Løsninger problemsett 6, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Vi sier at en kontinuerlig funksjon f er like eller jamn hvis $f(x) = f(-x)$ for alle x der f er definert, og ulike eller odde hvis $f(x) = -f(-x)$. La

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

a) Vis at hvis f er en like funksjon på $[-a, a]$, er

$$I = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

b) Hva er I hvis f er ulike?

c) La $l_1(x)$ og $l_2(x)$ være like og $u_1(x)$ og $u_2(x)$ ulike funksjoner på $[-a, a]$. Vis at $l_1(x)\cdot l_2(x)$ og $u_1(x) \cdot u_2(x)$ er like funksjoner på dette samme intervallet, mens $l_1(x) \cdot u_1(x)$ er ulike. Hva kan man si om funksjonene om man erstatter multiplikasjon med addisjon?

d) Fins det noen funksjoner som er både like og ulike?

Løsning:

a) Vi har at $I = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$. Gjør vi substitusjonen $u = -x$ i det første integralet, får vi $I = -\int_{-(-a)}^{0} f(-u)du = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(u)du$ slik at $I = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

b) I dette tilfellet får vi $I = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}(f(-x) + f(x))dx = \int_{0}^{a} 0dx = 0$. Det kan lønne seg å tegne situasjonen.

c) Siden $l_1(-x)l_2(-x) = l_1(x)l_2(x)$ og $u_1(-x)u_2(-x) = (-u_1(x))(-u_2(x)) = u_1(x)u_2(x)$, er $l_1(x)l_2(x)$ og $u_1(x)u_2(x)$ like funksjoner, mens $l_1(x)u_1(x)$ er ulike siden $l_1(-x)u_1(-x) = l_1(x)(-u_1(x)) = -l_1(x)u_1(x)$.

På samme måte kan man vise at summen av 2 (u)like funksjoner er en (u)like funksjon. Summen av en like og en ulike funksjon kan man imidlertid ikke si stort om: x^2 er like og x er ulike mens summen $x^2 + x$ ikke er noen av delene.

d) Anta at f er både like og ulike. Da er $f(x) = f(-x)$ (like) og $-f(x) = f(-x)$ (ulike). Følgelig er $f(x) = -f(x)$, så $2f(x) = 0$ og endelig $f(x) = 0$ for alle x.

2. Beregn integralene med så lite integrasjon som mulig.

a)

$$\int_{-42}^{42} xdx.$$

b)

$$\int_{-2}^{2} (x^{2007} + x^{2008} + x^{2009})dx.$$

c)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \tan x dx.$$

d)

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)dx.$$

(Hint: Finn en faktorisering av integranden.)

e)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)dx.$$

Løsning:

a) Funksjonen x er ulike. Fra forrige oppgave har vi at integralet er 0.

b) Både x^{2007} og x^{2009} er ulike funksjoner og bidrar følgelig med 0 til integralet. Derfor blir svaret $\int_{-2}^{2} x^{2008}dx = \frac{2^{2010}}{2009}$. Legg merke til at x^{2008} er en like funksjon, men at denne observasjonen ikke gjør integralet nevneverdig enklere å beregne.

c) Her har vi produktet av en like funksjon x^2 og en ulike funksjon $\tan x$. Ved oppgave 1c) er dette en ulike funksjon. Integralet blir følgelig 0.

d) Siden $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ ønsker vi å beregne $\int_0^2 (x-1)^3 dx = \int_{-1}^{1} u^3 du = 0$.

e) Legg merke til at integranden er lik $\cos(2x)$. Vi integrerer denne over et intervall av lengde π som er nettopp perioden til $\cos(2x)$. Følgelig blir integralet 0.

3. a) La f være en kontinuerlig funksjon på $[a, b] \subset \mathbb{R}$ så $f(x) + f(a + b - x) = c \in \mathbb{R}$ for alle $x \in [a, b]$. (Dette er en generalisering av oppgave 1: Hvis $a + b = c = 0$, er f en odde funksjon.) Vis at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)c.$$

b) Finn

$$\int_{-1}^{1} \arccos(x^3)dx.$$

c) Finn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + e^{\sin x}}.$$

d) Finn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + e^{\cos(x+2009)}}.$$

Løsning:

a) La $I = \int_a^b f(x)dx$. Med substitusjonen $u = a+b-x$ får vi $I = \int_{a+b-a}^{a+b-b} f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-u)du$. Kaller vi variabelen x igjen, har vi at $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, så $I+I = 2I = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b (f(x)+f(a+b-x))dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$. Dette gir at $I = \frac{1}{2}(b-a)c$

b) Siden $\arccos(x^3) + \arccos((1-1-x)^3) = \arccos(x^3) + \arccos(-x^3) = \arccos(x^3) + \pi - \arccos(x^3) = \pi$, kan vi anvende resultatet over: $\int_{-1}^{1} \arccos(x^3)dx = \frac{1}{2}(1-(-1))\pi = \pi$.

c) Vi har $\frac{1}{1+e^{\sin x}} + \frac{1}{1+e^{\sin(-x)}} = \frac{1}{1+e^{\sin x}} + \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+1} = \frac{1+e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}} = 1$. Derfor blir $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+e^{\sin x}} = \pi$.

d) Siden $\cos(x+a)$ og $\sin x$ bare er forskyvninger av hverandre vil $\frac{1}{1+e^{\sin x}}$ og $\frac{1}{1+e^{\cos(x+2009)}}$ også bare være forskyvninger av hverandre. Nå integrerer vi disse funksjonene over en hel periode, og må derfor få like integraler.

4. Beregn integralene uten å regne.

a)
$$\int_1^{11} (\log(x) + \log(\frac{\pi}{x}))dx.$$

b)
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx. \text{ (Hint: Sammenlign integralet med } \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx.\text{)}$$

c)
$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx.$$

d)
$$\int_1^{2008} \frac{\sqrt{\log(x)}}{\sqrt{\log(2009-x)} + \sqrt{\log(x)}} dx.$$

Løsning:

a) Integranden er alltid lik $\log \pi$, følgelig er integralet lik $(11-1)\log\pi = 10\log\pi$.

b) Både sinus- og cosinusfunksjonen har periode 2π og er forskyvninger av hverandre. Kvadratene på funksjonene må derfor også ha periode 2π og være forskyvninger av hverandre. Derfor er $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$, så $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = \pi$.

c) Det gjelder faktisk at $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$ har periode π. Med samme argument som i forrige oppgave blir derfor integralet $\frac{\pi}{2}$.

d) Man kan bruke oppgave 2a) eller regne. Gjør vi det siste, får vi

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{2008} \frac{\sqrt{\log(x)}}{\sqrt{\log(2009-x)} + \sqrt{\log(x)}} dx = \int_{2008}^{1} \frac{\sqrt{\log(2009-u)}}{\sqrt{\log(2009-u)} + \sqrt{\log(u)}} (-du) \\ &= \int_1^{2008} \frac{\sqrt{\log(2009-x)}}{\sqrt{\log(2009-x)} + \sqrt{\log(x)}} dx \end{aligned}$$

så $2I = \int_1^{2008} dx = 2008 - 1 = 2007$ og $I = \frac{2007}{2}$.

5. For hver $c \in (0, \pi]$ definerer vi $T(c)$ som området avgrensa av de vertikale linjene $x = c$ og $x = 2c$, x-aksen og funksjonen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. La $A(c)$ være arealet av $T(c)$ der vi som vanlig lar områder i 1. kvadrant bidra positivt til arealet mens områder i 4. kvadrant bidrar negativt. Drøft hvilke c som gir størst og minst areal $A(c)$.

Løsning: Med områdets definisjon, ser vi at arealet er gitt ved

$$A(c) = \int_c^{2c} f(x)dx = \int_c^{2c} \frac{\sin x}{x} dx$$

Skal vi finne ekstremalverdipunkter til en funksjon, lønner det seg ofte å derivere. Det gjør vi her ved hjelp av analysens fundamentalteorem (se også oppgave 8.3.6):

$$A'(c) = f(2c)\cdot 2 - f(c)\cdot 1 = 2\frac{\sin(2c)}{2c} - \frac{\sin c}{c} = \frac{1}{c}(\sin(2c) - \sin c) = \frac{\sin c}{c}(2\cos c - 1)$$

Dette er 0 når $\sin c = 0$ eller $\cos c = \frac{1}{2}$. (Nevneren c skaper ikke bry da dens definisjonsområde er $(0,\pi]$.) Den første ligninga gir oss løsninga $c = k\pi$ og den andre $c = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, begge deler for $k \in \mathbb{Z}$. I vårt definisjonsområde er derfor $\{\pi, \frac{\pi}{3}\}$ de kritiske punktene. Vi bør derfor undersøke $A(\pi)$ og $A(\frac{\pi}{3})$ nærmere.

Siden $A(\pi) = \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ og $f(x)$ er negativ på $(\pi, 2\pi)$ (og positiv på $(0,\pi)$), må dette være et minimumspunkt. Dette blir veldig opplagt om man tegner funksjonen $f(x)$ og ser hvordan arealet $A(c)$ er definert. Geometriske betraktninger er ofte å foretrekke framfor å derivere en ekstra gang og se på fortegn.

Det virker intuitivt riktig at $A(\frac{\pi}{3})$ må være et maksimumspunkt, igjen ved kun å se på ei skisse. La oss allikevel gjøre det formelt med annenderivert: $A''(c) = \frac{2c\cos(2c) - \sin(2c) - c\cos c + \sin c}{c^2}$, så

$$A''(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{\pi}{3})^2} = -\frac{9}{2\pi} < 0$$

$A(\frac{\pi}{3})$ er altså et maksimumspunkt.

Legg merke til at den deriverte i endepunktet π er 0. Dette må normalt sjekkes uavhengig av hva den deriverte der er, men nå har vi allerede gjort det. Merk også at vi ikke kan finne en enkel (hva nå det skal bety) antiderivert til $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, men at vi allikevel er i stand til å finne ekstremalverdipunkter for funksjonen vår takket være analysens fundamentalteorem.

6. Definer $f(x) = \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x)$ og $g(x) = \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$. Finn $f'(x)$ og $g'(x)$. Forklar hvorfor den ene funksjonen er konstant på hele $\mathbb{R}$ mens den andre ikke er det.

   Løsning: Vi deriverer og får $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$ og $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. I følge korollar 6.2.4 i Kalkulus er en funksjon konstant på et intervall der dens deriverte er 0. For f gjelder dette på hele $\mathbb{R}$, mens det for g bare gjelder på $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$, en union av 2 intervaller; g ikke engang er definert i 0. Siden $g(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ og $g(1) = \frac{\pi}{2}$ ser vi at $g(x)$ bare avhenger av fortegnet til x, mens for eksempel $f(0) = \frac{\pi}{2}$ gir at $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$. (Tegnet $\equiv$ brukes noen ganger for å poengtere identisk likhet, i dette tilfellet at $f(x) = \frac{\pi}{2}$ for alle x.)