4.3.4 c) Vis at $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} = \frac{1}{3}$ ved def.

Bevis: Gitt $\varepsilon > 0$, så vil vi finne en $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$.

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{n+\frac{2}{3}}{3(n+\frac{2}{3})} \right|$$

$$= \left| \frac{n+\frac{1}{2} - (n+\frac{2}{3})}{3n+2} \right| = \left| \frac{\cancel{n} + \frac{1}{2} - \cancel{n} - \frac{2}{3}}{3n+2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{6}}{3n+2} \right| = \frac{|-\frac{1}{6}|}{|3n+2|} = \frac{\frac{1}{6}}{3n+2} = \frac{1}{18n+12}$$

Vil ha:

$$\frac{1}{18n+12} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 18n+12$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} - 12 < 18n \iff n > \frac{1}{18\varepsilon} - \frac{12}{18}$$

Dette betyr at for en gitt $\varepsilon > 0$ vil vi få

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

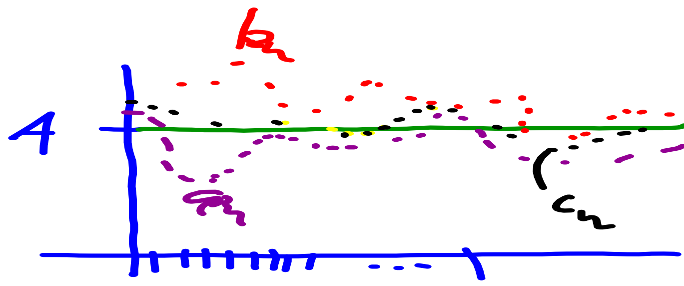
ved å velge N som det minste naturlige tallet større enn $\frac{1}{18\varepsilon} - \frac{12}{18}$.

$\blacksquare$

4.3.11 Skviselemma: Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$

og $a_n \leq c_n \leq b_n$ for alle n,

så er $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.



Bevis: Vi antar at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \text{ og}$$

at $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n.$

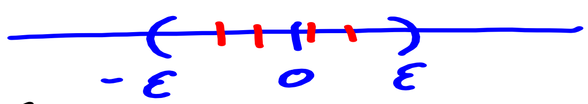
For enhver $\varepsilon > 0$, så finnes det $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

og

$$|b_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2.$$

Merk at dette betyr at



$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \qquad (i)$$

og

$$-\varepsilon < b_n - A < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2. \qquad (ii)$$

Dersom vi velger $N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$, så ser vi at både (i) og (ii) vil være oppfylt.

Vil vise: $\lim_{n\to\infty} c_n = A$

La $\varepsilon > 0$ være gitt, da vil vi fra hhv. (i) og (ii) ha at

$$-\varepsilon < a_n - A \iff -\varepsilon + A < a_n \qquad (i)$$

$$b_n - A < \varepsilon \iff b_n < \varepsilon + A$$

men siden $a_n \leq c_n \leq b_n$ for alle n, så daer

$$-\varepsilon + A < a_n \leq c_n \leq b_n < \varepsilon + A \quad (\forall n \geq N)$$

$$\iff -\varepsilon + A < c_n < \varepsilon + A$$

$$\iff -\varepsilon < c_n - A < \varepsilon$$

$$|c_n - A| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

$\boxtimes$

4.3.15: Teorem 4.3.9: En monoton, begrenset følge er alltid konvergent.

Bevis: (for avtagende) Anta at $\{a_n\}$ er en avtagende og begrenset. Da har vi at ($a_n \geq a_{n+1}$)

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{17}, \dots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

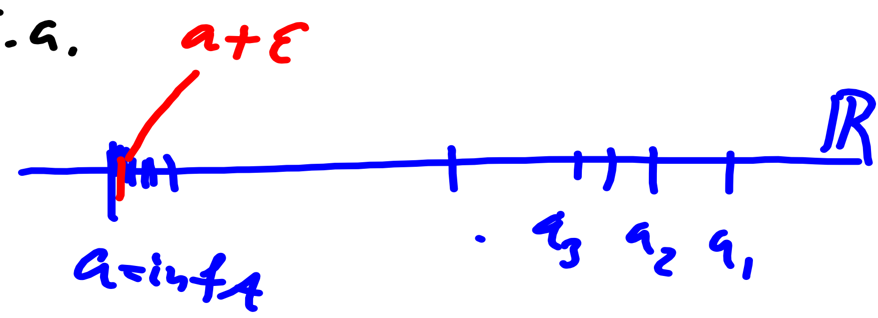
den er ikke-tom og begrenset. I følge Setningen 2.3.3 (som følger fra kompletthetsprinsippet) har A en største nedre skranke, a. Vi vil ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

For enhver $\varepsilon > 0$, så skal vi finne en $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Observer: Siden $a = \inf A$, så vil $a_n \geq a \ \forall n$.

Dessuten finnes det en $N \in \mathbb{N}$ s.a. $a_N < a + \varepsilon$, hvis ikke, så ville $a + \varepsilon$ vært en nedre skranke større enn $\inf A$. Nå, siden følgen er avtagende så vil $a_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq N$. Med andre ord



$$a_n - a < \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

∎

4.3.18 La $\{x_n\}$ være gitt ved $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$.

a) Vis at $x_n < x_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved ind.

$n=1$: $x_1 < x_2$, $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$, så $x_1 < x_2$.

Antar at $x_n < x_{n+1}$. Vi har da

$$x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}} \iff \frac{x_{n+2}^2}{2} = x_{n+1} \quad (*)$$

Fra ind. antagelsen har vi da at $x_n < x_{n+1}$

(*) $$x_n < x_{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{x_{n+2}^2}{2} \iff 2x_n < x_{n+2}^2$$

$$\iff x_{n+2} > \sqrt{2x_n} = x_{n+1}.$$

b) Dersom $x_n \longrightarrow x$:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \sqrt{2x}$$

$$\iff x = \sqrt{2x}$$

$$\iff x^2 = 2x$$ enten er $x=0$ eller så er $x=2$.

$x_n < 2 \quad \forall n$:

$n=1$: $x_1 = 1 < 2$, så ok.

Antar at $x_n < 2$, og vil vise at $x_{n+1} < 2$:

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

$$\Rightarrow x_{n+1} < 2.$$

$\boxtimes$

Da konverg. er følgen av teorem 4.3.9.