MAT1100 - Grublegruppen
Notat 7

Jørgen O. Lye

Variasjonsregning

Brakistokrone

I dette notatet skal vi se litt på en veldig nyttig variant av min/maks problemer som kalles variasjonsregning. For å være historisk korrekte og for å ha bakgrunnen på plass skal vi starte med et historisk problem, nemlig det såkalte brakistokrone-problemet (brachistochrone). Tenk deg at 2 punkter $(x_1, y_1) og ((x_2, y_2)$ er fiksert i planet. Hvis du tenker deg at planet modellerer en vegg, hvor y er høyderetningen, så er spørsmålet: hvordan skal man forbinde de 2 punktene slik at en perle som sklir friksjonsfritt langs snoren kommer raskest fra det ene til det andre punktet? Man tenker som altså at objektet slippes med null hastighet og bare akselereres av et uniformt gravitasjonsfelt. Navnet på problemet betyr kortest tid.

Hvordan kan man formulere dette problemet? Hvis man tenker seg at man deler tiden det tar inn i små biter Δt, så er det vi vil minimere

$$T = \sum \Delta t$$

Når inndelingen blir finere og finere blir dette til et integral:

$$T = \int dt$$

Hvordan uttrykker vi tiden ved kjente størrelser? Vel, vi vet at farten v er gitt som $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, strekning over tid (her er $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$). Siden energien er antatt bevart, så må vi ha $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, slik at $v = \sqrt{2gy}$. Altså har vi

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\sqrt{2gy}}$$

Hvis en så tenker seg at man gjør Δt mindre og mindre, så skriver man gjerne

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Hvis en videre tenker som at løsningskurven vi søker skal kunne skrives som en funksjon av x, dvs $y = y(x)$, så kan man skrive $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$. Man kan enten tenke på dette som bare formelle manipulasjon: det er bare symboler. Eller så kan man tenke på det som infinitesimaler, uten at vi har sagt hva det skal bety (annet enn intuitivt).

Uansett har man følgende:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

Så oppgaven ser da slik ut: finn den funksjonen $y(x)$ slik at $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, og som er slik at integralet

$$T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy}}\, dx$$

blir minst mulig.

En kommentar er at jeg har skrevet $T[y]$, og ikke $T(y)$. Dette er standard praksis når funksjone tar inn en funksjon og gir ut et tall, som er vår situasjon. Funksjoner som tar inn funksjoner og gir ut tall kalles funksjonaler.

Euler-Lagrange

Hvordan løser man noe slikt? Den mer generelle problemstillingen er som følger: Finn en funksjon $y(x)$ som maksimerer/minimerer følgende integral:

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(y(x), y'(x), x)\, dx$$

og som tilfredsstiller $y(x_1) = y_1$ og $y(x_2) = y_2$. L står her for Lagrange-funksjon, og er en gitt størrelse. Den kan være en funksjon av y, y', og x.

Når man finner ekstremalpunkter til en funksjon i kalkulus er det vanlig å sette den deriverte lik 0. Kan vi gjøre noe slikt her? Ja, det kan vi. Husk først at man kan skrive en Taylor-utvikling som

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \cdots$$

Starten av en Taylor-utvikling av en funksjon av flere (2 her) variable ser slik ut:

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta y + \cdots$$

Det vi skal med Taylor, er at vi skal vi skal poengtere at en funksjons deriverte er gitt ved førsteordensleddet i Taylor-utviklingen. Dette virker kanskje helt bakvendt, men det er ganske praktisk å tenke slik av og til! Tenk deg at $y(x)$ er ekstremalpunkt for $S[y]$. Hvis man tenker seg en liten endring i y, en såkal variasjon (og derav navnet på fagfeltet) δy som tilfredsstiller $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, men er ellers vilkårlig, og Taylorutvikler L så får man

$$L(y+\delta y, y'+\delta y', x) = L(y, y', x) + \frac{\partial L}{\partial y}(y,y',x)\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}(y,y',x)\delta y' + \cdots$$

Vi definerer så δS til å bety

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} L(y+\delta y, y'+\delta y', x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} L(y,y',x)\,dx$$

med alle høyere ledd i δy, $\delta y'$ droppet. Med Taylor får man

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx}\,dx$$

Hvis man delvis integrerer siste ledd får man

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx}\,dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\,dx$$

siden $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$. Alt å alt har vi da

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right)\delta y\,dx$$

Siden δy er vilkårlig, så må det i parantesen forsvinne. Dvs at vi har argumentert (litt løst og fast) for at hvis $S[y]$ skal ha et ekstremalpunkt (eller kurve) $y(x)$, så må man ha at

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

Denne ligningen kalles Euler-Lagrange-ligningen, og er så og si nøkkelen til variasjonsregning.

Nok en kommentar: Teknisk sett kan man ha samme situasjon som i kalkulus med at $f'(a) = 0$, men at a hverken er maksimum eller minimum. Det finnes måter å dobbelderivere $S[y]$ på som en kan bruke for å sjekke slikt, med analoge teoremer som kalkulus for hva fortegn skal bety for den dobbelderiverte. Vi skal derimot enten tro/håpe vi har et ekte ekstremalpunkt, eller så vil det være klart fra oppgaven at vi har et minimum eller maksimum.

Tilbake til Brakistokrone

Vi har

$$S[y] = T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy}}\, dx$$

slik at

$$L = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy}}$$

Siden vi skal derivere og sette ting lik 0, så kan vi droppe konstanten $\frac{1}{\sqrt{2g}}$. En fysisk ting vi har fått ut av Euler-Lagrange allerede nå er at hverken perlens masse eller styrken på gravitasjonsfeltet har noe å si for hvilken kurve som er den raskeste. Hvor rask den raskeste kurven er kommer derimot til å avhenge av g.

Man kan nå enten begynne å regne og komme frem til en ikke-lineær differensialligning, eller man kan prøve å løse for x som funksjon av y. Dvs.

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1 + x'(y)^2}{2gy}}\, dy$$

Man ser da at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

slik at ligningen man trenger å løse er

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = C$$

hvor C er en konstant. Dvs

$$\frac{x'(y)}{2gy(1 + x'(y)^2)} = C$$

Hvis man bruker at $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$, dvs derivasjon av inversfunksjoner, så kan dette skrives som

$$\frac{1}{2gy(y'(x)^2 + 1)} = C^2$$

eller

$$y(y'(x)^2 + 1) = \frac{1}{2gC^2} = K^2$$

Denne er en separabel differensialligning, så den kan egentlig løses eksplisitt:

$$x(y) = K^2 \arctan\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{K^2 - y}}\right) - \sqrt{y}\sqrt{K^2 - y}$$

En iherdig derivatør kan vise dette.

Det er vanligere å parametrisere denne løsningen, dvs skrive

$$x = x(t) = \frac{1}{2}K^2(t - \sin(t))$$

$$y = y(t) = \frac{1}{2}K^2(1 - \cos(t))$$

Korteste avstander i planet

Euklidske avstander

En annen anvendelse av variasjonsregning er å vise at den korteste veien mellom 2 punkter i det euklidske planet er rette linjer. Vi skal da ha minimum av funksjonalen

$$S = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

Dvs

$$L = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Denne er uavhengig av y, slik at $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, og Euler-Lagrange blir bare til

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = c$$

Altså

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c$$

Dvs

$$y'(x) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = a$$

hvor a er bare en annen konstant. Altså har vi

$$y(x) = ax + b$$

Kanskje ikke noe stort sjokk.

Ikke-euklidske avstander

Merk at avstanden mellom 2 punkter målte vi ved å kjenne ds^2, som euklidsk var $ds^2 = dx^2+dy^2$. Denne kalles linjeelementet for geometrien, og er en veldig viktig størrelse. Generelt kunne en tenke seg at man hadde et linjeelement på formen

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

hvor μ, ν går over dimensjonene. I planet har vi 2 dimensjoner, slik at disse går fra 1 til 2¸ og vi har frem til nå skrevet $x^1 = x$, $x^2 = y$. Euklidsk er $g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$, slik at summen bare gir bidrag for $\mu = \nu = 1$ og $\mu = \nu = 2$. Dessuten endrer ikke avstanden seg i planet. Et annet alternativ er å se på

$$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| y > 0\}$$

med linjeelement

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Avstander blir altså mindre når man beveger seg bort fra x-aksen. Dette er et eksempel på hyperbolsk geometri. La oss se hva linjene er her. Hvis vi finner linjer som funksjon av x først, dvs $y = y(x)$ så blir Lagrange-funksjonen

$$L = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y}$$

Ting vi trenger å regne ut er

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{y\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y(x)y''(x) - y'(x)^2 - y'(x)^4}{y^2(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Slik at Euler-Lagrange reduserer til

$$(1 + y'(x)^2)^2 + y(x)y''(x) - y'(x)^2 - y'(x)^4 = 0$$

Som igjen blir

$$1 + y(x)y''(x) + y'(x)^2 = 0$$

Hvis man bruker produktregel kan dette skrives som

$$1 + \frac{d}{dx}(y(x)y'(x)) = 0$$

Integrerer man begge sider får man

$$x + y(x)y'(x) = c$$

slik at

$$x\,dx + y\,dy = c\,dx$$

som integrerer til

$$x^2 + y^2 = 2cx + d$$

Dette kan omstokkes til

$$(x-c)^2 + y^2 = (d - c^2) = C$$

Hvis $C < 0$ gir dette ingenting. For $C > 0$ gir dette sirkler med sentrum i $(c, 0)$. Noen av linjene i det hyperbolske (halv)planet er derfor halvsirkler med sentrum langs x-aksen.

Hvis man vil ha $x = x(y)$ og finne linjer så får man at

$$L = \frac{\sqrt{1 + x'(y)^2}}{y}$$

som er uavhengig av x. Vi får altså

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = C = \frac{x'(y)}{y\sqrt{1 + x'(y)^2}}$$

Dette kan løses for $x'(y)$ og man finner

$$x'(y) = \frac{cy}{\sqrt{1 - c^2y^2}}$$

Hvis $c \neq 0$ får man at

$$x(y) = -\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2y^2} + d$$

som kan omstokkes til det vi visste, nemlig

$$(x-d)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

Når $c = 0$ derimot får man $x'(y) = 0$, dvs. $x = C$, en konstant. Dette er rette linjer som er parallelle med y-aksen.

Oppsummeringsvis: linjer (kurver som minimerer avstand mellom 2 punkter) i det hyperbolske halvplanet er enten halvsirkler med sentrum i x-aksen eller så er de rette linjer som står normalt på x-aksen.

Kurver som (lokalt) minimerer avstand på denne måten kalles geodeter. Teorien vi har drevet med generaliserer lett til høyere dimensjoner.

En alt for raskt, avansert fysikksmakebit

Noen ha glede av følgende. Man tenker seg et linjeelement $ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, hvor dimensjonen på rommet (inkludert en tidsdimensjon) er 4. Man kan samle innholdet til $g_{\mu\nu}$ i en matrise og ta dens determinant. Hvis man kjenner $g_{\mu\nu}(x)$ kan man også regne ut noen størrelser som har kalles krumning, som i lave dimensjoner er det man tror det er. Det som kalles Ricci-krumningen R er gitt ved en hårete formel med deriverte og summer av $g_{\mu\nu}$-komponenter. Poenget er at hvis man bruker Euler-Lagrange i en generalisert versjon til å ekstrimere følgende funksjonal

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\, d^4x$$

hvor $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ så får man Einstein-ligningene:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Jeg håper å få sagt mer om denne etterhvert.

S kalles forøvrig Einstein-Hilbert "action" (teknisk sett skulle man nok sagt virkning på norsk, men det er det ingen jeg vet om som gjør). Den er oppkalt etter matematikeren David Hilbert som formulerte generell relativitet ca. samtidig som Einstein.