Plenum

5.2: 1 b), 3 a), 4 b), 6, 7, 8, 10

5.3: 1 c), 2, 3, 5

5.4: 1 c), 2a) b), 3 c)

5.2: 1) b) $f(x) = e^x - x - 2$, i $[0,2]$:

$f(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

$$f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = e^2 - 2 - 2 > 0$$

$$\boxed{2{,}71 \approx e > 2}$$

Skjæringssetningen gir da at f har nullpunkt(er) i $[0,2]$.

3.) a) $f(x) = \ln x,\ g(x) = x^2 - 2,\ i\ [1,2]$:

f og g er kontinuerlige funksjoner.

$f(1) = \ln 1 = 0$, $g(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow$

$f(1) > g(1)$.

$f(2) = \ln(2)$, $g(2) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow$

$f(2) < g(2)$

Korollaret til skjæringssetningen gir da at f og g skjærer hverandre i $[1,2]$.

7.) a) Definerer:
$g(x)$ = høyden over bakken v/ klokkeslett x dag 1.

$h(x)$ = høyden over bakken v/ klokkeslett x dag 2.

h og g er kontinuerlige funksjoner
(hun hopper ikke!)

Merk: $g(7) = 0$, $h(7) =$ høyden på fjellet > 0

Så: $g(7) < h(7)$.

Merk også: $g(15) = $ høyden av fjellet > 0

$h(15) = 0 \Rightarrow h(15) < g(15)$

Korollaret til skjæringssetningen gir at det fins $c \in [7, 15]$ s.a. $g(c) = h(c)$.
Dvs. at det fins et klokkeslett c der klatreren er på samme høyde begge dager.

b) Definerer g og h som før.

Skal se på $[10, 16]$.

$g(10) <$ høyden på fjellet (hun kommer ikke fram før kl. 15)

$h(10) =$ høyden på fjellet

$\Rightarrow g(10) < h(10)$.

$g(16) =$ høyden på fjellet (hun kom frem kl. 15)

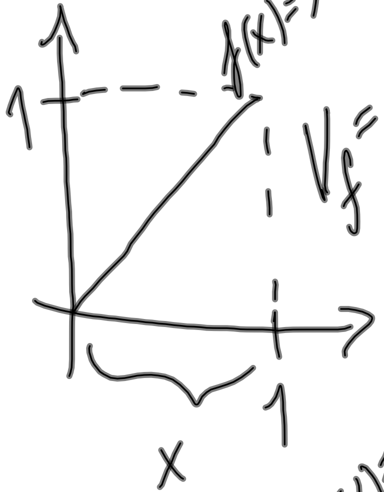
$h(16) = 0 \Rightarrow h(16) < g(16)$

g og h er fortsatt kont. Korollaret til skjæringssetningen gir at det finnes $c \in (10, 16)$ s.a. $g(c) = h(c)$.
Dvs. at det fins et tidspunkt c mellom 10 og 16 der klatreren er på samme høyde begge dager.

8.) Vet: $f: \underbrace{[0,1]}_{D_f} \to [0,1]$, f kont.

$V_f \subseteq [0,1]$

$f(x) = x$



$V_f = [0,1]$

$f(x) = 0$

$V_f \subseteq [0,1]$

Vil vise: f har fikspunkt: dvs. det fins en $x \in [0,1]$ s.a.

$$f(x) = x.$$

Def. $g(x)=x$. Da er f og g kont. på $[0,1]$.

Hvis $f(0)=g(0)$ eller $f(1)=g(1)$, er det ingenting å vise (dette er fikspkt.!)

Anta derfor $f(0)\neq g(0)$ og $f(1)\neq g(1)$, dvs. $f(0)\neq 0$ og $f(1)\neq 1$.

Merk at $f(1)<1$ siden $f:[0,1]\to[0,1]$

Merk også at av samme grunn er $f(0) > 0$. Da er: $f(0) > g(0) = 0$, $f(1) < g(1) = 1$, så siden f og g er kont. gir korollaret til skjæringssetningen at det fins en $c \in (0,1)$ s.a. $f(c) = g(c) = c$. Så dermed har f et fikspunkt.

5.3: Ekstremalverdisetningen

1) c) $f(x) = \tan(\underbrace{x^2+1})$, $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$:

$[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ er lukket og begrenset.

$\underline{x=0}: x^2+1 = 0^2+1 = 1$

$\underline{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}: x^2+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

At f er kont. på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ er det samme som at $g(y) := \tan y$, $y \in [1, \frac{3}{2}]$ er kont. Men det er jo g ($\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$, og $\cos y \neq 0$ for alle $y \in [1, \frac{3}{2}]$)

$\left[\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}\right]$

Dermed er f kont. på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Da gir ekstremalverdisetningen at f har max- og min.-verdier i $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

3) <u>Anta:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kont.,

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ eksisterer.

Vil <u>vise:</u> f er begrenset.

La $\lim_{x \to \infty} f(x) =: a_+$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =: a_-$

La $\varepsilon = 1$. Da fins (fra def. av lim) $N_+ \in \mathbb{Z}$ s.a. $x \geq N_+ \Rightarrow |f(x) - a_+| < 1$ $(=\varepsilon)$. Tilsvarende fins $N_- \in \mathbb{Z}$ s.a. $x \leq N_- \Rightarrow |f(x) - a_-| < 1$ $(=\varepsilon)$.

<u>OBS:</u> f er begrenset (av. hhv. $|a_+|+1$ og $|a_-|+1$) på $(-\infty, N_-]$ og $[N_+, \infty)$.

Holder derfor å begrense f på $[N_-, N_+]$ (lukket og begrenset!).

f er kont. på $[N_-, N_+]$, så Setning 5.3.2 gir at f er begrenset her, si av $M \in \mathbb{N}$. Da er f begrenset av $\max\{|a_+|+1, |a_-|+1, M\}$.

5.4: Grenseverdier

1) c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan x + 3\cos x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4} = -\dfrac{3}{5}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\sin x \to 0$

$3\cos x \to -3$

$\sin\frac{x}{2} \to 1$

2) a) $\lim_{x \to 2} 3x = 6$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Merk at:

$$|3x - 6| = |3(x-2)| = 3|x-2| \quad (\star)$$

La $h := x - 2$. Velger $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, da vil når $|h| = |x-2| < \delta$, så er

$$|3x-6| \overset{(\star)}{=} 3|h| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Så $\lim_{x \to 2} 3x = 6$ fra Def. 5.4.1.

3.) c) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)(\sqrt{x^2+3x} + x)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x + \sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} + 1}$$

Deler på x oppe og nede

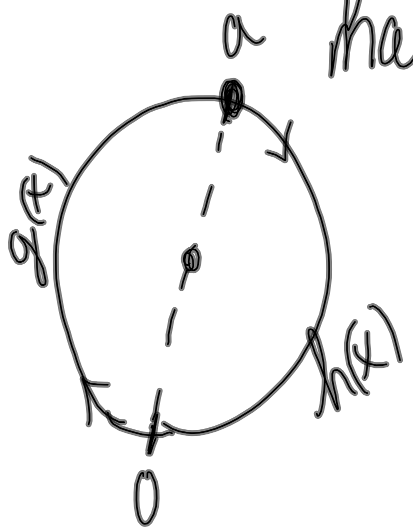
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$= \frac{3}{1+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

5.2.10.) 0: $g(x) =$ høyde over havet x cm inn på sirkelen

$h(x) =$ h.o.h. x cm. etter passerte halvsirkel.



g og h er kont.

Hvis $g(0) = h(0)$: Ingenting å vise

Anta $g(0) < h(0)$ (hvis omvendt: bytt rolle på g og h)

Da $\underbrace{g(a)}_{(h(0))} > \underbrace{h(a)}_{(g(0))}$; Fra Kor. til Skjæringssetn.

så fins $c \in (0,a)$ s.a. $g(c) = h(c)$:

Dvs. påstand OK.

B: