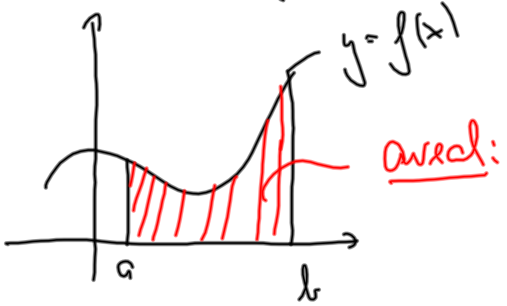
INTEGRASJON

Stammer fra volum- og arealberegninger.

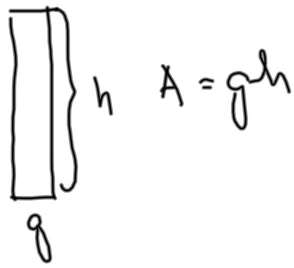
Gjennombrudd 1660-70 → integrasjon og derivasjon; motsatte regnearter.

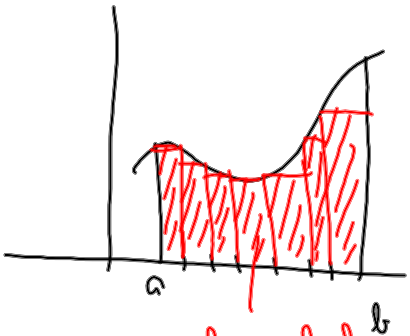
koordinatsystem.

Arealberegninger

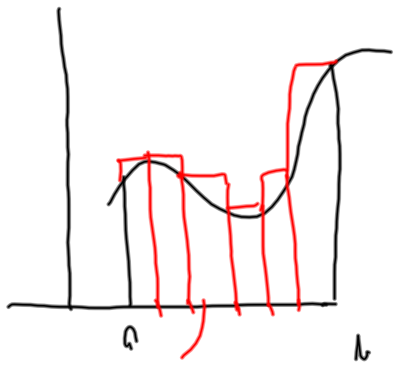


Vet:



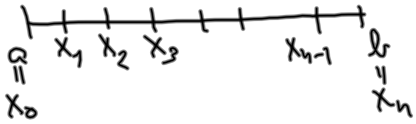


areal av boksene:
nedre tilnærming.



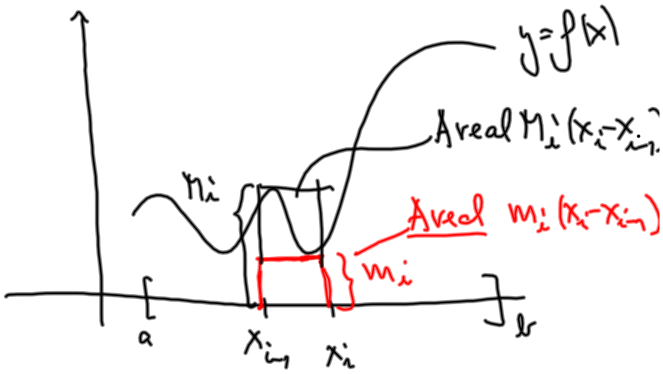
areal av boksene:
øvre tilnærming.

Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en begrenset funksjon, så lar vi
Π: $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ være en partisjon av $[a,b]$



$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$

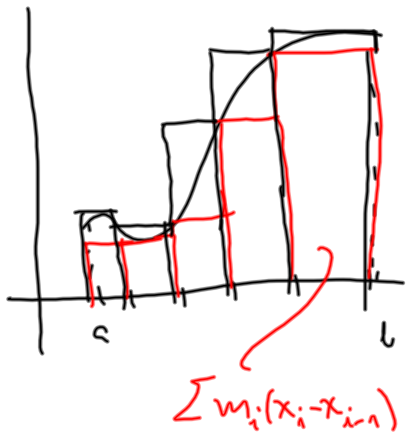
og $M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$



Samlet areal til boksene under grafen: $\sum_{i=1} m_i(x_i-x_{i-1})$

Samlet areal til boksene over grafen:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

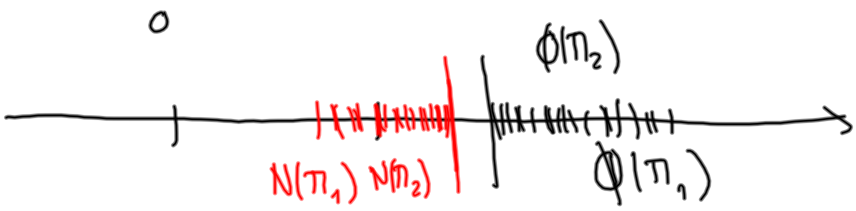


Øvre trappesum:

$$\Phi(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

Nedre trappesum:

$$N(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$



Nedre integral: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{N(\Pi): \Pi \text{ er en partisjon}\}$

Øvre integral: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{\Phi(\Pi): \Pi \text{ er en partisjon}\}$

Generelt $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

<u>Definisjon</u>: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset. Vi sier at f er <u>integrerbar</u> dersom

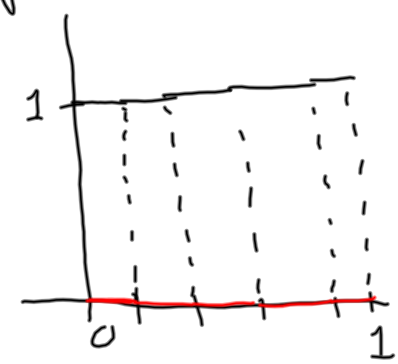
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

og i så fall definerer vi <u>integralet</u> $\int_a^b f(x)\,dx$ til å være den felles verdien, altså

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

<u>Eksempel</u>: En ikke-integrerbar funksjon:

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal.} \end{cases}$



$$\left.\begin{aligned} N(\Pi) &= 0 \\ \Phi(\Pi) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{for alle partisjoner}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1$$

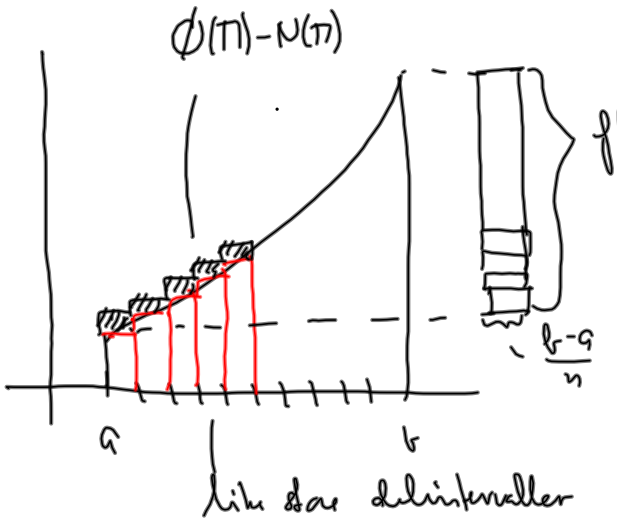
To utfordringer:

(i) Vise at de vanlige funksjonene er integrerbare.

(ii) Finne effektive måter å regne ut integraler på

Setning: Enhver voksende funksjon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er integrerbar.

Triks: For å vise at en funksjon er integrerbar, er det nok å vise at vi kan få $\Phi(\Pi)$ og $N(\Pi)$ så nær hverandre vi måtte ønske ved å velge Π smart.



$$\Phi(\Pi)-N(\Pi)=(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}\to 0$$