Plenum

5.10.12

6.4: 3a) 6.5: 5, 13 c), d)

skriv

7.1: 1, 5, 7, 8, 15 7.2: 1, 3, 5, 7, 9, 13

7.4: 1a), b), c), 3, 5, 8 7.5: 3a), b)

7.6: 1a), e), h), 2a), b), 3a), b), e)

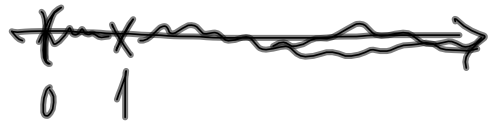
6.5: 5.) $f(x) = \frac{x \ln(x^2) - 1}{\ln x}$

$$= \frac{x \cdot 2\ln(x) - 1}{\ln x} = 2x - \frac{1}{\ln x}$$

$\ln(x)$ kun def. $x > 0$, $\ln 1 = 0$, så f er ikke def. for $x = 1$. Så

$D_f = (0,\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

mengde-minus



f er kont. overalt hvor den er def.

Vertikale asymptoter: Kun 2 kandidater

$x=0$, $x=1$: $\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0 \Rightarrow$

f har ikke vertikal asymptote i 0.

$\lim_{x \to 1_-} f(x) \underset{\dots}{=} \infty$, $\lim_{x \to 1_+} f(x) = \dots = -\infty$

$\Rightarrow$ f har vertikal asymptote når $x \to 1$.

Skrå- (eller horisontale) asymptoter:

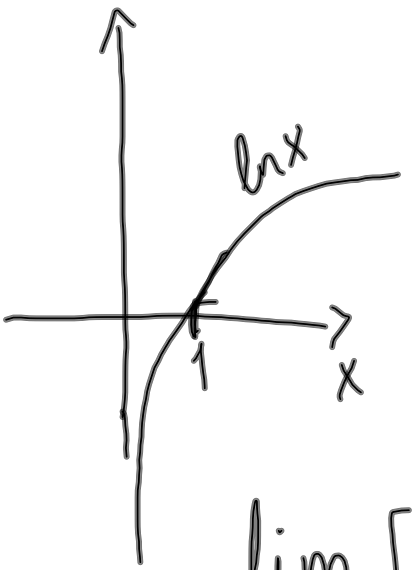
Bruker metode 6.5.5.

i) Regn ut $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x\ln x}\right) = \underline{2}$$

$x \to \infty$

$\ln x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$



ii) Denne grensen eksisterer, så vi regner ut:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x] = \lim_{x\to\infty}\left[\cancel{2x}-\frac{1}{\ln x}-\cancel{2x}\right] = 0$$

Dermed er $y = 2x + 0 = 2x$ er en skråasymptote for f når $x \to \infty$.

(Siden f ikke er def. for $x \leq 0$ trenger vi ikke sjekke skråasymptote når $x \to \infty$)

13.) $f(x) = (3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$

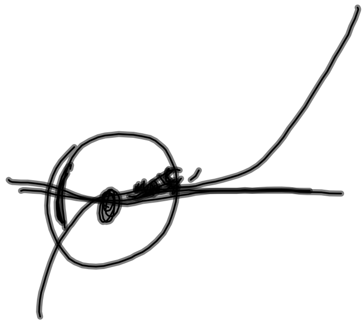
a) Finn nullpunkt: Løser $f(x) = 0$

Pos./neg.: Fortegnslinje

b) Voksende og avtagende: $f'(x)$

Fortegnslinje ($f' \geq 0 \rightsquigarrow$ voksende, $f' \leq 0 \rightsquigarrow$ avtagende).

Ekstremalpkt: $f'(x) = 0$

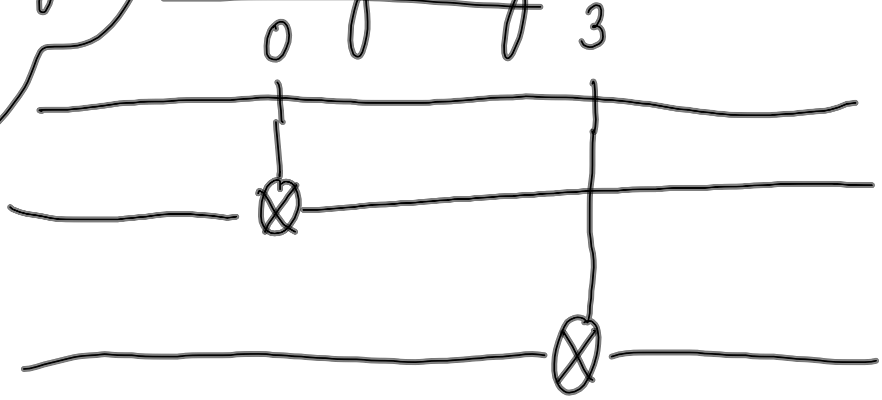


c) $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}\left(1-x-\dfrac{(2-x)^2}{3-x}\right)$

Stygg ~~lett~~ regning

Fortegnslinje:



$\dfrac{1}{(x^4)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

$\dfrac{1}{((3-x)^2)^{\frac{1}{3}}}$

M: $$1 - x - \frac{(2-x)^2}{3-x} = 0$$

$$1 - x = \frac{(2-x)^2}{3-x}$$

$$3 - \cancel{x - 3x} + \cancel{x^2} = 4 - \cancel{4x} + \cancel{x^2}$$

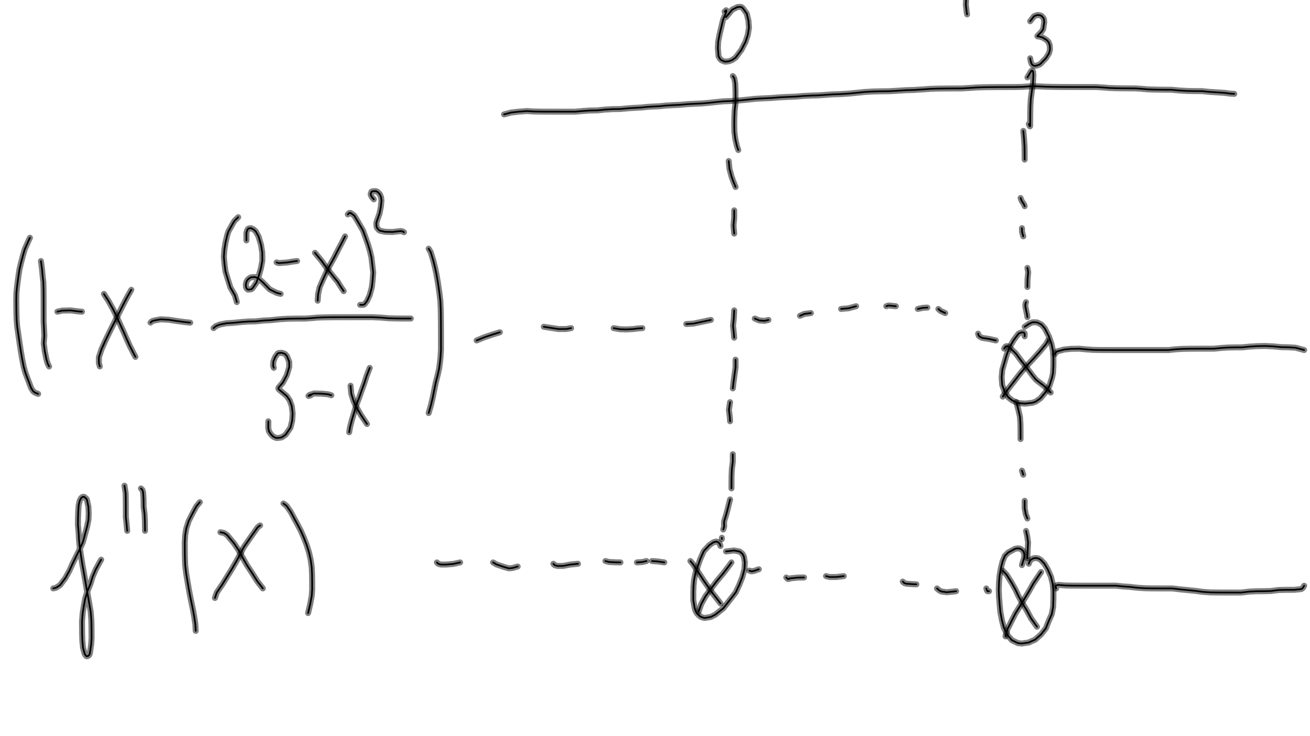
Aldri sant $\Rightarrow$ Parantesen er aldri 0.

Kun ikke def. i $x = 3$.

Vil bestemme fortegn for $x < 3$: Setter inn $x = 0$ i uttrykk

$$1-0-\frac{2^2}{3}=1-\frac{4}{3}<0.$$

Setter inn $x=4$ for å bestemme fortegn for $x>3$: $\left(1-4-\frac{(-2)^2}{-1}\right)>0$



f er konkav (siden $f'' \leq 0$) for $x \in (-\infty, 0]$ og $x \in [0, 3]$, og f er konveks for $x \in [3, \infty)$ (siden $f'' \geq 0$).

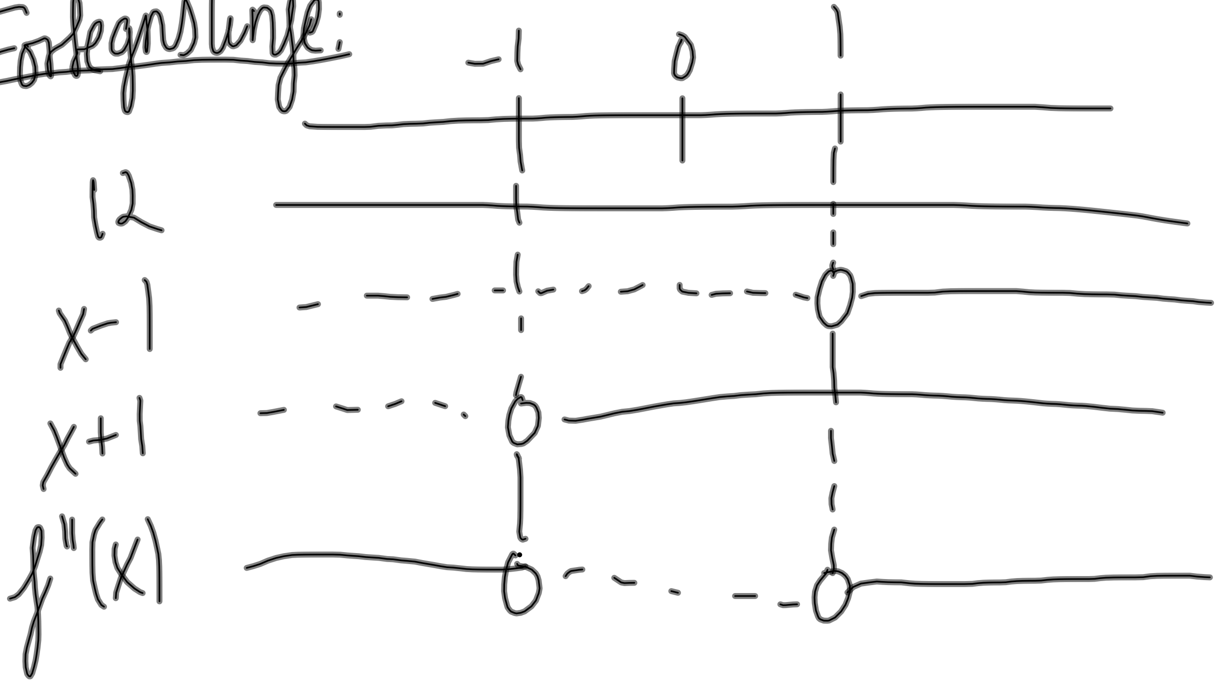
6.4:

3) a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 23$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$
$$= 12(x-1)(x+1)$$

Forlegnslinje:



$f''(x) \geq 0$ for $x \in (-\infty, -1]$ og $x \in [1, \infty)$. Fra Setning 6.4.7 er f konveks i $(-\infty, -1]$ og $[1, \infty)$. Siden $f''(x) \leq 0$ for $x \in [-1, 1]$ er f konkav i dette området.