Problemsett 3, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. a) La $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et generelt polynom med heltallige koeffisienter. Anta at den ferdige forkorta heltallbrøken $\frac{p}{q}$ er ei rot i P. Vis at p er en faktor i a_0 og at q er en faktor i a_n.

   b) Bruk dette til å vise at alle rasjonale røtter av $Q(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0$ må være heltallige og gå opp i c_0.

2. Polynomet $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ har ifølge algebraens fundamentalteorem 3 røtter i $\mathbb{C}$. Kall disse p, q og r. Finn a, b og c uttrykt ved p, q og r, og bruk dette til å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} p + q + r &= 2009 \\ qr + rp + pq &= -1 \\ prq &= -2009 \end{aligned}$$

   Hvorfor får vi 6 løsninger?

3. Utled formler lignende de i forrige oppgave for 2. gradsligninger og løs i lys av dette oppgave 3.1.10 i Kalkulus.

4. a) La $\{x_i\}_{i=1}^n$ og $\{y_i\}_{i=1}^n$ være $2n$ reelle tall og definer polynomet

$$P(z) = (x_1 z + y_1)^2 + (x_2 z + y_2)^2 + \cdots + (x_n z + y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i z + y_i)^2$$

   Dette er et polynom av grad 2 i z. Skriv det på formen $P(z) = az^2 + bz + c$.

   b) Ei enkel, men viktig ulikhet sier at $r^2 \geq 0$ for alle reelle tall r. Forklar hvorfor $P(z) \geq 0$ for alle reelle z. Vis at P ikke kan ha 2 forskjellige reelle røtter. (Tenk på hvordan grafen til P måtte sett ut.)

   c) Bruk det du kan om annengradsligninger til å vise *Cauchy-Schwarz-ulikheta*:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$