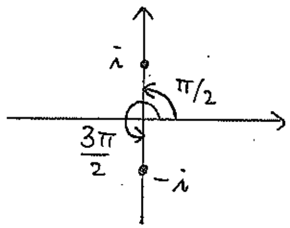
Løsningsforslag oblig I Mat 1100 høst 2012

Oppgave 1

a) $i = 1e^{i(\pi/2)} = \underline{\underline{e^{i(\pi/2)}}}$

$-i = 1e^{i(3\pi/2)} = \underline{\underline{e^{i(3\pi/2)}}}$

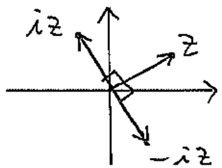


b) $z = re^{i\theta}$ gir

$$iz = e^{i(\pi/2)}\cdot re^{i\theta} = re^{i(\pi/2)+i\theta} = \underline{\underline{re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}}$$

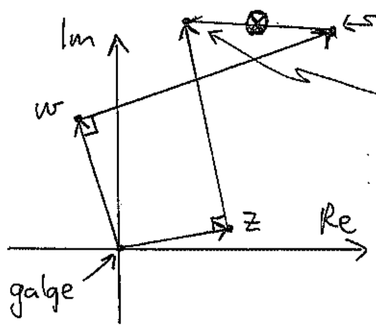
$$-iz = e^{-i(\pi/2)}\cdot re^{i\theta} = re^{-i(\frac{\pi}{2})+i\theta} = \underline{\underline{re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}}$$

Illustrasjon:



Når vektoren z ganges med i, dreies den 90° mot klokken. Når z ganges med $-i$, dreies den 90° med klokken.

c)



Dette punktet er $w - 2iw$

Dette punktet er $z + 2iz$

Skatten ligger i midtpunktet ⊗ på linjestykket mellom $z+2iz$ og $w-2iw$. Det er

$$\frac{1}{2}\left[(z+2iz)+(w-2iw)\right].$$

d) Vi har $\frac{1}{2}\left[(z+2iz)+(w-2iw)\right] = \frac{1}{2}z + iz + \frac{1}{2}w - iw$

På den annen side er

$$w + \frac{1}{2}(z-w) + i(z-w) = w + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w + iz - iw$$
$$= \frac{1}{2}z + iz + \frac{1}{2}w - iw.$$ Altså ok.

[Oppgave 1d, forts.]

Oppskrift for å finne skatten uten å vite hvor galgen lå:

Start ved østligste gravstein. Gå halvveis til vestlige gravstein, mens du teller antall skritt. Drei så 90° mot klokken, og gå dobbelt så mange skritt. Der er skatten begravd!

Oppgave 2

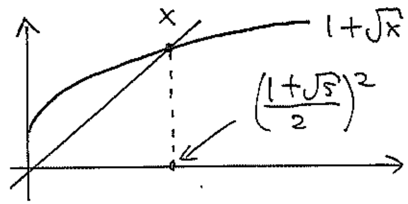
a) Med $u = \sqrt{x}$ blir likningen $u^2 = 1+u$, dvs. $u^2 - u - 1 = 0$.

Løsninger: $u = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Her er "+" eneste mulighet, siden $u \geq 0$

Ergo $\underline{\underline{x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \approx 2{,}618$

Illustrasjon: Se til høyre.



b) Siden vi vet at $x_n > 1+\sqrt{x_n}$ og $x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n}$, får vi

$$x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n} < x_n, \quad \text{dvs. } \underline{\underline{x_{n+1} < x_n}}.$$

Videre fås da, fordi $x_{n+1} < x_n$, at

$$x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n} > 1+\sqrt{x_{n+1}}, \quad \text{dvs. } \underline{\underline{x_{n+1} > 1+\sqrt{x_{n+1}}}}$$

Vi har $x_1 > 1+\sqrt{x_1}$ fordi $4 > 1+\sqrt{4}$. Dermed har vi nå vist (induksjon) at $x_n > 1+\sqrt{x_n}$ for alle $n = 1,2,3\ldots$

Dette betyr at følgen holder seg til høyre for løsningen fra a) på x-aksen, dvs. den er nedad begrenset av $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

[Oppgave 2b) forts.]

Vi vet også at $x_{n+1} < x_n$ for alle $n = 1, 2, 3, \dots$

så følgen er avtakende.

c) Siden følgen er avtakende og nedad begrenset, konvergerer den ved kompletthetsprinsippet. Kall grensen L. Siden

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$$

følger at $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \sqrt{x_n}\right)$

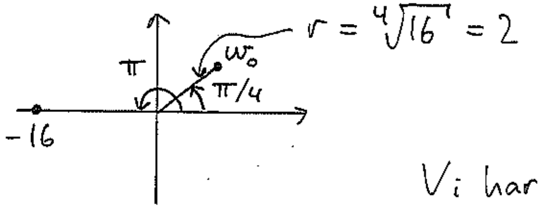
dvs. $L = 1 + \sqrt{L}$. Fra a) fås at $\underline{\underline{L = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}}$

Oppgave 3

a) $z^5 + 16z = 0$ gir $z(z^4 + 16) = 0$

dvs. $\underline{\underline{z = 0}}$ eller $z^4 = -16$

Må finne 4. røttene til -16:



Prinsipal rot:

$$w_0 = 2e^{i(\pi/4)}$$

Vi har $w_+ = e^{i(2\pi/4)} = e^{i(\pi/2)}$

Så de øvrige røttene er

$$w_1 = w_0 w_+ = 2e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(3\pi/4)}$$

$$w_2 = w_1 w_+ = 2e^{i(3\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(5\pi/4)}$$

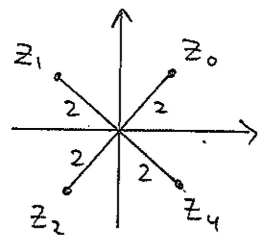
$$w_3 = w_2 w_+ = 2e^{i(5\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(7\pi/4)}$$

Ergo er løsningene av likningen

$\underline{\underline{z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}}$, $\underline{\underline{z_1 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}}$, $\underline{\underline{z_2 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}}$, $\underline{\underline{z_3 = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}}}$

samt $z_4 = \underline{\underline{0}}$

b) Figur:



Vi har $z_4 = \underline{0}$, og vi ser at (Pytagoras på trekanter)

$z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $\qquad z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $\qquad z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

Kompleks faktorisering av polynomet $P(z) = z^5 + 16z$:

$$P(z) = z \cdot \left[z - (\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)\right] \cdot \left[z - (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right]$$
$$\cdot \left[z - (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)\right] \cdot \left[z - (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right].$$

For å finne reell faktorisering, ganger vi sammen faktorene svarende til konjugerte røtter:

$$\left[z - (\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)\right] \cdot \left[z - (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right]$$
$$= \left[z - \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right] \cdot \left[z - \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\right]$$
$$= z^2 - \sqrt{2}\,z + \cancel{\sqrt{2}\,z\,i} - \sqrt{2}\,z + 2 - \cancel{2i} - \cancel{\sqrt{2}\,i\,z} + \cancel{2i} + 2$$
$$= z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4.$$

Tilsvarende fås:

$$\left[z - (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)\right] \cdot \left[z - (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right] = z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4.$$

Reell faktorisering: $\underline{\underline{P(z) = z \cdot (z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4) \cdot (z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4)}}$.