Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 3

I dette kapittelet har mange av oppgavene et mindre teoretisk preg enn i de foregående kapitlene, og jeg regner derfor med at lærebokas eksempler og fasit er dekkende for de rent regnemessige oppgavene. Jeg har derfor prioritert å lage løsningsforslag til oppgaver som tester din geometriske forståelse av de komplekse tallene (oppgave 3.2.7 og 3.2.10) og gir øvelse i matematisk argumentasjon (oppgave 3.1.10, 3.2.12 og 3.2.15). Du vil likevel også finne enkle eksempler på hvordan du oversetter frem og tilbake mellom kartesisk form og polarform (oppgave 3.2.3, 3.2.5, 3.3.1 og 3.3.3), hvordan du finner tredjerøtter (oppgave 3.4.3), og hvordan du kan løse komplekse annengradsligninger (oppgave 3.4.9 og 3.4.11). Oppgave 3.3.8 viser en typisk anvendelse av De Moivres formel, mens oppgave 3.4.14 gir deg god trening i å løse en kompleks annengradsligning og uttrykke løsningen både på kartesisk og polar form.

Oppgave 3.1.5

Vi skal løse de oppgitte ligningene.

a)
$$\begin{aligned} 2iz &= 3+4i \\ z &= \frac{3+4i}{2i} = \frac{(3+4i)(-2i)}{2i(-2i)} \\ &= \frac{-6i-8i^2}{4} = \underline{\underline{2-\frac{3}{2}i}} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (1+i)z+3 &= 1-i \\ (1+i)z &= -2-i \\ z &= \frac{-2-i}{1+i} = \frac{(-2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-2-i+2i+i^2}{1+1} = \underline{\underline{\frac{-3+i}{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.10

Anta at $z+w$ og zw er reelle. Vi skal vise at da er enten begge tallene z og w reelle eller så er de konjugerte av hverandre.

La $z = a+ib$ og $w = c+id$. Da har vi

$$\begin{aligned} z+w &= (a+c)+i(b+d) \\ zw &= (ac-bd)+i(ad+bc) \end{aligned}$$

At $z + w$ og zw er reelle betyr at deres imaginærdeler er lik null, det vil si at

$$\begin{aligned} b + d &= 0 \\ ad + bc &= 0 \end{aligned}$$

Den første ligningen gir $b = -d$. Setter vi dette inn i den andre ligningen, får vi $d(a - c) = 0$, som er oppfylt når $d = 0$ og når $a = c$. Hvis $d = 0$ har vi $b = d = 0$, det vil si at z og w er reelle. Hvis $a = c$ har vi $z = a + ib$ og $w = c + id = a - ib$, det vil si at z og w er konjugerte.

Oppgave 3.2.3

b) Vi skal finne modulusen og argumentet til $z = -i$.

Modulusen er

$$r = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{1}}$$

Argumentet er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = 0$$

og

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

Dette betyr at

$$\theta = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$

e) Vi skal finne modulusen og argumentet til $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Modulusen er

$$r = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{1 + 3} = \underline{\underline{2}}$$

Argumentet er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \frac{1}{2}$$

og

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dette betyr at

$$\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

Oppgave 3.2.5

Vi skal skrive de komplekse tallene på formen $z = a + ib$.

a) $r = 4$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4(0+i) = \underline{\underline{4i}}$$

b) $r = 1$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$z = 1\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

c) $r = 2$ og $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}}$$

d) $r = \frac{1}{2}$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

$$z = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}(0 - i) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}i}}$$

Oppgave 3.2.7a

Gitt tallene

$$z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\Big) \text{ og } w = 3\Big(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\Big)$$

Ifølge teorem 3.2.3 har produktet zw modulus $r = 2 \cdot 3 = 6$ og argument $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$. Altså blir

$$zw = 6\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = \underline{\underline{6i}}$$

Oppgave 3.2.10

Vi skal skissere de oppgitte områdene i det komplekse planet.

a) $\{z : |z| = 1\}$

Dette er alle punkter z som har avstand lik 1 fra origo, det vil si alle punkter på enhetssirkelen.

b) $\{z : |z - 1| < 2\}$

Dette er alle punkter z som har avstand mindre enn 2 fra punktet $(1, 0)$, det vil alle punkter i det indre av en sirkel med radius 2 om punktet $(1, 0)$.

c) $\{z : |z - (i+1)| \geq \frac{1}{2}\}$

Dette er alle punkter z som har en avstand på minst $\frac{1}{2}$ fra punktet $i+1=(1,1)$, det vil si alle punkter på og utenfor en sirkel med radius $\frac{1}{2}$ om punktet $(1,1)$.

d) $\{z : |z-2| < |z-i+2|\} = \{z : |z-2| < |z-(i-2)|\}$

Dette er alle punkter z som har kortere avstand til punktet $(2,0)$ enn til punktet $i-2=(-2,1)$, det vil si alle punkter som ligger ekte under linjen $y=4x+\frac{1}{2}$.

Dette kan vi enten se geometrisk (tegn figur), eller ved følgende utregning. La $z=x+iy$. Kvadrerer vi den gitte ulikheten, får vi

$$\begin{aligned}
|z-2|^2 &< |z-i+2|^2 \\
(x-2)^2+y^2 &< (x+2)^2+(y-1)^2 \\
x^2-4x+4+y^2 &< x^2+4x+4+y^2-2y+1 \\
2y &< 8x+1 \\
y &< 4x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.12

Vi skal vise at (vektorene tilsvarende) de to komplekse tallene z og w står normalt på hverandre hvis og bare hvis z/w er et rent imaginært tall.

Dersom z og w har argumenter θ_1 og θ_2 henholdsvis, får z/w argument $\theta_1-\theta_2$. Tallet z/w er rent imaginært hvis og bare hvis argumentet er et odde multiplum av $\pi/2$, det vil si $\theta_1-\theta_2=(2k+1)\pi/2, k\in \mathbf{Z}$. Men det betyr jo nettopp at z og w står normalt på hverandre, da $\theta_1-\theta_2$ er vinkelen mellom vektorene z og w.

På samme måte ser vi at z og w er parallelle hvis og bare hvis z/w er reell. At z/w er reell betyr at argumentet er et multiplum av π, det vil si $\theta_1-\theta_2=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. Men det betyr at vektorene z og w enten peker i samme retning eller i motsatt retning, det vil si at de er parallelle.

Oppgave 3.2.15

Vi skal vise at $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$. Benytter vi at $z\overline{z}=|z|^2$, får vi:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= (z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w})+(z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}) \\
&= |z|^2+|w|^2+|z|^2+|w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2
\end{aligned}$$

Tegner vi et parallellogram utspent av vektorene som tilsvarer de komplekse tallene z og w, vil diagonalene i dette parallellogrammet være $z+w$ og $z-w$. Utregningen ovenfor viser da at summen av kvadratene til sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene til diagonalene.

Oppgave 3.3.1

b) Vi skal skrive tallet $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ på formen $a+ib$.

$$e^{-\frac{i\pi}{4}} = e^0\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

Oppgave 3.3.3

b) Vi skal skrive tallet $z = 4-4i$ på formen $re^{i\theta}$.

$$r = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

Siden $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$ ser vi at $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Altså har vi

$$z = \underline{\underline{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}}$$

Oppgave 3.3.8

Vi skal regne ut $(1+i)^{804}$ og $(\sqrt{3}-i)^{173}$ ved hjelp av de Moivres formel. Da $1+i$ har modulus $\sqrt{2}$ og argument $\frac{\pi}{4}$ får vi

$$\begin{aligned}
(1+i)^{804} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{804} \\
&= \sqrt{2}^{804}\left(\cos\frac{804\pi}{4}+i\sin\frac{804\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}^{(2\cdot 402)}(\cos 201\pi + i\sin 201\pi) \\
&= \left(\sqrt{2}^2\right)^{402}\left(\cos(200\pi+\pi)+i\sin(200\pi+\pi)\right) \\
&= 2^{402}(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&= \underline{\underline{-2^{402}}}
\end{aligned}$$

Og da $\sqrt{3}-i$ har modulus 2 og argument $-\frac{\pi}{6}$ får vi

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^{173} &= \left(2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)^{173} \\
&= 2^{173}\left(\cos\frac{-173\pi}{6}+i\sin\frac{-173\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{173}\left(\cos\left(28\pi + \frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(28\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\
&= 2^{173}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\frac{1}{2}\right) \\
&= \underline{\underline{-2^{172}(\sqrt{3} + i)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.3b

Vi skal finne alle tredjerøttene til $z = -i$ og skrive dem på formen $re^{i\theta}$ og $a + ib$.

$$\begin{aligned}
z &= -i = e^{-\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i} \\
z^{\frac{1}{3}} &= e^{-\frac{\pi i}{6} + \frac{2\pi k i}{3}}
\end{aligned}$$

Setter vi nå etter tur $k = 0$, $k = 1$ og $k = 2$, får vi de tre tredjerøttene

$$\begin{aligned}
w_0 &= \underline{\underline{e^{-\frac{\pi i}{6}}}} = \cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{6}) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i}} \\
w_1 &= e^{-\frac{\pi i}{6} + \frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{3\pi i}{6}} = \underline{\underline{e^{\frac{\pi i}{2}}}} = \underline{\underline{i}} \\
w_2 &= e^{-\frac{\pi i}{6} + \frac{4\pi i}{3}} = \underline{\underline{e^{\frac{7\pi i}{6}}}} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.9a

Annengradsligningen $z^2 + 2z + 4 = 0$ har løsningene

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \\
&= -1 \pm i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

det vil si

$$\begin{aligned}
z_1 &= \underline{\underline{-1 + i\sqrt{3}}} \\
z_2 &= \underline{\underline{-1 - i\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.11b

Annengradsligningen $z^2 + 2iz + 5 = 0$ har løsningene

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{-2i \pm 2i\sqrt{6}}{2}$$
$$= -i \pm i\sqrt{6}$$

det vil si

$$z_1 = \underline{\underline{i(\sqrt{6}-1)}}$$
$$z_2 = \underline{\underline{-i(\sqrt{6}+1)}}$$

Oppgave 3.4.14

Ligningen $z^2 + 2(1-i)z + 7i = 0$ har løsningene

$$z = \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4(1-i)^2 - 4\cdot 1 \cdot 7i}}{2}$$
$$= -(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 7i} = -(1-i) \pm \sqrt{-9i}$$
$$= -(1-i) \pm 3\sqrt{-i}$$

Da $-i = e^{-i\pi/2}$ har vi $\sqrt{-i} = \pm e^{-i\pi/4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$, slik at uttrykket ovenfor videre blir

$$= -(1-i) \pm 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) = \left(-1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)(1-i)$$

det vil si

$$z_1 = \underline{\underline{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\right) - i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\right)}} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\right)(1-i)$$
$$z_2 = \underline{\underline{-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+1\right) + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+1\right)}} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+1\right)(i-1)$$

Da $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ og $i-1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, blir løsningene på polar form

$$z_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \underline{\underline{(3-\sqrt{2})e^{-i\pi/4}}}$$
$$z_2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \underline{\underline{(3+\sqrt{2})e^{i3\pi/4}}}$$

Vektoren z_1 har lengde $3-\sqrt{2}$ og argument $-\pi/4$, og peker altså nedover i 4. kvadrant. Vektoren z_2 har lengde $3+\sqrt{2}$ og argument $3\pi/4$, og peker altså oppover i 2. kvadrant (tegn figur).

Oppgave 3.5.5

a) Vi skal vise at i er en rot i polynomet $P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

$$P(i) = i^4 + 2i^3 + 4i^2 + 2i + 3 = 1 - 2i - 4 + 2i + 3 = \underline{\underline{0}}$$

b) Siden i en rot i polynomet $P(z)$, vet vi ved lemma 3.5.3 at $\bar{i} = -i$ også er en rot i dette polynomet. Men det betyr at $P(z)$ er delelig med $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Vi utfører polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
z^4+2z^3+4z^2+2z+3 : z^2+1 = \underline{z^2+2z+3} \\
\underline{z^4+z^2} \\
\quad 2z^3+3z^2+2z+3 \\
\quad \underline{2z^3+2z} \\
\qquad 3z^2+3 \\
\qquad \underline{3z^2+3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Det gjenstår bare å faktorisere z^2+2z+3:

$$
\begin{aligned}
z^2+2z+3 &= 0 \\
z &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 3\cdot 1}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} \\
z_1 &= -1+\sqrt{2}i \\
z_2 &= -1-\sqrt{2}i
\end{aligned}
$$

De komplekse og reelle faktoriseringene av $P(z)$ blir dermed:

$$
\begin{aligned}
z^4+2z^3+4z^2+2z+3 &= \underline{\underline{(z+i)(z-i)(z+1-\sqrt{2}i)(z+1+\sqrt{2}i)}} \\
&= \underline{\underline{(z^2+2z+3)(z^2+1)}}
\end{aligned}
$$