Grublegruppe 12. sept. 2011: Kontinuitet

Ivar Staurseth
ivarsta@math.uio.no

Kontinuitet i $\mathbb{R}$

I likhet med konvergens av følger har vi en litt upresis forestilling om hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig. Hvis det er en funksjon fra de reelle tallene til de reelle tallene, kan vi tegne opp grafen og si at funksjonen er kontinuerlig i et punkt hvis den er *sammenhengende* rundt punktet. Det vil si at den ikke gjør noen plutselige byks som gjør at du må løfte blyanten når du tegner den.

Denne definisjonen er grei til selskapsbruk, hvis du er på en fest og får en plutselig trang til å forklare en fredsmegler og en bilmekaniker hva du driver med som matematiker. Sannsynligvis er den mer fengende - i den grad den i det hele tatt fenger - enn den presise matematiske definisjonen. Den trenger vi imidlertid når vi skal jobbe som teoretiske matematikere:

Definisjon 1. *En funksjon $f : D_f \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i et punkt $x = a$ dersom vi for alle $\epsilon > 0$ kan finne en $\delta > 0$ slik at*
$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$

Dersom $f(x)$ er kontinuerlig i alle punkt i definisjonsmengden, D_f, sier vi enkelt og greit at $f(x)$ er kontinuerlig.

La oss se på et par eksempler, hvor vi bruker definisjonen til å bevise kjente resultater:

Eksempel 1. *Funksjonen $f(x) = x^2$ er kontinuerlig i $x = 2$*

Bevis: Gitt en $\epsilon > 0$ skal vi finne en $\delta > 0$ slik at vi kan få $|f(x)-f(2)| < \epsilon$ ved å sørge for at $|x-2| < \delta$

Vi innfører en hjelpestørrelse $h = x - 2$ slik at problemet koker ned til å få $|h| < \delta$. Samtidig får vi $x = h+2$ som betyr at vi kan skrive $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(h+2)^2 - 4| = |h^2 + 4h| = |h||h+4|$

Nå gjør vi et nytt triks. Problemet er å få $|h|$ *liten nok*, så det er fullt lovlig å bestemme seg for at vi uansett skal velge h-er slik at $|h| < 1$. Det vil si at $|h+4| < 5$ og $|h||h+4| < 5|h|$. Vi har kommet i mål dersom $5|h| < \epsilon$. Det er oppfylt dersom $|h| < \frac{\epsilon}{5}$

Stopp en halv... Vi har stilt to krav til $|h|$ i dette beviset. For en gitt ϵ må $|h| < \frac{\epsilon}{5}$. Tidligere i resonnementet krevde vi i tillegg at $|h| < 1$. Begge deler må være oppfylt, dvs. at for en gitt ϵ kan vi la $\delta =$min$\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$. En slik δ vil eksistere for alle $\epsilon > 0$, uansett hvor små de måtte være. Derfor er funksjonen kontinuerlig. Hurra!

Eksempel 2. *Dersom $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i et punkt $x = a$, er også summen av dem $f(x) + g(x)$ kontinuerlig i $x = a$.*

Bevis: Først skriver vi det vi vet. Vi vet at $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i a. For en gitt $\epsilon > 0$ finnes det med andre ord en $\delta_f > 0$ slik at dersom $|x-a| < \delta_f$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Og tilsvarende for $g(x)$: Gitt en $\epsilon > 0$ finnes en $\delta_g > 0$ slik at dersom $|x-a| < \delta_g$ så er $|g(x) - g(a)| < \epsilon$.

Vi skal utfra dette vise at summen er kontinuerlig, dvs. gitt en $\epsilon > 0$ skal vi vise at det eksisterer en $\delta > 0$ slik at dersom $|x-a| < \delta$ er $|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| < \epsilon$.

Dette kan vi skrive om til $|(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))|$, som på grunn av trekantulikheten er mindre enn $|f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$. Vi er altså i mål hvis vi kan få $|f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \epsilon$, som f.eks. er oppfylt dersom hvert av leddene i denne summen er mindre enn $\frac{\epsilon}{2}$.

Disse to dyrene kjenner vi igjen fra første avsnitt. Siden $f(x)$ og $g(x)$ begge er kontinuerlige vet vi at gitt en $\epsilon > 0$ kan vi halvere den og finne to tall δ_f og δ_g, slik at $|x-a| < \delta_f \implies |f(x)-f(2)| < \frac{\epsilon}{2}$ og $|x-a| < \delta_g \implies |g(x)-g(2)| < \frac{\epsilon}{2}$. Velger vi den minste av δ_f og δ_g og kaller den δ, vet vi at når $|x-a| < \delta$ så er $|(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))| < |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. HURRA!!

Kontinuitet i metriske rom

I likhet med konvergens av følger kan også teorien om kontinuitet av funksjoner generaliseres til generelle metriske rom:

Definisjon 2. *La $f : (X, d) \to (Y, q)$ være en funksjon mellom to metriske rom. Vi sier at f er kontinuerlig i et punkt $p \in X$ dersom:*

For enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $d(x, p) < \delta \implies$ q(f(x),f(p))<ϵ.

Merk at vi her bruker forskjellig metrikk når vi skal snakke om avstanden mellom x og p og avstanden mellom $f(x)$ og $f(p)$. Funksjonen f spiser punkter i (X, d) og spytter ut punkter i (Y, q).Det første paret av punkter befinner seg i X, som er utstyrt med metrikken d, mens det siste paret befinner seg i Y, som har metrikken q. Ellers er definisjonen identisk med definisjonen i $\mathbb{R}$ (Og det skulle da bare mangle!!)

Kontinuitet og konvergens i topologiske rom - en smakebit

Vi kommer sikkert tilbake til topologiske rom senere i semesteret, så vi trenger ikke dvele så mye ved nå. Et topologisk rom er enda mer generelt enn et metrisk rom. Det er en mengde X, men vi har ikke (nødvendigvis) noe avstandsbegrep mellom elementene i X. Derimot har vi et klart begrep om hvilke *delmengder av* X som er *åpne*, og en slik struktur kaller vi en *topologi* på X. Topologi er sentralt i nær sagt alle greiner av matematikk!

Jeg kan for sikkerhets skyld definere et topologisk rom, uten at det er nødvendig for å gjøre oppgavene i denne seksjonen - som kun vil ta for seg $\mathbb{R}$ med det vi kaller standard-topologien:

Definisjon 3. *Et topologisk rom er et par (X, τ), hvor X er en mengde og τ en mengde av delmengder av X som oppfyller følgende:*

- $X, \emptyset \in \tau$
- *Dersom $\{U_i\}_{i \in I}$ er en vilkårlig samling av elementer i τ, så er også unionen $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$*
- *Dersom $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ er en endelig samling av elementer i τ, så er snittet $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$*

τ kalles en topologi på X og de delmengdene av X som er med i τ er per definisjon åpne. Komplementet til en åpen mengde kaller vi lukket.

Som vi ser vil alltid X selv, samt den tomme mengde, være åpne. De vil også være lukket (hvorfor?). Ellers er det τ som definerer hvilke delmengder av X som er åpne. De delmengdene vi stapper inn i τ blir per definisjon åpne mengder, men vi må stappe nok delmengder av X inn i τ til at de to siste punktene er oppfylt:

Det vil si at hvis vi har en endelig samling av åpne delmengder, må også snittet av alle disse mengdene være åpen. Og har vi en vilkårlig samling av åpne delmengder (vilkårlig vil si at den kan være uendelig - den trenger ikke en gang være tellbar), så vil unionen av alle de åpne mengdene også være åpen.

Dette var en litt allmenndannende smakebit, men i denne seksjonen skal vi holde oss til $\mathbb{R}$ med *standardtopologien.* I denne topologien er de åpne delmengdene av $\mathbb{R}$ intervaller på formen (a, b), samt vilkårlige unioner og endelige snitt av slike - samt den tomme mengde og hele $\mathbb{R}$. Med andre ord den forestillingen om åpenhet som dere er vant med.

Nå er vi klar for en topologisk definisjon av konvergens og kontinuitet i $\mathbb{R}$. Definisjonene er gyldige i generelle topologiske rom dersom du bytter ut $\mathbb{R}$ med (X, τ) og U *er åpen* med $U \in \tau$:

Definisjon 4. *En følge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}$ er konvergent med grense $x \in \mathbb{R}$ dersom vi for enhver åpen delmengde U som inneholder x ($x \in U \subseteq \mathbb{R}$), kan finne en N slik at $x_n \in U$ for alle $n \geq N$*

Definisjon 5. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon fra de reelle tallene til de reelle tallene. f er kontinuerlig dersom: for hver åpen mengde $U \subseteq \mathbb{R}$ så er også $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in U\}$ åpen.*

Oppgaver

Oppgave 1. *Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonene under er kontinuerlige i de oppgitte punktene:*

- $f(x) = x - 1$ *i punktet* $x = 4$
- $f(x) = x^3$ *i punktet* $x = 1$
- $\cos(x)$ *i punktet* $x = 0$

Oppgave 2. *Vis at de topologiske definisjonene av konvergens og kontinuitet (Definisjon 4 og 5 på forrige side) er helt ekvivalente med de metriske* $\epsilon - \delta$*- og* $\epsilon - N$*-definisjonene.*

Oppgave 3. *La* $\{x_n\}$ *være en følge som konvergerer mot* x *og la* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *være en kontinuerlig funksjon. Vis at følgen* $\{f(x_n)\}$ *konvergerer mot* $f(x)$*. Gjelder dette hvis* f *er diskontinuerlig? (Drøft!)*

Oppgave 4. *La* $f(x)$ *og* $g(x)$ *være funksjoner. La* $g(x)$ *være kontinuerlig i et punkt* $x = a$ *og la* $f(x)$ *være kontinuerlig i punktet* $x = g(a)$*. Vis at den sammensatte funksjonen* $f(g(x))$ *er kontinuerlig i* a

Oppgave 5. *En funksjon* $f : I \to \mathbb{R}$*, hvor* I *er et intervall, kalles* ***Lipschitz-kontinuerlig*** *hvis det finnes et tall* $M \geq 0$ *slik at* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$*. Er en Lipschitz-kontinuerlig funksjon kontinuerlig i vanlig forstand? Er alle kontinuerlige funksjoner Lipschitz-kontinuerlige?*

Oppgave 6. *En følge* $\{x_n\}$ *i et metrisk rom* (X, d) *kalles en* ***Cauchy-følge*** *dersom vi for alle* $\epsilon > 0$ *kan finne et heltall* $N > 0$*, slik at for alle* $m, n > N$ *har vi at* $d(x_m, x_n) < \epsilon$*.*

- *Vis at alle konvergente følger er Cauchy-følger, uansett metrisk rom.*
- *Vis at det motsatte også er tilfelle i* $\mathbb{R}$*, dvs. at alle reelle Cauchy-følger er konvergente*

- *Vis at punkt 2* ***ikke*** *er tilfelle i* $\mathbb{Q}$ *(med vanlig metrikk:* $d(p,q) = |p-q|$*)* *(Hint: Betrakt følgen hvor* x_n *består av de* n *første desimalene i det irrasjonale tallet*$\sqrt{2}$*, dvs. følgen:* $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142...$*)*

Metriske rom hvor alle Cauchy-følger er konvergente kalles ***komplette metriske rom***

Oppgave 7. *Et spesialtilfelle av Lipschitz-kontinuerlige funksjoner er funksjoner hvor* $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ *for en* $M < 1$*. Slike funksjoner kalles* ***kontraksjoner****.*

- *Vis at en kontraksjon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *alltid har minst ett* ***fikspunkt****, dvs. et punkt* x *slik at* $f(x) = x$*. (Hint: start med et vilkårlig punkt* x_0 *og definer induktivt en følge ved å si at* $x_1 = f(x_0)$ *og generelt:* $x_{n+1} = f(x_n)$*. Forklar at* $|x_0 - x_1| > |x_1 - x_2| > ... > |x_n - x_{n+1}| > ...$*, vis at* $\{x_n\}$ *må være en Cauchy-følge og bruk at* $\mathbb{R}$ *er et komplett metrisk rom. (Se forrige oppgave))*

- *Vis at kontraksjoner har nøyaktig ett fikspunkt, dvs. ikke to eller flere. (Hint: Anta at* $f(x) = x$ *og* $f(y) = y$ *for* $x \neq y$*. Se på* $|f(x) - f(y)|$*.*

Dette kalles Banachs fikspunktteorem, oppkalt etter den polske matematikeren Stefan Banach (1892-1945) som fremsatte teoremet i 1922. Det sier at hvis (X, d) *er et komplett metrisk rom, og* T*:*$X \to X$ *en kontraksjon, så har* T *nøyaktig ett fikspunkt - dvs. det finnes nøyaktig ett punkt* $x \in X$ *slik at* $T(x) = x$*.*

Oppgave 8. *Tom Mørken, Knut Langtangen og Hans Petter Lindstrøm har lest romanen Armand V. av Dag Solstad (Oktober forlag 2006) med stor entusiasme. De ble spesielt begeistret for passasjen om hvordan realfagstudenter på Blindern på 70-tallet dro opp i Nordmarka på hyttetur for å finne potensielle ektefeller.*

De tar med seg et kart over Nordmarka, spenner på seg skiene og legger optimistisk i veg, med et haleheng av håpefulle studenter bak seg. Dessverre blåser det opp til snøstorm, de har glemt kompass og de aner ikke hvor de er.

Studentene blir utålmodige og sure og ringer til Universitas for å klage over dårlig opplegg. Men trioen kan berolige dem med én ting:
- Nå legger vi kartet ned i snøen. Da er det ett og nøyaktig ett punkt på kartet som ligger lodrett over det punktet i terrenget som det svarer til. Dritfett!!

Vis at disse tre har rett (hint: finn en nyttig kontraksjon fra kartet til seg selv. Du har lov til å anta at kartet har en målestokk 1:N hvor N er større enn 1. Noe annet ville forøvrig vært upraktisk).