Følger (seksjon 4.3)

En følge er en uendelig sekvens av reelle tall

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Vanlig notasjon: $\{a_n\}$

Følger kan starte andre steder enn 1

$a_3, a_4, a_5, \dots$, $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$

a_0, a_1, a_2 , $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

når vi vil understreke hvor vi begynner

Eksempler: $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ $\{n\}$

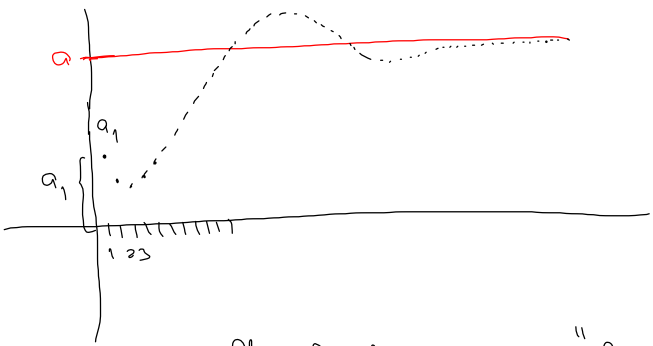
$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ $\{n^2\}$

$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots$ $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

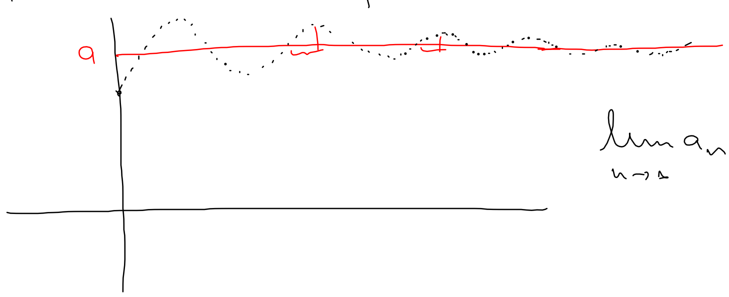
Vi skal være interessert i grenseverdier for følger:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$



Man sier ofte at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ "dersom a_n nærmer seg a når n går mot uendelig"

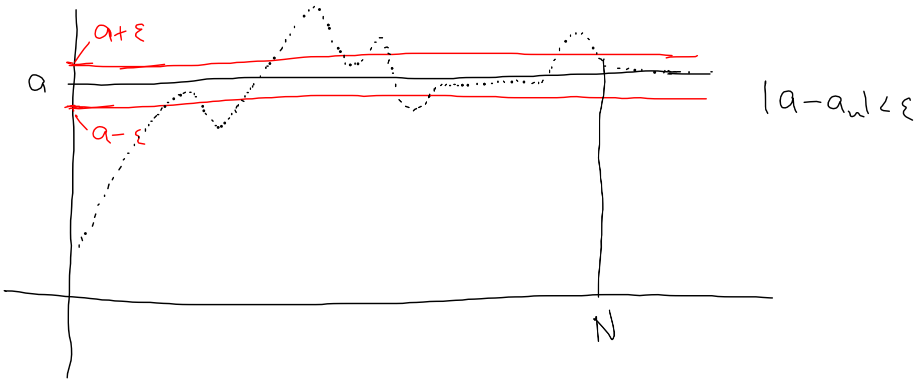
Hva med denne situasjonen



$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Nytt forsøk: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vil si at vi kan få a_n så nær a vi måtte ønske ved å gå tilstrekkelig langt ut i følgen

Presisering: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $n \geq N$, så er $|a - a_n| < \varepsilon$.



Eksempel: Bruk definisjonen til å vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

(I praksis: $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1$)

Vi må vise at hvis man gir oss en $\varepsilon > 0$, kan vi alltid finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\underset{a}{1} - \underbrace{\tfrac{n-1}{n}}_{a_n}| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \left|1 - (1 - \tfrac{1}{n})\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$ ønsker meg

Hvis vi velger $N > \frac{1}{\varepsilon}$, så vil $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Hvis $n \geq N$, så er da

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

HURRA!

Regneregler for grenseverdier: Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (forutsatt at $B \neq 0$)

Eksempler: (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + 2n - 4}{3n^3 + n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(7 + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3})}{\cancel{n^3}(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3} \to 7}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3} \to 3} \overset{(iv)}{=} \frac{7}{3}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + 2n - 4}{3n^2 + n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{3}}\overbrace{(7 + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3})}^{\to 7}}{\cancel{n^2}\underbrace{(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2})}_{\to 3}} = \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ "$\infty - \infty$"

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

trekker i samme retning

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1}} + 1} = \frac{1}{2}$$