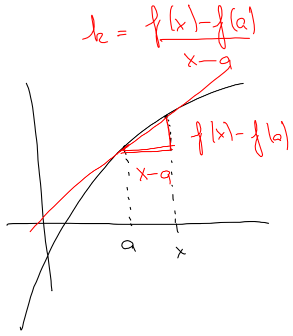
Tillitsstudenter:

Derivasjon

Den deriverte:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



$f'(a)$ er vekstharigheten til f i punktet a og stigningstallet til tangenten i a.

Definisjon: Vi sier at f er deriverbar i punktet a dersom grenseverdien

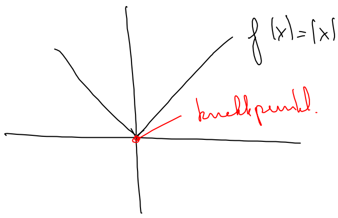
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eksisterer. I så fall skriver vi

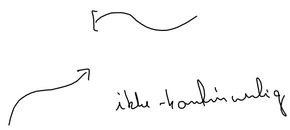
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

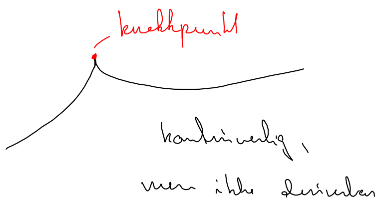
og kaller dette den deriverte til f i punktet a

Eksempel: $f(x) = |x|$ er ikke deriverbar i punktet 0.



Intuitivt:





Observasjon: Dersom f er deriverbar i et punkt, så er den også kontinuerlig (men det omvendte gjelder ikke).

Andre former av definisjon:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xleftrightarrow{x=a+h} \boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Notasjon for den deriverte: $f'(x) = \frac{df}{dx} = Df(x)$

<u>Generelle derivasjonsregler:</u> Hvis f og g er deriverbare i x, så er også $f+g$, $f-g$, fg deriverbare i x. Det samme er $\frac{f}{g}$ forutsatt at $g(x) \neq 0$. De deriverte er:

(i) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

(ii) $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$

(iii) $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(iv) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

<u>Kjerneregelen:</u> Anta at g er deriverbar i punktet x og at f er deriverbar i $g(x)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x)=f(g(x))$ er deriverbar i x og

$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

<u>Spesielle derivasjonsregler:</u>

$DC = 0$ (C er konstant)

$D(x^n) = nx^{n-1}$ (spesialtilfelle $n=\frac{1}{2}$: $D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

$D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

$D(e^x) = e^x$

$D(\sin x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

<u>Eksempel:</u> $f(x) = \underbrace{\sin x \cdot e^{\sqrt{x}}}_{\text{produkt}}$, finn den deriverte.

Ved produktregelen:

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot e^{\sqrt{x}} + \sin x\left(e^{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \cos x\, e^{\sqrt{x}} + \sin x\, e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

kjerneregel med $\sqrt{x}$ som kjerne

$$= e^{\sqrt{x}}\left(\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Nytt triks:

Logaritmisk derivasjon: Hvis f er deriverbar i x og $f(x) \neq 0$, så er

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'.$$

Bevis: Ved kjerneregelen er

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) \quad \Big| \cdot f(x)$$

$$f(x)(\ln|f(x)|)' = f'(x).$$

Eksempel: Finn den deriverte til

$$f(x) = x^3 \cdot (\sin x)^{17} e^{x^2}$$

Regner ut $\ln|f(x)|$ for å kunne bruke logaritmisk derivasjon

$$\ln|f(x)| = \ln(|x|^3 \cdot |\sin x|^{17} e^{x^2})$$

$$= \ln(|x|^3) + \ln(|\sin x|^{17}) + \ln(e^{x^2})$$

$$= 3 \ln|x| + 17 \ln|\sin x| + x^2$$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^b) = b \ln(a)$

Dermed er

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{3}{x} + 17 \frac{1}{\sin x} \cos x + 2x$$

Altså er

$$f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)' = x^3 (\sin x)^{17} e^{x^2} \left(\frac{3}{x} + \frac{17 \cos x}{\sin x} + 2x\right)$$

Eksempel: Deriver $f(x) = x^x$

Kan bruke logaritmisk derivasjon, men foretrekker et annet skitten triks.

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

Kjerneregelen gir nå:

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

"Praktisk" bruk av den deriverte

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Hvis h er liten, så

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx f'(a)$$

Setter vi navn på feilen, får vi

"feilen"

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + E(h) \to 0 \text{ når } h \to 0$$

Gange med h

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \underbrace{E(h)h}_{\text{liten selv sammenlignet med } h.}$$

$$\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\text{tilvekst i } f} \approx f'(a)h$$

med en feil som er liten sammenlignet med h.

Eksempel: En kuleformet ballong har en en radius på 5m. Hvor mye øker volumet hvis øker radien med $h = 0.05$ m?

Sammenheng mellom radius og volum: $\underbrace{V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3}$ | $V'(r) = 4\pi r^2$

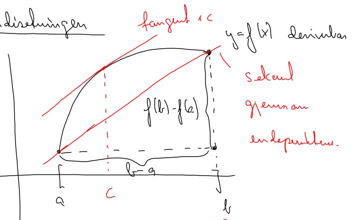
Eksakt økning: $V(5+h) - V(5) = \frac{4}{3}\pi(5+h)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$

$= \ldots$ litt regnestykke.

Tilnærmet økning: $V'(5)h = 4\pi \cdot 5^2 h = 100\pi h$

$= 100\pi \cdot 0.05 = 5\pi$

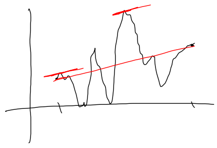
Middelverdisetningen



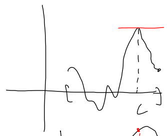
Geometrisk bilde:

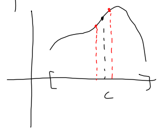
Det finnes minst ett punkt i (a,b) der tangenten er parallell med sekanten:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Lemma: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har sitt maksimum eller minimum i et punkt c der f er deriverbar. Da $f'(c)=0$.





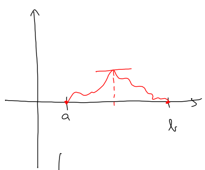
Bevis: Må vise at det er umulig at $f'(c)>0$ og at $f'(c)<0$.

Ser på tilfellet $f'(c)>0$: Siden

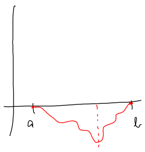
$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0,$$

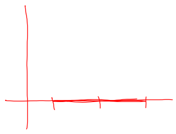
må $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ for alle x tilstrekkelig nær c. For $x>c$, må da $f(x)>f(c)$, så c er ikke et maksimumspunkt. For $x<c$, må $f(x)<f(c)$, så c er ikke et minimumspunkt. Siden tilsvarende gjelder hvis $f'(c)<0$, så er det bare $f'(c)=0$ som kan gi et maks. eller min. punkt.

Rolles teorem: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i (a,b). Anta videre at $f(a)=f(b)=0$. Da finnes det et punkt $c\in(a,b)$ der $f'(c)=0$.



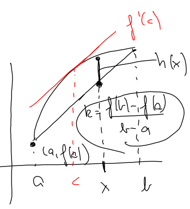
Bevis: Siden f er kontinuerlig, sier ekstremalverdisetningen at f har maks. og min.-verdier. Siden $f(a)=f(b)$, må minst ett av disse punktene c være et indre punkt. Ifølge forrige lemma er $f'(c)=0$.





Middelverdisetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$. Da finnes det en $c\in(a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Bevis: Innfører en ny funksjon

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

Ligningen for sekanten:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Vi $h(a)=h(b)=0$. Ifølge Rolles teorem finnes det da et punkt $c\in(a,b)$ slik at

$$h'(c) = 0.$$

Siden

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dermed

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$