5.1: Kontinuitet

5) e) $f(x) = \frac{1}{x}$, i pkt. $x=1$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $\delta > 0$ s.a. når $|x-1| < \delta$, så er $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

La $h := x-1$ (så $x = h+1$)

Da er: $\left|f(x) - f(1)\right| = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

$$= \left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|\frac{-(x-1)}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$= \frac{|h|}{|h+1|}$$

Merk: Hvis $|h| < \frac{1}{2}$, så er $|h+1| > \frac{1}{2}$

Dermed er $\frac{1}{|h+1|} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Så hvis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ også, da vil

$$\frac{|h|}{|h+1|} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon .$$

Så velg $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, da er det s.a. når $|x-1| = |h| < \delta$, så er

$$|f(x) - f(1)| = \frac{|h|}{|h+1|} < \varepsilon .$$

5.) g) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $\delta > 0$ s.a. når $|x-4| < \delta$, så er $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

La $h := x - 4$ (så $x = h + 4$)

Da er: $|f(x) - f(4)| = |\sqrt{x} - 2|$

$$< |\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|$$

$\sqrt{x} \geq 0$ for alle x, så $\sqrt{x}+2 \geq 2$ for alle x

$$= |(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)|$$

$$= |x-4| = |h|$$

Velg derfor $\delta = \varepsilon$. Da er det s.a. hvis $|x-4| = |h| < \delta$, så er $|f(x)-f(4)| < |h| < \delta = \varepsilon$

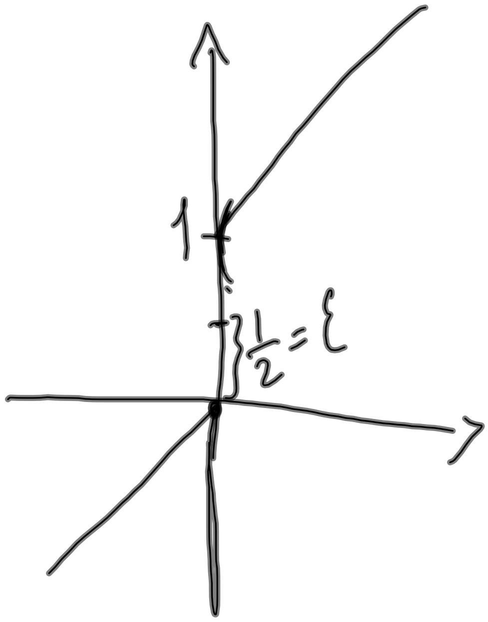
Så f kontinuerlig i $x=4$.

6.) a) ~~$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{for } x \leq 0 \\ x, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$~~

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x > 0 \\ x & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

i

pkt. $x=0$.



Må finne $\varepsilon > 0$ s.a. samme hvilken $\delta > 0$ man velger, så vil det finnes noen x s.a. selvom $|x - 0| = |x| < \delta$, så er

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| > \varepsilon.$$

Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten $\delta > 0$ som velges, vil f. eks. $x = \frac{\delta}{2}$ oppfylle $|x| < \delta$, men siden $x > 0$, vil

$$|f(x) - f(0)| = x + 1 > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Så f er ikke kontinuerlig i $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ i pkt. $x = 0$.

Merk at $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$, så $\cos\frac{1}{x}$ vil ossillere (svinge) raskere og raskere når x nærmer seg 0.

Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten δ som velges vil det være mulig å finne en x s.a. $|x - 0| = |x| < \delta$, men s.a. $\frac{1}{x} = 2k\pi$ for en eller annen k $(\in \mathbb{Z})$. (F. eks. $x = \frac{1}{2k\pi} \Rightarrow$

$$|x| = \frac{1}{2k\pi} < \delta \quad \boxed{\frac{1}{2k\pi} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0}$$

$k \in \mathbb{N}$

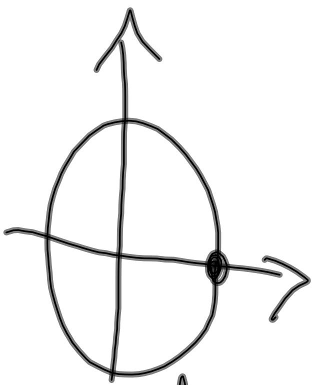
Kan få til dette!)

Men da er:

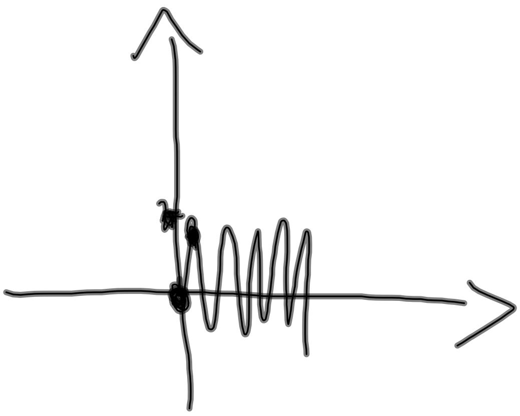
$$|f(x)-f(0)| = \left|\cos\frac{1}{x} - 0\right|$$

$$= \left|\cos\frac{1}{x}\right| = |\cos(2k\pi)|$$

$$= 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$



Dermed er f diskont. i $x=0$



7.) a) $f(x) = x^2 \sin x$, i $x = \pi$:

x^2 er kont. overalt.

$\sin x$ er kont. overalt.

Da er produktet $x^2 \sin x$ kont. overalt, spesielt i $x = \pi$. Så $f(x)$ er kont. i $x = \pi$.

b) $f(x) = e^{x^2} \ln x$, $x = 2$:

x^2 er kont. overalt. e^y er kont. overalt.

Derfor er den summensatte funksjonen e^{x^2} kont. overalt. $\ln x$ er kont. der den er def. i des. for alle positive x. Spes. er $\ln x$ kont. i $x=2$. Dermed er produktet $e^{x^2} \ln x = f(x)$ kont. i $x=2$.

9.) a) $\underbrace{f(x) = x^3}$: f er ikke diskont. noen steder.

b) $\underbrace{f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}}$: $\sqrt{x}$ er kont. og $x+1$ er kont.

så eneste mulige diskont. er i $x = 0$.

Merk: $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} (x+1) = 1 \neq 0$

Så $\lim_{x \to 0_+} f(x) \neq \lim_{x \to 0_-} f(x)$, så f er diskont. i $x=0$.

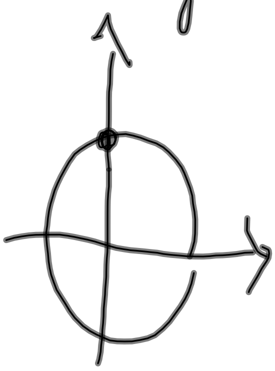
c) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$:

$\sin\frac{1}{x}$ er kont. når den er def., dvs. $x \neq 0$.

Dermed er eneste mulige diskont. i $x=0$.

Vil vise at f er diskont. v/ å finne en følge $\{\frac{1}{x_n}\}$ som konvergerer mot 0, men så. $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ for alle n.

Velg: $\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$



$\left(x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right)$

Da vil $x_k \to 0$ når $k \to \infty$. men

$\sin \frac{1}{x_k} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ for alle

k. Dermed er: $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$