UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 14. oktober 2011
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag

Oppgave 1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da er z lik:

A) $-2 + 2i\sqrt{3}$
B) $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3} - 2i$
E) $-2\sqrt{3} + 2i$

Riktig svar: B) Begrunnelse:

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4i\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

Oppgave 2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = \sqrt{3} - i$ har polarkoordinater:

A) $r = 2, \theta = \frac{11\pi}{6}$
B) $r = 2, \theta = \frac{5\pi}{6}$
C) $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{8}$
D) $r = 2, \theta = \frac{7\pi}{6}$
E) $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{11\pi}{6}$

Riktig svar: A) Begrunnelse:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Videre er $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, og siden θ ligger i fjerde kvadrant, må da $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (2 poeng) Mengden $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < |z-1|\}$ består av alle punkter $z = x + iy$ i det komplekse planet som ligger:

A) over linjen $y = x$
B) på den reelle aksen
C) på den imaginære aksen
D) under linjen $y = x$
E) under linjen $y = -x$

Riktig svar: E) Begrunnelse: $|z+i|$ er avstanden fra z til punktet $-i$, mens $|z-1|$ er avstanden fra z til punktet 1. Oppgaven spør altså etter de punktene som ligger nærmere $-i$ enn 1. Midtnormalen mellom disse punktene er $y = -x$ (lag en figur). De punktene som ligger nærmest $-i$, er de som ligger under denne linjen.

Oppgave 4. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n+8}{2n^2+7n^3}$ er lik:

A) 2
B) 4
C) $\frac{8}{7}$
D) ∞
E) $\frac{4}{7}$

Riktig svar: E) Begrunnelse:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n+8}{2n^2+7n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(4+3n^{-2}+8n^{-3})}{n^3(2n^{-1}+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+3n^{-2}+8n^{-3}}{2n^{-1}+7} = \frac{4}{7}$$

Oppgave 5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arctan(\cos x)$ er:

A) $\frac{1}{1+\cos^2 x}$
B) $-\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$
C) $-\frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$
D) $-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$
E) $\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

Riktig svar: D) Begrunnelse: Ved kjerneregelen er:

$$(\arctan(\cos x))' = \frac{1}{1+\cos^2 x}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

Oppgave 6. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arcsin(x^3)$ er:

A) $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$
B) $\frac{3x^2}{1+x^6}$
C) $3x^2 \arccos x^3$
D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$
E) $-\frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$

(Fortsettes på side 3.)

Riktig svar: A) Begrunnelse: Ved kjerneregelen er;

$$(\arcsin(x^3))' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^6}}$$

Oppgave 7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{\sin x}$ er lik:

A) 0
B)1
C) $-\frac{1}{2}$
D) ∞
E) 2

Riktig svar: E) Begrunnelse: Ved L'Hôpitals regel er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{\cos x} = 2$$

Oppgave 8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$ er lik:

A) 2
B) $\frac{1}{4}$
C) 0
D) $\frac{1}{3}$
E) 6

Riktig svar: E) Begrunnelse: Ved L'Hôpitals regel er

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot 2x}{\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot 2}{\cos x} = 6$$

Oppgave 9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = 3e^x + 2$ er:

A) $\frac{1}{3}\ln(y-2)$
B) $\frac{1}{3e^2+2}$
C) $\frac{y-\ln 2}{\ln 3}$
D) $\ln\frac{y-2}{3}$
E) $\frac{y-\ln 2}{3}$

Riktig svar: D) Begrunnelse: Vi løser ligningen $y = 3e^x + 2$ for y:

$$y = 3e^x + 2 \iff 3e^x = y - 2 \iff e^x = \frac{y-2}{3} \iff x = \ln\frac{y-2}{3}$$

Oppgave 10. (2 poeng) Alt du vet om den strengt avtagende, kontinuerlige funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er at $f(3) = 2$ og $f'(3) = -4$. Hva kan du da si om den omvendte funksjonen g?

A) $g'(3) = -\frac{1}{4}$
B) $g'(2) = -\frac{1}{4}$
C) $g'(-4) = -3$

(Fortsettes på side 4.)

D) $g'(2) = -4$
E) $g'(2) = 3$

Riktig svar: B) Begrunnelse: Siden $f(3) = 2$, er:

$$g'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

Oppgave 11. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x} - 3x)$ er lik:

A) 0
B) $\frac{1}{6}$
C) 9
D) ∞
E) $\frac{1}{3}$

Riktig svar: B) Begrunnelse: Vi ganger med det konjugerte uttrykket oppe og nede:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x} - 3x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x} - 3x)(\sqrt{9x^2+x} + 3x)}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x} - 3x)(\sqrt{9x^2+x} + 3x)}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 + x - 9x^2}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{9+x^{-1}} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+x^{-1}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

Oppgave 12. (3 poeng) Kvadratrøttene til det komplekse tallet $2 + 2i\sqrt{3}$ er:

A) $\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
B) $\pm(1 + i\sqrt{3})$
C) $\pm(\sqrt{3} + i)$
D) $\pm(\sqrt{3} - i)$
E) $\pm(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$

Riktig svar: C) Begrunnelse: Polarkoordinatene til z er gitt ved:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

og $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Siden z ligger i første kvadrant, er $\theta = \frac{\pi}{3}$. Polarkoordinatene til w_0 er da

$$\rho = \sqrt{r} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{og} \quad \phi = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Dermed er

$$w_0 = \rho\cos\phi + i\rho\sin\phi = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + i2\frac{1}{2} = \sqrt{3} + i$$

(Fortsettes på side 5.)

Den andre kvadratroten er $w_1 = -w_0 = -\sqrt{3} - i$.

Oppgave 13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} |x|^{\sin x}$ er lik:

A) 0
B) e
C) 1
D) ∞
E) e^2

Riktig svar: C) Begrunnelse: Vi skriver $|x|^{\sin x} = e^{\ln|x|\sin x}$ og bruker L'Hôpitals regel på eksponenten:

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0$$

Altså er

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln|x|\sin x} = e^0 = 1$$

Oppgave 14. (3 poeng) Det *reelle* tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har -2 og $-i$ som røtter. $P(z)$ er lik:

A) $z^3 + z^2 - z + 2$
B) $z^3 - z^2 + 4z + 4$
C) $z^3 - z^2 + z - 1$
D) $z^3 + 3z^2 - z$
E) $z^3 + 2z^2 + z + 2$

Riktig svar: E) Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, er det konjugerte tallet $\overline{-i} = i$ også en rot. Dermed er

$$P(z) = (z-i)(z+i)(z+2) = (z^2+1)(z+2) = z^3 + 2z^2 + x + 2$$

Oppgave 15. (3 poeng) Den deriverte til funksjonen $f(x) = (2+\cos x)^{e^x}$ er:

A) $\left(e^x \ln(2+\cos x) - \frac{e^x \sin x}{2+\cos x}\right)(2+\cos x)^{e^x}$
B) $(2+\cos x)^{e^x - 1} e^x$
C) $(2+\cos x)^{e^x}(-\sin x)$
D) $(2+\cos x)^{e^x-1}e^x - (2+\cos x)^{e^x}\sin x$
E) $(2+\cos x)^{e^x}\ln(2+\cos x)$

Riktig svar: A) Begrunnelse: Vi bruker logaritmisk derivasjon. Siden $\ln f(x) = \ln\left((2+\cos x)^{e^x}\right) = e^x \ln(2+\cos x)$, har vi

$$(\ln f(x))' = e^x \ln(2+\cos x) + e^x \frac{1}{2+\cos x}(-\sin x) = e^x \ln(2+\cos x) - e^x \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

Dermed er

$$f'(x) = (\ln f(x))' f(x) = \left(e^x \ln(2+\cos x) - e^x \frac{\sin x}{2+\cos x}\right)(2+\cos x)^{e^x}$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 16. (3 poeng) $(1+i)^{12}$ er lik:

A) 2
B) $(1+i)2^5$
C) -2^6
D) $2^5(1+i\sqrt{3})$
E) $2^5(\sqrt{3}-i)$

Riktig svar: C) Begrunnelse: Polarformen til $z = (1+i)$ er $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Dermed er

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{12} = \sqrt{2}^{12}e^{3\pi i} = 2^6(-1) = -2^6$$

Oppgave 17. (3 poeng) I det reelle polynomet $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ er n et partall og $a_0 < 0$. Da må:

A) $P(x)$ være konveks
B) $P(x)$ ha minst to reelle røtter
C) $P(x)$ være negativ for alle $x \in \mathbb{R}$
D) $P(x)$ ha to komplekse røtter
E) $P(x)$ være strengt voksende

Riktig svar: B) Begrunnelse: Vi har $P(0) = a_0 < 0$, mens

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n(1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1x^{-n+1} + a_0x^{-n}) = \infty$$

Skjæringssetningen forteller oss at P må ha en rot i intervallet $(0,\infty)$. Tilsvarende er

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n(1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1x^{-n+1} + a_0x^{-n}) = \infty$$

siden n er et partall, så vi kan bruke skjæringssetningen til å påvise en rot i intervallet $(-\infty, 0)$. Følgelig har P minst to reelle røtter.

Oppgave 18. (3 poeng) Funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i hele $[0,1]$ og deriverbare i alle indre punkter $c \in (0,1)$. Hvis det eneste du ellers vet er at $f(0) = -1$ og $f'(c) \geq 1$ for alle $c \in (0,1)$, så kan du konkludere at:

A) f er konveks
B) f har et maksimumspunkt i $(0,1)$
C) f' er avtagende
D) f har nøyaktig ett nullpunkt
E) f er konkav

Riktig svar: D) Begrunnelse: Ved middelverdisetningen er

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c) \geq 1$$

for en $c \in (0,1)$. Følgelig er

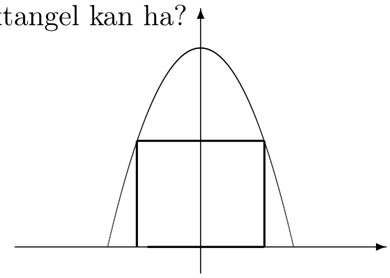
$$f(1) \geq f(0) + 1 = -1 + 1 = 0$$

(Fortsettes på side 7.)

Skjæringssetningen forteller oss nå at f har minst ett nullpunkt. Siden $f'(x) > 0$, er funksjonen strengt voksende, og kan derfor ikke ha mer enn ett nullpunkt.

Oppgave 19. (3 poeng) Figuren nedenfor viser parabelen $f(x) = 12 - x^2$ og et rektangel som ligger under funksjonsgrafen og over x-aksen. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?

A)$18\sqrt{2}$
B) 32
C) $20\sqrt{3}$
D) $24\sqrt{2}$
E) 28



Riktig svar: B) <u>Begrunnelse:</u> Lar vi x være posisjonen til den høyre "veggen" til rektanglet, blir arealet

$$A(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

Derivasjon gir

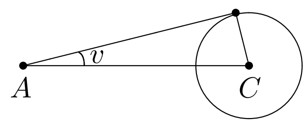
$$A'(x) = 24 - 6x^2 = 6(4 - x^2)$$

Dette uttrykket er null for $x = 2$, og det er lett å se at denne verdien gir et maksimalpunkt for $A(x)$. Altså er største verdi

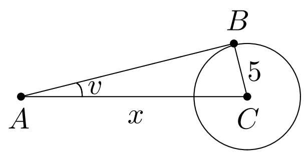
$$A(2) = 2 \cdot 2 \cdot (12 - 2^2) = 32$$

Oppgave 20. (3 poeng) En sirkulær skive med radius 5 cm beveger seg langs en rett linje mot et punkt A. Figuren nedenfor viser situasjonen sett ovenfra. Når avstanden fra A til sentrum C i sirkelen er 13 cm, øker vinkelen v med 0.5 radianer i sekundet. Hvor fort nærmer sirkelen seg A i dette øyeblikket?

A) 16.9 cm/s
B) 15.6 cm/s
C) 6 cm/s
D) 14.4 cm/s
E) 13 cm/s



Riktig svar: B) <u>Begrunnelse:</u> Figuren nedenfor viser skiven i en generell situasjon, der vi lar x betegne avstanden fra A til C.



Trigonometri på trekanten ABC gir $\sin v = \frac{5}{x}$. Deriverer vi dette uttrykket mhp. tiden t, får vi

$$\cos v \; v' = -\frac{5}{x^2} x'$$

Løser v for x', får vi:

$$x' = -\frac{x^2 \cos v}{5} v'$$

(Fortsettes på side 8.)

Vi er interessert i hva som skjer når $x = 13$ cm. Da er $AB = 12$ cm (bruk Pythagoras), og følgelig blir $\cos v = \frac{12}{13}$. Dermed har vi

$$x' = -\frac{13^2 \cdot \frac{12}{13}}{5} \cdot 0.5 \text{ cm/s} = -\frac{13 \cdot 12}{10} \text{ cm/s} = -15.6 \text{ cm/s}$$