Kapittel 11

Seksjon 11.1

Oppgave 11.1.1

De deriverte til $f(x) = e^{x^2}$ er

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x^2} & f''(x) &= (2+4x^2)e^{x^2} \\ f^{(3)}(x) &= (12x+8x^3)e^{x^2} & f^{(4)}(x) &= (12+48x^2+16x^4)e^{x^2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 2 \qquad f^{(3)}(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 12.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av fjerde grad om 0 lik

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

Oppgave 11.1.3

De deriverte til $f(x) = \sin x$ er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(4)}(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Dermed blir Taylorpolynomet av fjerde grad om $\frac{\pi}{4}$ lik

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(0) + f'(0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

Oppgave 11.1.7

De deriverte til $f(x) = \arctan x$ er

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Dermed får vi at

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -2.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av tredje grad om 0 lik

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Oppgave 11.1.10

De deriverte til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ er

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 6 \qquad f^{(3)}(x) = 24x.$$

Dermed får vi at

$$f(1) = -7 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) = 6 \qquad f^{(3)}(1) = 24.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av tredje grad om 0 lik

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= -7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \end{aligned}$$

Seksjon 11.2

Oppgave 11.2.1

Taylorpolynomet til e^x av grad 4 om 0 blir $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, siden alle de deriverte er e^x. Restleddet tar formen $\frac{e^c}{120}x^5$, der c er et tall mellom 0 og b. Siden e^x er en voksende funksjon er dette mindre enn $\frac{e^b}{120}b^5$, når vi setter inn $x = b$.

Oppgave 11.2.3

Med $f(x) = \ln x$ har vi at $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, og $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Vi får dermed at $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, og $f^{(3)}(1) = 2$, slik at Taylorpolynomet til f av grad 3 om 1 blir

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

For $b \geq 1$ har vi at $|f^{(4)}(x)| \leq 6$ for $x \in [1, b]$. Dermed gir Korollar 11.2.2 at

$$|R_3 f(b)| \leq \frac{6}{4!}(b-1)^4 = \frac{1}{4}(b-1)^4.$$

Oppgave 11.2.4

Med $f(x) = e^x$ har vi at $f^{(n)}(x) = e^x$. Vi ser på Taylorpolynomet til f om 0. Siden $f^{(n)}$ er voksende så kan restleddet begrenses ved $|R_n f(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Vi må nå velge n slik at $\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10000}$, som gir at $(n+1)! \geq 30000$. Prøver vi oss frem finner vi at minste slik n er $n = 7$. e med nøyaktighet større enn $\frac{1}{10000}$ blir dermed

$$P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \approx 2.71825397.$$

Oppgave 11.2.5

Med $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ får vi

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Vi får dermed

$$f(100) = 10 \qquad f'(100) = \frac{1}{20} \qquad f''(100) = -\frac{1}{4000}$$

Taylor-polynomet av grad 2 om 100 blir dermed $10 + \frac{1}{20}(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2$. Tilnærmingen til $\sqrt{101} = f(101)$ blir dermed

$$10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = \frac{80000 + 400 - 1}{8000} = \frac{80399}{8000} \approx 10.049875.$$

Restleddet tar formen $\frac{1}{16}c^{-5/2}$, der c er et tall mellom 100 og 101. Siden $x^{-5/2}$ er en avtagende funksjon er dette mindre enn $\frac{1}{16}100^{-5/2} = \frac{1}{16}10^{-5} = 0.625 \times 10^{-6}$, slik at vi har 6 siffers presisjon.

Oppgave 11.2.6

Vi har at $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ for en c mellom 0 og x. Dermed blir

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n-1}.$$

Lar vi x gå mot 0 her ser vi at grenseverdien blir $\frac{1}{2}$.

Oppgave 11.2.9

Det er mye regning å finne Taylorrekka til integranden $\frac{1-e^{-t}}{t}$. Det viser seg å være enklere i denne oppgaven å ta utgangspunkt i Taylorrekka til e^x, som kan skrives $e^x = T_n(x) + R_n(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ for en c mellom 0 og x. Setter vi $x = -t$ her får vi at

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{-t}}{t} &= \frac{1 - \left(1 + (-t) + \ldots + \frac{(-t)^n}{n!} + \frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}(-t)^{n+1}\right)}{t} \\
&= \frac{t + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^{n+1}}{t} \\
&= 1 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n,
\end{aligned}$$

der $c(t)$ er et tall mellom 0 og $-t$. Dermed har vi at

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \left(1 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!}\right) dt + \int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt.$$

Fra dette er det klart at vi bør velge n slik at

$$\left|\int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n dt < 10^{-3},$$

der vi har brukt at $e^{c(t)} < 1$ når $c(t) \in [-1, 0]$. Det holder derfor å velge n slik at $\int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n dt = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 10^{-3}$. Dette holder hvis $(n+1)(n+1)! > 1000$. Prøver vi oss frem finner vi at $n = 5$ er minste slik n. Vi får dermed at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt &\approx \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120}\right) dt \\
&= 1 - \frac{1}{2 \times 2!} + \frac{1}{3 \times 3!} - \frac{1}{4 \times 4!} + \frac{1}{5 \times 5!} \\
&= \frac{7200 - 1800 + 400 - 75 + 12}{7200} = \frac{5737}{7200} \approx 0.7968
\end{aligned}$$

Oppgave 11.2.15

a)

Med $g(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ får vi at

$$g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \qquad g''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \qquad g'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

Vi får deretter

$$g(0) = 1 \qquad\qquad g'(0) = \frac{1}{3} \qquad\qquad g''(0) = -\frac{2}{9}.$$

Dermed blir Taylorpolynomet til g av grad 2 om origo

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

b)

For $c \geq 0$ er $g'''(c) = \frac{10}{27}(1+c)^{-8/3} \leq \frac{10}{27}$. Dermed har vi for restleddet at

$$R_2(x) = \frac{g'''(c)}{3!}x^3 \leq \frac{10}{27 \times 6}x^3 = \frac{5}{81}x^3$$

c)

Vi har at $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000+3} = 10\sqrt[3]{1+0.003} = 10g(0.003)$. Hvis vi bruker Taylorpolynomet av grad 2 vil restleddet bli mindre enn $10 \times \frac{5}{81}0.003^3 = \frac{15}{3} \times 10^{-9} = 0.5 \times 10^{-8}$, slik at vi får minst 7 siffers presisjon. Dermed blir tilnærmingen

$$\sqrt[3]{1003} = 10g(0.003) \approx 10\left(1 + \frac{0.003}{3} - \frac{0.003^2}{9}\right) = 10 + 0.01 - 10^{-5} = 10.0099900$$