FUNKSJONER - KONTINUITET.

Vi skal se på funksjoner

$$f: A \to \mathbb{R}$$

der A er en delmengde av de reelle tall.

A kalles <u>definisjonsmengden</u>

og betegnes med D_f

Med verdimengden V_f til f mener vi

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$$

<u>eks</u>: $f(x) = |x| \qquad x \in \mathbb{R}$

d.v.s $\quad D_f = \mathbb{R} \quad , V_f = [0, \infty)$

$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbb{R} \quad V_f = [-1, 1]$

$[-1, 1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

Eks

$f(x) = 2x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}$

Vil vise ~~at~~ f er kontinuerlig i $a = 1 \in D_f$

Gitt $\varepsilon > 0$, vil finne δ slik at

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

Setter $x - 1 = h$, d.v.s $x = 1 + h$.

$$|f(x) - f(1)| = |2x + 1 - 3| = |2x - 2|$$

$$= |2(1+h) - 2| = |2 + 2h - 2| = 2|h|$$

Så $|f(x) - f(1)| = 2|h| < \varepsilon$

når $|h| = |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Derfor kan vi velge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

Når $|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ så er

$$|f(x) - f(1)| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon$$

Derfor er f kontinuerlig i $1 \in D_f$.

ex $\quad f(x) = k \qquad$ konstant $\quad D_f = \mathbb{R}$

Da er $|f(x) - f(a)| = |k - k| = 0$

Så $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\quad$ alltid
samme hva ε er!

$\Rightarrow$ f er kontinuerlig for alle $a \in \mathbb{R}$.

ex $\quad f(x) = x \qquad$ er kontinuerlig
for alle $a \in \mathbb{R}$.

ex $\quad f(x) = x^2 \qquad D_f = \mathbb{R} \quad V_f = [0, \infty)$

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Gitt $\varepsilon > 0$ skal finne $\delta > 0$.
setter $x = a + h$

$$|f(x) - f(a)| = |(a+h)^2 - a^2| = |2ah + h^2|$$

$$= |h||2a + h| \qquad \sim |h||2a| < \varepsilon$$

når h er liten $\qquad h < \dfrac{\varepsilon}{|2a|}$
og $a \neq 0$.

Regne regler:

Setning:

Anta at f og g er kontinuerlige i a.

Da er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ kontinuerlige i a.

Dersom også ~~...~~ $g(a) \neq 0$ så er også f/g kontinuerlig i a.

Setning: Anta at g er kontinuerlig i a og f i $g(a)$. Da er

$$h(x) = f(g(x))$$ kontinuerlig i a.

Korollar: Alle polynomer er kontinuerlige i $a \in \mathbb{R}$.

Def Dersom f er kontinuerlig i alle $a \in D_f$, sier vi at f er kontinuerlig.

Diskontinuitet:

f er diskontinuerlig i et punkt a, dersom det fins en $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvilken $\delta > 0$ vi velger så kan vi finne en $x \in D_f$ slik at $|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Eks:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a = 0:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

Kan finne $x \notin \mathbb{Q}$ og så liten jeg vil!

s.a $|x| < \delta$ og $|f(x) - f(0)| = 1 > \frac{1}{2}$