# Følger

$a_1, a_2, a_3, \dots$ $\{a_n\}$

**Definisjon:** En følge $\{a_n\}$ er **voksende** dersom

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ for alle } n.$$

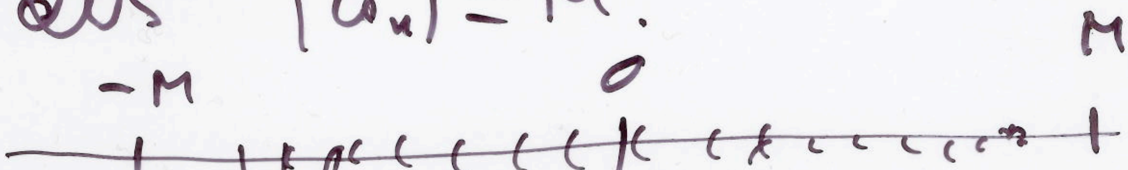
Den er **avtagende** dersom

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ for alle } n$$

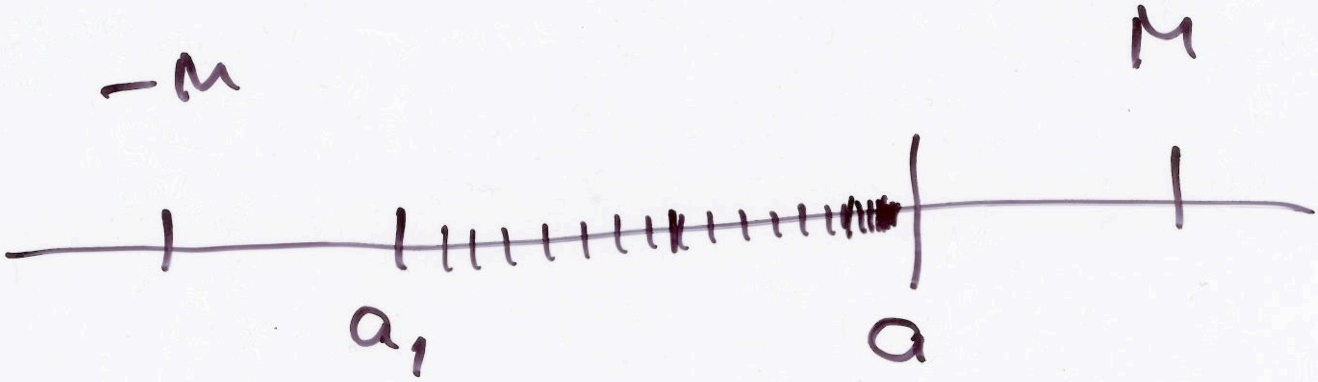
Følgen er begrenset dersom det finnes et tall $M$ slik at

$$-M \leq a_n \leq M$$

Dvs $|a_n| \leq M$.



**Setning:** Enhver voksende følge $\{a_n\}$ som er begrenset, konvergerer.




**Bevis:** La $A$ være mengden

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Denne mengden er begrenset av $M$ og ved kompletthetsprinsippet, har den en minste øvre skranke $a$

Vi må vise at $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

Det betyr at gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det alltid finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a - a_n| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

—

Siden $a$ er den <u>minste</u> øvre skranken til $A$, kan ikke $a - \varepsilon$ være en øvre skranke. Det finnes derfor et element $a_N \in A$ slik at $a_N > a - \varepsilon$.

Siden følgen er voksende, betyr det at $a_n > a - \varepsilon$ for <u>alle</u> $n \geq N$. Dvs

$$a - \varepsilon < a_n \leq a$$ avstanden er mindre enn $\varepsilon$

Altså $|a - a_n| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

QED

Var dette virkelig nødvendig å bevise – var det ikke helt opplagt?

---

Hadde vi bare jobbet med $\mathbb{Q}$, ville

$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$

en voksende, begrenset følge i $\mathbb{Q}$ som ikke konvergerer mot noe tall i $\mathbb{Q}$ (men mot $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)

---

~~4.3.10~~