Integrasjonsteknikker

Delvis integrasjon: $\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$

Nyttig hvis u blir enklere av å deriveres, mens v' ikke blir mer komplisert av å integreres, for da kan det være lettere å beregne $\int u'v\,dx$ enn $\int uv'\,dx$.

Typiske valg av u: $\ln x$, $\arctan x$
Typiske valg av v': e^x, $\cos x$, $\sin x$

Eks 1: $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

$$\boxed{\begin{matrix} u = \ln x & v' = x^{\frac{1}{2}} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{2}{3}x^{3/2} \end{matrix}}$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C}}$$

Kan også være nyttig selv om vi ikke har en u som blir enklere av å deriveres:

Eks 2: $I = \int e^{2x}\cos x\,dx$

$$\boxed{\begin{matrix} u = e^{2x} & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x} & v = \sin x \end{matrix}}$$

$$= e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = e^{2x} & v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x} & v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\left(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\underbrace{\int e^{2x}\cos x\,dx}_{I}$$

Vi har dermed fått: $I = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4I$

Vi løser mhp I: $5I = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$

$$I = \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x$$

Altså er $\int e^{2x}\cos x\,dx = \underline{\frac{1}{5}e^{2x}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + C}$

Substitusjon: $\int f(g(x))\,dx = \int f(u)h'(u)\,du$

$\boxed{u = g(x),\ x = h(u),\ dx = h'(u)\,du}$

Går ut på å finne en kjerne u i integralet og gjøre det om til et integral mhp. u isteden.

Enkel variant: Velg u slik at den deriverte av u er en faktor i integranden.

Eks 1: $\int x^3 \sin x^4\,dx$

$\boxed{u = x^4 \text{ gir } \frac{du}{dx} = 4x^3,\ dx = \frac{1}{4x^3}du}$

$$= \int \cancel{x^3} \cdot \sin u \cdot \frac{1}{4\cancel{x^3}}\,du = \frac{1}{4}\int \sin u\,du = -\frac{1}{4}\cos u + C$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}\cos x^4 + C}}$$

Eks 2: $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

$\boxed{u = e^x \text{ gir } du = e^x\,dx}$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + C = \underline{\underline{\arcsin(e^x) + C}}$$

Mer komplisert variant (kombinerer substitusjon med delvis integrasjon):

Eks 3: $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$

$\boxed{\begin{array}{l} z = \sqrt{x} \text{ gir } x = z^2,\ dx = 2z\,dz \\ x = 1 \text{ gir } z = 1 \\ x = 4 \text{ gir } z = 2 \end{array}}$

$$= \int_1^2 e^z \cdot 2z\,dz$$

$$= 2\int_1^2 z e^z\,dz$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Delvis integrasjon med} \\ u = z,\ v' = e^z \\ u' = 1,\ v = e^z \end{array}}$

$$= 2\left(\left[ze^z\right]_1^2 - \int_1^2 e^z\,dz\right)$$

$$= 2\left(2e^2 - e - \left[e^z\right]_1^2\right) = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) = \underline{\underline{2e^2}}$$

Delbrøkoppspalting

Teknikk for å integrere rasjonale funksjoner $\frac{p(x)}{q(x)}$

Poeng: får splittet brøken $\frac{p(x)}{q(x)}$ i en sum av enklere brøker på formen $\frac{A}{x-r}$ og $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

Eks: $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$

(**Generelt:** Hvis graden til teller er større enn graden til nevner, utfører vi polynomdivisjon. Deretter faktoriserer vi nevner.)

Bestemmer konstanter A, B og C slik at

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x^2+2x+3 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)\cdot(x-1) = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A-C$$

Sammenligning av koeffisienter gir:

$$\underbrace{A+B=1}_{\text{I}},\quad \underbrace{A-B+C=2}_{\text{II}} \quad \text{og} \quad \underbrace{A-C=3}_{\text{III}}$$

(I) gir $B = 1-A$ og (III) gir $C = A-3$. Setter inn i (II):

$$A-(1-A)+(A-3) = 2 \Rightarrow 3A = 6 \Rightarrow \underline{A=2}$$

Dermed blir $\underline{B=-1}$ og $\underline{C=-1}$

Beregner integralet leddvis:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Vi må arbeide litt mer med det siste integralet

Vi løser det siste integralet ved å smugle den deriverte av nevneren inn i telleren:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+x+1 \\ du &= 2x+1 \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ du &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \\ dx &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,du \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}$$

Totalt har vi dermed regnet ut at

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

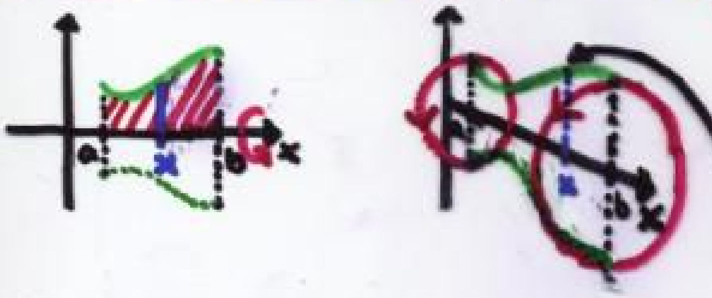
Anvendelser av integralet

• Areal under en graf

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad A = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

• Volum av omdreiningslegemer

Om x-aksen: **Volum:** $\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$



Summerer volumene til tynne skiver med tykkelse dx og areal lik $\pi r^2 = \pi \cdot f(x)^2$

Om y-aksen: **Volum:** $\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx}$

Summerer volumene av tynne sylinderskall med tykkelse dx og areal = omkrets · hoyde

$$= 2\pi x \cdot f(x)$$

Eks 1: Volum av omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ mellom $x = 0$ og $x = 3$ dreies om x-aksen:

$$V = \pi \int_0^3 f(x)^2\,dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{dx}{1+2x}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2}\left[\ln|1+2x|\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}(\ln 7 - \underbrace{\ln 1}_{0}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 7}}$$

Eks 2: Volum av omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til $y = e^{x^2}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$ dreies om y-aksen:

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \pi \int_0^1 2x e^{x^2} dx$$

$$= \pi \int_0^1 e^u\,du = \pi \left[e^u\right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{\pi(e-1)}}$$

Sett $u = x^2$

$du = 2x\,dx$

Nye grenser:

$x = 0$ gir $u = 0$

$x = 1$ gir $u = 1$

Diverse småplukk

Analysens fundamentalteorem: Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er funksjonen $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ en antiderivert til f.

Altså: Den deriverte til $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ er $f(x)$

Den deriverte av et integral på formen $\int_a^x f(t)\,dt$ er altså integranden innsatt øvre grense i integralet.

Eks 1: Finn den deriverte av $f(x)=\int_0^x e^{t^3}\,dt$

Svar: $f'(x)=\underline{\underline{e^{x^3}}}$

Eks 2: Finn den deriverte av $f(x)=\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Her må vi først bytte om integrasjonsgrensene for å få konstanten nede: $f(x)=\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Svar: $f'(x)=\underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$

Hvis øvre grense i integralet er en funksjon $g(x)$, må vi bruke kjerneregelen:

Vi skal derivere $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

La $F(u)=\int_a^u f(t)\,dt$. Da er $G(x)=F(g(x))$.

Kjerneregelen gir: $G'(x)=F'(g(x))\cdot g'(x)=\underline{f(g(x))\cdot g'(x)}$

Eks 3: $D\left[\int_0^{\cos x} t e^t\,dt\right]=\cos x\cdot e^{\cos x}\cdot(-\sin x)=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{\cos x}}}$

$\boxed{\sin 2x = 2\cos x\sin x}$