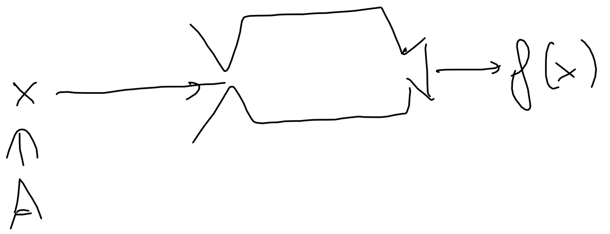
Funksjoner

Hvis A er en delmengde av $\mathbb{R}$, så er en funksjon f fra A inn i $\mathbb{R}$ en regel som til hver $x \in A$ gir et reelt tall $f(x)$. Notasjon



$f: A \to \mathbb{R}$ betyr "f er en funksjon fra A til $\mathbb{R}$"

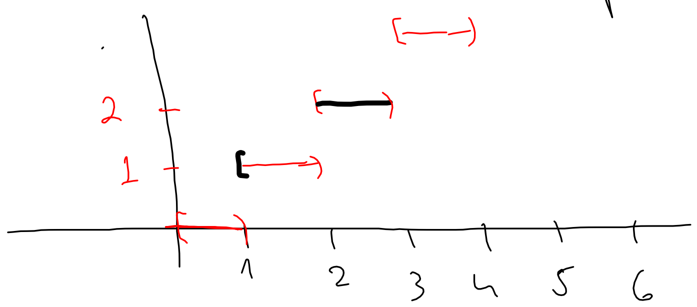
Eksempel: (i) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

(iii) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved at $f(x)$ er det største hele tallet mindre enn eller lik x. Eks $f(2.5714) = 2$

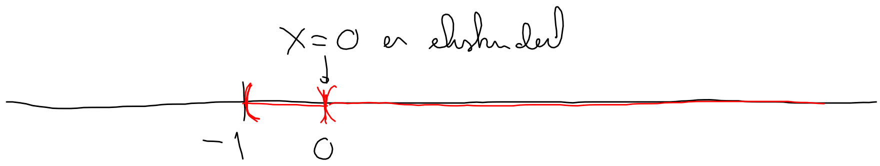


Mengden A der funksjonen f er definert, kalles $\underbrace{\text{definisjonsområdet}}_{\text{mengden}}$ til f og betegnes noen ganger med D_f.

Er en funksjon gitt ved en formel (og ingenting annet er sagt) er definisjonsområdet den største mengden der formelen gir mening.

Eks: $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ Hva er D_f?

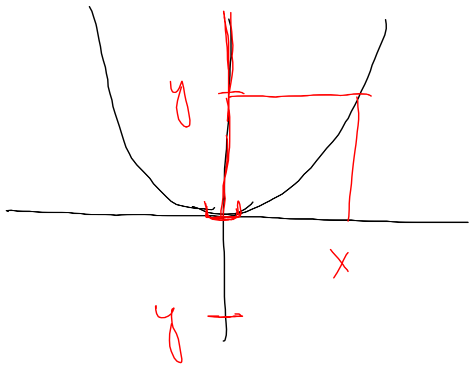
Må ha $x > -1$ for at $\ln(x+1)$ skal være definert og jeg må ha $x \neq 0$ for å kunne dele på x.



$D_f = (-1,0) \cup (0,\infty)$

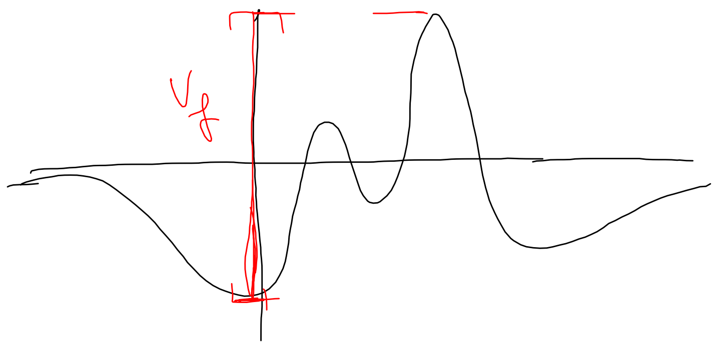
Verdimengden til f er

$$V_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$$



$f(x) = x^2$

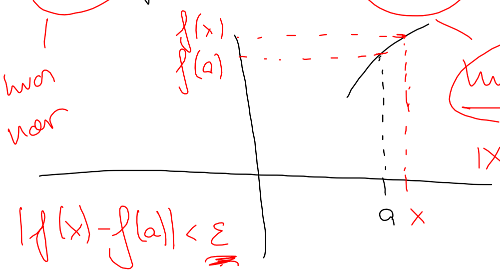
$V_f = [0, \infty)$

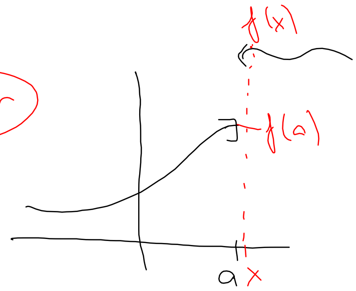


Kontinuerlige funksjoner

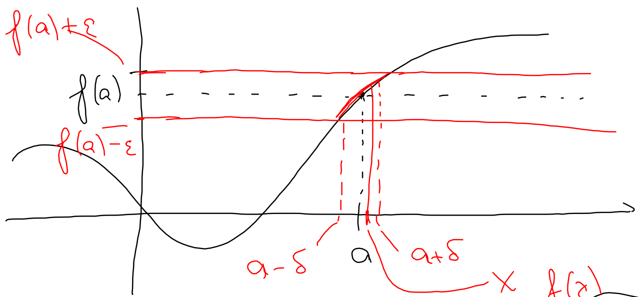
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Intuitiv idé: f er kontinuerlig i a dersom $f(x)$ er nær $f(a)$ når x er nær a.





Definisjon: Funksjonen f er kontinuerlig i punktet a dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$ og $x \in D_f$, så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



$$|x-a| < \delta$$
$$\Downarrow$$
$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

Ikke-kontinuitet