følgende to inklusjoner:

$$f(\mathcal{I}) \subseteq (m, M) \quad \text{og} \quad f(\mathcal{I}) \supseteq (m, M).$$

(1) Anta først at $y \in f(\mathcal{I})$, og velg $x \in \mathcal{I}$ slik at $f(x) = y$. La deretter $u \in \mathcal{I}$ og $v \in \mathcal{I}$ være punkter slik at $u < x < v$ (slike punkter eksisterer ettersom intervallet $\mathcal{I}$ er åpent). Ettersom f er strengt voksende, følger det at

$$m \leq f(u) < f(x) < f(v) \leq M,$$

hvor første og siste ulikhet følger fra $m = \inf f(\mathcal{I})$ og $M = \sup f(\mathcal{I})$. Dette viser at $y \in (m, M)$, da $f(x) = y$.

(2) Anta nå at $y \in (m, M)$. Ettersom m er den *største* nedre skranken til $f(\mathcal{I})$ og $m < y$, kan ikke y være en nedre skranke for $f(\mathcal{I})$, og vi velger derfor et punkt $u \in \mathcal{I}$ slik at $f(u) < y$. Vi velger tilsvarende et punkt $v \in \mathcal{I}$ slik at $y < f(v)$.

Da $f(u) < y < f(v)$ og f er strengt voksende, må $u < v$, slik at det lukkede og begrensede intervallet $[u, v]$, hvorpå f er kontinuerlig, er inneholdt i $\mathcal{I}$. Det følger fra skjæringssetningen at det finnes et punkt $x \in (u, v)$ slik at $f(x) = y$, som viser at $y \in f(\mathcal{I})$. ∎

Bemerkning. En kritisk leser vil stille spørsmål ved vår kommentar om at

$$\inf f(\mathcal{I}) = -\infty \quad \text{og} \quad \sup f(\mathcal{I}) = \infty$$

dersom $f(\mathcal{I})$ ikke er henholdsvis nedad eller oppad begrenset: hva betyr det egentlig at noe er lik $-\infty$ eller ∞?

Første måte å komme seg rundt dette spørsmålet på er ved å dele beviset ovenfor inn i tilfeller avhengig av hvordan $f(\mathcal{I})$ er begrenset eller ikke. Man kan argumentere i tilfelle for tilfelle at $f(\mathcal{I}) = (m, \infty)$ dersom $f(\mathcal{I})$ er nedad og ikke oppad begrenset, at $f(\mathcal{I}) = (-\infty, M)$ dersom $f(\mathcal{I})$ er oppad og ikke nedad begrenset, at $f(\mathcal{I}) = \mathbf{R}$ dersom $f(\mathcal{I})$ hverken er nedad eller oppad begrenset, og så videre. Vi synes at en slik løsning er rotete, og den vil nødvendigvis føre til repetisjon av essensielt de samme argumentene i hvert tilfelle.

Den andre måten å komme seg rundt dette spørsmålet på er ved å konstruere $-\infty$ og ∞ som objekter, for deretter å danne en utvidet tallinje $[-\infty, \infty]$. Deretter kan man utvide de vanlige operasjonene og strukturene

[3]Vi setter $\inf f(\mathcal{I}) = -\infty$ dersom $f(\mathcal{I})$ ikke er nedad begrenset, og, tilsvarende, $\sup f(\mathcal{I}) = \infty$ dersom $f(\mathcal{I})$ ikke er oppad begrenset.

fra **R** til denne utvidede tallinjen. En slik fremgangsmåte vil føre til en mer enhetlig og økonomisk behandling av emnet – vi mener at det er i denne konteksten det er riktig å gjøre kalkulus – men vi skal ikke ha anledning til å gå inn på detaljene her.

Proposisjon 2.2.2. *Anta at situasjonen er den samme som i Proposisjon 2.2.1, og la* $g\colon f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$ *betegne inversfunksjonen til* f*. Da er* g *kontinuerlig og strengt monoton, og den har samme monotonisitet som* f*.*

Bevis. Beviset for dette er akkurat som for [1, s. 369, Teorem 7.4.5]. ■

Oppgave 2.2.1. La $\mathcal{I} = (a, b)$ være et åpent intervall, hvor $-\infty \leq a < b \leq \infty$, og anta at funksjonen $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ er voksende. Vis at

$$\inf f(\mathcal{I}) = \lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \text{og} \quad \sup f(\mathcal{I}) = \lim_{x \uparrow b} f(x),$$

hvor vi tillater at disse størrelsene kan være lik $-\infty$ eller ∞. (Her betyr $x \downarrow a$ at $x \to a$ med $a < x$, og $x \uparrow b$ betyr at $x \to b$ med $x < b$.)

Formuler og bevis et tilsvarende resultat for avtagende funksjoner.

2.2.2. *Inverst Funksjonsteorem.* Vi skal nå formulere og bevise den globale versjonen av inverst funksjonsteorem.

Teorem 2.2.3 (Global Inverst Funksjonsteorem)**.** *La* $\mathcal{I}$ *være et åpent intervall, og anta at* $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ *er en kontinuerlig deriverbar funksjon slik at* f' *ikke tar verdien null på* $\mathcal{I}$*. Da gjelder følgende:*

(1) *Funksjonen* f' *bytter ikke fortegn på* $\mathcal{I}$*, og* f *er strengt monoton.*
(2) *Verdimengden* $f(\mathcal{I})$ *er et åpent intervall.*

La $g\colon f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$ *være inversfunksjonen til* f*. Da er* g *kontinuerlig deriverbar, den har samme monotonisitet som* f*, og for alle* $y \in f(\mathcal{I})$ *har man at*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

det vil si $g' = 1/(f' \circ g)$*.*

Hovedpunktene i Teorem 2.2.3 er at dersom $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ er slik at f' ikke tar verdien null, så er f en diffeomorfi av klasse $\mathcal{C}^1$, og dens inversfunksjon $g \in \mathcal{C}^1\big(f(\mathcal{I})\big)$ tilfredsstiller $g' = 1/(f' \circ g)$. Legg merke til hvordan inversfunksjonen «arver» egenskapene til f.

Vi skal bevise teoremet i flere steg.

Lemma 2.2.4. *Funksjonen* f' *bytter ikke fortegn på* $\mathcal{I}$*.*

Bevis. Anta, for motsigelse, at f' bytter fortegn på $\mathcal{I}$, og la $a \in \mathcal{I}$ og $b \in \mathcal{I}$ være punkter slik at

$$f(a) < 0 \quad \text{og} \quad f(b) > 0.$$

Anta uten tap av generalitet at $a < b$. Da er $[a, b]$ et lukket og begrenset intervall som er inneholdt i $\mathcal{I}$, og f' er kontinuerlig på $[a, b]$. Ved skjæringssetningen, anvendt på f', finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$, hvilket motstrider hypotesen om at f' ikke tar verdien null. ■

Lemma 2.2.5. *Funksjonen* f *er strengt monoton, og verdimengden* $f(\mathcal{I})$ *er et åpent intervall.*

Bevis. Ettersom f' ikke endrer fortegn, vil enten $f' > 0$ eller $f' < 0$ på hele $\mathcal{I}$, og det følger da på samme måte som i beviset for [1, s. 293, Korollar 6.2.5] at f er strengt monoton.

Per antagelse er f deriverbar, og dermed kontinuerlig, og det følger fra Proposisjon 2.2.1 at $f(\mathcal{I})$ er et åpent intervall. ∎

Vi har vist at f er strengt monoton, slik at den må være en bijeksjon fra $\mathcal{I}$ til $f(\mathcal{I})$. Vi lar $g\colon f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$ betegne dens inversfunksjon. Det følger fra Proposisjon 2.2.2 at g er en kontinuerlig funksjon på $f(\mathcal{I})$ med samme monotonisitet som f, og det gjenstår å vise at den er kontinuerlig deriverbar.

Lemma 2.2.6. *Inversfunksjonen $g\colon f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$ til f er kontinuerlig deriverbar og tilfredsstiller*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \tag{3}$$

for alle $y \in f(\mathcal{I})$, det vil si $g' = 1/(f' \circ g)$.

Bevis. La $y \in f(\mathcal{I})$. Vi skal vise at g er deriverbar i y og at (3) holder. Ifølge Oppgave 2.2.2 er det tilstrekkelig å vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

for alle følger $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ i $f(\mathcal{I})$ som er slik at $y_n \neq y$ og $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Anta at $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ er en slik følge som beskrevet over, og la $x = g(y) \in \mathcal{I}$ og $x_n = g(y_n) \in \mathcal{I}$. Ettersom g er en bijeksjon og $y_n \neq y$, må

$$x_n = g(y_n) \neq g(y) = x,$$

slik at $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ er en følge i $\mathcal{I}$ med $x_n \neq x$. Videre, ettersom g er kontinuerlig i punktet y og $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, følger det fra [1, s. 237, Setning 5.1.10] at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y) = x.$$

Med andre ord, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ er en følge i $\mathcal{I}$ slik at $x_n \neq x$ og $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Siden f er deriverbar i punktet x, følger det fra nok en anvendelse av Oppgave 2.2.2 at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x) \neq 0. \tag{4}$$

Ettersom $x_n \neq x$ og f er en bijeksjon, er $f(x_n) \neq f(x)$, og vi ser at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(f(x_n) - f(x))/(x_n - x)} \\
&= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))},
\end{aligned}$$

hvor nest siste likhet følger fra (4) og [1, s. 207, Setning 4.3.3]. Dette viser at g er deriverbar i y og at (3) er oppfylt.

Vi har nå vist at $g' = 1/(f' \circ g)$. Ettersom f' og g er kontinuerlige, følger det fra [1, s. 235, Setning 5.1.6] at $f' \circ g$ er kontinuerlig på $f(\mathcal{I})$. Ettersom f' ikke tar verdien null, gjelder det samme for $f' \circ g$, og det følger fra [1, s.

234, Setning 5.1.4] at $g' = 1/(f' \circ g)$ er kontinuerlig på $f(\mathcal{I})$, som viser at $g \in \mathcal{C}^1(f(\mathcal{I}))$. ∎

Oppgave 2.2.2. La $\mathcal{I}$ være et åpent intervall og $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ en funksjon. Anta at $a \in \mathcal{I}$. Vis at grenseverdien $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer og er lik $\alpha \in \mathbf{R}$ hvis og bare hvis

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$$

for alle følger $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ av punkter i $\mathcal{I}$ som tilfredsstiller $a_n \neq a$ og $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Hint. Tilpass beviset for [1, s. 237, Setning 5.1.10] og se bemerkningen som følger det.

2.3. **Lokal Formulering.** Hovedresultatet i forrige seksjon, Teorem 2.2.3, er av *global* natur. Med dette mener vi at det garanterer at den aktuelle funksjonen har en globalt definert inversfunksjon; det vil si at den er inverterbar på hele sitt definisjonsområde. Selv om det i mange tilfeller ikke eksisterer globale inversfunksjoner, kan man like vel, under visse betingelser, finne *lokale* inversfunksjoner ved å innskrenke funksjonenes definisjonsområde.

2.3.1. *Restriksjon av Funksjoner.* Anta at $f\colon Y \to Z$ er en funksjon mellom to mengder Y og Z, og la $X \subseteq Y$ være en delmengde av Y. Med *restriksjonen av f til X* mener man funksjonen $f|_X\colon X \to Z$ definert ved

$$f|_X(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

Med andre ord, restriksjonen $f|_X$ av f til X er den funksjonen man får ved å restriktere f sitt definisjonsområde til X.

La oss definere en funksjon $\iota_{X\to Y}\colon X \to Y$ ved

$$\iota_{X\to Y}(x) = x \quad (x \in X).$$

Denne funksjonen kalles *inklusjonsavbildningen av X inn i Y*. Vi ser at $\iota_{X\to Y} = \mathrm{id}_Y|_X$.

Følgende diagram illustrerer situasjonen:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] & Z \\
X \arrow[u, "\iota_{X\to Y}"] \arrow[ur, "f|_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Oppgave 2.3.1. Anta at Y og Z er to mengder og at $f\colon Y \to Z$ er en funksjon. La $\emptyset$ betegne den tomme mengden. Hvorfor er $\emptyset \subseteq Y$, og hva er $f|_\emptyset$?

Oppgave 2.3.2. Anta at A er en delmengde av $\mathbf{R}$ og at $f\colon A \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Vis at dersom $B \subseteq A$, så er funksjonen $f|_B$ også kontinuerlig.

Denne oppgaven viser at *restriksjon bevarer kontinuitet.*

Vi minner om at et omegn om et punkt $a \in \mathbf{R}$ er et åpent intervall som inneholder a.

Oppgave 2.3.3. La $a \in \mathbf{R}$, og betrakt en funksjon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Vis at f er kontinuerlig i punktet a hvis og bare hvis det for alle omegn $\mathcal{I}$ om a er slik at restriksjonen $f|_\mathcal{I}$ av f til $\mathcal{I}$ er kontinuerlig i punktet a.

Denne oppgaven viser at *kontinuitet er et lokalt fenomen*: kontinuiteten til f i punktet a avhenger kun av hvordan f ser ut i vilkårlig små omegn om a.

Oppgave 2.3.4. La situasjonen være den samme som i Oppgave 2.3.3, og la $\alpha \in \mathbf{R}$. Vis at f er deriverbar i punktet a med $f'(a) = \alpha$ hvis og bare hvis det for alle omegn $\mathcal{I}$ om a er slik at restriksjonen $f|_{\mathcal{I}}$ av f til $\mathcal{I}$ er deriverbar i punktet a med $(f|_{\mathcal{I}})'(a) = \alpha$.

Denne oppgaven viser at *deriverbarhet er et lokalt fenomen*: deriverbarheten til f i punktet a avhenger kun av hvordan f ser ut i vilkårlig små omegn om a.

2.3.2. *Lokal Inverst Funksjonsteorem.* Vi skal nå formulere og bevise den lokale versjonen av inverst funksjonsteorem.

Teorem 2.3.1 (Lokal Inverst Funksjonsteorem)**.** *Anta at A er en ikke-tom delmengde av $\mathbf{R}$ og at $f\colon A \to \mathbf{R}$ er en funksjon. Anta videre at $a \in A$ og at det finnes et omegn om a hvorpå f er kontinuerlig deriverbar og tilfredsstiller $f'(a) \neq 0$. Da finnes det et åpent intervall $\mathcal{J} \subseteq A$ som inneholder a slik at $f|_{\mathcal{J}}$ er en diffeomorfi av klasse $\mathcal{C}^1$.*

Bemerkning. Dette teoremet sier at dersom f er kontinuerlig deriverbar på et omegn om punktet a og $f'(a) \neq 0$, så finnes det et åpent intervall $\mathcal{J}$ som inneholder a slik at $f(\mathcal{J})$ er et åpent intervall og $f|_{\mathcal{J}}\colon \mathcal{J} \to f(\mathcal{J})$ er en kontinuerlig deriverbar bijeksjon med en kontinuerlig deriverbar inversfunksjon $f|_{\mathcal{J}}^{-1}\colon f(\mathcal{J}) \to \mathcal{J}$. Med andre ord, under disse betingelsene har f en *lokalt* definert inversfunksjon i nærheten av a.

Bevis. La $\mathcal{I}$ være et omegn om a hvorpå f er kontinuerlig deriverbar. Ettersom f' er kontinuerlig på $\mathcal{I}$ og $f'(a) \neq 0$, anvender vi Oppgave 2.3.5 til å finne et omegn $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ om a slik at f' ikke tar verdien null på $\mathcal{J}$. Resultatet følger ved å anvende den globale versjonen av inverst funksjonsteorem, Teorem 2.2.3, på restriksjonen $f|_{\mathcal{J}}$ av f til $\mathcal{J}$. ■

Vi overlater det til leseren å undersøke hvordan Oppgave 2.3.3 og Oppgave 2.3.4 er brukt i beviset ovenfor.

Bemerkning. Det finnes versjoner av inverst funksjonsteorem som ikke forutsetter like strenge krav om kontinuitet på de deriverte til de aktuelle funksjonene, men de versjonene vi har formulert vil være tilstrekkelige for våre anvendelser, hvor disse kontinuitetskravene alltid vil være oppfylt.

Oppgave 2.3.5. Anta at $\mathcal{I}$ er et åpent intervall og at $f\colon \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ er en funksjon. Vis at dersom $a \in \mathcal{I}$ og f er kontinuerlig i punktet a med $f(a) \neq 0$, så finnes det et omegn $\mathcal{J}$ om a slik at f har samme fortegn som $f(a)$ på hele $\mathcal{J}$.

Denne oppgaven viser at dersom en kontinuerlig funksjon er forskjellig fra null i et gitt punkt, så finnes det et helt omegn om dette punktet hvor funksjonen er forskjellig fra null.

Hint. Anta først at $f(a) > 0$, og la $\epsilon = f(a)/2 > 0$. Forklar hvorfor det finnes en $\delta > 0$ slik at $0 < f(a)/2 = f(a) - \epsilon < f(x)$ når $|x - a| < \delta$, og bruk dette til å bevise konklusjonen.

Referanser

[1] Lindstrøm, Tom: *Kalkulus*, 4. utgave (2016), Universitetsforlaget.