Plan: 6.4.3d, 6.5.6, 6.5.10, 6.5.13, 7.1.9, 7.1.15, 7.2.7, 7.2.10, 7.4.1c, 7.4.1e, 7.4.2a, 7.4.3, 7.4.5, 7.1.1, 7.1.3, 7.1.5, 7.2.1, 7.2.3, 7.2.5

6.4.38 La $f(x) = x^{6/7}$, avgjøre ~~om~~ hvor f er konveks og konkav

Bevis: $f'(x) = \frac{6}{7} x^{-\frac{1}{7}}$

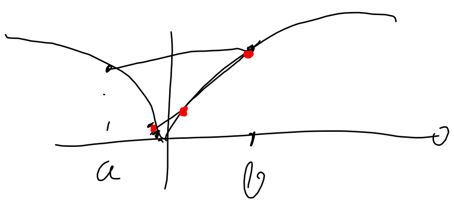
$$f''(x) = -\frac{6}{7^2} x^{-\frac{8}{7}} \quad \left(\text{~~for~~ } x \neq 0\right)$$

Så $f''(x) < 0$ for alle $x \neq 0$.

Så f er konkav på $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$.

(men f ikke er konkav på noe åpent intervall som inkluderer 0. f. eks. vil det for alle $b > 0$ finnes en $a < 0$ slik at linjen fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ skjærer grafen til f i tre punkter bruk middelverdisetningen)

Grafen til f:



6.5.6 Finn eventuelle asymptoter til

$f(x) = x \ln x$.

Siden $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \ln x$

$= \infty$ (så grensen eksisterer ikke,

så f har ingen asymptoter)

6.5.10. Finn eventuelle asymptoter

til $f(x) = x^2(e^{1/x} - 1)$

(Finnes $ax + b \approx f(x)$ når $x \gg 0$)?

Bevis: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(e^{1/x}-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{1/x}-1)}{1/x}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(e^u - 1)}{u} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{1} = e^0 = 1$$

, så $a = 1$.

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left[(e^{1/x} - 1)x^2 - x \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^{1/x} - 1 - 1/x \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - 1/x}{1/x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1 - u}{u^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{2u} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} = b$$

så asymptoten til f er $ax + b = \underline{\underline{x + \frac{1}{2}}}$

Hvorfor er $\boxed{\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)} = A$

$= \lim_{u\to 0^+} f(u)$? (For f fin nok)

Altså for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $M > 0$ slik at for alle $x > M$ så er $\left|f\left(\frac{1}{x}\right) - A\right| < \varepsilon$

Om $x > M$, så er $0 < u = \frac{1}{x} < \frac{1}{M}$

Altså er $|f(u) - A| < \varepsilon$ når $u < \frac{1}{M}$. Så $\lim_{u\to 0} f(u) = A$.

6.5.13 $f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}$

a) Bestem nullpunkter:

$f(x) = 0 = (3x^2 - x^3)^{1/3} = 0$

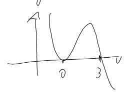
$\Leftrightarrow \; 3x^2 - x^3 = 0 = x^2(3 - x)$

Så $x = 3 \vee 0$ er nullpunktene til f.

Videre, bestem når f er positiv og negativ.

Merk: $y^{1/3}$ har samme fortegn som y.

Så $f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}$ har samme fortegn som $3x^2 - x^3 = x^2(3 - x)$



Så $f(x) > 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (0,3)$

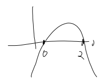
og $f(x) < 0$ for $x \in (3, \infty)$

b) Bestem ekstremalpunktene til f.

$f'(x) = \frac{1}{3}\underbrace{(3x^2 - x^3)^{-2/3}}_{\geq 0 \text{ for alle } x}(6x - 3x^2)$ (for $x \neq 0$)

Så $f'(x)$ har samme fortegn som $6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$

Graf:



så $f'(x) > 0$ for $x \in (0,2)$

og $f'(x) < 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Så $f(x)$ er synkende for $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

og stigende for $x \in (0,2)$

Potensielle ekstremalpunkter er $x = 0$ og $x = 2$.

$x = 0$ er et lokalt minimum

(siden $g(y) = y^{1/3}$ er monoton)

$x = 2$ er et lokalt maksimum.

(— " —)

c) Finn hvor f er konveks og hvor f er konkav.

$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-2/3}(6x - 3x^2)$

$f''(x) = -\frac{2}{9}(3x^2 - x^3)^{-5/3}(6x - 3x^2)^2 + \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-2/3}(6 - 6x)$

$= \frac{1}{9}(3x^2 - x^3)^{-5/3}\left[-2(6x - 3x^2)^2 + 3(3x^2 - x^3) \cdot (6 - 6x)\right]$

$\left[-2 \cdot 3^2 x^2 (2 - x)^2 + 3 \cdot 6(1 - x)\, x^2(3 - x)\right]$

$= 18x^2\left[-(2 - x)^2 + (1 - x)(3 - x)\right]$

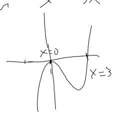
$= 18x^2\left[-4 + 4x - x^2 + 3 - 4x + x^2\right]$

$= \frac{1}{9}(3x^2 - x^3)^{-5/3}(-18x^2) = -\underbrace{2x^2}_{\geq 0 \text{ (for alle } x)}(3x^2 - x^3)^{-5/3} = f''(x)$

og $(3x^2 - x^3)^{-5/3}$ har samme fortegn som $3x^2 - x^3$ for alle ($x \neq 0$)

Så $f''(x)$ har samme fortegn som $x^3 - 3x^2$ for alle x.

Så



så $f''(x) > 0$ for $x \in (3, \infty)$

og $f''(x) < 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (0,3)$

Så f er konkav på $(-\infty, 0]$ og $[0,3]$

og konveks på $[3, \infty]$