Obligatorisk oppgave i MAT 1100, H-04

Innleveringsfrist: *Fredag 1. oktober, 2004, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk å skrive navn og gruppenummer på besvarelsen!** *Dersom du på grunn av sykdom eller lignende har behov for å utsette innleveringen, må du sende søknad til Elisabeth Seland (rom B 726, NHA, e-post: elisabhh@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Husk at sykdom må dokumenteres gjennom legeattest! Se forøvrig*

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h04/Obliger.xml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver.

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 50% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *(for hånd eller på datamaskin) og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Oppgavesettet består av fem oppgaver.

Oppgave 1: I denne oppgaven er z og w de komplekse tallene $z = 1 + i\sqrt{3}$ og $w = 1 + i$.
a) Regn ut zw og $\frac{z}{w}$.
b) Skriv z og w på polarform.
c) Bruk svarene i b) til å finne polarformen til $\frac{z}{w}$. Finn så de eksakte verdiene til $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$.

Oppgave 2:
a) Vis at $r = 1 - 2i$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 + 2z^2 - 3z + 20$.
b) Finn de andre røttene til $P(z)$ og skriv opp den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z)$.

Oppgave 3: Finn grenseverdiene:
a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x}$
c) $\lim_{x\to 0}(1 - \tan x)^{\frac{1}{x}}$
d) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x})$

Oppgave 4: Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = x^2 + 2x$ er kontinuerlig i punktet $a = 2$.

Oppgave 5:
a) Finn definisjonsområdet til funksjonen $g(x) = \frac{x}{\tan x}$.
b) Regn ut $g'(x)$.
c) Vis at $\tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$ når $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Bruk dette til å vise at g er avtagende i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.

I resten av denne oppgaven er $f : (-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$ funksjonen definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = 0 \\ 0 & \text{hvis } x = \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{\tan x} & \text{hvis } x \neq 0, \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

d) Tegn grafen til f (bruk gjerne lommeregner som hjelpemiddel).
e) Vis at f er kontinuerlig.
f) Avgjør om f er deriverbar i punktene $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}$, og finn i så fall den deriverte i disse punktene.

Lykke til!