

**Oppgave 1.** La  $z \neq 0$ . Hvorfor går det galt?

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 \\ z^2 &= -1 - z \\ z &= -1 - \frac{1}{z} \\ z^2 + \left(-1 - \frac{1}{z}\right) + 1 &= 0 \\ z^3 &= 1 \\ z &= 1 \\ 1^2 + 1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

**Oppgave 2.** Sjekk at  $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$  for alle  $n \geq 1$  og  $z_i \in \mathbb{C}$ .

(a). Vis at  $|z - w| \geq ||z| - |w||$  for alle  $z, w \in \mathbb{C}$ . Hva betyr dette geometrisk?

(b). Vis at løsningene  $w_1, \dots, w_{2009}$  til  $z^{2009} + 2008z + 2010 = 0$  tilfredsstiller  $|w_i| > 1$ .

(c). La  $w_1, w_2$  være røttene til  $P(z) = z^2 + pz + q$  slik at  $w_1 + w_2 = 292$  og  $w_1 - w_2 = 280$ .  
Regn ut  $p$  og  $q$ . Vis at hvis  $|z| \leq 1$ , da er  $|P(z)| \leq 2009$ .

**Oppgave 3.** Vis at

$$z^{2n} - 1 = (z - 1)(z + 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( z^2 - 2z \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right),$$

og bruk dette til å vise at

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

**Oppgave 4.** Regn ut

$$\sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{5\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} + \sin \frac{9\pi}{11}.$$

**Oppgave 5.** La  $a \in \mathbb{R}$ . Da er det nøyaktig en av tre muligheter som kan være tilfelle:

(i)  $a > 0$  eller (ii)  $a = 0$  eller (iii)  $a < 0$ . Stemmer dette hvis  $a \in \mathbb{C}$ ?

**Oppgave 6.** Kaptein Sabeltann og røvergjengen hans har gjemt en skattekiste på en karibisk øy. Tilfeldigvis, kommer du over et skattekart som forteller hvor skatten befinner seg på den karibiske øya: Gå fra graven til palmetreet. Snu deg  $\frac{\pi}{2}$  radianer mot venstre og gå like stor avstand. Marker stedet du står på nå med et rødt flagg. Dra tilbake til graven. Gå fra graven til dødningshodet. Snu deg  $\frac{\pi}{2}$  radianer mot høyre og gå like stor avstand. Marker stedet du står på nå med et blått flagg. Skatten ligger halvveis mellom det røde flagget og det blåe flagget.

En dag reiser du til den karibiske øya for å finne skatten. Da du ankommer øya legger du merke til at graven er forsvunnet, men palmetreet og dødningshodet er til stede. Finner du skatten (gitt at du ikke orker å grave opp hele øya)?