KURSHEFTE TIL

FORKURS I MATEMATIKK

Variant 2

av Magnus Dehli Vigeland

UNIVERSITETET I OSLO
MATEMATISK INSTITUTT

Innhold

1 Oppvarming

1.1 Noen viktige tallmengder. Notasjon.

Å uttrykke seg presist er svært viktig i matematikken. I motsetning til i dagliglivet, der samme ord kan bety vidt forskjellige ting, og utsagn ofte kan tolkes på ulike måter, må matematiske begreper ha klare og utvetydige definisjoner. En fundamental byggekloss i det matematiske språket er mengdebegrepet:

Definisjon 1.1. Mengde
En *mengde* er en samling objekter. Objektene i en mengde kalles ofte *elementer*.

- Dersom objektet a er med i mengden A, skriver vi $a \in A$. Omvendt skriver vi $a \notin A$ hvis a ikke er med i A. Symbolet $\in$ leses «er element i», eller «er med i».
- Dersom A og B er to mengder slik at alle elementene i A også er med i B, sier vi at A er en *delmengde* av B, eller at A er *inneholdt* i B. Dette skriver vi som $A \subseteq B$.

Nesten alle mengdene vi skal jobbe med, er *tallmengder*, det vil si mengder der alle objektene er tall. Tallmengder skriver vi ofte på listeform, med klammeparenteser rundt.

Eksempel 1.1. $\{1, 2, 3\}$ er en tallmengde med tre elementer. Mengden endres ikke dersom noen av elementene gjentas, eller hvis rekkefølgen endres. For eksempel er $\{3, 3, 2, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Eksempel 1.2. Dersom $A = \{1, 2, 3\}$, så er $1 \in A$, men $4 \notin A$.

Eksempel 1.3. La $A = \{-2, 0, 3\}$ og $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Da er $A \subseteq B$, fordi $-2 \in B$, $0 \in B$ og $3 \in B$.

Dersom en tallmengde inneholder flere elementer enn vi orker å skrive opp, kan vi ofte slippe unna med å skrive $\ldots$, som betyr «og så videre». På denne måten kan vi også skrive opp mengder med uendelig mange tall.

Eksempel 1.4. Mengden $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ består av alle tallene fra 1 til 100.

Eksempel 1.5. Mengden $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ består av alle tallene i «3-ganger'n», altså de positive tallene delelige med 3.

Noen tallmengder forekommer veldig ofte, og har derfor fått egne navn.

Definisjon 1.2. Noen viktige tallmengder

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Mengden av de *positive heltallene*, også kalt de *naturlige tallene*.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Mengden av alle heltall.
- $\mathbb{Q}$ = mengden av alle *rasjonale tall*, altså brøker med heltall i teller og nevner, med eneste restriksjon at nevneren ikke er lik null.
- $\mathbb{R}$ = mengden av alle *reelle tall*, det vil si alle tallene på tallinja.

En mengde som ikke inneholder noen elementer, kaller vi en *tom mengde*. Denne betegner vi med $\emptyset$.

En viktig observasjon er at mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er inneholdt i hverandre:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Du stusser kanskje over at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, men husk at dersom n er et heltall, så er $n = \frac{n}{1}$, som er en brøk. Dermed er alle heltall også rasjonale tall.

Reelle tall som ikke kan skrives som en brøk, kalles *irrasjonale*.

Eksempel 1.6. Allerede de gamle grekerne visste at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt, altså at $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Mer om mengder

Når vi skal beskrive mer kompliserte mengder med mange elementer, lønner det seg å bruke en litt annen notasjon enn den vi har brukt til nå, som har bestått i å skrive opp noen av tallene og sette på ... til slutt. La for eksempel K være mengden av alle kvadrattallene, altså $K = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$. En mer kompakt måte å skrive denne mengden på, er

$$K = \{a^2 \mid a \in \mathbb{N}\}$$

Dette leser vi som «mengden av alle uttrykk på formen a^2 som er slik at a er et naturlig tall». Symbolet | leser vi «slik at», og virker altså som en skillelinje, der det som kommer etter, gir utfyllende forklaring av det som står før. Ønsker vi mer enn en forklaring etter streken, setter vi komma mellom dem.

Eksempel 1.7. Mengden $\mathbb{Q}$ kan vi skrive som $\mathbb{Q} = \{\dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Eksempel 1.8. La A være mengden gitt ved at $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 0\}$. Da er $A = \emptyset$, fordi det ikke finnes noe reelt tall x slik at x^2 er mindre enn null.

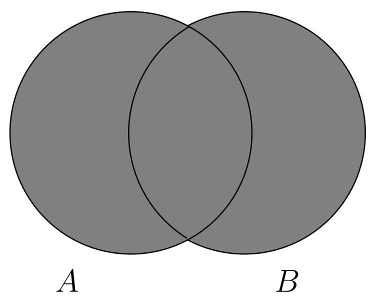
En spesiell type tallmengder er *intervaller*. Dette er delmengder av $\mathbb{R}$ som inneholder alle tallene i «en bit» av tallinja. Intervallet $[0, 1]$ inneholder for eksempel alle reelle tall fra og med 0 til og med 1. Firkantparentesene [og] markerer at endepunktene 0 og 1 er med. Intervallet kalles da *lukket*. Dersom vi ikke vil ha med endepunktene, skriver vi $(0, 1)$. Intervallet er da *åpent*. Hvis det ene endepunktet er med, og det andre ikke, kalles intervallet *halvåpent*.

Eksempel 1.9. La A være det halvåpne intervallet $[0, 1)$. Da er $0 \in A$, mens $1 \notin A$.

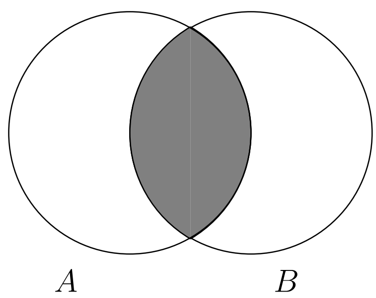
Til slutt skal vi forklare de to viktige begrepene *union* og *snitt*.

Definisjon 1.3. Union og snitt av mengder
La A og B være mengder.

- Mengden av alle elementer som er enten i A eller i B (eller i begge), kaller vi *unionen* av A og B. Vi skriver dette som $A \cup B$. (Se figur 1.)
- Mengden av alle elementer som er både i A og B, kaller vi *snittet* av A og B. Vi skriver dette som $A \cap B$. (Se figur 2.)



Figur 1: Unionen av mengdene A og B.



Figur 2: Snittet av mengdene A og B.

Eksempel 1.10. La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Da er $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ og $A \cap B = \{4, 5\}$.

1.3 Litt om logikk og bevisføring

I mange oppgaver må man gjøre mer enn en enkeltstående utregning for å komme fram til svaret. Det kan være nødvendig med et matematisk resonnement, bestående av logiske argumenter. For å få en ryddig framstilling av slike resonnementer, bruker vi gjerne *implikasjonspilen* $\Rightarrow$, som i utsagnet

$$\text{Det regner} \quad \Longrightarrow \quad \text{Bakken blir våt}$$

Implikasjonspilen betyr at det som står ved starten av pilen, medfører (eller *impliserer*) det som står ved slutten av pilen.

Legg merke til at selv om en implikasjon er gyldig, som i eksemplet over, er det ikke sikkert det samme gjelder når vi snur pilen:

$$\text{Det regner} \quad \Longleftarrow \quad \text{Bakken blir våt}$$

Ved første øyekast virker dette utsagnet også rimelig. Men det er ikke logisk gyldig. Det kunne for eksempel tenkes at noen spylte vann på bakken fra en slange!

Du synes kanskje at eksemplet over har lite med matematikk å gjøre? Dessverre er det fort gjort å gå i logiske «feller» i matematikken også. En typisk feilslutning er utsagnet

$$x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Dette er ikke sant. Det riktige er at $x^2 = 4$ medfører at x er lik *enten 2 eller -2*. I dette tilfellet er imidlertid den motsatte implikasjonen gyldig:

$$x^2 = 4 \quad \Longleftarrow \quad x = 2$$

Se nå på det logisk gyldige utsagnet

$$n \text{ er et heltall} \quad \Longrightarrow \quad 2n \text{ er et partall}$$

Her er den motsatte implikasjonen også riktig:

$$n \text{ er et heltall} \quad \Longleftarrow \quad 2n \text{ er et partall}$$

Når vi har implikasjon begge veier som i dette eksemplet, samler vi gjerne begge utsagnene til ett, ved å bruke *ekvivalenspilen* $\Leftrightarrow$:

$$n \text{ er et heltall} \quad \Longleftrightarrow \quad 2n \text{ er et partall}$$

Symbolet $\Leftrightarrow$ leses «er ekvivalent med», eller «hvis og bare hvis». I oppgaveseksjonen vil du se flere eksempler på logisk (u)gyldige utsagn og bruk av implikasjonspiler.

1.4 Oppgaver

Oppgave 1.1. Skriv utsagnet med symboler.

a) -2 er et heltall.

b) π er ikke et naturlig tall.

c) y er et reelt tall.

d) z er et reelt tall større eller lik 1, men mindre enn 5.

e) x er med i mengden som består av tallene 0, 1 og 2.

Oppgave 1.2. Avgjør om påstandene er sanne eller usanne:

a) $\pi \in \mathbb{Z}$ b) $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$ c) $\{-1, 0, 2, 5, 7\} \subseteq \mathbb{N}$

d) $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$ e) $\{0, 1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

Oppgave 1.3. Beskriv mengdene med ord.

a) $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ b) $\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ c) $\{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

Oppgave 1.4. Finn $A \cup B$ og $A \cap B$.

a) $A = \{0, 1, 2\}$ og $B = \{4, 5, 6\}$ b) $A = [1, 3)$ og $B = \{1, 3\}$

c) $A = \mathbb{N}$ og $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ d) $A = [0, 3)$ og $B = (2, 5]$

Oppgave 1.5. La A være en vilkårlig mengde. Skriv følgende uttrykk enklere:

a) $A \cup A$ b) $A \cap A$ c) $A \cup \emptyset$ d) $A \cap \emptyset$

(Hint: Bruk Definisjon 1.3 helt bokstavelig.)

Oppgave 1.6. Skriv med symboler. (Det kan være flere riktige måter å gjøre dette på. Fasitsvarene er mine forslag.)

a) Mengden av alle naturlige tall delelig med 4.

b) Mengden av alle reelle tall fra og med 2 til og med π, samt tallet 12.

c) Mengden av kvadrattall større enn 25.

Oppgave 1.7. Avgjør hvilket av symbolene $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ som skal stå i boksene.

a) $y = \sqrt{3} \; \boxed{} \; y^2 = 3$ b) $x^2 > 0 \; \boxed{} \; x > 0$

Oppgave 1.8. Skriv utsagnet med symboler og avgjør om det er logisk gyldig.

a) Hvis a er et heltall, så er også a^2 et heltall.

b) Hvis n er et naturlig tall, så er også $n - 1$ et naturlig tall.

c) Hvis x er et heltall, så er $\dfrac{1}{x}$ et rasjonalt tall.

d) Hvis b er et av tallene -1, 0, og 1, så er b^2 et av tallene 0 og 1.

e) Hvis y er mellom 0 og 1, så er $\sqrt{y}$ større enn y.

Ekstraoppgave hvis du har tid (ikke så vanskelig som den ser ut):

Oppgave 1.9. I denne oppgaven skal vi kikke nærmere på tallmengdene vi snakket om i begynnelsen av kapittelet. Først litt teori:

Dersom du tar to tilfeldige tall i $\mathbb{N}$ og adderer dem, får du alltid et nytt tall i $\mathbb{N}$ som svar. Vi sier at $\mathbb{N}$ er *lukket under addisjon*. På samme måte er $\mathbb{N}$ *lukket under multiplikasjon*: Hvis a og b er naturlige tall, er ab også et naturlig tall. Generelt definerer vi følgende: La A være en mengde av tall. Vi sier at

A er lukket under addisjon hvis:	for alle $a, b \in A$ er $a + b \in A$,
A er lukket under subtraksjon hvis:	for alle $a, b \in A$ er $a - b \in A$,
A er lukket under multiplikasjon hvis:	for alle $a, b \in A$ er $a \cdot b \in A$,
A er lukket under divisjon hvis:	for alle $a, b \in A$, $b \neq 0$, er $\dfrac{a}{b} \in A$.

a) Vis at $\mathbb{N}$ ikke er lukket under subtraksjon.

b) Er mengden $\{-1, 0, 1\}$ lukket under addisjon? Hva med multiplikasjon?

Det er vanlig å gi ulike mengder bestemte navn, avhengig av hvilke operasjoner de er lukket under. Dersom en tallmengde A er lukket under både addisjon og subtraksjon, kalles A en *gruppe*. Hvis A i tillegg er lukket under multiplikasjon, er A en *ring*. Hvis A er lukket under alle de fire regneoperasjonene, sier vi at A er en *kropp*.

c) Vis at mengden av alle partall, $\{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, er en ring.

d) Vis at mengden av alle oddetall, $\{\ldots, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$, ikke er en ring.

e) Vis at $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er kropper.

f) Kan du forklare hvorfor $\mathbb{Q}$ er den minste tallmengden som inneholder $\mathbb{N}$ og som samtidig er en kropp?

g) Hva er din favorittkropp?[1]

[1] En av professorene her på Blindern er kjent for å stille studentene dette utfordrende spørsmålet.

2 Potenser og logaritmer

2.1 Potenser og røtter

De grunnleggende definisjonene av potenser og røtter kan vi uttrykke slik:

Definisjon 2.1. Potenser og røtter
La $a \in \mathbb{R}$ og $m \in \mathbb{N}$.

a) *Potensen* a^m betyr a ganget med seg selv m ganger:

$$a^m = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m \text{ faktorer}}. \tag{1}$$

Tallet a kalles *grunntallet*, mens m er *eksponenten*. Uttrykket a^m leser vi «a (opphøyd) i m'te», eller «m'te-potensen av a».

b) *m'te-roten* $\sqrt[m]{a}$ er en løsning i likningen

$$x^m = a. \tag{2}$$

Dersom m er et oddetall, har (2) en unik løsning for alle $a \in \mathbb{R}$, og vi definerer $\sqrt[m]{a}$ til å være dette tallet. Dersom m er et partall, har (2) ingen løsninger når $a < 0$, én løsning når $a = 0$ (nemlig $x = 0$), og to løsninger når $a > 0$. I dette tilfellet er derfor $\sqrt[m]{a}$ bare definert når $a \geq 0$, og da som den *ikke-negative* løsningen av (2).

Den mest brukte m'te-roten er *kvadratroten*, nemlig tilfellet der $m = 2$. Her sløyfer vi det lille 2-tallet og skriver bare $\sqrt{a}$.

Ut fra Definisjon 2.1a) utleder vi følgende fine egenskaper ved potenser:

Teorem 2.2. *La a og b være reelle tall, og m og n naturlige tall. Da gjelder:*

a) $a^m a^n = a^{m+n}$ *b)* $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (m > n)$ *c)* $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

d) $a^m b^m = (ab)^m$ *e)* $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Bevis. a) Fra Definisjon 2.1a), får vi direkte:

$$a^m a^n = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m \text{ faktorer}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ faktorer}}}_{m+n \text{ faktorer}} = a^{m+n}.$$

De resterende bevisene går på tilsvarende måte. (Se oppgave 2.19.) $\square$

Teorem 2.2 gir en naturlig måte å utvide definisjonen av potenser slik at vi kan tillate andre tall enn bare de naturlige tallene som eksponenter. Vi kan for eksempel spørre oss: Hvis det var noe som het a^0, hva skulle dette være for noe? Hvis vi antar at regnereglene i Teorem 2.2 gjelder også når $m, n \leq 0$, får vi ved å sette $m = 0$ i punkt a) at

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Deler vi på begge sider med a^n, står vi igjen med $a^0 = 1$.

På samme måte kan vi undersøke hva a opphøyd i et negativt heltall skulle være, ved å bruke punkt b): Setter vi $m = 0$ her, får vi at

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Dersom vi holder fast på at $a^0 = 1$, betyr dette altså at $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Til slutt ser vi på uttrykket $a^{\frac{1}{m}}$, der $m \in \mathbb{N}$. Hvis noe slikt skal gi mening – og samtidig respektere Teorem 2.2, gir punkt c) at vi må ha

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{1}{m}\cdot m} = a.$$

Men dette vil si at $a^{\frac{1}{m}}$ tilfredsstiller likning (2) i definisjonen av m'te-roten av a!

Motivert av det vi nettopp har diskutert, lager vi følgende definisjon:

Definisjon 2.3. La m være et naturlig tall. Da er

a) $a^0 = 1$ for alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Uttrykket 0^0 er ikke definert.

b) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ for alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

c) $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ for alle $a \in \mathbb{R}$ slik at $\sqrt[m]{a}$ er definert.

Mer generelt definerer vi for alle $a \geq 0$ og alle naturlige tall m og n:

d) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

e) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Dersom n er odde, kan vi tillate negative a i d) og e). Uttrykkene blir de samme.

Resultatet av Definisjon 2.3 er at vi har utvidet potensbegrepet til å gjelde eksponenter i hele $\mathbb{Q}$ (ikke bare i $\mathbb{N}$.)

Det er også mulig å definere potensuttrykk der eksponenten er irrasjonal, for eksempel 2^π. Idéen er å betrakte følgen $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}\dots$, der eksponentene er rasjonale tall som blir stadig nærmere π. Man kan vise at følgen nærmer seg et bestemt tall, som vi definerer til å være 2^π. Vi går ikke nærmere inn på detaljene her.

Vi oppsummerer potensreglene i generell form:

Teorem 2.4. Potensregler
La $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, der $a, b \geq 0$. Følgende regler gjelder der hvor uttrykkene er definert:

a) $a^m a^n = a^{m+n}$ *b)* $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ *c)* $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\cdot n}$

d) $a^m b^m = (ab)^m$ *e)* $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Vi tar med noen eksempler for å vise hvordan reglene over brukes.

Eksempel 2.1. Regn ut: a) $\sqrt[3]{5^6}$ b) $2^{-10}\sqrt[\frac{1}{3}]{2^4}$ c) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^6$.

Løsning. a) $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25.$

b) $2^{-10}\sqrt[\frac{1}{3}]{2^4} = 2^{-10}(2^4)^{\frac{1}{1/3}} = 2^{-10}(2^4)^3 = 2^{-10}2^{12} = 2^{-10+12} = 4.$

c) Enten: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^6 = \left(\dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^6 = \left(a^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\right)^6 = (a^{\frac{1}{12}})^6 = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},$

eller: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^6 = \dfrac{(\sqrt[4]{a^3})^6}{(\sqrt[3]{a^2})^6} = \dfrac{a^{\frac{3}{4}\cdot 6}}{a^{\frac{2}{3}\cdot 6}} = \dfrac{a^{\frac{9}{2}}}{a^4} = a^{\frac{9}{2}-4} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$

□

2.2 Manipulering av annengradsuttrykk

I denne seksjonen skal vi se nærmere på potenser av annen grad, såkalte *kvadrater*. Stoffet burde være velkjent, men brukes så ofte at det kan være greit med en repetisjon.

2.2.1 Kvadratsetningene

De tre kvadratsetningene er små huskeregler som gjør en matematikers hverdag litt enklere.

Teorem 2.5. Kvadratsetningene

1. kvadratsetning: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. kvadratsetning: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. kvadratsetning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *(også kalt konjugatsetningen)*

Bevis. Her er det ikke noe hokus-pokus. Det er bare å gange ut venstresidene, så får du høyresidene. For eksempel:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

□

Noen lurer kanskje på hvorfor det er noe vits i å terpe så mye på disse tre «setningene» – det er jo likevel bare å regne ut hvis man skulle glemme dem. Det er selvfølgelig riktig, men det er likevel minst to gode grunner til å ha dem spikret i hjernebarken.

Den første er at de sparer deg for både tid og slurvefeil i mange utregninger:

Eksempel 2.2. Regn ut $(\sqrt{5x^2-3x+1}+x-3)(\sqrt{5x^2-3x+1}-x+3)$.

Løsning. Begynner man å gange ut her, er det lett å gå seg vill og ende opp med feil. I stedet ser vi at vi kan sette parenteser litt lurt, slik at konjugatsetningen kan brukes:

$$\begin{aligned}&(\sqrt{5x^2-3x+1}\ +\ (x-3)\ )(\sqrt{5x^2-3x+1}\ -\ (x-3)\ ) = \\ &\quad \sqrt{5x^2-3x+1}^{\,2} - (x-3)^2 = 5x^2 - 3x + 1 - (x^2 - 6x + 9) = 4x^2 + 3x - 8.\end{aligned}$$

I nest siste overgang brukte vi også 2. kvadratsetning for å regne ut $(x-3)^2$. □

Den andre måten kvadratsetningene kan være til hjelp på, er når man skal faktorisere kompliserte uttrykk. Generelt er det ingen metoder som forteller hvordan man kan faktorisere et vilkårlig uttrykk. Man er altså avhengig av ulike «triks», alt etter hva slags uttrykk det er snakk om. Ett slikt triks er å bruke kvadratsetningene motsatt vei – fra høyre mot venstre. Det neste eksemplet viser hvor effektiv denne metoden er:

Eksempel 2.3. Faktoriser uttrykket $(z^2+1)^2 + 2(z^2+1)z + z^2$.

Løsning. Kan man ikke kvadratsetningene, er det lett å stå fast her. Men etter å ha stirret en stund på uttrykket, kjenner vi igjen høyresiden i 1. kvadratsetning, med $a = z^2 + 1$ og $b = z$. Og det betyr at vi kan skrive opp faktoriseringen direkte:

$$(z^2 + 1)^2 + 2(z^2 + 1)z + z^2 = \big[(z^2 + 1) + z\big]^2 = (z^2 + z + 1)^2.$$

□

Vi tar med et eksempel til, litt mer omfattende enn det forrige. Her bruker vi alle tre kvadratsetningene «motsatt vei»:

Eksempel 2.4. Faktoriser uttrykket $x^4 - 2x^2 + 1 - y^2 - 4y - 4$.

Løsning. Ideen her er å skrive uttrykket som en differanse mellom to kvadrater, for så å bruke konjugatsetningen til å faktorisere.

La oss begynne med de tre første leddene. Ser du nøye på dem, kjenner du igjen formen til høyresiden i 2. kvadratsetning, med $a = x^2$ og $b = 1$. Det betyr altså at

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2.$$

Likeledes kan vi lage et kvadrat av de tre siste leddene, etter først å ha trukket ut en minus:

$$-y^2 - 4y - 4 = -(y^2 + 4y + 4) = -(y + 2)^2.$$

Her brukte vi 1. kvadratsetning med $a = y$ og $b = 2$. Dette betyr at vi kan skrive det opprinnelige uttrykket som $x^4 - 2x^2 + 1 - y^2 - 4y - 4 = (x^2 - 1)^2 - (y + 2)^2$. Fordi dette er en differanse av to kvadrater, kan vi faktorisere ved å bruke konjugatsetningen. Vi får at

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 1 - y^2 - 4y - 4 &= (x^2 - 1)^2 - (y + 2)^2 \\ &= (x^2 - 1 + (y + 2))(x^2 - 1 - (y + 2)) \\ &= (x^2 + y + 1)(x^2 - y - 3). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Å fullføre kvadratet

Et *kvadrat* (ofte kalt *fullstendig kvadrat*) er et uttrykk som forekommer i 2. potens, dvs et uttrykk på formen $(\dots)^2$, der innholdet i parentesen kan være hva som helst. Når vi behandler annengradsuttrykk, er det ofte nyttig å skrive om uttrykket slik at det ligner mest mulig på et fullstendig kvadrat. Trikset vi bruker for å gjøre dette, kalles å *fullføre kvadratet*. Resultatet blir at vi kan omdanne annengradsuttrykk som

$ax^2 + bx + c$ til noe på formen $(\dots)^2 + r$, der r er en konstant. Vi får altså fjernet det lineære leddet, noe som viser seg å ha mange fordeler.

Hvordan gjør vi så dette i praksis? Faktisk er alt vi trenger følgende enkle utregning:

Metoden med å fullføre kvadratet
La b være et reelt tall. Da er

$$x^2 + 2bx = x^2 + 2bx + b^2 - b^2 = (x + b)^2 - b^2. \tag{3}$$

Legg merke til at det eneste som skjer i utregningen, er at vi legger til og trekker fra b^2. Resten følger direkte fra 1. kvadratsetning. Sjekk detaljene selv, hvis du er usikker.

Eksempel 2.5. Skriv uttrykket $x^2 + 10x + 17$ på formen $u^2 + r$, der r er en konstant.

Løsning. Dersom vi skriver koeffisienten foran x som $2 \cdot 5$ i stedet for 10, ser de to første leddene i uttrykket ut som

$$x^2 + 2 \cdot 5x.$$

Dette uttrykket har samme form som venstresiden i (3), med $b = 5$. Vi prøver derfor å legge til og trekke fra $b^2 = 25$. Vi får da at uttrykket vi startet med blir lik

$$x^2 + 10x + 17 = (x^2 + 2 \cdot 5x + 25) - 25 + 17 = (x + 5)^2 - 8.$$

Dermed fikk vi skrevet uttrykket på formen $u^2 + r$, der $u = x + 5$ og $r = -8$. □

Eksempel 2.6. Løs likningen $2x^2 + 6x = 5$ ved først å lage et fullstendig kvadrat på venstre side.

Løsning. For å slippe koeffisienten foran x^2-leddet, deler vi likningen på 2:

$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}.$$

Poenget er nå å fullføre kvadratet på venstresiden ved å legge til et passende tall på begge sider av likhetstegnet. Fordi $x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x$, ser vi fra utregningen i (3) at tallet vi trenger er $(\frac{3}{2})^2$. Utregningen blir slik:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= \frac{5}{2} \\ x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 &= \frac{5}{2} + (\frac{3}{2})^2 \\ (x + \frac{3}{2})^2 &= \frac{5}{2} + \frac{9}{4} = \frac{19}{4} \\ x + \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{19}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{19} \\ x &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{19}. \end{aligned}$$

□

«Moralen» i metoden med å fullføre kvadratet kan formuleres slik:

$$\boxed{\text{For å lage et fullstendig kvadrat av } x^2 + ax\text{, mangler du } (\frac{a}{2})^2. \qquad (4)}$$

Vi tar med et eksempel til:

Eksempel 2.7. Faktoriser uttrykket $x^2 + x - \frac{3}{4}$.

Løsning. Vi lager et fullstendig kvadrat av $x^2 + x$ ved å legge til og trekke fra $(\frac{1}{2})^2$:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = \left[x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2\right] - (\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - 1.$$

Dette uttrykket lar seg faktorisere ved konjugatsetningen:

$$(x + \frac{1}{2})^2 - 1 = (x + \frac{1}{2} + 1)(x + \frac{1}{2} - 1) = (x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2}).$$

Resultatet blir altså at $x^2 + x - \frac{3}{4} = (x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$. □

2.2.3 Annengradslikninger

I dag har de fleste kalkulatorer innebygd programmer som kan løse annengradslikninger. Dette er vel og bra, men jeg anbefaler likevel å løse slike likninger for hånd, med mindre tallene er helt horrible (f.eks. desimaltall). De viktigste årsakene er:

- Når du regner for hånd, får du eksakte svar, for eksempel $x = \sqrt{7}$, i stedet for det avrundete kalkulatorsvaret $x = 2,64575$. Eksakte svar er mer informative, lettere å jobbe med og – nettopp – eksakte!
- Med litt trening går det stort sett like fort, og ofte fortere, å regne for hånd.
- Dette handler også om stolthet: En matematikkstudent bør rett og slett kunne løse annengradslikninger uten hjelp fra en maskin!

Nok prat – her er den gode gamle *abc*-formelen:

Teorem 2.6. Løsningsformelen for annengradslikninger
La a, b og c være reelle tall, der $a \neq 0$. Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

forutsatt at $b^2 - 4ac \geq 0$. Dersom $b^2 - 4ac < 0$, har likningen ingen reelle løsninger.

Bevis. Se oppgave 2.18. □

Et spesialtilfelle av Teorem 2.6 er verdt å merke seg. Dersom likningen vi skal løse, er på formen

$$x^2 + 2bx + c, \tag{5}$$

der b og c er reelle tall, får vi nemlig en ekstra fin formel for løsningene:

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4c}}{2} = -\frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - c}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}. \tag{6}$$

Eksempel 2.8. Løs likningen $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$.

Løsning. Setter vi $u = e^x$ blir likningen omskrevet til $u^2 + 2u - 8$. Denne likningen er på formen (5), med $b = 1$ og $c = -8$. Formelen (6) gir dermed at

$$u = -1 \pm \sqrt{1 + 8} = -1 \pm 3 \quad \Longrightarrow \quad u = -4 \text{ eller } u = 2.$$

For å finne x, må vi nå løse likningene $e^x = -4$ og $e^x = 2$. Den første av disse har ingen løsning, fordi e^x alltid er positiv. Den andre løser vi på vanlig måte:

$$e^x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln 2.$$

Den opprinnelige likningen har derfor $x = \ln 2$ som eneste løsning. □

Vi tar også med følgende nyttige teorem, som gir en generell formel for faktorisering av annengradsuttrykk:

Teorem 2.7. Faktorisering av annengradsuttrykk
La a, b og c være reelle tall, der $a \neq 0$, og anta at likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene x_1 og x_2. (Disse kan være like.) Da har vi faktoriseringen

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Eksempel 2.9. Faktoriser uttrykket $x^2+x-\frac{3}{4}$ fra Eksempel 2.7 ved å bruke teoremet over.

Løsning. Likningen $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{3}{4})}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2} \implies x = -\frac{3}{2} \text{ eller } x = \frac{1}{2}.$$

Teorem 2.7 gir dermed at $x^2 + x - \frac{3}{4} = (x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$. Dette er identisk med svaret vi fikk i Eksempel 2.7 □

2.3 Logaritmer

Se på likningen $3^x = 7$. Kan vi klare å få x til å stå alene på en side her? Faktum er at dette rett og slett er umulig med de reglene vi har gjennomgått til nå. Vi innfører derfor et helt nytt begrep som er spesialdesignet for å løse slike likninger: Logaritmer.

Definisjon 2.8. Logaritmer med grunntall b
La a og b være positive, reelle tall. Vi definerer $\log_b a$ til å være den eksponenten vi må opphøye b i for at potensen skal bli lik a. Med andre ord er

$$b^{\log_b a} = a.$$

Tallet $\log_b a$ kaller vi *logaritmen til a med grunntall b.*

Ifølge denne definisjonen har likningen $3^x = 7$ altså løsningen $\log_3 7$. Foreløpig sier dette oss imidlertid temmelig lite – vi vet jo ennå ikke hvilket tall dette er! Vi må studere noen flere egenskaper ved logaritmer før vi kan dra noen nytte av dem.

To spesielle grunntall opptrer mye oftere enn noen andre når man snakker om logaritmer. Disse er 10 og det berømte tallet $e = 2,71828\ldots$.

I skolematematikken bruker man stort sett grunntallet 10 – såkalte *Briggske logaritmer*. I høyere matematikk derimot, benytter man så å si utelukkende e som grunntall:

Definisjon 2.9. Naturlige logaritmer
Logaritmer med grunntall $e = 2,71\ldots$ kalles *naturlige logaritmer*. I stedet for $\log_e a$ skriver vi $\ln a$. For alle $a > 0$ er $\ln a$ definert som det tallet vi må opphøye e i for å få a, det vil si at

$$e^{\ln a} = a.$$

Hvis $a \leq 0$, er $\ln a$ ikke definert.

Tallet e er i seg selv et meget interessant tall. En måte å definere det på, er ved grenseverdien

$$e = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x,$$

uten at vi skal gå nærmere inn på dette her.

Selv om tallet e virker som et mer komplisert grunntall enn for eksempel 10, er det mange grunner til at naturlige logaritmer er – som navnet antyder – et naturlig valg. Disse grunnene blir klarere etter hvert som man lærer mer om funksjonsanalyse. Men som et eksempel kan vi nevne at eksponentialfunksjonen e^x er den eneste funksjonen (opp til multiplikasjon med en konstant) som er sin egen derivert!

Det er på tide å se på de grunnleggende regnereglene for logaritmer. Siden vi fra nå av utelukkende skal bruke naturlige logaritmer, skriver vi formlene under med ln, selv om tilsvarende formler gjelder for logaritmer med vilkårlig grunntall.

Teorem 2.10. Regneregler for logaritmer
La a og b være positive, reelle tall, og x et vilkårlig reelt tall. Vi har at

a) $\ln e^a = a$ *b)* $\ln e = 1$ *c)* $\ln 1 = 0$

d) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ *e)* $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ *f)* $\ln(a^x) = x \ln a$

Bevis. a) Dette følger direkte fra Definisjon 2.9: $\ln e^a$ er det tallet vi må opphøye e i for å få e^a. Men det er selvfølgelig a.

b) og c) Disse er spesialtilfeller av formelen $\ln e^a = a$, med a lik 1 og 0.

d) Fra Definisjon 2.9 har vi at $e^{\ln(ab)} = ab$. På den annen side er

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab.$$

Dette betyr at $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$. Siden grunntallet i begge potensene er e, må eksponentene være like. Altså er $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

e) og f) Disse bevises ved å bruke samme triks som i d). Se Oppgave 2.20. $\square$

Alle gode kalkulatorer kan regne ut naturlige logaritmer. Sammen med Teorem 2.10 gjør dette oss endelig i stand til å løse eksponentiallikninger som $3^x = 7$. Tar vi ln på begge sider og bruker punkt f) fra teoremet over, får vi nemlig:

$$3^x = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln 3^x = \ln 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ln 3 = \ln 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln 7}{\ln 3}.$$

Med kalkulator kan vi regne ut at $x \approx 1,77$.

2.4 Oppgaver

Oppgave 2.1. Regn ut uten kalkulator:

a) $4^3 - 3^4$ b) $\sqrt[3]{125^2}$ c) $6^{\frac{2(16-17)}{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{3}}}$ d) $7^{-7}(\sqrt[7]{7^7})^7$

Oppgave 2.2. Forkort brøkene så mye som mulig.

a) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{x\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$ c) $\dfrac{y^7\sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{y^5})^2}$ d) $\dfrac{(b-1)\sqrt{\frac{1}{b-1}}}{(b-1)^{-\frac{5}{2}}}$

Oppgave 2.3. Skriv uttrykket enklere.

a) $\sqrt{\sqrt{a^3}}$ b) $\sqrt[3]{a^3(a^3)^3}$ c) $\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}\sqrt{a^2-1}$

Oppgave 2.4. Alle bokstavene står for positive reelle tall. Skriv uttrykket enklere, og ordne bokstavene i teller og nevner alfabetisk til slutt.

$$\frac{de^{\frac{3}{5}}(tt)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{2}{5}}(er)^{6-6}}{ki^{-\frac{1}{3}}n^0k(ig^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}}.$$

Oppgave 2.5. Regn ut.

a) $(1+\dfrac{a}{2})^2$ b) $(x+\dfrac{1}{x})^2$ c) $(e^x - e^{-x})^2$

Oppgave 2.6. Regn ut.

a) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$ b) $(7-\sqrt{a-1})(7+\sqrt{a-1})$

c) $(2+e^{\frac{1}{2}x})(2-e^{\frac{1}{2}x})$ d) $(x+3+\sqrt{x^2+3})(x+3-\sqrt{x^2+3})$

Oppgave 2.7. Skriv uttrykket som et kvadrat.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $(y - 7)^2 + 2(y - 7) + 1$

Oppgave 2.8. Forkort brøkene så mye som mulig:

a) $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ b) $\dfrac{(x + 2)^2}{4 - x^2}$ c) $\dfrac{5 - x^2}{\sqrt{5} - x}$ d) $\dfrac{x + 2y}{x^2 - 4y^2}$

e) $\dfrac{x^4 - a^2}{x - \sqrt{a}}$ f) $\dfrac{ab^5 - a^5 b}{ab + b^2}$

Oppgave 2.9. Faktoriser følgende uttrykk ved hjelp av kvadratsetningene:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2(x^2 - y^2) + 1.$$

Oppgave 2.10. Løs annengradslikningene under ved hjelp av formelen i Teorem 2.6 eller den alternative formelen (6).

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 - 12x + 35 = 0$ c) $3x^2 + 8x + 4 = 0$

d) $6x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{25}{4} = 0$ e) $-2x^2 + 6x - 1 = 0$ f) $6x^2 + 5x - 3 = 0$

Oppgave 2.11. Bruk løsningene du fant i Oppgave 2.10 til å faktorisere venstresidene i likningene.

Oppgave 2.12. Inger og Christin morer seg med kalkulatorene sine ved å spille følgende spill: De starter med et tall på formen a^N, der a og N er naturlige tall større enn 1. Inger tar kvadratroten av tallet og sier svaret til Christin, som deler svaret på a. Inger tar kvadratroten av dette igjen, og Christin deler det nye svaret på a. Slik veksler de på å ta kvadratroten og å dele på a helt til en av dem får et svar som er mindre enn a. Den som får det, vinner spillet. Hvis noen av dem ender opp med tallet a nøyaktig, blir det uavgjort.

a) Hvem vinner hvis tallet de starter med er i) 5^{11}, ii) 3^{14}, iii) 7^{20}?

b) Har verdien av a noen betydning for utfallet? Forklar.

*c) Hvilke starttall a^N gir uavgjort resultat?

Oppgave 2.13. Finn alle reelle løsninger av likningene.

a) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ b) $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

c) $2(\ln x)^2 + \ln x^3 - 2 = 0$ d) $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

(Hint til c) og d): Skriv om uttrykkene $\ln x^3$ og e^{x+1}.)

Oppgave 2.14. Skriv så enkelt som mulig.

a) $\ln 4 - \ln 2$ b) $3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 9 - \ln 4$ c) $\ln(2e) - \ln e^3$

Oppgave 2.15. Løs likningene og oppgi svaret på eksakt form. Prøv å forenkle så mye som mulig.

a) $2^x = 1$ b) $e^x = 9$ c) $e^{2x} = 2$ d) $4^x = 5$ e) $8^x = 2$

f) $2^x = 3^{x-1}$ g) $\frac{7^x}{2^x} = 4$ h) $e^{2x^2-3} = e$

Oppgave 2.16. Skriv så enkelt som mulig.

a) $\ln(3e^a)$ b) $-\ln(\frac{1}{a+1})$ c) $\ln(a-1) - \ln(a^2-1)$

d) $\ln a \cdot \ln a^2$ e) $\ln\sqrt{a} + \ln\frac{1}{a} + \ln\frac{1}{\sqrt{a}}$

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 2.17. Regn ut uttrykket

$$(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})(\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}),$$

der $0 \leq y \leq x$.

Oppgave 2.18. (Bevis for løsningsformelen for annengradslikninger). La a, b og c være reelle tall slik at $a \neq 0$ og $b^2 - 4ac \geq 0$. Bruk metoden med å fullføre kvadratet til å løse annengradslikningen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

(Hint: Følg mønsteret fra Eksempel 2.6.)

Oppgave 2.19. Identifiser og tenk gjennom forskjellene mellom teoremene 2.2 og 2.4.

Oppgave 2.20. Bevis formlene e) og f) i Teorem 2.10.

3 Funksjoner

Funksjonsbegrepet er en av de viktigste oppfinnelsene i matematikken. I dette kapittelet tar vi for oss de grunnleggende definisjonene og egenskapene knyttet til funksjoner. Dette danner basis for funksjonsdrøftingen senere i heftet.

3.1 Grunnleggende definisjoner

Det er viktig å ha klart for seg hva en funksjon egentlig er. Du har sikkert jobbet mye med funksjoner i skolen, men kan du på stående fot gi en presis definisjon? Det er kanskje ikke så lett.

Definisjon 3.1. Funksjon
La D og V være mengder. En *funksjon* f fra D til V er en regel som til ethvert element $x \in D$ tilordner nøyaktig ett element $f(x) \in V$. Vi skriver

$$f\colon D \to V.$$

- Elementene i D kalles *argumentene* til f, mens de tilordnede elementene $f(x) \in V$ er *verdiene* til f.
- Mengden D kaller vi *definisjonsmengden* til f. Mengden av alle verdiene til f kaller vi *verdimengden* til f. Verdimengden til f trenger ikke være hele V.
- Dersom alle verdiene til f er reelle tall, kalles f en *reell funksjon*.

For å understreke hvilken funksjon vi jobber med, er det vanlig å bruke notasjonen D_f og V_f om definisjons- og verdimengden til f.

De fleste funksjonene vi jobber med er slik at både definisjonsmengden og verdimengden er tallmengder. Det er imidlertid viktig å være klar over at dette ikke er nødvendig; mengdene D og V i definisjonen over kan bestå av hva som helst.

Eksempel 3.1. Vi definerer funksjonen

$$f\colon \{\text{studenter på forkurset}\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

ved at hvis x er en student, så er $f(x)$ fødselsdagen til studenten, skrevet som et heltall etter mønsteret DDMMÅÅ. Forklar at f tilfredsstiller Definisjon 3.1 og bestem mengdene D_f, V og V_f i dette tilfellet.

Løsning. Observer først at *hver eneste* student har en *entydig* fødselsdag (det gjør ingenting om noen er født på samme dag.) Skrevet på formen DDMMÅÅ gir fødselsdagen et entydig positivt heltall. Funksjonen er dermed veldefinert. D_f er mengden av alle studentene på forkurset. V er lik $\mathbb{N}$, altså mengden av alle positive heltall. Verdimengden V_f er en liten delmengde av $\mathbb{N}$. Skulle vi beskrevet V_f nøyaktig, måtte vi ha listet opp fødselsdagene til alle studentene. I mangel av disse opplysningene, nøyer vi oss med noen observasjoner som sirkler inn V_f betraktelig:

- V_f består av heltall i intervallet $[10100, 311299]$. (Hvilke fødselsdager svarer endepunktene til?)
- Antall elementer i V_f er likt som, eller (høyst sannsynlig) mindre enn antall deltakere på forkurset.
- Alle tallene i V_f har enten 0 eller 1 som tredjesiffer. (Hvorfor?)

$\square$

Eksempel 3.2. La h være funksjonen definert ved at for ethvert naturlig tall n, så er $h(n)$ lik det siste sifferet i tallet. For eksempel er $h(123) = 3$, og $h(10) = 0$. Bestem D_h og V_h i dette tilfellet.

Løsning. Her er $D_h = \mathbb{N}$, mens $V_h = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\square$

Hvis du synes at funksjonene i eksemplene over var snodige, så har du litt rett i det. De aller fleste funksjonene vi skal jobbe med, er slike som du er vant med fra før – reelle funksjoner der definisjonsmengden er et intervall (eller en union av intervaller) i $\mathbb{R}$. Slike funksjoner blir gjerne definert ved hjelp av formeluttrykk, for eksempel

$$f(x) = x^2 + 3x + 1. \tag{7}$$

Dersom definisjonsmengden til en funksjon ikke oppgis, antar vi alltid at funksjonen er definert for alle x slik at formeluttrykket gir mening. Høyresiden i (7) er for eksempel definert for alle $x \in \mathbb{R}$, så da setter vi $D_f = \mathbb{R}$.

Eksempel 3.3. Finn definisjons- og verdimengden til hver av funksjonene:

a) $f(x) = x$, b) $g(x) = x^2$, c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $-2 < x < 2$.

Løsning. a) Her blir $D_f = V_f = \mathbb{R}$.

b) Uttrykket x^2 er definert for alle $x \in \mathbb{R}$, så $D_g = \mathbb{R}$. Videre er $V_g = [0, \infty)$. Bevis: For ethvert tall $a \in [0, \infty)$ finnes et tall $x \in \mathbb{R}$ slik at $g(x) = a$, nemlig $x = \sqrt{a}$. Hvis $a < 0$, finnes ingen slik x.

c) Her kreves det i oppgaven at x skal ligge mellom -2 og 2. I tillegg er kvadratroten $\sqrt{x^2 - 1}$ veldefinert bare når $x^2 - 1 \geq 0$, dvs $x^2 \geq 1$, som betyr at vi enten har $x \geq 1$ eller $x \leq -1$. Alt i alt får vi at $D_h = (-2, -1] \cup [1, 2)$. Verdimengden blir $V_h = [0, \sqrt{3})$. $\square$

3.2 Grafen til en funksjon

En av de viktigste kildene til informasjon om en (reell) funksjon, er *grafen* til funksjonen. Når vi tegner denne i et koordinatsystem, får vi et fint bilde av hvordan funksjonen oppfører seg.

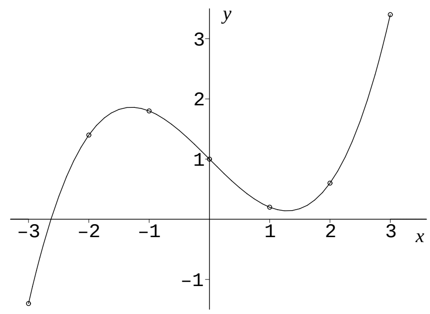
Den enkleste – om ikke akkurat den mest elegante – metoden å tegne grafen til en funksjon på, gjennomgås allerede på ungdomsskolen:

Tegning av grafen til en funksjon f.

- Velg et passende intervall som grafen skal tegnes over. (Gjerne der funksjonen er mest «interessant».)
- Velg noen passende x-verdier i dette intervallet, f.eks. $x_1, x_2, \dots x_m$, og lag en tabell over de tilhørende funksjonsverdiene, $f(x_1), f(x_2), \dots f(x_m)$.[1]
- Marker punktene $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots (x_m, f(x_m))$ i et koordinatsystem. (Husk: x er alltid langs førsteaksen.)
- Tegn en jevn kurve som går gjennom de markerte punktene.

Kurven vi får på denne måten, blir en god tilnærming til grafen. Desto flere punkter vi velger, jo mer nøyaktig blir grafen. I de fleste tilfeller er det imidlertid mer enn nok å ta med 7-8 punkter. På figur 3 har vi tegnet grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - x + 1$ over intervallet $[-3, 3]$. Som tabellen viser, har vi valgt x-verdiene $-3, -2, \dots, 3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{5}x^3 - x + 1$	-1.4	1.4	1.8	1	0.2	0.6	3.4



Figur 3: Tegning av grafen til $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - x + 1$ over intervallet $[-3, 3]$.

Senere i heftet, når vi har gjennomgått derivasjon, skal vi se på teknikker for å drøfte funksjoner og deres grafer mer inngående. Dette vil også gjøre selve graftegningen langt mer effektiv og presis.

[1] Her er det lov å bruke kalkulator, hvis du absolutt må...

3.3 Å bygge funksjoner

Dersom f og g er to funksjoner, kan vi «bygge» nye funksjoner ut fra disse to. Det er to hovedmåter vi kan gjøre dette på.

Den mest opplagte metoden er å bruke de 4 regneartene. Hvis for eksempel

$$f(x) = \sqrt{x+1} \qquad \text{og} \qquad g(x) = x^3, \tag{8}$$

kan vi lage nye funksjoner ved å legge dem sammen ($\sqrt{x+1} + x^3$), trekke dem fra hverandre ($\sqrt{x+1} - x^3$ og $x^3 - \sqrt{x+1}$), gange dem sammen ($\sqrt{x+1} \cdot x^3$) eller dele den ene på den andre ($\frac{\sqrt{x+1}}{x^3}$ og $\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$).

Den andre metoden er å sette funksjonene *inni* hverandre. Med f og g som i (8), får vi med denne teknikken de to funksjonene

$$f(g(x)) = \sqrt{x^3+1} \qquad \text{og} \qquad g(f(x)) = (\sqrt{x+1})^3 = (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Den innerste funksjonen kalles ofte *kjernen* i det sammensatte uttrykket. Funksjoner som er bygget opp på denne måten, er utgangspunktet for den berømte *kjerneregelen*, som vi kommer til i kapittel 7.

Teoremet under oppsummerer diskusjonen over og gjør rede for definisjonsmengdene til de nye funksjonene. Beviset for teoremet følger fra Definisjon 3.1, men vi hopper over dette flisespikkeriet her. (Ikke la deg lure av at vi setter opp dette som et fancy teorem – det meste er rene selvfølgeligheter.)

Teorem 3.2. *Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er funksjoner. Da er følgende uttrykk også funksjoner:*

a) $f(x) + g(x)$	*b)* $f(x) - g(x)$	*c)* $g(x) - f(x)$
d) $f(x) \cdot g(x)$	*e)* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	*f)* $\dfrac{g(x)}{f(x)}$
g) $f(g(x))$	*h)* $g(f(x))$	

- *Funksjonene i a) – d) er definert der* både f *og* g *er definert. Definisjonsmengden blir altså $D_f \cap D_g$.*
- *I e) og f) blir definisjonsmengden $D_f \cap D_g$ minus de punktene der nevneren er lik null.*
- *Funksjonen $f(g(x))$ er definert for alle $x \in D_g$ som er slik at $g(x) \in D_f$. Tilsvarende for $g(f(x))$.*

3.4 Funksjoner med delt forskrift

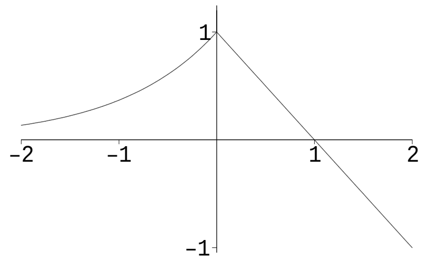
Noen ganger har vi bruk for å «dele» funksjoner i to eller flere biter. Vi kan for eksempel tenke oss en funksjon f som er slik at $f(x) = e^x$ for alle negative x-verdier, mens $f(x) = 1 - x$ når $x \geq 0$. I dette tilfellet skriver vi

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{for } x < 0, \\ 1 - x, & \text{for } x \geq 0, \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{for } x \in (-\infty, 0), \\ 1 - x, & \text{for } x \in [0, \infty). \end{cases}$$

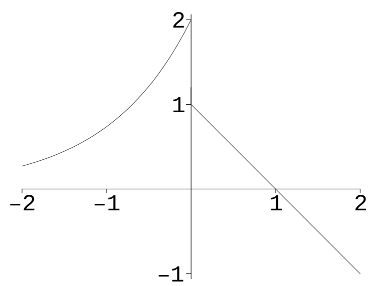
Slike funksjoner kaller vi *funksjoner med delt forskrift*, eller bare *delte funksjoner.*

På figur 4 er grafen til f tegnet inn. Her ser du tydelig hvordan grafen til f endrer karakter i $x = 0$. De punktene der funksjonsuttrykket skifter, kaller vi *bruddpunktene* til funksjonen.

Dersom grafen henger sammen i bruddpunktet (slik at du kan tegne grafen uten å løfte pennen fra papiret), sier vi at grafen er *kontinuerlig* i bruddpunktet. I motsatt fall, som på figur 5, er grafen *diskontinuerlig* i bruddpunktet.



Figur 4: Grafen til $f(x)$. Grafen er kontinuerlig i bruddpunktet $x = 0$.



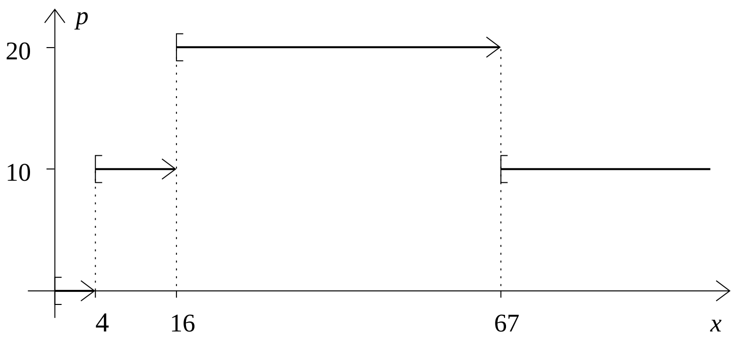
Figur 5: En graf som er diskontinuerlig i bruddpunktet $x = 0$.

I kapittel 6 skal vi gi en mer presis definisjon av begrepet kontinuitet. Der skal vi også se hvordan man kan avgjøre kontinuitetsspørsmål ved regning.

Eksempel 3.4. En T-banebillett er gratis for barn under 4 år, koster 10 kr for barn (f.o.m 4 år t.o.m 15 år), 20 kr for voksne (16-66 år) og 10 kr for de fra 67 år og oppover. Skriv billettprisen p som en funksjon av alderen x, og tegn grafen til p. (Alderen x trenger ikke å være et heltall. En person kan f.eks. være 15,7 år.)

Løsning. Observer først at siden en alder ikke kan være negativ, er definisjonsmengden til p intervallet $[0, \infty)$[1]. Beskrivelsen i teksten forteller at når x er i intervallet

[1] Det høres kanskje litt voldsomt ut å skrive ∞ her, men dette er den presise oversettelsen av «og oppover».



Figur 6: Billettprisen p uttrykt som funksjon av alderen x.

$[0,4)$, er $p(x) = 0$. Videre er $p(x) = 10$ når $x \in [4,16)$, $p(x) = 20$ når $x \in [16,67)$, og $p(x) = 10$ når $x \in [67,\infty)$. Dermed får vi at

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \in [0,4), \\ 10, & \text{for } x \in [4,16), \\ 20, & \text{for } x \in [16,67), \\ 10, & \text{for } x \in [67,\infty). \end{cases}$$

Siden funksjonsuttrykket er det samme i intervallene $[4,16)$ og $[67,\infty)$, kan vi skrive funksjonen enda mer kompakt – om enn noe mindre leservennlig – ved å bruke unionstegnet:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \in [0,4), \\ 10, & \text{for } x \in [4,16) \cup [67,\infty), \\ 20, & \text{for } x \in [16,67). \end{cases}$$

Grafen til $p(x)$ ser du på figur 6.

□

En viktig familie av funksjoner med delt forskrift får vi når vi bruker såkalte *absoluttverdier*.

Definisjon 3.3. Absoluttverdi
Absoluttverdien $|a|$ til et reelt tall a er gitt ved at

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a, & \text{hvis } a < 0. \end{cases} \tag{9}$$

For å finne $|-3|$ ut fra denne definisjonen tenker vi som følger: Fordi -3 er mindre enn null, må vi velge den nederste delen i (9). Dermed får vi at $|-3| = -(-3) = 3$.

Absoluttverdien har en geometrisk tolkning som kanskje er mer intuitiv enn Definisjon 3.3: Tallet $|a|$ er lik avstanden på tallinja fra punktet a til punktet 0.

Eksempel 3.5. Skriv funksjonen $f(x) = |x-1|$ uten å bruke absoluttverdi-notasjon.

Løsning. Som du sikkert allerede har gjettet, er trikset å skrive f med delt forskrift. Ifølge Definisjon 3.3 er $|x-1|$ lik $x-1$ når $x-1 \geq 0$, det vil si når $x \geq 1$. Når $x-1$ er mindre enn null, altså når $x < 1$, har vi derimot at $|x-1| = -(x-1) = 1-x$.

Resultatet av dette er at vi kan skrive

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{hvis } x \geq 1, \\ 1-x, & \text{hvis } x < 1. \end{cases}$$

□

Vi tar et eksempel til:

Eksempel 3.6. Skriv funksjonen $g(x) = e^{x+|x|}$ uten absoluttverdi-notasjon.

Løsning. La oss se på eksponenten $x + |x|$ først. Ved å bruke Definisjon 3.3 får vi at

$$x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & \text{hvis } x \geq 0, \\ x - x = 0, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Dette gir at vi kan skrive (husk at $e^0 = 1$):

$$g(x) = e^{x+|x|} = \begin{cases} e^{2x}, & \text{hvis } x \geq 0, \\ 1, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

□

3.5 Oppgaver

Oppgave 3.1. Bestem definisjonsmengden til funksjonen.

a) $f(x) = x^3$	b) $g(x) = 1 - \sqrt{x}$	c) $h(x) = \sqrt{1-x}$
d) $A(x) = \ln(2x-3)$	e) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(3x-5)}$	f) $y(x) = \sqrt{4-x^2}$

Oppgave 3.2. Bestem verdimengden til funksjonen. (Skisser gjerne grafen som hjelp!)

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ b) $g(x) = 1 - 4x, \quad -2 \leq x \leq 1$

c) $h(x) = \sqrt{x} - 1$ d) $k(x) = 1 - \sqrt{x}$

Oppgave 3.3. La funksjonen f være gitt ved at for alle reelle $x \geq 0$ så er $f(x)$ lik desimaldelen til x. For eksempel er $f(5.2) = 0.2$, $f(3) = 0$, og $f(0.33\ldots) = 0.33\ldots$.

a) Skisser grafen til f.

b) Hva er definisjonsmengden og verdimengden til f?

c) Er f kontinuerlig? Hvis ikke, hvor er bruddpunktene?

Oppgave 3.4. La $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ og $g(x) = \ln x$. Regn ut $h(x)$ og finn D_h når

a) $h(x) = f(x) + g(x)$ b) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ c) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

d) $h(x) = f(g(x))$ e) $h(x) = g(f(x))$

Oppgave 3.5. Slakteren Frank selger vanligvis medisterdeig til 30 kroner per kilo, men kan friste med følgende rabattordning: Dersom du kjøper 3 kg eller mer, er prisen 25 kr per kg, og kjøper du 10 kg eller mer, slipper du unna med 20 kr per kg. La $p(x)$ være prisen (i kroner) for x kg medisterdeig (x trenger ikke være et heltall).

a) Forklar at vi kan skrive $p(x) = \begin{cases} 30x, & x \in [0,3) \\ 25x, & x \in [3,10) \\ 20x, & x \in [10,\infty). \end{cases}$

b) Tegn grafen til p over intervallet $[0, 20]$. Identifiser bruddpunktene til grafen, og avgjør om grafen er kontinuerlig i disse.

c) Er det lurt (sett fra et økonomisk synspunkt) å kjøpe 9 kg medisterdeig av Frank? Hva bør du gjøre hvis du trenger nøyaktig 9 kg?

d) Bestem intervallene x *ikke* bør ligge i dersom du ønsker å få mest mulig medisterdeig for pengene.

Oppgave 3.6. Regn ut ved å bruke Definisjon 3.3.

a) $|-17|$ b) $|2.13|$ c) $|-y|$, når $y < 0$ d) $|1 - x|$, når $x < 1$

Oppgave 3.7. Skriv funksjonen uten å bruke absoluttverditegn. I punktene a) – d) skal du også skissere grafen.

a) $f(x) = |x+2|$ b) $f(x) = e^{|x|}$ c) $f(x) = 3x - |2x| + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ e) $f(x) = x|x-2|$ f) $f(x) = |x^2 - 1|$

Oppgave 3.8. Vis at for alle $a \in \mathbb{R}$ så er $\sqrt{a^2} = |a|$. (Hint: Gjør tilfellene $a \geq 0$ og $a < 0$ hver for seg.)

Oppgave 3.9.

a) Skisser grafen til $f(x) = x^2 - 1$ over intervallet $I = [-3, 3]$. Bruk resultatet til å skissere grafen til $g(x) = |x^2 - 1|$.

b) Gjenta oppgave a) med $f(x) = \sin x$, $g(x) = |\sin x|$ og $I = [-2\pi, 2\pi]$.

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 3.10. Tegn en sirkel med radius 1 i et koordinatsystem slik at sentrum ligger i origo.

a) Er dette grafen til en funksjon? Begrunn svaret.

b) Fjern den nederste delen av sirkelen, slik at du står igjen med en halvsirkel med endepunkter $(-1, 0)$ og $(1, 0)$. Er dette grafen til en funksjon. Hvilken?

Oppgave 3.11. Finn verdimengden til funksjonen. (Hint: Bruk metoden med å fullføre kvadratet til å skrive uttrykket på formen $\pm u^2 + r$, og husk at $u^2 \geq 0$ for alle u.)

a) $f(x) = x^2 + 10x + 30$ b) $g(x) = x^2 - 5x + 5$ c) $h(x) = \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{3}x - x^2$

Oppgave 3.12. Her skal vi se på en funksjon som sier noe om hvor godt du følger med på forkurset. Vi definerer funksjonen f som følger: Dersom x er en dag på forkurset, så er

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \text{antall (hele) oppgaver du løser den dagen} \\ & - \text{antall ganger du sovner på forelesningen den dagen} \end{aligned}$$

a) Hva er D_f? Hvilke verdier kan f anta?

b) Hva blir $f(\text{i dag})$ for deg?

4 Polynomer og rasjonale uttrykk

4.1 Polynomdivisjon

På barneskolen lærte vi den mystiske kunsten å dividere tall med hverandre. Nå skal vi gjøre det samme med polynomer. Det er en enkel og nyttig teknikk, som absolutt bør være med i vår matematiske verktøykasse.

Polynomdivisjon har store likhetstrekk med vanlig talldivisjon. Til glede for de kalkulatoravhengige som trenger en oppfriskning, minner vi om framgangsmåten ved å regne ut brøken $\frac{161}{7}$:

$$\begin{array}{l} 161 : 7 = 23 \\ \underline{14} \\ \ \ 21 \\ \ \ \underline{21} \\ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Forklaring: Vi ser først på de to første sifrene i 161, altså 16. Hva skal vi gange 7 med for å komme så nær som mulig – men ikke over – 16? Svaret er 2, fordi $2 \cdot 7 = 14$, mens $3 \cdot 7 = 21$. Vi skriver derfor tallet 2 rett etter likhetstegnet. Etter å ha subtrahert 14 fra 16, og trukket det siste 1-tallet ned, står vi igjen med 21 under streken. Siden $21 : 7 = 3$, føyer vi til tallet 3 i svaret. Divisjonen går opp, og resultatet blir 23.

Før vi går i gang med divisjon av polynomer, la oss gi en presis definisjon av hva vi mener med et polynom, og noen relaterte begreper.

Definisjon 4.1. Et *polynom* i variabelen x er et uttrykk på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

der *koeffisientene* $a_0, \ldots, a_n$ er reelle tall, og $n \in \mathbb{N}_0$. Dersom $a_n \neq 0$, kaller vi n for *graden* til polynomet.
En *polynomfunksjon* er en funksjon på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

der høyresiden er et polynom.

Eksempler på polynomer er

$$x^{10}, \qquad 0.3x^4 - \frac{3}{2}x, \qquad \sqrt{3}x^6 + x^5 - \pi,$$

mens følgende uttrykk er ikke polynomer:

$$x + \sin(x), \qquad \sqrt{x}, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Nå er vi klare til å lære polynomdivisjon. Som eksempel ser vi på brøken

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x - 1}.$$

For å regne ut hva dette blir, benytter vi det samme oppsettet som i talldivisjon. Vi bruker altså divisjonstegnet «:» i stedet for brøkstrek:

$$(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1) = ?$$

Det første vi gjør, er å identifisere de høyeste potensene i hvert polynom. Disse er her henholdsvis x^3 og x. Så spør vi: Hva må vi gange x med for å få x^3? Svaret er x^2, og dette skriver vi rett etter likhetstegnet. Deretter ganger vi x^2 med $x - 1$, og skriver resultatet (som blir $x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2$) under det første polynomet:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1) = x^2 \\ x^3 - x^2 \end{array}$$

De to polynomene som står under hverandre, skal så subtraheres fra hverandre. Her er det lett å surre med fortegnene, så pass på! Resultatet blir:

$$\begin{array}{rl} & (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1) = x^2 \\ - & \underline{(x^3 - x^2) \phantom{{} + 5x - 3)}} \\ & -2x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

Legg merke til at x^3-leddet forsvant etter subtraksjonen. Dette er hele poenget med at vi valgte x^2 som vårt første ledd i svaret.

Vi gjentar prosedyren med $-2x^2 + 5x - 3$. Hva må vi gange x med for å få $-2x^2$? Det må bli $-2x$, som dermed er neste ledd i svaret. Videre regner vi ut at $-2x \cdot (x - 1) = -2x^2 + 2x$, og dette skriver vi opp under $-2x^2 + 5x - 3$. Etter subtraksjonen står vi da igjen med følgende:

$$\begin{array}{rl} & (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1) = x^2 - 2x \\ - & \underline{(x^3 - x^2) \phantom{{} + 5x - 3)}} \\ & -2x^2 + 5x - 3 \\ & - \underline{(-2x^2 + 2x) \phantom{{} - 3}} \\ & \phantom{(x^3 -2x^2 + {}} 3x - 3 \end{array}$$

Nå står vi igjen med divisjonen $(3x - 3) : (x - 1)$. Her kan man enten se direkte at dette blir 3, eller man kan tenke som før: Hva må vi gange x med for å få $3x$? Jo, tallet 3. Den fullstendige regningen blir uansett seende slik ut:

$$\begin{array}{rl}
& (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : \ (x-1) = x^2 - 2x + 3 \\
- & \underline{(x^3 - \ \ x^2) \qquad\qquad} \\
& \quad -2x^2 + 5x - 3 \\
& - \underline{(-2x^2 + 2x) \quad} \\
& \qquad\qquad 3x - 3 \\
& \qquad\quad - \underline{(3x - 3)} \\
& \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Siden vi står igjen med 0 nederst, gikk divisjonen opp. Svaret er det som står etter likhetstegnet. Skifter vi tilbake til brøkstrek igjen, har vi altså fått resultatet

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x - 1} = x^2 - 2x + 3.$$

Ganger vi med $x - 1$ på begge sider, får vi en faktorisering av telleren:

$$(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3).$$

Å oppnå en slik faktorisering er ofte hensikten med å utføre en polynomdivisjon.

I mange polynomdivisjoner ender vi aldri opp med 0 under streken. Det vil si at divisjonen ikke går opp. Måten vi takler dette på, er nok en gang svært lik den vi bruker for vanlige tall:

$$\begin{array}{l}
163 : \ 7 = 23 \\
\underline{14} \\
\ \ 23 \\
\ \ \underline{21} \\
\ \ \ \ 2
\end{array}
\qquad \Longrightarrow \qquad \frac{163}{7} = 23 + \frac{2}{7}.$$

Vi måtte stoppe divisjonen når det som stod under streken var mindre enn 7 (med mindre vi skulle begynne med desimaltall). Tallet 2 kaller vi *resten* i divisjonen.

Nå ser vi på et tilsvarende eksempel med polynomdivisjon:

Eksempel 4.1. Regn ut $\dfrac{x^2 + 3x - 7}{x - 2}$ ved å bruke polynomdivisjon.

Løsning. Regningen blir slik:

$$\begin{array}{rl} & (x^2+3x-7) : (x-2) = x+5 \\ - & \underline{(x^2-2x)} \\ & \quad\quad 5x-7 \\ & - \underline{(5x-10)} \\ & \quad\quad\quad\quad 3 \end{array}$$

Dersom vi skulle ha fortsatt divisjonen nå, ville neste ledd i svaret blitt $\frac{3}{x}$ (fordi det er det x må ganges med for å få 3). Men da ville ikke svaret vært et polynom lenger, så dette vil vi ikke ha. I stedet sier vi at 3 er *restpolynomet*[1] i divisjonen, og skriver

$$\frac{x^2+3x-7}{x-2} = x+5+\frac{3}{x-2}.$$

□

Ved å gjøre eksemplet over litt mer generelt, kan vi vise at følgende regel holder:

Teorem 4.2. Polynomdivisjon
Anta at vi har utført et visst antall ledd i en polynomdivisjon $P(x) : Q(x)$, og at $R(x)$ er polynomet som står igjen under streken.

- *Dersom graden til $R(x)$ er større eller lik graden til $Q(x)$, kan divisjonen fortsette.*
- *Dersom graden til $R(x)$ er mindre enn graden til $Q(x)$, stopper divisjonen opp. $R(x)$ kalles* restpolynomet *eller bare* resten *i divisjonen. Dersom det som står etter likhetstegnet er $S(x)$, blir svaret på divisjonen at*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

- *Spesielt, hvis resten $R(x)$ er lik 0, går divisjonen opp, og vi har $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)$. Legg merke til at dette gir en faktorisering av polynomet i telleren:*

$$P(x) = Q(x)S(x).$$

[1]Her ser vi altså på tallet 3 som et polynom (av grad 0).

4.1.1 Flere eksempler

Synes du divisjonen over var komplisert? Det er ikke til å komme unna at det er en smule kronglete å beskrive polynomdivisjon med ord. Men det blir det jo når man skal beskrive vanlig talldivisjon med ord også (bare se firkanten på side 32!), uten at dét er spesielt vrient. Det er ingen grunn til å la seg avskrekke. Har du først jobbet deg gjennom et par eksempler og skjønt systemet, kan polynomdivisjon bli en riktig så trivelig affære.

Tips til polynomdivisjon

1. Dersom det første polynomet mangler noen ledd, blir oppstillingen lett rotete. Polynomer som $x^3 + 1$ bør derfor skrives som $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.
2. Regningen blir mer oversiktlig når leddene i hvert polynom står i riktig rekkefølge. Uttrykk som $2 - x$ bør derfor omskrives til $-x + 2$.
3. Husk de vanlige brøkreglene: Du kan forkorte eller gange med det samme oppe og nede, uten at brøken endrer verdi.

Eksempel 4.2. Utfør polynomdivisjonen $(2x^2 - 8) : (x + 2)$, og bruk resultatet til å faktorisere $2x^2 - 8$.

Løsning. Vi skriver $2x^2 - 8$ som $2x^2 + 0x - 8$, og utfører polynomdivisjon på vanlig måte. Den fullstendige regningen blir slik:

$$
\begin{array}{rl}
(2x^2 + 0x - 8) : & (x+2) = 2x - 4 \\
-\ \underline{(2x^2 + 4x)} & \\
-4x - 8 & \\
-\ \underline{(-4x - 8)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Siden vi fikk 0 til slutt, gikk divisjonen opp. Dette betyr at $2x^2 - 8$ kan faktoriseres:

$$2x^2 - 8 = (2x - 4)(x + 2).$$

□

Eksempel 4.3. Skriv brøken $\dfrac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x^3 + x^5}{x^3 - \frac{1}{2}x}$ enklere ved å bruke polynomdivisjon.

Løsning. I stedet for å dundre løs med divisjonen med en gang, kikker vi litt nærmere på brøken først. For eksempel ser vi at vi kan forkorte oppe og nede med x. Videre kan vi kvitte oss med de ubehagelige småbrøkene ved å gange oppe og nede med 2. Resultatet blir at

$$\frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x^3 + x^5}{x^3 - \frac{1}{2}x} = \frac{3 + x - 7x^2 + 2x^4}{2x^2 - 1}$$

Dette er et mye hyggeligere uttrykk å regne med. Vi skriver leddene i telleren i synkende rekkefølge og utfører polynomdivisjonen på vanlig måte

$$\begin{array}{rl}
(2x^4 + 0x^3 - 7x^2 + x + 3) & :\ (2x^2 - 1) = x^2 - 3 \\
-\ \underline{(2x^4 \qquad\quad -\ \ x^2)} & \\
-6x^2 + x + 3 & \\
-\ \underline{(-6x^2 \qquad +3)} & \\
x &
\end{array}$$

Nå kommer vi ikke lenger, fordi x har lavere grad enn $2x^2 - 1$. Divisjonen går altså ikke opp. Den opprinnelige brøken kan skrives slik:

$$\frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x^3 + x^5}{x^3 - \frac{1}{2}x} = \frac{3 + x - 7x^2 + 2x^4}{2x^2 - 1} = x^2 - 3 + \frac{x}{2x^2 - 1}.$$

□

Moral: Mange polynomdivisjoner kan forenkles betydelig ved å gjøre noen små endringer før man starter å dividere. Ha alltid øynene oppe for slike muligheter!

4.2 Nullpunktsetningen

I denne seksjonen skal vi se på et pent lite teorem som i mange tilfeller gjør det mulig å se om en polynomdivisjon går opp eller ikke – *uten* å trenge å utføre den. Teoremet gjelder for alle divisjoner der divisoren (dvs. nevneren) er på formen $x - a$, der a er et reelt tall.

Først en enkel definisjon:

Definisjon 4.3. Dersom polynomdivisjonen $P(x) : Q(x)$ går opp, sier vi at $P(x)$ *er delelig med* $Q(x)$. Dette er ekvivalent med at det finnes et polynom $S(x)$ slik at $P(x) = Q(x)S(x)$.

Teorem 4.4. Nullpunktsetningen
La $P(x)$ være en polynomfunksjon og a et reelt tall. Da gjelder ekvivalensen

$$P(x) \text{ er delelig med } x-a \iff P(a)=0.$$

Bevis (for spesielt interesserte). Vi beviser implikasjon begge veier.

$\Longrightarrow$: Anta at $P(x)$ er delelig med $x-a$. Ifølge Definisjon 4.3 finnes det da et polynom $S(x)$ slik at $P(x)=(x-a)S(x)$. Setter vi inn $x=a$ her, får vi at

$$P(a)=(a-a)S(a)=0.$$

Dette viser implikasjonen mot høyre.

$\Longleftarrow$: Anta nå at $P(a)=0$, og betrakt polynomdivisjonen $P(x):(x-a)$. Ifølge Teorem 4.2 finnes det et polynom $S(x)$ og et tall R (fordi $x-a$ har grad 1), slik at

$$\frac{P(x)}{x-a}=S(x)+\frac{R}{x-a},$$

Ganger vi med $x-a$ på begge sider, gir dette at $P(x)=S(x)(x-a)+R$. Men hvis vi nå setter inn $x=a$ og bruker antagelsen om at $P(a)=0$, får vi at

$$P(a)=S(a)(a-a)+R \implies R=0.$$

Dermed må vi ha $P(x)=S(x)(x-a)$, som betyr at $P(x)$ er delelig med $x-a$. Dette viser implikasjonen mot venstre.

$\square$

Nullpunktsetningen er uvurdelig når man skal faktorisere polynomer. Det neste eksemplet er typisk:

Eksempel 4.4. La $p(x)=x^3+x^2-4x-4$. Vis at $p(-1)=0$. Bruk dette til å faktorisere x^3+x^2-4x-4 i lineære faktorer.

Løsning. Vi regner ut at $p(-1)=(-1)^3+(-1)^2-4(-1)-4=-1+1+4-4=0$. Ifølge nullpunktsetningen betyr dette at $p(x)$ er delelig med $x-(-1)$, altså $x+1$. Utfører vi polynomdivisjonen på vanlig måte, finner vi at

$$(x^3+x^2-4x-4):(x+1)=x^2-4.$$

Dette gir faktoriseringen $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x^2 - 4)$. Ved konjugatsetningen er $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, slik at den fullstendige faktoriseringen blir

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x + 2)(x - 2). \qquad \square$$

Se for øvrig oppgaveseksjonen i dette kapittelet for flere anvendelser av nullpunktsetningen.

4.3 Delbrøkoppspalting

I dette kapittelet har vi jobbet mye med brøker $\frac{P(x)}{Q(x)}$, der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer. Vi har bruk for et eget navn på slike uttrykk:

Definisjon 4.5. Rasjonale uttrykk og funksjoner
Et *rasjonalt uttrykk* er et uttrykk på formen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer. En *rasjonal funksjon* er en funksjon som er gitt ved et rasjonalt uttrykk.

Legg merke til at definisjonen krever at teller og nevner i brøken er *polynomer*. Eksempler på rasjonale uttrykk er derfor

$$\frac{2}{x^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{x^3 + 4}{3x^2 - \sqrt{2}x + 1},$$

mens uttrykk som

$$\frac{2}{e^x} \qquad \text{og} \qquad \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

ikke er rasjonale.

Akkurat som man legger sammen rasjonale tall, kan man også legge sammen rasjonale uttrykk: Vi setter på felles brøkstrek og forenkler så mye som mulig:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 3(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}. \tag{10}$$

Hensikten med denne seksjonen er å lære hvordan man kan gå motsatt vei: Å starte med et komplisert rasjonalt uttrykk og spalte det opp i mindre og enklere biter. Dette kalles delbrøkoppspalting. Hovedpoenget med delbrøkoppspalting avsløres mot slutten av kompendiet, der vi skal integrere rasjonale uttrykk. Det passer likevel godt å gå gjennom teknikken her, siden en av de viktigste ingrediensene er faktorisering av polynomer.

Den enkleste typen av delbrøkoppspalting er denne:

Delbrøkoppspalting I
La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være forskjellige reelle tall, og anta $P(x)$ er et polynom av grad mindre enn n. Da kan man alltid finne konstanter $A_1, \ldots, A_n$ slik at

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots \frac{A_n}{x-x_n}, \tag{11}$$

Det finnes en god teknikk for å finne tallene $A_1, \ldots A_n$ i praksis. Framgangsmåten vises best ved et eksempel:

Eksempel 4.5. Finn reelle tall A og B[1] slik at

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}. \tag{12}$$

Løsning. La oss gange på begge sider av likningen med fellesnevneren $(x-1)(x-2)$:

$$5x - 7 = A(x-2) + B(x-1). \tag{13}$$

Herfra er det to veier å gå for å finne A og B. Den ene består i å lage et likningssystem der A og B er de ukjente. Den andre består i å sette inn «lure» verdier for x. Vi viser begge metodene:

Metode 1: Likningssystem
Ideen her er å gange ut høyresiden i (13) og samle x-leddene for seg, og konstantene for seg. Likheten (13) blir da omskrevet til

$$5x - 7 = (A+B)x + (-2A - B).$$

Ved å sammenligne de to sidene, ser vi nå at A og B må oppfylle likningssystemet

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -2A - B &= -7. \end{aligned}$$

Nå gjenstår det bare å løse likningssystemet. Legger vi sammen de to likningene, får vi umiddelbart $-A = -2$, det vil si $A = 2$. Setter vi inn dette i den øverste likningen, får vi at $2 + B = 5 \Leftrightarrow B = 3$.

Metode 2: Innsetting av lure verdier

[1] At vi bruker bokstavene A og B her i stedet for A_1 og A_2, er bare en smakssak. Når antallet er ukjent, er skrivemåten $A_1, \ldots, A_n$ best, men i konkrete eksempler bruker vi ofte A, B, osv.

Her er poenget at for noen spesielle verdier av x, vil høyresiden i (13) bli betydelig forenklet. Verdiene det er snakk om, er *røttene i nevneren i det opprinnelige uttrykket*, altså $x = 1$ og $x = 2$ i dette eksemplet. Setter vi inn $x = 1$, får vi:

$$5 \cdot 1 - 7 = A(1-2) + B(1-1) \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = -A \quad \Longleftrightarrow \quad A = 2.$$

Med $x = 2$ får vi tilsvarende

$$5 \cdot 2 - 7 = A(2-2) + B(2-1) \quad \Longleftrightarrow \quad B = 3.$$

Uansett hvilken metode vi bruker, får vi altså løsningene $A = 2$ og $B = 3$. Resultatet blir dermed delbrøkoppspaltingen

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Dette stemmer med utregningen vi gjorde i (10). □

I eksemplet over var polynomet i nevneren allerede faktorisert. Vi trengte denne faktoriseringen for å vite hvilke brøker oppspaltingen ville inneholde, slik at alt vi trengte å gjøre, var å finne konstantene A og B.

I mange tilfeller er imidlertid faktoriseringen ikke gitt på forhånd. Da må vi faktorisere selv før vi kan starte delbrøkoppspaltingen. Her er teknikkene vi har lært tidligere i dette kapittelet nyttige.

Eksempel 4.6. La $f(x) = x^3 - 7x - 6$. Vis at $f(3) = 0$, og bruk dette til å finne en delbrøkoppspalting av uttrykket

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}.$$

Løsning. Første mål er å få faktorisert nevneren $f(x) = x^3 - 7x - 6$. Fordi $f(3) = 27 - 7 \cdot 3 - 6 = 0$, sier nullpunktsetningen at $x - 3$ er en av faktorene i $f(x)$. Da kan vi bruke polynomdivisjon til å finne en foreløpig faktorisering:

$$\begin{array}{rl}
(x^3 + 0x^2 - 7x - 6) : (x-3) = x^2 + 3x + 2 & \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3 - 7x - 6 = \\
-\ \underline{(x^3 - 3x^2)} & \qquad\qquad\qquad (x-3)(x^2+3x+2) \\
3x^2 - 7x - 6 & \\
-\ \underline{(3x^2 - 9x)} & \\
2x - 6 & \\
-\ \underline{(2x - 6)} & \\
0 &
\end{array}$$

Annengradsuttrykket $x^2 + 3x + 2$ faktoriserer vi videre ved hjelp av de vanlige formlene: Likningen $x^2 + 3x + 2 = 0$ har løsningene $x = -1$ og $x = -2$, slik at $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Den fullstendige faktoriseringen blir dermed

$$x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2).$$

Nå kan vi begynne selve delbrøkoppspaltingen. Vi må finne konstanter A, B og C slik at

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 3)(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Som i forrige eksempel ganger vi overalt med fellesnevneren, $(x - 3)(x + 1)(x + 2)$:

$$x^2 + 1 = A(x + 1)(x + 2) + B(x - 3)(x + 2) + C(x - 3)(x + 1).$$

Vi velger å bruke metode 2 fra forrige eksempel for å finne A, B og C. Røttene i den opprinnelige nevneren er 3, -1 og -2. Innsetting av disse gir:

$$\begin{aligned}
x = 3: &\quad 3^2 + 1 = A \cdot 4 \cdot 5 + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \\
x = -1: &\quad (-1)^2 + 1 = A \cdot 0 + B(-4)1 + C \cdot 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B = -\frac{1}{2} \\
x = -2: &\quad (-2)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-5)(-1) \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1
\end{aligned}$$

Dermed har vi funnet alle de tre ukjente verdiene. Konklusjonen blir at

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 7x - 6} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 3} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{1}{x + 2}.$$

□

Som du sikkert begynner å forstå, er det ofte en del småpirkete regning involvert når man gjør delbrøkoppspalting. Det er fort gjort å gjøre slurvefeil – særlig fortegnsfeil! Det er derfor lurt å sjekke svaret til slutt, ved å sette det oppspaltete uttrykket sammen igjen på felles brøkstrek, og kontrollere at du får det du startet med.

Neste punkt er å delbrøkoppspalte uttrykk der røttene $x_1, \ldots, x_n$ i nevneren ikke alle er forskjellige. Slike uttrykk kjennetegnes ved at noen av faktorene i nevneren opptrer med en eksponent større enn 1, som for eksempel i uttrykkene

$$1)\ \frac{1}{(x + 1)^2}, \qquad 2)\ \frac{x - 6}{x^2(x - 2)} \qquad \text{og} \qquad 3)\ \frac{x^2}{(x + 1)^3(x - \frac{1}{2})^2}. \tag{14}$$

Generelt gjelder følgende regel:

Delbrøkoppspalting II
Dersom nevneren i det rasjonale uttrykket har en faktor på formen $(x-a)^r$, så vil delbrøkoppspaltingen inneholde leddene

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a)^r},$$

der $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{R}$.

Delbrøkoppspalting av uttrykkene i (14) ville dermed vært på formen

1) $\dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$

2) $\dfrac{x-6}{x^2(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2}$

3) $\dfrac{x^2}{(x+1)^3(x-\frac{1}{2})^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3} + \dfrac{D}{x-\frac{1}{2}} + \dfrac{E}{(x-\frac{1}{2})^2}$

Regningen for å finne konstantene $A, B, \ldots$ følger akkurat samme mønster som tidligere. Men nå må vi bruke metode 1 fra Eksempel 4.5 og sette opp likningssystem. Problemet med metode 2 er rett og slett at vi ikke får mange nok «lure» verdier å sette inn.

Som eksempel bruker vi uttrykk 2) ovenfor:

Eksempel 4.7. Finn A, B og C slik at

$$\frac{x-6}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Løsning. Når vi ganger opp med fellesnevneren $x^2(x-2)$, står vi igjen med likheten

$$x-6 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2. \tag{15}$$

La oss først undersøke hva som skjer hvis vi prøver oss med metode 2 her, altså innsetting av de to røttene $x = 0$ og $x = 2$. Problemet er tydelig alledere før vi begynner: Vi har bare to lure verdier, mens det er tre ukjente som skal finnes! Prøv gjerne selv, så ser du at metoden gir deg verdien av B og C enkelt og greit, mens A ikke avsløres.

I stedet lager vi et likningssystem. Vi grupperer høyresiden i (15) slik at like potenser av x kommer sammen. Likheten (15) blir da omskrevet til

$$x-6 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B.$$

Ved å sammenligninge koeffisientene på begge sider, får vi nå det enkle likningssystemet

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -2A + B &= 1 \\ -2B &= -6. \end{aligned}$$

Den siste likningen medfører at $B = 3$. Innsatt i den midterste gir dette $A = 1$, som innsatt i den øverste likningen gir $C = -1$. Likningssystemet er dermed løst. Resultatet av delbrøkoppspaltingen blir at

$$\frac{x-6}{x^2(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x-2}. \qquad \square$$

4.4 Oppgaver

Oppgave 4.1. Utfør polynomdivisjonen.

a) $x^2 - 5x + 6 : x - 2$ b) $6 - 3x : x - 2$

c) $x^2 - 3x - 4 : 1 + x$ d) $2x^2 + 5x - 12 : x + 4$

Oppgave 4.2. Regn ut.

a) $2 - x - 9x^2 + 2x^3 : 4x + 2$ b) $1 - x^4 : 1 - x$

Oppgave 4.3. Skriv enklere ved å bruke polynomdivisjon.

a) $\dfrac{x+5}{x-3}$ b) $\dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 2}$ c) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 3}$

Oppgave 4.4. Avgjør om polynomdivisjonen går opp uten å utføre den.

a) $3x^2 - 5x - 2 : x - 2$ b) $x^3 + x^2 + x + 1 : x - 5$

c) $23x^4 + 17x^3 - 11x^2 - 3x + 2 : 1 + x$ d) $2x^2 + x - \dfrac{1}{9} : 3x + 2$

e) $\sqrt{3}x^3 - 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 : x - \sqrt{3}$

Oppgave 4.5. Bruk nullpunktet du får oppgitt til å faktorisere $f(x)$ i lineære faktorer.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12, \quad f(3) = 0$

b) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15, \quad f(1) = 0$

c) $f(x) = 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1, \quad f(-\frac{1}{2}) = 0$

Oppgave 4.6. Funksjonen $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ har et heltallig nullpunkt med lav absoluttverdi. Finn dette ved å prøve deg fram, og bruk resultatet til å finne alle nullpunktene til g.

Oppgave 4.7. La n være et naturlig tall.

a) Vis at $x^n - 1$ er delelig med $x - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Vis at $x^n - 1$ er delelig med $x + 1$ dersom n er partall, men ikke hvis n er oddetall.

Oppgave 4.8. La $P(x) = x^{2009} + 2009x - a$, der a er en konstant.

a) Finn en verdi for a slik at $P(x)$ er delelig med $x - 1$.

b) Hvis k er et vilkårlig reelt tall, finnes det da alltid en verdi for a slik at $P(x)$ er delelig med $x - k$?

Oppgave 4.9. Finn delbrøkoppspaltingen til uttrykket.

a) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ b) $\dfrac{6x}{(x-2)(x+4)}$ c) $\dfrac{3-x}{(x-2)(x+2)}$

Oppgave 4.10. Bruk resultatet fra punkt a) i Oppgave 4.5 til å finne delbrøkoppspaltingen til uttrykket

$$\frac{4x^2 - 9x + 6}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}.$$

Oppgave 4.11. Finn delbrøkoppspaltingen til uttrykket.

a) $\dfrac{x+6}{x^2(2-x)}$ b) $\dfrac{3x^2 + x}{(x-1)(x+1)^2}$

Oppgave 4.12. Regn ut summen

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2007 \cdot 2009}.$$

(Hint: Finn delbrøkoppspaltingen til $\dfrac{2}{n(n+2)}$ og bruk denne!)

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 4.13. La $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x$. Du får oppgitt at $h(\sqrt{3}) = 0$. Bruk dette til å faktorisere $h(x)$ i lineære faktorer. (Hint: Hva blir $h(-\sqrt{3})$?)

Oppgave 4.14. La n være et naturlig tall. Finn en formel for summen

$$\frac{7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{13}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}.$$

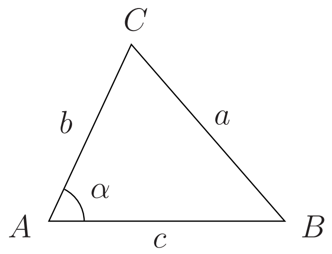
(Hint: Ideen er den samme som i Oppgave 4.12, men regningen her blir noe tøffere.)

5 Trigonometri

I dette kapittelet skal vi friske opp en del definisjoner og viktige formler som gjelder geometri og trigonometri. Det meste av stoffet burde være relativt godt kjent fra før, så vi tillater oss å ramse opp resultatene i ganske hurtig tempo.

5.1 Trekanter

Vi starter med litt notasjon. Ved tegning av trekanter og andre mangekanter (eller *polygoner*, som de også kalles), er det vanlig å bruke store bokstaver som navn på hjørnene, og små bokstaver som navn på sidelengdene. Symbolet $\triangle ABC$ betyr «trekanten med hjørner A, B og C».



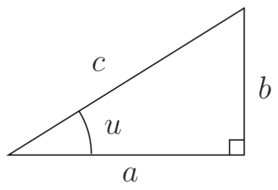
Figur 7: Standard trekantnotasjon.

Vinkler betegnes gjerne med bokstavene u og v, eller greske bokstaver som $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ og θ. (Kan du uttale dem?) For å beskrive vinklene i en figur, bruker vi hjørnene til å veilede oss. På figur 7 er for eksempel $\alpha = \angle BAC$. Den midterste bokstaven betegner alltid toppunktet til vinkelen. I tilfeller der det ikke er noen tvil om hva vi mener, nøyer vi oss ofte med å skrive $\angle A$.

Definisjon 5.1. Spesielle trekanter

- En trekant der alle sidene er like lange, kalles *likesidet.*
- En trekant der to av sidene er like lange, kalles *likebeint.*
- En trekant der en av vinklene er rett, altså $90°$, kalles *rettvinklet.* Den motstående siden til den rette vinkelen kalles *hypotenusen*, mens de to andre er *kateter* (se figur 8).

De grunnleggende egenskapene til disse trekant-typene kjenner du sikkert fra før: I en likesidet trekant er alle vinklene $60°$, mens i en likebeint trekant er det alltid



Figur 8: Rettvinklet trekant med kateter a og b, og hypotenus c.

to vinkler som er like store. For de rettvinklete trekantene gjelder et av de eldste og mest berømte av alle teoremer i matematikken, nemlig dette:

Teorem 5.2. Pythagoras' setning
For en rettvinklet trekant, med sidenavn som på figur 8, gjelder relasjonen

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{16}$$

Det omvendte gjelder også: Dersom sidelengdene i en trekant tilfredsstiller (16), *så er trekanten rettvinklet.*

Den siste delen av teoremet over er ofte nyttig. Legg f.eks. merke til at fordi $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, er enhver trekant med sider 3, 4 og 5 rettvinklet.[1]

En annen god venn blant de rettvinklete trekantene er den der vinklene er 30°, 60° og 90°. En slik trekant kalles (oppfinnsomt nok) en 30°-60°-90°-trekant.

Teorem 5.3. 30°-60°-90°**-trekanter**
Dersom den korteste kateten i en 30°-60°-90°*-trekant har lengde a, har vi at*

- *hypotenusen har lengde $2a$.*
- *den lengste kateten har lengde $\sqrt{3}a$.*

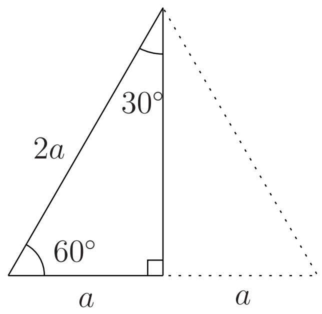
Bevis. Ved å oppfatte 30°-60°-90°-trekanten som halvparten av en likesidet trekant, som på figur 9, ser vi at hypotenusen har lengde $2a$.

For å finne lengden av den andre kateten, bruker vi Pythagoras (se figur 10):

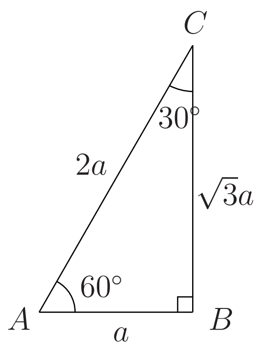
$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

Den lengste kateten er altså $\sqrt{3}$ ganger så lang som den korteste. □

[1] Dette ble i gamle dager benyttet for å konstruere rette vinkler: Ta tre pinner med lengder 3 m, 4 m og 5 m, og lag en trekant av dem. Da får du en rettvinklet trekant!



Figur 9: En 30°-60°-90°-trekant er halvparten av en likesidet trekant.



Figur 10: Sidelengdene i en 30°-60°-90°-trekant.

5.2 De trigonometriske funksjonene

5.2.1 Grader vs. radianer

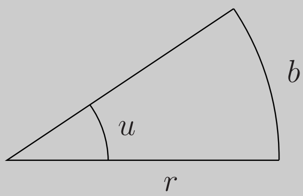
Som oftest i vanlige geometrioppgaver måler vi som kjent vinkler i *grader*. Til de fleste andre matematiske formål er det derimot et annet vinkelmål som viser seg å være bedre egnet, nemlig *absolutt vinkelmål*.

Tenk deg en sirkel med radius r. Omkretsen er da lik $2\pi r$. Det er derfor naturlig å si at en runde i sirkelen tilsvarer 2π radier, eller 2π «radianer». Målt i grader, er en runde lik 360°, slik at

$$2\pi \text{ radianer} = 360^\circ.$$

Vi kan måle alle vinkler på denne måten. Resultatet blir Definisjon 5.4.

Definisjon 5.4. Absolutt vinkelmål – radianer



Det *absolutte vinkelmålet* til vinkelen u er tallet $\frac{b}{r}$, der b er buelengden, og r er radien. Legg merke til at siden både b og r er lengder, vil lengdebenevningene forkortes mot hverandre i brøken $\frac{b}{r}$, slik at det absolutte vinkelmålet blir et ubenevnt tall. Likevel sier vi ofte at u er målt i *radianer*.

Du lurer kanskje på hva i all verden vi skal med en ny måte å måle vinkler på, når vi allerede har grader. En av hovedgrunnene er at mange formler (f.eks.

derivasjonsformler) blir mye enklere og penere med absolutt vinkelmål. En annen grunn er at vi slipper å tenke på benevninger, siden absolutt vinkelmål er ubenevnt.

Det finnes en grei formel for å gå fra grader til radianer, og omvendt:

Teorem 5.5. Omregningsformel
Anta at u er en vinkel målt i radianer, og at v° er den samme vinkelen målt i grader. Da har vi

$$\frac{u}{\pi} = \frac{v^\circ}{180^\circ}.$$

Bevis. Siden $2\pi = 360^\circ$ må forholdstallene $\frac{u}{2\pi}$ og $\frac{v^\circ}{360^\circ}$ være like, det vil si at

$$\frac{u}{2\pi} = \frac{v^\circ}{360^\circ}.$$

Ganger vi med 2 på begge sider av denne likheten, får vi formelen i teoremet. □

For de vanligste vinklene bør du kunne veksle mellom grader og radianer uten noe særlig nøling. I hvert fall når det gjelder disse vinklene:

Noen vanlige vinkler uttrykt i grader og radianer

$$360^\circ = 2\pi, \qquad 180^\circ = \pi, \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \qquad 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

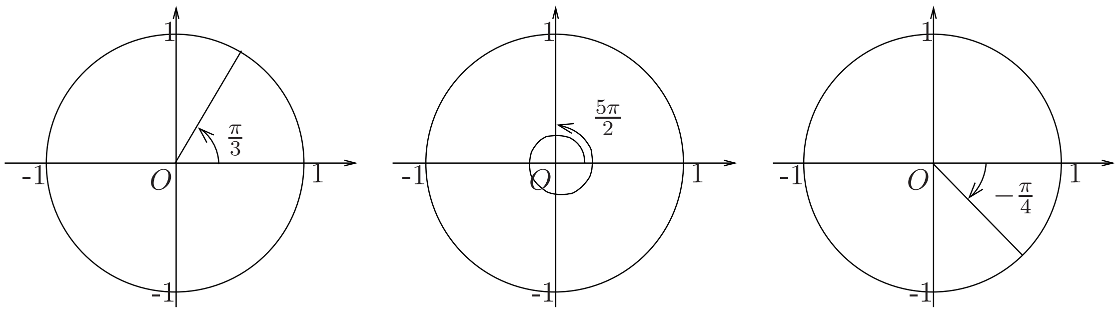
Vi antar fra nå av at alle vinkler måles i radianer, hvis ikke noe annet er oppgitt.

5.2.2 Definisjon av sinus, cosinus og tangens

Nå er vi klare til å definere de grunnleggende *trigonometriske funksjonene* $\sin u$, $\cos u$ og $\tan u$. Du husker sikkert hvordan man gjør dette når u er en vinkel i en rettvinklet trekant (se figur 8):

$$\sin u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{b}{c}, \qquad \cos u = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{a}{c},$$
$$\tan u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{b}{a}.$$

Vi trenger imidlertid en mer generell definisjon enn dette. For eksempel har vi lyst til å jobbe med negative vinkler og vinkler som er større enn $\frac{\pi}{2}$, og slike vinkler får vi ikke fram i rettvinklete trekanter. Vi må derfor finne på noe annet. Løsningen på disse problemene er å bruke *enhetssirkelen*.



Figur 11: Vinklene $u = \frac{\pi}{3}$ (60°), $u = \frac{5\pi}{2}$ (450°) og $u = -\frac{\pi}{4}$ (−45°) lagt inn i hver sin enhetssirkel.

En enhetssirkel er rett og slett en sirkel av radius 1 med sentrum i origo. Vi legger en vinkel u inn i enhetssirkelen ved å plassere toppunktet i origo slik at det ene vinkelbeinet ligger langs x-aksen, og slik at positive vinkler går mot klokka. På figur 11 ser du noen eksempler.

Nå kan vi definere de trigonometriske funksjonene for alle mulige vinkler:

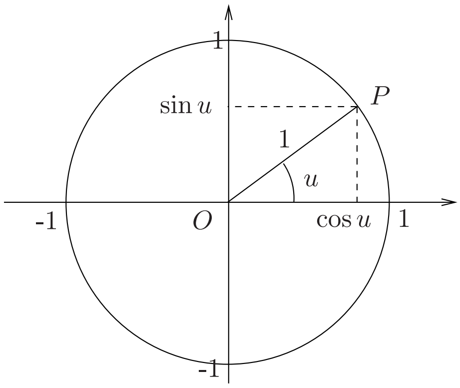
Definisjon 5.6. Trigonometriske funksjoner
La u være en vinkel målt i radianer, lagt inn i en enhetssirkel som på figur 12. La P være skjæringspunktet mellom enhetssirkelen og det venstre vinkelbeinet til u. Vi definerer funksjonene $\cos u$, $\sin u$ og $\tan u$ ved at

$$\begin{aligned} \cos u &= \text{førstekoordinaten til punktet } P, \\ \sin u &= \text{andrekoordinaten til punktet } P, \\ \tan u &= \frac{\sin u}{\cos u}. \end{aligned}$$

Funksjonene $\cos u$ og $\sin u$ er definert for alle $u \in \mathbb{R}$. Funksjonen $\tan u$ er definert for alle $u \in \mathbb{R}$ bortsett fra de verdiene som gjør at $\cos u = 0$, nemlig

$$u = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

For de aller fleste vinkler u, må vi bruke kalkulator for å finne $\sin u$, $\cos u$ og $\tan u$. (Tidligere brukte man svære tabeller!) Noen få vinkler kan vi imidlertid finne eksakte verdier for. De viktigste er sammenfattet i tabell 1. Denne tabellen er det bare å pugge, så heng den opp over senga di!



Figur 12: Definisjonen av $\cos u$ og $\sin u$.

u	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin u$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	0
$\cos u$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\tan u$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	ikke def.	0	0

Tabell 1: Eksakte verdier for sinus, cosinus og tangens.

5.2.3 Grunnleggende trigonometriske formler

Ut fra symmetrien til enhetssirkelen kan vi enkelt bevise en rekke nyttige trigonometriske formler. De mest brukte er gjengitt i Teorem 5.7.

Det er på ingen måte nødvendig å gå rundt å huske alle disse formlene. Med litt trening går det svært raskt å utlede dem – kanskje til og med i hodet – når du trenger dem. Som illustrasjon beviser vi et par av punktene her:

Bevis for Teorem 5.7-1a og 1b. Å addere 2π til en vinkel, er det samme som å gå en ekstra runde rundt enhetssirkelen. (Husk at 2π tilsvarer $360°$.) Derfor vil både $\cos u$ og $\sin u$ forbli uendret når man legger til 2π. $\square$

Bevis for Teorem 5.7-4a. På figur 13 har vi tegnet inn vinklene u og $\pi - u$ i en

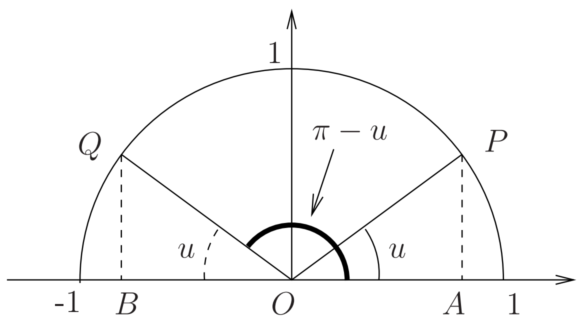
Teorem 5.7. Trigonometriske formler
For alle vinkler $u \in \mathbb{R}$ har vi:

$1a.$	$\cos(2\pi + u) = \cos u,$	$1b.$	$\sin(2\pi + u) = \sin u,$
$2a.$	$\cos(2\pi - u) = \cos u,$	$2b.$	$\sin(2\pi - u) = -\sin u,$
$3a.$	$\cos(\pi + u) = -\cos u,$	$3b.$	$\sin(\pi + u) = -\sin u,$
$4a.$	$\cos(\pi - u) = -\cos u,$	$4b.$	$\sin(\pi - u) = \sin u,$
$5a.$	$\cos(-u) = \cos u,$	$5b.$	$\sin(-u) = -\sin u,$
$6a.$	$\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u,$	$6b.$	$\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos u.$

enhetssirkel. På grunn av symmetri, er trekantene $\triangle OPA$ og $\triangle OQB$ likeformede. Spesielt er $|OA| = |OB|$. Punktene A og B har altså lik absoluttverdi, men forskjellig fortegn, og vi får at

$$\cos(\pi - u) = B = -A = -\cos u.$$

□



Figur 13: Bevis for at $\cos(\pi - u) = -\cos u$.

En av de viktigste trigonometriske formlene er *enhetsformelen*. Den er en reddende engel i mange oppgaver, så sørg for å bli god venn med denne:

Teorem 5.8. Enhetsformelen
For alle $u \in \mathbb{R}$ gjelder relasjonen $\cos^2 u + \sin^2 u = 1.$

Bevis. Dette er en pen anvendelse av Pythagoras: På figur 12 kan linjestykket OP betraktes som hypotenusen i en rettvinklet trekant der lengdene av katetene er $\cos u$

og $\sin u$. Fordi OP er en radius i sirkelen, og dermed har lengde 1, gir Pythagoras at

$$\cos^2 u + \sin^2 u = OP^2 = 1. \qquad \square$$

Formlene i det neste teoremet får man også bruk for rett som det er. Det kan være lurt å kunne dem utenat, i særdeleshet formlene for $\sin 2u$ og $\cos 2u$.

Teorem 5.9. Formlene for $\sin(u \pm v)$ og $\cos(u \pm v)$

- $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$
- $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$

Spesielt får vi for u = v:

- $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$
- $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

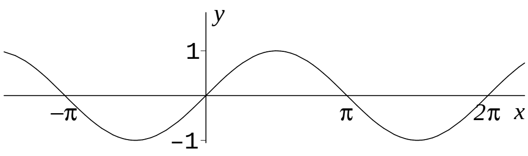
5.3 Grafene til $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$

Vi kan tegne grafene til de trigonometriske funksjonene på samme måte som vi tegner andre grafer: Ved å sette opp tabell og regne ut så mange funksjonsverdier som vi finner nødvendig for å tegne en jevn kurve. Figurene 14, 15 og 16 viser grafene til henholdsvis $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$.

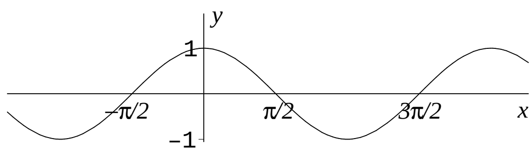
Det er viktig at du kjenner utseendet på disse grafene godt. Her er noen huskeregler det er verdt å merke seg:

- $\sin x$ går gjennom origo og går oppover derfra.
- $\cos x$ er på en bølgetopp når $x = 0$.
- Verdimengden til $\sin x$ og $\cos x$ er $[-1, 1]$.
- Dersom grafen til $\cos x$ skyves $\frac{\pi}{2}$ enheter mot høyre, får vi grafen til $\sin x$. (Dette bekreftes av formel 6a i Teorem 5.7.)
- $\tan x$ går gjennom origo og går oppover derfra.
- Verdimengden til $\tan x$ er hele $\mathbb{R}$.

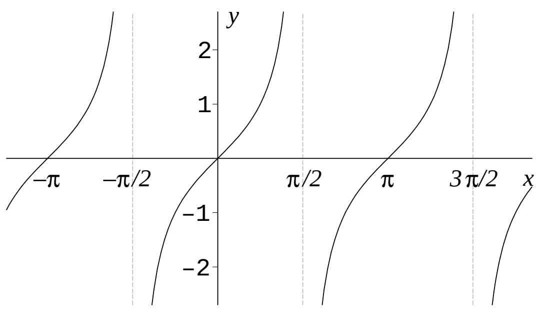
- $\tan x$ går mot pluss uendelig når x nærmer seg verdiene $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ nedenfra, og mot minus uendelig når x nærmer seg disse verdiene ovenfra. (Dette betyr at grafen har en vertikal asymptote for disse verdiene. Mer om dette i neste kapittel.)



Figur 14: Grafen til $\sin x$.



Figur 15: Grafen til $\cos x$.



Figur 16: Grafen til $\tan x$.

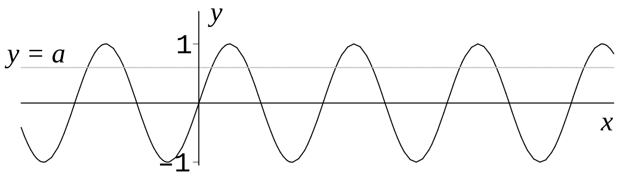
5.4 Trigonometriske likninger

5.4.1 De trigonometriske grunnlikningene

Sett at vi skal finne en løsning x_0 av likningen $\sin x = a$, der a er et tall i intervallet $[-1, 1]$. (Hvis a er utenfor dette intervallet, har likningen ingen løsninger, fordi verdien av $\sin x$ alltid er mellom -1 og 1.) Da har vi to muligheter.

- Hvis a er lik 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ eller 1, så kan vi bruke tabellen (som vi heldigvis har lært oss utenat!) over de eksakte verdiene til sinus til å finne en x_0 som passer. Hvis a er lik $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ eller -1, så finner vi en løsning x_0 ved å kombinere tabellen med formelen $\sin(-u) = -\sin u$.

- For andre verdier av a er det greiest å bruke $\boxed{\sin^{-1}}$-funksjonen på kalkulatoren. Svaret du får er en verdi $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som er slik at $\sin x_0 = a$. (Funksjonen $\sin^{-1} x$ er den *omvendte* funksjonen til $\sin x$, og betyr altså ikke $\frac{1}{\sin x}$. Du vil lære mer om omvendte funksjoner i MAT1100.)



Figur 17: Grafisk framstilling av likningen $\sin x = a$.

Som vi ser av figur 17, så er det mange verdier av x som løser likningen $\sin x = a$ – faktisk uendelig mange! Likevel kan vi klare å beskrive alle løsningene. Trikset er å bruke to av formlene fra Teorem 5.7:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x \quad \text{og} \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x. \end{aligned}$$

Den øverste formelen medfører at dersom $\sin x_0 = a$, så er også $\sin(\pi - x_0) = a$. Det vil si at hvis x_0 er en løsning av likningen $\sin x = a$, så er også $\pi - x_0$ en løsning.

Den nederste formelen gir tilsvarende at dersom x_0 er en løsning, så er $x_0 + 2\pi$ det også. Vi kan altså legge til (eller trekke fra) 2π så mange ganger vi vil, og alltid få løsninger av likningen $\sin x = a$.

Resultatet av det vi har gjort, er at alle x-verdier på formen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k \cdot 2\pi, \qquad \text{og} \\ x &= (\pi - x_0) + k \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

der $k \in \mathbb{Z}$, tilfredsstiller likningen $\sin x = a$. Ved (for eksempel) å studere figur 17, kan man se at dette er alle løsningene.

Ved tilsvarende analyser finner man de generelle løsningene av likningene $\cos x = a$ og $\tan x = a$. Resultatene er oppsummert i Teorem 5.10. Merk at mens $\sin x = a$ og $\cos x = a$ bare har løsninger dersom $a \in [-1, 1]$, er $\tan x = a$ løsbar for alle $a \in \mathbb{R}$.

5.4.2 Mer kompliserte likninger: Reduksjon til grunnlikningene

Ofte støter vi på trigonometriske likninger som er mer kompliserte enn de tre grunnlikningene vi så på over. Da er strategien alltid å *redusere* til en av grunnlikningene. For eksempel, for å løse likningen $4 \sin x + 3 = \sin x$, skal det bare litt flytt-og-bytt til for å se at den er ekvivalent med grunnlikningen $\sin x = -1$. Litt mer komplisert blir det dersom likningen inneholder både $\sin x$ og $\cos x$, eller potenser av disse. Vi skal nå gå gjennom de vanligste teknikkene for å løse slike.

Teorem 5.10. De trigonometriske grunnlikningene
La a være et reelt tall.

Løsningene av $\sin x = a$ *er på formen* $\begin{cases} x = x_0 + k \cdot 2\pi \\ x = (\pi - x_0) + k \cdot 2\pi, \end{cases}$ *der* $k \in \mathbb{Z}$.

Likningen $\cos x = a$ *har løsningene* $\begin{cases} x = x_0 + k \cdot 2\pi \\ x = -x_0 + k \cdot 2\pi, \end{cases}$ *der* $k \in \mathbb{Z}$.

Likningen $\tan x = a$ *har løsningene* $x = x_0 + k \cdot \pi,$ *der* $k \in \mathbb{Z}$.

I løsningsformlene over er x_0 en vilkårlig løsning av likningen. En slik kan man finne ved f.eks. å bruke kalkulator eller en tabell over eksakte verdier.

• **Omskriving til tangens** Følgende likninger kan løses ved *omskriving til tangens*:

$$\begin{aligned} i) &\quad a\sin x + b\cos x = 0 \\ ii) &\quad a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \end{aligned}$$

I den første deler vi med $\cos x$ på begge sider, og får $a\tan x + b = 0$. Dette gir grunnlikningen $\tan x = -\frac{b}{a}$.

I ii) deler vi med $\cos^2 x$ og får en annengradslikning i tangens:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

Denne løser vi med *abc*-formelen på vanlig måte. Hver av løsningene av annengradslikningen gir til slutt en grunnlikning i tangens.

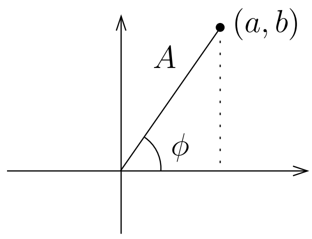
• **Bruk av enhetsformelen før omskriving til tangens** Metoden over fungerer ikke uten videre dersom likningene har et tall forskjellig fra null på høyre side. Men i tilfelle ii) er det lett å kvitte seg med slike konstantledd. For å løse

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d,$$

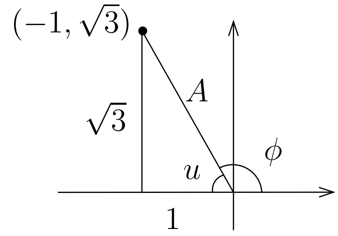
bruker vi bare yndlingsformelen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ til å skrive høyresiden som $d = d\sin^2 x + d\cos^2 x$. Flytter vi begge de nye leddene over til venstre side, står vi igjen med

$$(a - d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c - d)\cos^2 x = 0.$$

Dermed er likningen på samme form som ii), og vi kan dele med $\cos^2 x$ og ende med en annengradslikning i tangens, akkurat som før.



Figur 18: Relasjonen mellom a, b og A, ϕ i formelen $a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \phi)$.



Figur 19: Omskriving til standardform i Eksempel 5.1.

• **Omskriving til standardform** Tilfelle i) krever litt mer jobb dersom det ikke står 0 på høyre side:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

En fin teknikk er å skrive om venstresiden til *standardform*, som vi skal studere nærmere i neste seksjon. Dette går ut på å finne konstanter A og ϕ slik at

$$a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \phi). \tag{17}$$

Den opprinnelige likningen blir dermed redusert til $A \sin(x + \phi) = c$, som kan løses som en grunnlikning. Hvis du blir forvirret av at argumentet til sinus er $x + \phi$ i stedet for bare x, kan du godt sette $u = x + \phi$ og løse med hensyn på u først (se Eksempel 5.1).

• **Annengradslikning i sinus eller cosinus** Hvis likningen inneholder $\sin^2 x$ og/eller $\cos^2 x$, men ikke blandingsledd av typen $\sin x \cos x$, er ideen som regel å lage en annengradslikning i enten $\sin x$ eller $\cos x$. Nok en gang kan enhetsformelen være nyttig. For eksempel, i likningen

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 4$$

skriver vi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ og får

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 4.$$

Etter litt opprydding gir dette annengradslikningen $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$, som vi løser ved *abc*-formelen. Resultatet blir de to grunnlikningene $\cos x = \frac{1}{2}$ og $\cos x = 1$.

5.4.3 Standardform

Vi avslutter denne seksjonen med å se nærmere på omskrivingen til standardform,

$$a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \phi). \tag{18}$$

Min favorittmetode for å finne A og ϕ er å tegne punktet (a, b) i et koordinatsystem (se figur 18). Da er A lik avstanden fra punktet til origo, og ϕ lik vinkelen i forhold til x-aksen. Det er ikke vanskelig å bevise dette. For eksempel kan vi skrive ut høyresiden i (18) ved hjelp av formelen for sinus av summen av to vinkler (Teorem 5.9):

$$A \sin(x + \phi) = A(\sin x \cos \phi + \sin \phi \cos x) = (A \cos \phi) \sin x + (A \sin \phi) \cos x.$$

Sammenligner vi med (18) ser vi at følgende relasjoner må være oppfylt:

$$\begin{aligned} a &= A \cos \phi \\ b &= A \sin \phi \end{aligned}$$

Men dette er nøyaktig det vi får i figur 18.

Å finne A og ϕ består derfor av å løse en (enkel) geometrioppgave. Merk spesielt at Pythagoras gir

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vi tar med et typisk eksempel der vi får bruk for mye av det vi har lært hittil i kapittelet: Standardform, trekantgeometri, grunnlikninger og eksakte verdier.

Eksempel 5.1. Finn alle løsninger av likningen $-\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}$.

Bevis. Vi begynner med å skrive venstresiden på standardform. På figur 19 har vi markert punktet $(a, b) = (-1, \sqrt{3})$. Vi ser at $A = \sqrt{3 + 1} = 2$, og at den inntegnede trekanten er en $30° - 60° - 90°$-trekant (husk Teorem 5.3). Spesielt er $u = 60°$, og derfor $\phi = 180° - u = 120° = \frac{2\pi}{3}$. Vi kan dermed skrive

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Vår opprinnelige likning blir dermed redusert til $2 \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}$, eller

$$\sin u = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \text{der } u = x + \frac{2\pi}{3}.$$

Tabellen over eksakte verdier, og et raskt blikk på enhetssirkelen, viser at $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Det betyr at $u = -\frac{\pi}{3}$ er en løsning i likningen over. Da vet vi at alle løsningene er på formen

$$\begin{cases} u = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ u = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad \text{der } k \in \mathbb{Z}.$$

Til slutt må vi sette tilbake $u = x + \frac{2\pi}{3}$ og løse med hensyn på x:

$$\begin{cases} x + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi & \implies \quad x = -\pi + k \cdot 2\pi \text{ [1]} \\ x + \frac{2\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + k \cdot 2\pi & \implies \quad x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Når k varierer i $\mathbb{Z}$, gir dette alle løsningene til den opprinnelige likningen. $\square$

Selv om de enkelte stegene i løsningen over ikke er vanskelige, er det utfordrende for mange å holde helt til mål i slike oppgaver uten å gjøre slurvefeil. Da er det viktig med oversiktlig føring. Husk figur for å finne A og ϕ!

5.5 Setninger om generelle trekanter

Vi avslutter dette kapittelet med å minne om de tre nyttige trekantteoremene arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen, gjengitt på side 61. Vi sløyfer bevisene for disse, dem kan du finne i læreboka fra videregående. Merk for øvrig at det ikke spiller noen rolle om vi bruker grader eller absolutt vinkelmål i disse setningene.

5.6 Oppgaver

Oppgave 5.1. Vis at i et kvadrat med sidelengde a, så har diagonalen lengde $a\sqrt{2}$.

Oppgave 5.2. De følgende oppgavene krever minimalt av regning. Tegn figur i hvert tilfelle, og finn svaret (gjerne ved hoderegning!) ved å bruke det du vet om 30°-60°-90°-trekanter, 3-4-5-trekanter, samt Oppgave 5.1.

a) I $\triangle ABC$ er $\angle B$ rett, $\angle A = 30°$ og $AC = 8$. Hvor lange er BC og AB?

b) Et kvadrat har sidelengde 14. Hvor lang er diagonalen?

c) I $\triangle ABC$ er $\angle B = 60°$, mens $\angle C = 30°$. $AB = \sqrt{3}$. Finn lengden av de to andre sidene.

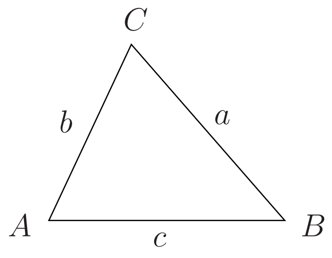
d) I et kvadrat er lengden av diagonalen lik 5. Hva er sidelengden i kvadratet? Og arealet?

e) I den likebeinte trekanten $\triangle ABC$ er $AC = BC = 5$, og $AB = 8$. Hva er arealet av trekanten?

f) Sidelengdene i $\triangle ABC$ er 9, 12 og 15. Finn arealet.

[1] Legg merke til at vi her kunne sløyfet minustegnet foran π og skrevet $x = \pi + k \cdot 2\pi$. Begge deler gir løsningene $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$ når k varierer.

Teorem 5.11. Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen



For en vilkårlig trekant, med navn som på figuren, gjelder følgende setninger.

- *Arealsetningen:* Areal av $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} b\, c \sin \angle A.$

  Brukes for å finne arealet når du kjenner to sider og vinkelen mellom dem. Kan også ofte brukes når du allerede kjenner arealet, og skal finne en side eller en vinkel.

- *Sinussetningen:* $\dfrac{a}{\sin \angle A} = \dfrac{b}{\sin \angle B} = \dfrac{c}{\sin \angle C}.$

  Brukes når du kjenner en vinkel og dens motstående side, i tillegg til en annen vinkel eller side.

- *Cosinussetningen:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$

  Brukes når du
  - *kjenner to sider og vinkelen mellom dem, og skal finne den siste siden,*
  - *kjenner alle sidene, og skal finne en av vinklene.*

Oppgave 5.3. I et rektangel er lengden av diagonalen 4, mens den korteste siden har lengde 2. Hva er arealet av rektangelet?

Oppgave 5.4. Finn eksakt verdi for uttrykket dersom det er definert.

a) $\sin(-\dfrac{\pi}{4})$ b) $\cos(\dfrac{7\pi}{4})$ c) $\sin(-\dfrac{5\pi}{6})$ d) $\cos(\dfrac{2009\pi}{2})$

e) $\tan(\dfrac{9\pi}{2})$ f) $\tan(-\dfrac{\pi}{3})$

Oppgave 5.5. Bestem verdimengden til funksjonen.

a) $f(x) = \sin x + 1$ b) $g(x) = 2\cos x$

c) $h(x) = 5\sin^2 x$ d) $f(x) = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$

Oppgave 5.6.

a) Bruk formlene for $\sin(u+v)$ og $\cos(u+v)$ til å finne en formel for $\tan(u+v)$ uttrykt ved $\tan u$ og $\tan v$.

b) Bruk a) til å vise at

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}, \quad u \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vis formelen i b) på en annen måte.

Oppgave 5.7. Finn alle løsninger av likningen.

a) $\cos(4x) = \dfrac{1}{2}$ b) $2\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ c) $\tan(\dfrac{x-2\pi}{3}) = \sqrt{3}$

Oppgave 5.8. Skriv om til standardform $A\sin(x+\phi)$. I oppgave d) får du lov å bruke kalkulator én gang.

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ b) $3\sin x - 3\cos x$ c) $\sqrt{12}\cos x - 2\sin x$

d) $\sin x + 2\cos x$

Oppgave 5.9. Finn alle løsninger av likningen.

a) $\cos x = \sin x$ b) $2\sin^2 x = 3\cos x$

c) $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x = (1+\sqrt{3})\sin x\cos x$ d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

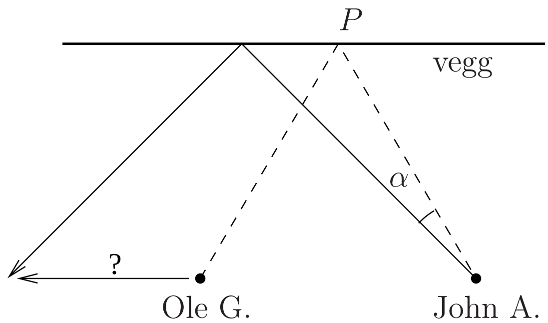
Oppgave 5.10. John Arne og Ole Gunnar står og sparker ball til hverandre via en vegg. Begge står 4 meter fra veggen, og de står 6 meter fra hverandre. Plutselig får John Arne et skikkelig feilskjær, og ballen treffer veggen 2 meter til venstre for optimalpunktet P (se figur 20).

a) Hvor langt må Ole Gunnar flytte seg for å nå ballen? (Vi forutsetter at han flytter seg rett mot venstre, som figuren viser.)

b) Hvor stort var vinkelavviket α til John Arnes spark?

c) Hvis feilskjæret hadde gått til høyre i stedet for til venstre, men med like stort vinkelavvik, hvor langt hadde Ole Gunnar måttet flyttet seg da? Greier du å finne et eksakt uttrykk?

*d) Anta at John Arne og Ole Gunnar står x meter fra hverandre, og y meter fra veggen, og at John Arne bommer på den optimale retningen med et vinkelavvik på α. Finn distansen D Ole Gunnar må flytte seg for å nå ballen, uttrykt ved x, y og α.



Figur 20: Oppgave 5.10.

Oppgave 5.11. Bevis Pythagoras' setning ved hjelp av cosinussetningen. Vis også den omvendte veien: Dersom $a^2 + b^2 = c^2$, så er trekanten rettvinklet.

Oppgave 5.12. I denne oppgaven tenker vi oss at jorda er en perfekt kule av radius $r = 6.4 \cdot 10^6$ meter.

a) Vis at dersom øynene dine er h meter over bakken, så er distansen d fra øynene dine til horisonten (se figur 21) gitt ved formelen

$$d = \sqrt{h^2 + 2rh} \text{ meter.}$$

b) Maria står ved vannkanten og skuer utover havet. Hvor langt borte er horisonten for henne dersom øynene hennes er 1.65 meter over bakken?

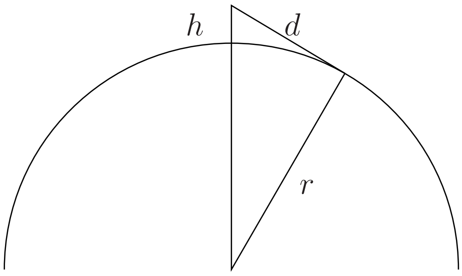
c) En seilbåt er på vei mot land. Toppen av masta rager 10 meter over havoverflaten. Hvor langt borte, i luftlinje, er båten når Maria (som er uhyre skarpsynt!) kan se toppen av masta? (Tegn figur!)

d) Hvor høyt over havnivået må øynene hennes være for at horisonten skal være 50 km unna?

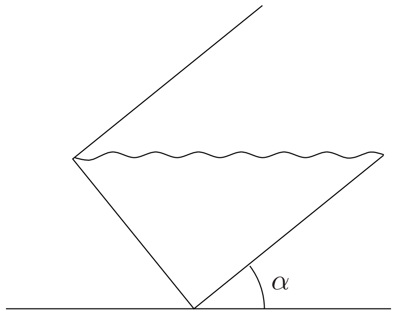
e) Argumenter for at dersom h er liten (i forhold til r), så gjelder tilnærmingsformelen $d \approx \sqrt{2rh} = 1600\sqrt{5h}$. Hva blir d når $h = 1.65$ dersom du bruker denne formelen? Sammenlign med svaret i b).

f) Finn ved å prøve deg fram, den verdien av h som gjør at tilnærmingsverdien $d \approx 1600\sqrt{5h}$ avviker fra den nøyaktige verdien med 1 meter.

(Svaret på den siste deloppgaven viser at du i alle praktiske situasjoner kan bruke formelen $d = 1600\sqrt{5h}$ for å regne ut hvor langt unna horisonten din er.)



Figur 21: Oppgave 5.12



Figur 22: Oppgave 5.13

Oppgave 5.13. Lars Ragnar sitter på puben sent en kveld og kikker ensomt ned i glasset sitt. Han bestemmer seg for å gjøre et forsøk på å snakke med jenta på nabobordet. Etter å ha tenkt seg litt om, sier han: «Heisann, har du lyst til å se en 45 graders vinkel? Dette glasset, som er formet som en rett sylinder, er nemlig nøyaktig halvtomt. Derfor, hvis jeg tipper glasset til det akkurat skal til å renne over, vil glasset stå i en vinkel på nøyaktig 45 grader! Det gjelder jo alle sylinderformede glass. Følg med nå!!»

a) Er du enig i tankegangen til Lars Ragnar? Begrunn svaret ditt. (Vi går ut fra at glasset virkelig er sylinderformet og halvtomt.)

b) Hva slags glass må Lars Ragnar ha for at han skal klare å lage en 45 graders vinkel på denne måten?

c) Glasset til Lars Ragnar var i virkeligheten 10 cm høyt og hadde en diameter på 8 cm. Hva blir vinkelen α han ender opp med å vise jenta på nabobordet? (Se figur 22.)

d) Hvordan ender kvelden?

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 5.14. På en fest får du følgende oppgave av en geometri-interessert venn: «Hvis du har en rettvinklet trekant med hypotenus 4, der en av vinklene er dobbelt så stor som en av de andre vinklene, hvor lange er da katetene?»

a) Forklar at oppgaven kan tolkes på to måter, og dermed er uløselig slik den er gitt.

b) For hver av de to tolkningene, foreslå en presisering av oppgaven slik at den blir entydig, og løs den.

Oppgave 5.15. La funksjonene f og g være gitt ved at $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \sqrt{x}$. Skriv opp funksjonsuttrykket og bestem definisjonsmengden til funksjonen $h(x)$ når

a) $h(x) = f(g(x))$ b) $h(x) = g(f(x))$

(Hint til b): Du trenger unionsnotasjon. Se Definisjon 1.3.)

Oppgave 5.16. Vis (for eksempel ved å bruke Oppgave 5.6) at

$$\tan 3u = \tan u \frac{3 - \tan^2 u}{1 - 3\tan^2 u}.$$

Oppgave 5.17.

a) Vis at dersom $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, så gjelder formelen

$$\cos u = \sqrt{\frac{\cos 2u + 1}{2}}.$$

Hvor brukte du begrensningen på u?

b) Bruk formelen i a) til å finne eksakte uttrykk for $\cos \frac{\pi}{12}$ og $\sin \frac{\pi}{12}$. (Ekstra utfordring: Klarer du å skrive verdiene uten å bruke flere rottegn inni hverandre?)

c) Finn en formel for $\tan u$ uttrykt ved $\tan 2u$, som gjelder når $-\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{4}$. (Bruk gjerne resultatet fra Oppgave 5.6b).) Regn ut $\tan \frac{\pi}{8}$.

6 Grenseverdier og asymptoter

Grenseverdibegrepet danner grunnlaget for hele funksjonsanalysen. Det tok lang tid før matematikerne ble enige om hva man egentlig skulle mene med en «grenseverdi». Til slutt kom man fram til en god definisjon, men den er relativt komplisert. Vi nøyer oss med den intuitive «videregående skole-varianten» her, og så kan dere se fram til ekte vare senere i høst!

6.1 Grenseverdier

Det kan være greit å innlede med et eksempel. La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Vi ser at f ikke er definert for $x = 1$, fordi nevneren blir null. Men vi kan likevel undersøke hva som skjer med $f(x)$ når x *nærmer seg* 1. Av verdiene

$$\begin{array}{llll} f(0.9) = 1.9 & f(0.99) = 1.99 & f(0.999) = 1.999 & \text{og} \\ f(1.1) = 2.1 & f(1.01) = 2.01 & f(1.001) = 2.001, & \end{array}$$

er det tydelig at $f(x)$ nærmer seg 2 når x går mot 1.

Vi kan se dette enda tydeligere ved å foreta et lite forkortingstriks. For alle x bortsett fra $x = 1$, har vi nemlig at

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Fra dette uttrykket ser vi at jo nærmere x kommer 1, desto mer nærmer $f(x)$ seg 2. I slike situasjoner sier vi at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1, er 2. Med symboler skriver vi:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Vi formaliserer dette til en definisjon. For å forenkle framstillingen, bruker vi notasjonen $x \to a$ for å uttrykke at «x går mot a».

Definisjon 6.1. Grenseverdi
La f være en funksjon og L et tall. Dersom $f(x) \to L$ når $x \to a$, kaller vi L for *grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a*. Vi skriver dette som

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Hvis $f(x)$ ikke nærmer seg noe bestemt tall når $x \to a$, sier vi at grenseverdien $\lim_{x \to a} f(x)$ *ikke eksisterer.*

En typisk situasjon der grenseverdien ikke eksisterer, er hvis $f(x)$ vokser mot ∞ eller synker mot $-\infty$ når $x \to a$ (for eksempel hvis $f(x) = \frac{1}{x}$ og $x \to 0$). Selv om grenseverdien i slike tilfeller ikke eksisterer (∞ er ikke noe bestemt tall!), er det likevel vanlig å skrive $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Svært beslektet med grenseverdier er begrepet kontinuitet:

Definisjon 6.2. Kontinuitet
Hvis $f(x)$ er definert for $x = a$, sier vi at f er *kontinuerlig i punktet $x = a$* dersom

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dersom f er kontinuerlig i alle punktene i et intervall I, sier vi at f er *kontinuerlig i I*.

Man kan vise at de aller fleste «standardfunksjonene» vi jobber med er kontinuerlige i sine definisjonsområder. Dette gjelder for eksempel

- potensfunksjoner, som x, $\sqrt{x}$ og $\frac{1}{x}$,
- eksponential- og logaritmefunksjoner, som e^x, 2^x og $\ln x$,
- de trigonometriske funksjonene $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$.

Kontinuiteten av disse funksjonene blir særlig slagkraftig når vi i tillegg bruker de såkalte *grenseverdisetningene*:

Teorem 6.3. Grenseverdisetningene
Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *og* $\lim_{x\to a} g(x) = B$*, der* A *og* B *er tall. Da er*

a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B$ *b)* $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = A - B$

c) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$ *d)* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Eksempel 6.1. Beregn grenseverdien $\lim_{x\to 2} (x^2 + \ln x)$.

Løsning. Vi bruker grenseverdisetning a): Dersom grenseverdiene eksisterer, har vi at

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + \ln x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} \ln x.$$

Fordi både x^2 og $\ln x$ er kontinuerlige i sine definisjonsområder, og derfor spesielt i $x = 2$, får vi dermed at

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + \ln x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} \ln x = 2^2 + \ln 2 = 4 + \ln 2.$$

□

Som eksemplet over antyder, er det nesten alltid en ren trivialitet å beregne grenseverdier på formen $\lim_{x\to a} f(x)$ når $f(x)$ er definert i $x = a$. Så lenge f er kontinuerlig, er det bare å sette inn $x = a$ i uttrykket og regne ut. Problemene kommer dersom $f(x)$ *ikke* er definert når $x = a$. Standardeksempelet på dette er når uttrykket til $f(x)$ er en brøk,

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

der $h(a) = 0$. I slike situasjoner er det to muligheter. Dersom $g(a)$ er forskjellig fra 0, er saken grei. Da eksisterer ikke grenseverdien, fordi

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = « \frac{g(a)}{0} » = \pm\infty.$$

Hvis $g(a) = 0$, sier vi gjerne at vi har et «$\frac{0}{0}$»-uttrykk. I slike tilfeller kan det hende at grenseverdien eksisterer, men vi må ofte bruke noen triks for å finne den. Det mest grunnleggende trikset, som vi viser i de neste to eksemplene, er å forkorte brøken.

Eksempel 6.2. Finn grenseverdien $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 2}$ hvis den eksisterer.

Løsning. Her blir både teller og nevner lik null dersom vi setter inn $x = 2$. I slike tilfeller kan vi finne grenseverdien ved å forkorte brøken. Vi finner:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 4x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 2x = 4. \qquad \square$$

Eksempel 6.3. Finn grenseverdien $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{2-\sqrt{x+1}}$ hvis den eksisterer.

Løsning. Både teller og nevner blir lik null når $x = 3$, så vi kan ikke sette inn direkte. Som i forrige eksempel ønsker vi å forkorte brøken, men for å få til det, må vi ordne litt på uttrykket. Ifølge konjugatsetningen har vi at

$$(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1}) = 4 - (x+1) = 3 - x.$$

Dersom vi ganger oppe og nede i brøken med $2 + \sqrt{x+1}$, får vi derfor

$$\frac{3-x}{2-\sqrt{x+1}} = \frac{(3-x)\cdot(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})\cdot(2+\sqrt{x+1})} = \frac{(3-x)(2+\sqrt{x+1})}{3-x} = 2 + \sqrt{x+1}.$$

Dermed fikk vi forkortet bort hele nevneren, og grenseverdien blir

$$\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} (2+\sqrt{x+1}) = 2 + \sqrt{3+1} = 4.$$

$\square$

6.1.1 Ensidige grenseverdier

Se på funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x, & x < 2 \\ x^2 - 6x + 10 & x \geq 2. \end{cases} \tag{19}$$

Her støter vi på problemer hvis vi skal regne ut $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, fordi funksjonsuttrykket er avhengig av hvilken side av 2 vi er på. For å takle dette innføre vi *ensidige grenseverdier*:

Definisjon 6.4. Ensidige grenseverdier

- Dersom $f(x) \to L$ når x nærmer seg a nedenfra, skriver vi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.
- Dersom $f(x) \to L$ når x nærmer seg a ovenfra, skriver vi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

Disse grenseverdiene kaller vi *ensidige grenseverdier*.

Med ensidige grenseverdier er det enkelt å behandle funksjoner med delt forskrift. Som en konsekvens av definisjonen av kontinuitet får vi nemlig følgende regel:

Teorem 6.5. Kontinuitet i bruddpunkter
Anta at f er en funksjon med delt forskrift, og med $x = a$ som bruddpunkt. Da er f kontinuerlig i $x = a$ hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Nå kan vi undersøke kontinuiteten til funksjonen (19):

Eksempel 6.4. La funksjonen f være gitt ved

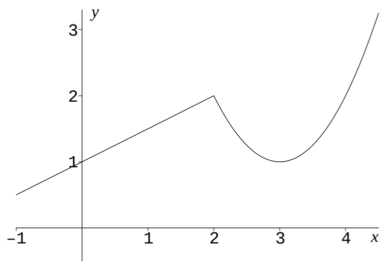
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x, & x < 2 \\ x^2 - 6x + 10 & x \geq 2. \end{cases}$$

Undersøk om f er kontinuerlig i $x = 2$.

Løsning. Vi regner ut at

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (1 + \tfrac{1}{2}x) = 2, \qquad \text{og}$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 6x + 10) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 10 = 2 = f(2).$$

Her brukte vi at polynomfunksjoner er kontinuerlige, så vi kunne sette inn $x = 2$ direkte. Siden de tre verdiene ble like, kan vi konkludere med at funksjonen er kontinuerlig i bruddpunktet (og dermed i hele $\mathbb{R}$). Grafen til f (figur 23) har en knekk i punktet $x = 2$, men du kan fremdeles tegne den uten å løfte blyanten fra papiret. □



Figur 23: Grafen til funksjonen f i Eksempel 6.4

Eksempel 6.5. Undersøk om funksjonen $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ er kontinuerlig i bruddpunktet $x = 0$.

Løsning. Her blir de ensidige grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1, \qquad \text{mens} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Disse er ikke like, så funksjonen er ikke kontinuerlig. Tegn grafen til g selv, og sjekk at du får samme konklusjon ut fra den. □

6.1.2 Grenseverdier når x går mot uendelig

Hittil i kapittelet har vi sett på hva som skjer med $f(x)$ når x nærmer seg et bestemt tall a. Vi kan også undersøke hva som skjer når vi lar x gå mot uendelig. Ta for eksempel uttrykket $\frac{1}{x}$. Når x går mot pluss eller minus uendelig, vil brøken gå mot null. Vi skriver dette som

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Generelt sier vi at grenseverdien $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ eksisterer og er lik L, dersom $f(x)$ nærmer seg L når $x \to +\infty$. Tilsvarende med $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

For å regne ut grenseverdier av typen

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, bruker vi følgende triks: Vi dividerer oppe og nede i brøken med den høyeste potensen av x som forekommer i uttrykket. Deretter benytter vi oss av at

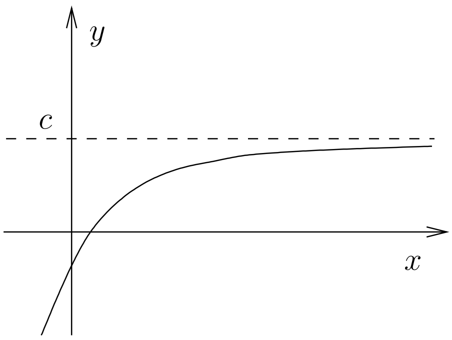
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0, \qquad \text{når } m, n \in \mathbb{N} \text{ og } m < n.$$

Eksempel 6.6. Bestem grenseverdien $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3 - 1}{3x^2 + x - 4}$ hvis den eksisterer.

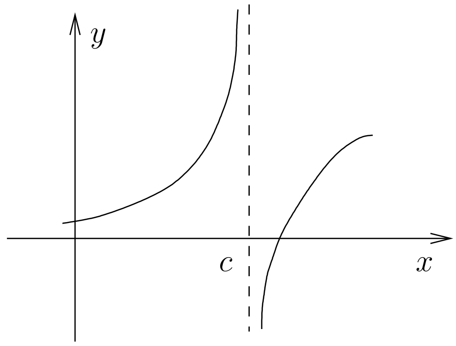
Løsning. Den høyeste potensen av x i uttrykket er x^3. Vi får dermed:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{4}{x^3}} \longrightarrow \frac{2 - 0}{0 + 0 - 0}$$

Siden nevneren går mot null, mens telleren går mot 2, blir resultatet at uttrykket går mot uendelig. Grenseverdien eksisterer derfor ikke. □



Figur 24: Graf med horisontal asymptote.



Figur 25: Graf med vertikal asymptote

6.2 Asymptoter

Etter at vi nå har sett på den grunnleggende regningen med grenseverdier, passer det godt å snakke om en spennende egenskap ved mange funksjoner: Asymptoter. Vi skal holde oss til de to enkleste typene, nemlig *horisontale* og *vertikale* asymptoter.

Definisjon 6.6. Asymptoter
La c være en reell konstant.

i. Dersom $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$ og/eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, sier vi at $y = c$ er en *horisontal asymptote* for f. Se figur 24 for et eksempel.

ii. Dersom $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ og/eller $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$, sier vi at $x = c$ er en *vertikal asymptote* for f. Se figur 25 for et eksempel.

For dem som synes det blir mye symbolspråk i definisjonen, kan man i stedet huske på følgende:

- Dersom $f(x)$ går mot et fast tall når x går mot uendelig, har grafen en horisontal asymptote.
- Dersom $f(x)$ går mot uendelig når x går mot et fast tall, har grafen en vertikal asymptote.

Definisjon 6.6 er en fin definisjon å ha med å gjøre, i den forstand at den kan brukes direkte når vi skal finne asymptoter i praksis. Teknikken er som følger:

- Horisontale asymptoter: Regn ut $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dersom noen av disse eksisterer, bruk Definisjon 6.6i.
- Vertikale asymptoter: Identifiser alle bruddpunkter og punkter der $f(x)$ ikke er definert, og undersøk grenseverdiene i hvert tilfelle. Dersom noen av disse blir $+\infty$ eller $-\infty$, bruk Definisjon 6.6ii.

Vi gjør to eksempler – et enkelt og et litt vanskeligere.

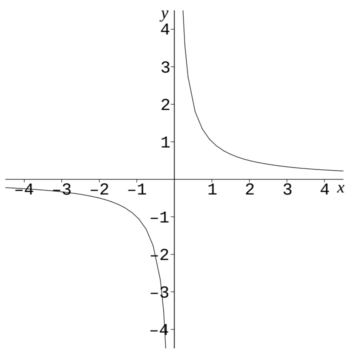
Eksempel 6.7. Finn alle horisontale og vertikale asymptoter til $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Løsning. Som vi allerede har sett, er $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Dette viser at $y = 0$ er en horisontal asymptote for f.

Den eneste muligheten for vertikal asymptote er $x = 0$. (f har ingen bruddpunkter, og er kontinuerlig overalt utenom i $x = 0$.) Fordi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

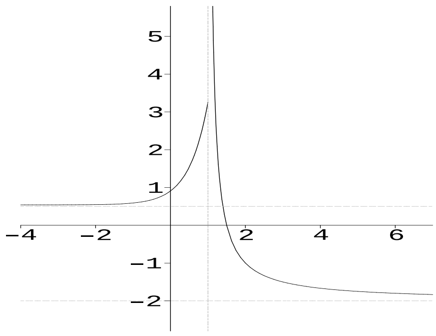
konkluderer vi med at $x = 0$ er vertikal asymptote for f. Sammenlign med grafen på figur 26. □



Figur 26: Grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$.

Eksempel 6.8. Finn alle horisontale og vertikale asymptoter til

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-1} + \frac{1}{2}, & x < 1 \\ \frac{3-2x}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$



Figur 27: Grafen til funksjonen i Eksempel 6.8.

Løsning.

• Horisontale asymptoter: Vi finner grensene $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Når x er negativ, er det $f(x) = e^{2x-1} + \frac{1}{2}$ som gjelder, slik at

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{2x-1} + \frac{1}{2}) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(Her brukte vi at når $x \to -\infty$, så vil også $2x - 1 \to -\infty$. Uttrykket e^{2x-1} går da mot 0.) Dette viser at $y = \frac{1}{2}$ er horisontal asymptote for f.

Når x er større enn 1, er $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$. Ved å dividere med x oppe og nede, finner vi at

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-2x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x} - 2}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0-2}{1-0} = -2.$$

Dette gir en ny horisontal asymptote, nemlig $y = -2$.

• Vertikale asymptoter: Disse kan forekomme i bruddpunkter og i punkter der funksjonen ikke er definert. I vårt tilfelle ser vi at $x = 1$ er den eneste muligheten. Fordi dette er et bruddpunkt, må vi bruke ensidige grenseverdier for å undersøke hva som skjer når x nærmer seg 1:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (e^{2x-1} + \frac{1}{2}) = e^{2\cdot1-1} + \frac{1}{2} = e + \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{3-2x}{x-1} = «\frac{1}{0}».$$

Når $x \to 1^+$, nærmer nevneren $x - 1$ seg 0 *fra oversiden*, slik at $f(x)$ går mot $+\infty$. Dermed får vi en vertikal asymptote i $x = 1$.

Figur 27 viser grafen til f med asymptoter. $\square$

6.3 Oppgaver

Oppgave 6.1. Beregn grenseverdiene dersom de eksisterer.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + 2x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x + \tan x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2 - x - 6}$

d) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x}{2^x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{|x|}{\sin\sqrt{x+2}} - 3^x\Big)$

Oppgave 6.2. Bestem grenseverdiene dersom de eksisterer.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+8x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x-1}{x}$

Oppgave 6.3. Anta at a, b, c og d er reelle tall slik at $c \neq 0$. Vis at vi har grenseverdien

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}.$$

Oppgave 6.4. Bestem grenseverdiene dersom de eksisterer.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$

Oppgave 6.5. Bruk den kjente grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ til å beregne disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

Oppgave 6.6. Eksisterer grenseverdien

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x?$$

Oppgave 6.7. Finn grenseverdien $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ dersom den eksisterer.

Oppgave 6.8. La f være gitt ved at

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \neq 0 \\ 1, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Tegn grafen til f. Er grafen kontinuerlig i bruddpunktet?

b) Hva blir $\lim_{x \to 0} f(x)$? Avgjør om f er kontinuerlig i $x = 0$ ved å bruke Teorem 6.5. (Konklusjonen bør bli den samme som i a).)

Oppgave 6.9. Bestem tallet a slik at funksjonen er kontinuerlig i bruddpunktet. Hvis du har lyst: Tegn grafen til funksjonen med den a-verdien du har funnet.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + a, & \text{for } x \geq 0 \\ x + 3, & \text{for } x < 0. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+4}, & \text{for } x \geq 1 \\ \dfrac{1-ax}{x}, & \text{for } x < 1. \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}, & \text{for } x > 2 \\ a - x, & \text{for } x \leq 2. \end{cases}$

Oppgave 6.10. Finn alle horisontale og vertikale asymptoter til funksjonen

$$f(x) = \frac{x+2}{3-x}.$$

Skisser grafen til f med asymptoter i et koordinatsystem.

Oppgave 6.11. Finn alle horisontale og vertikal asymptoter til funksjonen

$$g(x) = e^{\frac{1}{1+x}}.$$

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 6.12. Bestem grenseverdien $\lim_{x \to 3} \dfrac{18 - 2x^2}{\frac{1}{3}x - 1}$?

Oppgave 6.13.

a) Hva er det største antall horisontale asymptoter en funksjon kan ha? Begrunn svaret ditt og gi et eksempel.

b) Finn to eksempler på funksjoner som har uendelig mange vertikale asymptoter.

Oppgave 6.14. La $f(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{x^3+2x^2-5x-6}$.

a) Finn ut om f har noen horisontale asymptoter.

b) Beregn grenseverdien $\lim_{x \to 2} f(x)$ hvis den eksisterer. (Hint: Nullpunktsetningen.)

c) Finn de vertikale asymptotene til f.

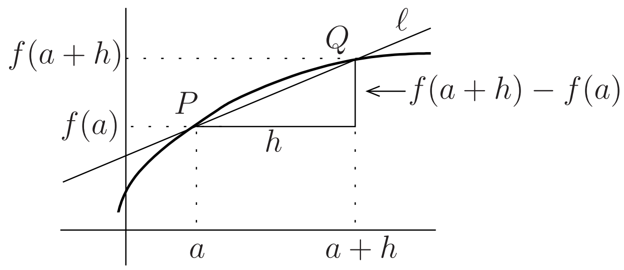
7 Derivasjon

Tidligere i heftet så vi hvordan man kan tegne grafen til en funksjon ved å regne ut et visst antall punkter, og så tegne en jevn kurve gjennom disse. Vi har også sett hvordan man kan bestemme eventuelle asymptoter til grafen. I dette og det neste kapittelet skal vi se hvordan teknikken med derivasjon kan gi oss enda mer informasjon om funksjoner og deres grafer.

7.1 Grunnleggende derivasjon

Et naturlig spørsmål å stille seg når man har en funksjon $f(x)$, er: Hvor bratt er grafen til f på ulike steder? Med andre ord – hvor raskt vokser eller synker grafen? Begrepet «bratthet» er i utgangspunktet temmelig vagt, så vi må presisere spørsmålet. Følgende presisering viser seg å være fruktbar: Hva er stigningstallet til tangeringslinja til grafen i ulike punkter? Som vi skal se, lar dette problemet seg løse på en tilfredsstillende måte.

Vi begynner med å se på en figur, der vi har tegnet inn grafen til en funksjon f:



Mellom P og Q vokser $f(x)$ med verdien $f(a+h) - f(a)$, mens x øker med h. Stigningstallet til linja ℓ er derfor

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Når vi lar h bli stadig mindre, vil punktet Q komme stadig nærmere P. Samtidig vil ℓ nærme seg tangenten til grafen i punktet P. Det er denne tangenten vi ønsker å finne stigningstallet til.

I grensesituasjonen når $h \to 0$, blir ℓ lik tangenten. Stigningstallet til tangenten er derfor lik grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dette motiverer følgende definisjon:

Definisjon 7.1. Derivasjon
Vi sier at en funksjon f er *deriverbar* i punktet $x = a$ dersom grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer (og *ikke deriverbar* hvis den ikke eksisterer). Den *deriverte* av f betegner vi med f' (leses «f derivert»), og er gitt ved at

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Det finnes mange forskjellige notasjoner for den deriverte. (Kjært barn har mange navn!) Hvis for eksempel $f(x) = x^2 + 3x$, kan vi skrive den deriverte av f som

$$f'(x), \qquad (x^2+3x)', \qquad D[x^2+3x], \qquad \frac{df}{dx} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d}{dx}(x^2+3x).$$

I dette heftet bruker vi stort sett de to første. I Lindstrøms *Kalkulus* brukes alle varianter om hverandre. Så det er bare å lære seg en gang for alle at disse skrivemåtene betyr nøyaktig det samme, og ikke er noe å være redd for.

Når vi skal derivere funksjoner i praksis, er det tungvint å bruke Definisjon 7.1. I stedet lønner det seg å lære seg de vanligste derivasjonsresultatene utenat og kombinere disse. De viktigste reglene er sammenfattet i Teorem 7.2.

Eksempel 7.1. La $f(x) = (3x-1)\ln x - \dfrac{2\sin x}{e^x}$. Finn $f'(x)$.

Løsning. Ved subtraksjonsregelen (regel 14) har vi at

$$f'(x) = \Big((3x-1)\ln x\Big)' - \left(\frac{2\sin x}{e^x}\right)'.$$

Vi velger å derivere hver av parentesene først, og så sette dem sammen igjen til slutt. Tallene over likhetstegnene markerer hvilke regler fra Teorem 7.2 vi har brukt.

$$\begin{aligned}\big((3x-1)\ln x\big)' &\overset{15}{=} (3x-1)'\ln x + (3x-1)(\ln x)' \overset{2,6}{=} 3\ln x + (3x-1)\frac{1}{x} \\ &= 3\ln x + \frac{3x-1}{x}\end{aligned}$$

Teorem 7.2. Derivasjonsregler

Spesielle regler

La a og b være reelle konstanter. Da gjelder:

1. $f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$

2. $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

4. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $f(x) = x^b \Rightarrow f'(x) = bx^{b-1}$

6. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

7. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

8. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

9. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

10. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

11. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

Generelle regler

La u og v være deriverbare funksjoner, og k en reell konstant. Da gjelder:

12. $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ *(skalarmultiplikasjonsregelen)*

13. $(u + v)' = u' + v'$ *(addisjonsregelen)*

14. $(u - v)' = u' - v'$ *(subtraksjonsregelen)*

15. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ *(produktregelen)*

16. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ *(brøkregelen)*

og

$$\left(\frac{2\sin x}{e^x}\right)' \overset{16}{=} \frac{(2\sin x)'e^x - 2\sin x(e^x)'}{(e^x)^2} \overset{12,9,7}{=} \frac{2\cos x \cdot e^x - 2\sin x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2\cos x - 2\sin x}{e^x}.$$

Til slutt setter vi delresultatene sammen, og får svaret:

$$f'(x) = 3\ln x + \frac{3x-1}{x} - \frac{2\cos x - 2\sin x}{e^x}. \qquad \square$$

Bevisene for derivasjonsreglene i Teorem 7.2 gjøres i de fleste lærebøker i 2MX og 3MX, og de består alle av elementær, men noen ganger slitsom, griseregning. Vi skal ikke dvele mye ved dette her, men for å minne om metoden, gjør vi beviset for regel nr. 3, som sier at $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$:

Bevis for regel nr. 3: Per definisjon av den deriverte, er

$$\Big(\frac{1}{x}\Big)' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}.$$

Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk, så vi må omforme uttrykket før vi kan sette inn. Siden uttrykket inneholder en brudden brøk, starter vi med å kvitte oss med den:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)\cdot x(x+h)}{h\ \cdot\ x(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h\cdot x(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot x(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}.$$

Dette uttrykket er ikke lenger på formen $\frac{0}{0}$, så vi kan finne grenseverdien ved å sette inn $h = 0$. Den deriverte blir:

$$\Big(\frac{1}{x}\Big)' = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}.$$

□

7.2 Kjerneregelen

I seksjon 3.3 så vi at kompliserte funksjoner ofte er bygget opp av mindre funksjoner. Dette utnytter vi når vi deriverer. Dersom vi setter sammen funksjoner ved hjelp av de 4 regneartene, sier reglene 12-16 i Teorem 7.2 hvordan vi kan derivere resultatet. (Funksjonen i Eksempel 7.1 er satt sammen av mindre funksjoner på denne måten.)

Hvis vi derimot setter funksjoner *inn i hverandre*, som for eksempel $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$, ser vi raskt at reglene i Teorem 7.2 ikke strekker til. Vi trenger en ny derivasjonsregel for slike tilfeller, nemlig *kjerneregelen*:

Teorem 7.3. Kjerneregelen
La g og u være deriverbare funksjoner. Da gjelder:

$$f(x) = g(u(x)) \implies f'(x) = g'(u(x))\cdot u'(x). \tag{20}$$

Beviset for kjerneregelen kan du finne i *Kalkulus, kap. 6.1* hvis du er interessert.

Mange synes det er vanskelig å få skikkelig tak på kjerneregelen til å begynne med. Jeg kan trøste med at dette blir fort mye bedre. Med litt trening er kjerneregelen en teknikk som faktisk er meget enkel i bruk!

Hvordan skal vi så gå fram når vi skal derivere en funksjon ved hjelp av kjerneregelen? Her er to mulige måter å tenke på:

Metode 1

1. Identifiser kjernen i uttrykket for $f(x)$.
2. Deriver $f(x)$ som om kjernen hadde vært en enkel variabel.
3. Gang resultatet med den deriverte av kjernen.

Metode 2

1. Finn funksjoner $g(u)$ og $u(x)$ slik at $f(x) = g(u(x))$.
2. Regn ut $g'(u)$ og $u'(x)$. (Uttrykket for $g'(u)$ inneholder bare u'er – ingen x'er!)
3. Gang sammen svarene du fikk, og sett inn uttrykket for $u(x)$ overalt der det står u.

Det er viktig å være klar over at disse metodene egentlig gjør akkurat det samme; den eneste forskjellen er hvordan man tenker underveis i regningen. Metode 2 egner seg best dersom det er mye griseregning og vanskelig å holde oversikt. Ellers er metode 1 kanskje den greieste.

Vi illustrerer hver metode med et eksempel.

Eksempel 7.2. Finn $f'(x)$ når $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$.

Løsning. Vi bruker metode 1:

1. Den eneste naturlige kjernen her er det som står inni parentesen, nemlig $2x^2 - 1$.
2. Dersom vi deriverer (ved hjelp av regel 9 i Teorem 7.2) uten å tenke på kjernen, får vi uttrykket
$$\cos(2x^2 - 1).$$
3. Til slutt må vi gange dette uttrykket med den deriverte av $2x^2 - 1$, som er $4x$. Svaret blir altså at $f'(x) = 4x\cos(2x^2 - 1)$.

□

Eksempel 7.3. La $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$. Finn $f'(x)$.

Løsning. Her bruker vi metode 2:

1. Det mest opplagte er å velge kjernen til å være $u(x) = \tan x$. For at $f(x)$ skal bli lik $g(u(x))$, ser vi at vi må la
$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

2. Vi regner ut de deriverte til $g(u)$ og $u(x)$:
$$\begin{aligned} g'(u) &= \Big(\frac{1}{\sqrt{u}}\Big)' = (u^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{u^3}}, \quad \text{og} \\ u'(x) &= (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

3. Nå gjenstår bare å gange sammen disse to uttrykkene og sette inn $\tan x$ for u. Vi får:
$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\tan^3 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan^3 x}}.$$

□

Etter litt trening, trenger du ikke lenger tenke bevisst på disse metodene – da vil bruken av kjerneregelen gå automatisk. Vi tar med et litt vanskeligere eksempel til slutt, der vi må bruke kjerneregelen flere ganger.

Eksempel 7.4. Deriver funksjonen $f(x) = \ln(1 + \cos^3(2x))$.

Løsning. Vi begynner med å la kjernen være $u(x) = 1 + \cos^3(2x)$, og setter $g(u) = \ln u$. Da er $f(x) = g(u(x))$, og kjerneregelen gir at

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{1 + \cos^3(2x)} \cdot [1 + \cos^3(2x)]' = \frac{[\cos^3(2x)]'}{1 + \cos^3(2x)}. \tag{21}$$

For å komme videre, må vi finne den deriverte av $\cos^3(2x) = (\cos(2x))^3$. Vi bruker kjerneregelen igjen, denne gangen med kjernen $u(x) = \cos(2x)$ og $g(u) = u^3$. Siden $u'(x) = -2\sin(2x)$ (kjerneregelen igjen!) og $g'(u) = 3u^2$, får vi at

$$[\cos^3(2x)]' = 3(\cos(2x))^2 \cdot (-2\sin(2x)) = -6\cos^2(2x)\sin(2x).$$

Nå kan vi sette dette inn i (21), og få svaret:

$$f'(x) = \frac{-6\cos^2(2x)\sin(2x)}{1 + \cos^3(2x)}.$$

□

7.3 Å finne tangenter

Når vi kjenner den deriverte til en funksjon, er det en enkel sak å finne likningene for tangentene til grafen. Det eneste vi trenger, er den gode gamle *ettpunktsformelen*:

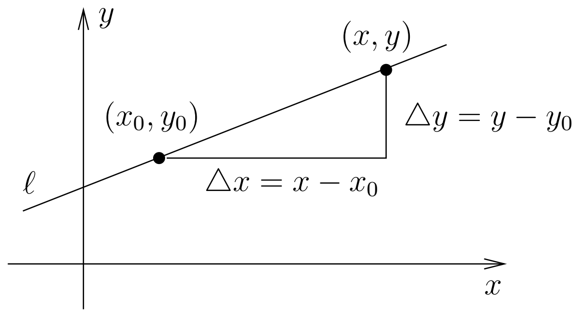
Teorem 7.4. Ettpunktsformelen
La ℓ være linja som går gjennom punktet (x_0, y_0) og har stigningstall a. Likningen for ℓ er da:

$$y - y_0 = a(x - x_0). \tag{22}$$

Bevis. La (x, y) være et vilkårlig punkt på ℓ, forskjellig fra (x_0, y_0) (se figur 28). Siden stigningstallet til en linje er lik $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, får vi sammenhengen

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = a, \quad \text{det vil si} \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = a.$$

Ganger vi opp med nevneren $(x - x_0)$, får vi formelen (22). [1] □



Figur 28:

La oss nå vende tilbake til graftangenter. Anta at f er en deriverbar funksjon, og la $(c, f(c))$ være et punkt på grafen. Vi skal finne tangenten i dette punktet. Men stigningstallet til tangenten er jo verdien av den deriverte! Vi skal altså ha tak i likningen for linja som går gjennom punktet $(c, f(c))$, og har stigningstall $f'(c)$. Svaret følger rett fra ettpunktsformelen:

[1] Denne utregningen gjaldt bare for punkter $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, men ved innsetting ser vi at punktet (x_0, y_0) også tilfredsstiller (22).

Teorem 7.5. Likning for tangentlinje
La $f(x)$ være deriverbar i punktet $x = c$. Tangenten til grafen til f i punktet $(c, f(c))$ er da gitt ved likningen

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Eksempel 7.5. Finn tangenten til grafen til $f(x) = e^x$ i punktene $(0, f(0))$ og $(1, f(1))$.

Løsning. Vi setter rett inn i formelen i Teorem 7.5, med $f(x) = f'(x) = e^x$. I det første punktet er $c = 0$, og vi får tangentlikninga

$$y - e^0 = e^0(x - 0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = x + 1.$$

I det andre punktet har vi $c = 1$, og vi får tangenten

$$y - e^1 = e^1(x - 1) \quad \Longleftrightarrow \quad y = ex.$$

(Sjekk mellomregningene selv hvis du er usikker.) □

7.4 Høyere ordens deriverte

Se på funksjonen $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$. Den deriverte av f er funksjonen

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x.$$

Hvis vi nå deriverer en gang til, får vi den *annenderiverte* til f, som vi kaller f'':

$$f''(x) = (4x^3 - 6x^2 + 6x)' = 12x^2 - 12x + 6.$$

Deriverer vi enda en gang, får vi den *tredjederiverte*:

$$f'''(x) = (12x^2 - 12x + 6)' = 24x - 12.$$

Vi kunne ha fortsatt videre på samme måte, men du skjønner sikkert poenget. Vi setter opp de nye begrepene i en definisjon:

Definisjon 7.6. Høyere ordens deriverte
Dersom vi deriverer en funksjon f to ganger, får vi den *annenderiverte* av f. Denne betegner vi med f''. Mer generelt kaller vi resultatet etter n derivasjoner den *n'te-deriverte* av f, og skriver $f''^{\cdots}$ med n apostrofer, eller bare $f^{(n)}$. (Sistnevnte notasjon er å foretrekke dersom n er større enn 3.)

7.5 Oppgaver

I oppgavene til dette kapittelet er det mange funksjoner som skal deriveres. Tenk i hvert tilfelle gjennom hvilke alternative metoder du kan bruke, og prøv å velge den beste. Det kan spare deg for mye tid og arbeid! (Hvis du mistenker at du har valgt en tungvint løsning, spør gruppelærer om råd.)

Oppgave 7.1. Finn $f'(x)$ ved å bruke formlene i Teorem 7.2. I h) og i) er a en konstant.

a) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{1}{5x^4}$

b) $f(x) = x^{e+1}$

c) $f(x) = \pi^x$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

e) $f(x) = (2x - 11)(1 - 3x)$

f) $f(x) = e^x \ln x$

g) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x + 2}$

h) $f(x) = (a^2 + a - 1)x^{\frac{1}{1-a-a^2}}$

i) $f(x) = \dfrac{\sin a \cos x}{\cos a \sin x}$

Oppgave 7.2. Finn $f'(x)$ dersom

$$f(x) = extra - texmex - er - helmax.$$

Oppgave 7.3. Hilde og Marianne diskuterer hvordan funksjonen x^x $(x > 0)$ skal deriveres.
- Hilde sier: «Jeg tror vi må bruke regelen $(x^b)' = bx^{b-1}$, med $b = x$. Da får vi at $(x^x)' = x \cdot x^{x-1} = x^x$, som jo er et svært artig resultat!»
- Marianne sier: «Nei, dette blir feil. Siden eksponenten er x, må vi bruke at $(a^x)' = a^x \ln a$, og sette $a = x$. Svaret blir at $(x^x)' = x^x \cdot \ln x$.»

a) Kritiser argumentene til Hilde og Marianne.

b) Regn ut $(x^x)'$. (Hint: Forklar at $x^x = e^{x \ln x}$, og bruk dette.)

Oppgave 7.4. Deriver funksjonene under ved å bruke kjerneregelen.

a) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

b) $f(t) = \ln(1 + t)$

c) $f(\theta) = \cos 7\theta$

d) $f(x) = (x^2 + 1)^{2004}$

e) $f(x) = e^{x^2}$

f) $f(\varphi) = 2 \sin^{-3} \varphi$

g) $f(x) = (\ln x + \tan x)^{10}$

h) $f(\varphi) = \sqrt{\sin \varphi + \cos \varphi}$

Oppgave 7.5. Finn funksjoner g og u slik at $f(x) = g(u(x))$. Bruk dette til å finne $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

b) $f(x) = (3 - 2x)^3 + 10$

c) $f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x - \sin x$

d) $f(x) = \sqrt{x \sin x}$

e) $f(x) = \cos(x^2 \ln x)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^x}}$

g) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

Oppgave 7.6. Deriver funksjonene:

a) $\sin\sqrt{2x}$ b) $e^{\tan 3x}$ c) $2^{e^{\cos x}}$ d) $\sqrt{1 - \ln(1 - x^2)}$

Oppgave 7.7. Grafen til funksjonen $f(x) = x^2 + 1$ har to tangenter som går gjennom origo. Finn likningene til disse to.

Oppgave 7.8. La

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & 0 < x < 1 \\ 3 - x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuerlig og deriverbar i punktet $x = 1$, og finn $f'(1)$.

b) Finn tangenten i punktet $(1, f(1))$.

c) Skisser grafen til f og tegn inn tangenten du fant i b).

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 7.9. Finn den deriverte til funksjonen

$$f(x) = x^{(x^x)},$$

når $x > 0$. (Hint: Se Oppgave 7.3.)

Oppgave 7.10. La ℓ være linja gitt ved $y = ax + b$. Bruk Teorem 7.5 til å vise at enhver tangent til ℓ er ℓ selv.

8 Funksjonsdrøfting

Noen av de vanligste problemstillingene man står overfor når man skal undersøke en funksjon f, er disse:

1) Finn ut hvor $f(x)$ er voksende og avtagende.
(Dette kalles å drøfte monotoniegenskapene til f.)

2) Bestem hvor $f(x)$ er størst og minst.
(Dette kalles å finne ekstremalpunktene til f.)

3) Avgjør hvor grafen til f bøyer seg oppover og nedover.
(Dette kalles å drøfte krumningsegenskapene til f.)

4) Bestem hvor veksthastigheten til f er størst og minst.
(Dette kalles å finne vendepunktene til f.)

Nå som vi har derivasjonen i boks, kan vi endelig gå løs på disse oppgavene. Det viser seg nemlig at løsningene på de to første er å hente hos den deriverte, $f'(x)$. De to siste er tilsvarende knyttet til den annenderiverte, $f''(x)$.

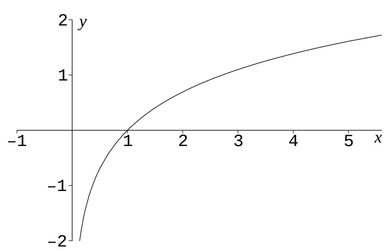
Aller først frisker vi opp hvordan man lager fortegnslinja til en funksjon.

8.1 Fortegnslinjer

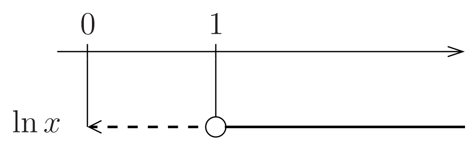
La $f(x)$ være en funksjon. Med *fortegnslinja til* $f(x)$ mener vi en linje der vi har markert for hvilke x-verdier $f(x)$ er positiv, negativ eller null.

La oss for eksempel se på funksjonen $f(x) = \ln x$. Ut fra grafen på figur 29 ser vi at $\ln x$ er negativ for $0 < x < 1$, positiv for $x > 1$, og har $x = 1$ som eneste nullpunkt. Når $x \leq 0$, er $\ln x$ ikke definert.

Alle disse opplysningene er sammenfattet på figur 30. Dette er fortegnslinja til $\ln x$.



Figur 29: Grafen til $\ln x$.



Figur 30: Fortegnslinja til $f(x) = \ln x$.

Som vi ser på figuren, markerer vi med en stiplet strek der $\ln x$ er negativ, og med en sammenhengende strek der $\ln x$ er positiv. I tillegg har vi plassert en sirkel ved nullpunktet $x = 1$, og tegnet « $<$ » ved $x = 0$ for å markere at $\ln x$ ikke er definert her.

Når vi senere skal tegne fortegnslinja til mer kompliserte funksjoner, kan det være greit å systematisere litt. I boksen under gjennomgår vi punkt for punkt hvordan man kan tegne fortegnslinja til en generell funksjon f.

Tegning av fortegnslinja til en generell funksjon $f\colon I \to \mathbb{R}$.

1. Finn alle løsningene (i det aktuelle intervallet) til likningen $f(x) = 0$.
2. Tegn inn en tall-linje, og marker følgende punkter på den:
   - Punktene der $f(x)$ er null. (Disse fant du i punkt 1.)
   - Punktene der $f(x)$ ikke er definert, og eventuelle bruddpunkter (dersom f har delt forskrift) der f ikke er kontinuerlig.
   - Endepunktene – hvis det er noen – til intervallet I.
3. Finn ut hvilket fortegn $f(x)$ har mellom punktene du har markert. Dette kan for eksempel gjøres ved å sette inn en verdi i hvert intervall. (Se Eksempel 8.2 for en annen metode.)
4. Tegn fortegnslinja til f rett under tall-linja ved å bruke disse symbolene:
   - —— der $f(x) > 0$,
   - - - - der $f(x) < 0$,
   - $\circ$ der $f(x) = 0$,
   - $<$ og $>$, for å markere (halv)åpne intervaller.

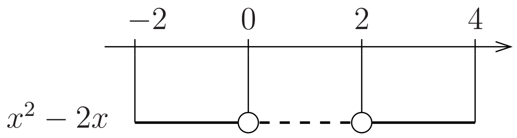
Eksempel 8.1. Tegn fortegnslinja til $f(x) = x^2 - 2x$ på intervallet $I = [-2, 4]$.

Løsning. Vi begynner med å finne nullpunktene til f. Siden $x^2 - 2x = x(x-2)$, er $f(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 2$. Begge disse ligger i intervallet I. Videre observerer vi at f er definert på hele I, og det er ingen bruddpunkter. Punktene vi skal markere på tallinja, er dermed nullpunktene 0 og 2, samt endepunktene -2 og 4.

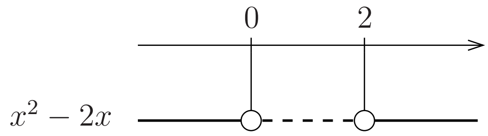
Neste punkt er å bestemme fortegnet til f på de tre intervallene $[-2, 0]$, $[0, 2]$ og $[2, 4]$. Dette gjør vi enkelt ved å regne ut en verdi i hvert intervall. For eksempel kan vi ta verdiene

$$f(-1) = 3 > 0, \qquad f(1) = -1 < 0, \qquad f(3) = 3 > 0.$$

Fra dette ser vi at f er positiv på $[-2, 0)$, negativ på $(0, 2)$ og positiv på $(2, 4]$. Fortegnslinja blir dermed som på figur 31. Sammenlign med figur 32, som viser fortegnslinja til f når vi utvider definisjonsområdet til hele $\mathbb{R}$. □



Figur 31: Fortegnslinja til $f(x)$ på intervallet $[-2, 4]$.



Figur 32: Fortegnslinja til $f(x)$ på hele $\mathbb{R}$.

Dersom funksjonsuttrykket til f består av flere faktorer ganget sammen eller delt på hverandre, er det ofte ekstra lett å tegne fortegnslinja. Vi finner da først fortegnslinja til hver av faktorene, og så bruker vi disse til å bestemme fortegnslinja til $f(x)$ ved hjelp av de velkjente fortegnsreglene for multiplikasjon/divisjon:

$$\begin{array}{ccccc} (+) & \cdot & (+) & = & (+) \\ (-) & \cdot & (-) & = & (+) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (+) & \cdot & (-) & = & (-) \\ (-) & \cdot & (+) & = & (-) \end{array}$$

Eksempel 8.2. Lag fortegnslinja til $f(x) = x(3 - x)e^x$.

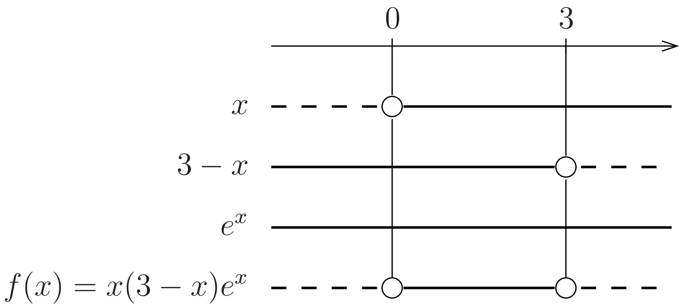
Løsning. Funksjonsuttrykket til f er lik produktet av faktorene

$$x, \quad 3 - x \quad \text{og} \quad e^x.$$

Den første faktoren har nullpunkt i $x = 0$, den andre i $x = 3$, mens den siste alltid er positiv. Vi lager fortegnslinja for hver av dem, og tegner dem i samme skjema (se figur 33). Til slutt tegner vi fortegnslinja til $f(x)$ nederst ved å bruke fortegnsreglene over. For eksempel blir $f(x)$ negativ på intervallet $(-\infty, 0)$, fordi der er x negativ, mens de to andre faktorene er positive.

□

I de neste 4 seksjonene tar vi i tur og orden for oss de fire problemstillingene vi nevnte på side 87.



Figur 33: Fortegnslinja til $f(x) = x(3-x)e^x$.

8.2 Monotoniegenskaper

Hva mener vi egentlig med at en funksjon vokser? Jo, at når x øker, så øker også verdien $f(x)$. Dersom $f(x)$ blir mindre når x øker, er det naturlig å si at funksjonen er avtagende. Vi utbroderer dette til en formell definisjon:

Definisjon 8.1. La f være en funksjon definert på et intervall I. Vi sier at

- f er *voksende* i I, dersom for alle $x_1, x_2 \in I$, så gjelder

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

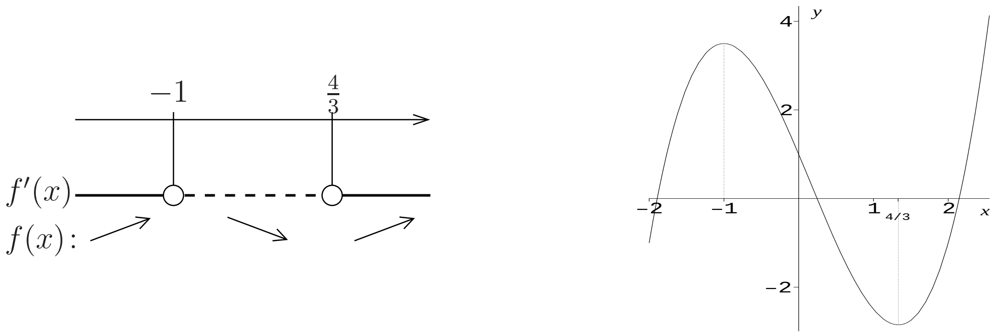
- f er *avtagende* i I, dersom for alle $x_1, x_2 \in I$, så gjelder

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Dersom $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in I$, sier vi at f er *strengt voksende* i I.
Tilsvarende er f *strengt avtagende* i I hvis $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ifølge denne definisjonen er for eksempel funksjonen $f(x) = 1$ voksende i hele $\mathbb{R}$, men ikke strengt voksende noe sted.

I praksis er det som oftest vanskelig å bestemme hvor en funksjon vokser og avtar ut fra denne definisjonen. I stedet bruker vi dette teoremet:



Figur 34: Fortegnslinja til $f'(x) = 3x^2 - x - 4$ og den tilhørende grafen til $f(x)$.

> **Teorem 8.2. Monotoniegenskapene til en funksjon**
> *Anta at f er kontinuerlig og deriverbar på intervallet I. Da gjelder:*
>
> $$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ for alle } x \in I \quad &\iff \quad f \text{ er voksende på } I. \\ f'(x) \leq 0 \text{ for alle } x \in I \quad &\iff \quad f \text{ er avtagende på } I. \end{aligned}$$

Bevisskisse. Husk den geometriske tolkningen av den deriverte: I hvert punkt x er $f'(x)$ lik stigningstallet til tangenten. Siden tangenten i et punkt er tilnærmet lik grafen i nærheten av tangeringspunktet, vil grafen og tangenten alltid peke i samme retning der. Dette betyr at der $f'(x)$ (altså stigningstallet til tangenten) er positiv, vil tangenten peke oppover, og da vil grafen vokse. På samme måte avtar grafen der $f'(x)$ er negativ. Dette er akkurat det teoremet sier. □

En konsekvens av Teorem 8.2 er at vi kan bestemme monotoniegenskapene til f ved å tegne fortegnslinja til $f'(x)$.

Eksempel 8.3. Bestem ved regning hvor grafen til $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ vokser og avtar.

Bevis. Vi finner fortegnslinja til den deriverte, som er $f'(x) = 3x^2 - x - 4$. Nullpunktene til $f'(x)$ finner vi ved den vanlige formelen for annengradslikninger. De er $x = -1$ og $x = \frac{4}{3}$. Videre regner vi ut en verdi i hvert av intervallene $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{4}{3})$ og $(\frac{4}{3}, \infty)$:

$$f'(-2) = 10 > 0, \qquad f(0) = -4 < 0, \qquad f(2) = 6 > 0.$$

Fortegnslinja til $f'(x)$ blir dermed som på figur 34. Vi leser av at f er voksende på $(-\infty, -1)$, avtagende på $(-1, \frac{4}{3})$ og voksende på $(\frac{4}{3}, \infty)$. Det er vanlig å markere dette med piler slik vi har gjort på figuren. Når vi sammenligner med grafen, ser vi at dette stemmer bra.

□

8.3 Ekstremalpunkter og ekstremalverdier

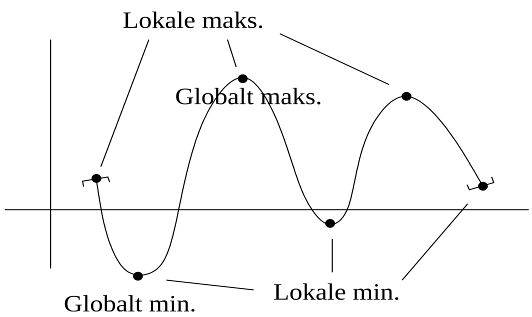
Definisjon 8.3. Lokale og globale ekstremalpunkter

- f har et *lokalt maksimum* i $x = a$, dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle verdier av x i nærheten[1]av a.
- f har et *globalt maksimum* i $x = a$, dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle verdier av x i hele definisjonsområdet.
- f har et *lokalt minimum* i $x = a$, dersom $f(a) \leq f(x)$ for alle verdier av x i nærheten av a.
- f har et *globalt minimum* i $x = a$, dersom $f(a) \leq f(x)$ for alle verdier av x i hele definisjonsområdet.

En samlebetegnelse på maksimums- og minimumspunkter er *ekstremalpunkter*. Dersom a er et ekstremalpunkt, kaller vi verdien $f(a)$ den korresponderende *ekstremalverdien.*

Begrepene *toppunkt* og *bunnpunkt* brukes også ofte: Hvis f har et (lokalt) maksimum i $x = a$, har grafen et (lokalt) toppunkt i $(a, f(a))$, og tilsvarende med bunnpunkt.

Figur 35 illustrerer forskjellen mellom lokale og globale ekstremalpunkter. Legg merke til at alle globale ekstremalpunkter også er lokale.



Figur 35:

I praksis bruker vi sjelden definisjonen over når vi skal regne ut ekstremalpunktene til en funksjon. I stedet drar vi nytte av det vi gjorde i forrige seksjon. Der så

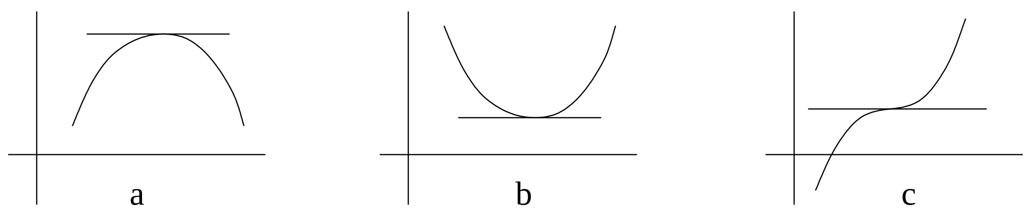
[1]En presisering av hva vi mener med «i nærheten», får du i MAT1100.

vi nemlig at grafen til f var voksende i intervaller der $f'(x) \geq 0$, og avtagende i intervaller der $f'(x) \leq 0$. Dette betyr at i punkter der $f'(x)$ skifter fortegn, flater grafen ut og gir enten et topp- eller bunnpunkt. Mer presist:

Teorem 8.4. *Anta at f er kontinuerlig og deriverbar i $x = a$, og at $f'(a) = 0$.*

- *Dersom $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $-$ i $x = a$, har f et lokalt maksimumspunkt i $x = a$.*
- *Dersom $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$ i $x = a$, har f et lokalt minimumspunkt i $x = a$.*

Dersom $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ ikke skifter fortegn i a, har vi det vi kaller et *terrassepunkt*. Topp-, bunn- og terrassepunkter er altså de eneste punktene på en graf der tangenten kan være horisontal (se figur 36).



Figur 36: De tre mulighetene for horisontale tangenter: a) toppunkt, b) bunnpunkt og c) terrassepunkt.

Eksempel 8.4. Bestem de lokale maksimums- og minimumspunktene til funksjonen $f(x)$ i Eksempel 8.3, og undersøk om noen av dem er globale.

Løsning. Fortegnslinja på figur 34 forteller at $f'(x)$ er positiv fram til $x = -1$, og negativ etter. Punktet $x = -1$ er derfor et lokalt maksimumspunkt. Tilsvarende har vi et lokalt minimumspunkt når $x = \frac{4}{3}$. Ingen av disse er imidlertid globale, fordi $f(x)$ går mot uendelig når $x \to \infty$, og mot minus uendelig når $x \to -\infty$. $\square$

Etter det fine Teorem 8.4 er det lett å tenke at alle problemer angående ekstremalpunkter er løst. Men så lett er det dessverre ikke. I mange tilfeller er det nemlig ikke bare nullpunktene til f' som kan være ekstremalpunkter. Som figur 35 viser, kan også eventuelle endepunkter være aktuelle kandidater. Det samme gjelder punkter der f ikke er deriverbar.

For å få litt orden på dette, lager vi en definisjon:

Definisjon 8.5. Kritiske punkter
De *kritiske punktene* for en funksjon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er

- punkter der $f'(x) = 0$,
- punkter der $f'(x)$ ikke er definert (dvs. der f ikke er deriverbar).
- endepunktene a og b.

Grunnen til at vi tar oss bryet med å gi en samlebetegnelse på disse punktene, er følgende teorem (beviset kan du lese i *Kalkulus, kap. 6.4*):

Teorem 8.6. *Dersom funksjonen f har et lokalt ekstremalpunkt i $x = a$, er a et kritisk punkt for f.*

Hva er det som er så fint med dette? Jo, hvis du ser nøye på definisjonen av de kritiske punktene, ser du at det er nøyaktig de samme punktene som skal avmerkes på fortegnslinja til $f'(x)$. Teorem 8.6 garanterer dermed at hvis du lager fortegnslinja til $f'(x)$, så vil *alle* ekstremalpunktene til f være blant punktene du har merket av.

Eksempel 8.5. La $f\colon (-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ være definert ved at

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 1 \\ 3 - x, & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Finn alle lokale ekstremalpunkter for f, og undersøk om noen av dem er globale.

Løsning. Vi observerer først at siden grenseverdiene

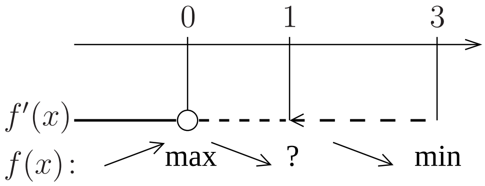
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{-x^2} = \frac{1}{e} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$$

ikke er like, er f ikke kontinuerlig i bruddpunktet $x = 1$.

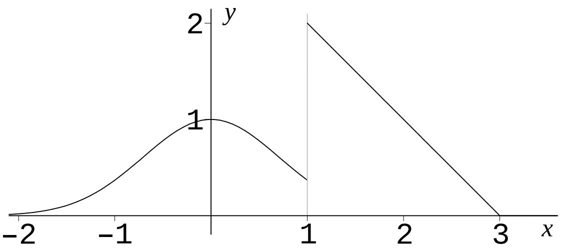
La oss nå finne de kritiske punktene til f. Den deriverte blir

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2}, & x < 1, \\ -1, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Siden f ikke er kontinuerlig i bruddpunktet $x = 1$, er f heller ikke deriverbar der. $x = 1$ er derfor et kritisk punkt.



Figur 37: Fortegnslinja til $f'(x)$



Figur 38: Grafen til $f(x)$

Det eneste nullpunktet til $f'(x)$ er $x = 0$. (Hvorfor?) Vi konkluderer med at de kritiske punktene til f er 0, 1 og endepunktet 3. Fortegnslinja til $f'(x)$ blir som på figur 37.

Av fortegnslinja ser vi umiddelbart at f har et lokalt maksimum for $x = 0$, og et lokalt minimum i endepunktet $x = 3$. Hva som skjer i $x = 1$, derimot, er ikke klart ut fra fortegnslinja alene. Man kunne tro at siden grafen avtar både før og etter $x = 1$, så får vi ikke noe ekstremalpunkt her. Men når vi tegner grafen (figur 38), ser vi at den har et bunnpunkt i $(1, f(1)) = (1, e^{-1})$. Moralen er: I bruddpunkter kan alt skje!

For å avgjøre om noen av de lokale ekstremalpunktene er globale, er det lettest å studere grafen. Vi ser at maksimumspunktet i $x = 0$ ikke er globalt, og heller ikke minimumspunktet i $x = 1$. Bunnpunktet i $x = 3$ er derimot globalt: For alle verdier av x i definisjonsområdet gjelder at $f(x) \geq 0 = f(3)$. □

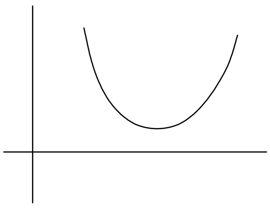
8.4 Krumningsegenskaper

I forrige seksjon jobbet vi med å finne ut hvor grafen til en funksjon vokser og avtar. Nå skal vi se på at lignende problem, nemlig hvilken vei grafen bøyer seg. Dette kalles å analysere funksjonens krumningsegenskaper.

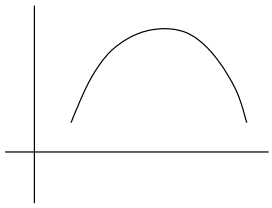
De matematiske uttrykkene vi skal bruke om dette, er *konveks* og *konkav*:

Definisjon 8.7. La f være en kontinuerlig funksjon. I de intervallene der grafen til f åpner seg oppover (som på figur 39), sier vi at f er konveks. I de intervallene der grafen åpner seg nedover (som på figur 40), sier vi at f er konkav.

Akkurat som den deriverte var utslagsgivende for monotoniegenskapene til f, er det den annenderiverte som avgjør krumningen til f:



Figur 39: Grafen til en konveks funksjon.



Figur 40: Grafen til en konkav funksjon.

Teorem 8.8. *Anta at f er to ganger deriverbar på intervallet I. Da har vi at*

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \text{ for alle } x \in I \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ er konveks i } I. \\ f''(x) \leq 0 \text{ for alle } x \in I \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ er konkav i } I. \end{aligned}$$

Eksempel 8.6. Finn ut hvor funksjonen f er konveks og konkav, når

$$f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2.$$

Løsning. Vi begynner med å derivere to ganger:

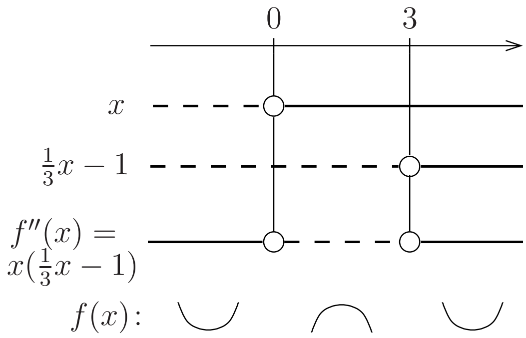
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2, \\ f''(x) &= \frac{1}{3}x^2 - x. \end{aligned}$$

Fra Teorem 8.8 vet vi at krumningen til f er avhengig av fortegnet til den annenderiverte. Vi lager derfor fortegnslinja til f''. Ved å bruke faktoriseringen $f''(x) = x(\frac{1}{3}x - 1)$, ender vi opp med resultatet på figur 41. Vi leser av at $f''(x) > 0$ på intervallene $(-\infty, 0)$ og $(3, \infty)$. Grafen er altså konveks i disse intervallene. På intervallet $(0, 3)$ er $f''(x) < 0$, og følgelig er grafen konkav her.

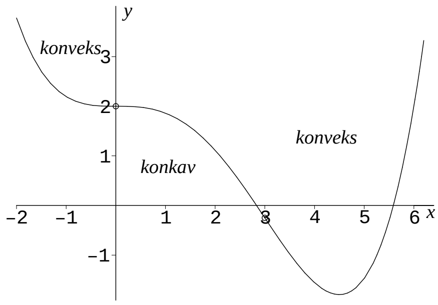
Grafen på figur 42 bekrefter det vi har funnet. □

8.5 Vendepunkter og vendetangenter

Definisjon 8.9. Vendepunkter og vendetangenter
La f være kontinuerlig i $x = a$. Dersom krumningen til f skifter i $x = a$, fra konveks til konkav, eller omvendt, sier vi at grafen til f har et *vendepunkt* i punktet $(a, f(a))$. Tangenten til grafen i et vendepunkt kalles ofte en *vendetangent* til grafen.



Figur 41: Fortegnslinja til $f''(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$.



Figur 42: Grafen til $f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2$

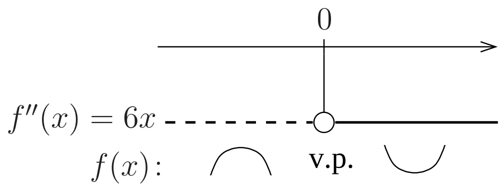
Vendepunktene til grafen til f finner vi blant de kritiske verdiene til f': Løsningene i likningen $f''(x) = 0$, endepunkter og eventuelle bruddpunkter der den deriverte ikke er definert. Vendepunktene er således de punktene der veksthastigheten til grafen, altså $f'(x)$, er på sitt største eller minste.

Når vi skal finne vendepunkter i praksis, lager vi fortegnslinja til $f''(x)$. Ut i fra den kan man lese av direkte hvor vendepunktene til grafen er. Prosessen er for øvrig helt parallell med å finne ekstremalpunkter.

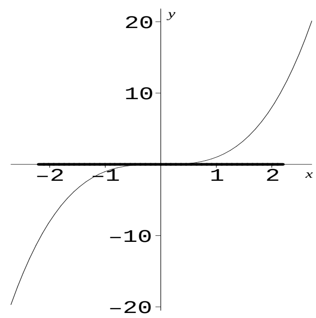
Det er verdt å merke seg at mange grafer ikke har noen vendepunkter i det hele tatt. Det enkleste eksemplet på en graf som *har* et vendepunkt, er dette:

Eksempel 8.7. Bestem vendepunktene til grafen til $f(x) = x^3$.

Løsning. Vi finner $f'(x) = 3x^2$, og $f''(x) = 6x$. Fortegnslinja til $6x$ er kjapt tegnet opp (figur 43), og den avslører at krumningen til f skifter fra konkav til konveks i punktet $x = 0$. Grafen har dermed ett vendepunkt, i punktet $(0, f(0)) = (0, 0)$.



Figur 43: Fortegnslinja til $f''(x) = 6x$.



Figur 44: Grafen til $f(x) = x^3$.

□

Å finne vendetangentene er ikke noe hokus-pokus, så snart du har funnet vendepunktene. Det er bare å bruke ettpunktsformel-varianten vi ga i Teorem 7.5. Vendetangenter har den egenskapen at de «krysser» grafen akkurat i tangeringspunktet. Ingen andre tangenter er slik.

Eksempel 8.8. Finn vendepunktene og vendetangentene til grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2$, som vi jobbet med i Eksempel 8.6.

Løsning. Fra fortegnslinja til f'' på figur 41 ser vi at krumningen til f skifter i punktene $x = 0$ og $x = 3$. Grafen har derfor to vendepunkter, nemlig

$$(0, f(0)) = (0, 2) \qquad \text{og} \qquad (3, f(3)) = (3, -\frac{1}{4}).$$

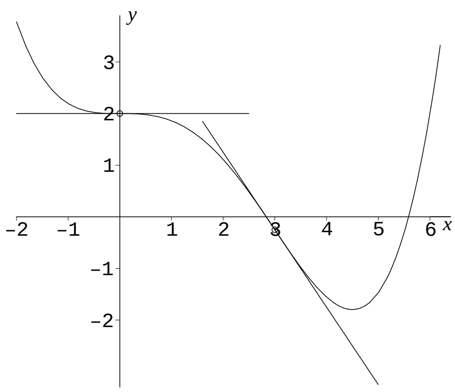
Vi finner vendetangentene ved å bruke Teorem 7.5, samt at $f'(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2$, som vi fant tidligere. I punktet $(0, 2)$ blir likningen for vendetangenten

$$y - 2 = f'(0)(x - 0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2,$$

mens likningen for vendetangenten i $(3, -\frac{1}{4})$ blir

$$y + \frac{1}{4} = f'(3)(x - 3) \quad \Longleftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}(x - 3) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{4}.$$

Figur 45 viser grafen med de to vendetangentene. Legg merke til hvordan vendetangentene krysser grafen akkurat i tangeringspunktet. □



Figur 45: Grafen til $f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2$ med vendetangenter.

8.6 Et større eksempel

Vi avslutter kapittelet med et noe mer omfattende eksempel, der vi får bruk for mye av det vi har gjennomgått i dette og forrige kapittel. Spesielt ser vi hvor lett det blir å tegne grafen til en funksjon etter at vi har jobbet oss gjennom de forskjellige drøftingene.

Eksempel 8.9. La g være funksjonen gitt ved at

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{3\pi}{2}, 0] \\ \frac{1}{2}x^2 + 1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

a) Vis at g er kontinuerlig i bruddpunktet $x = 0$. Regn ut $g'(x)$ og $g''(x)$ og undersøk om disse er kontinuerlige i $x = 0$.

b) Finn alle nullpunktene til g.

c) Bestem de lokale ekstremalpunktene til g. I hvilke intervaller er g voksende og avtagende?

d) Drøft hvor grafen til g er konveks og konkav og finn eventuelle vendepunkter.

e) Tegn grafen til g på bakgrunn av resultatene i a) -d).

Løsning. a) For å vise at g er kontinuerlig i bruddpunktet, regner vi ut de ensidige grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (\tfrac{1}{2}x^2 + 1) = 1.$$

Siden begge disse er lik 1, og i tillegg $g(0) = 1$, er g kontinuerlig i $x = 0$.

Så går vi videre til de deriverte. Vi finner:

$$g'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ x, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in (-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ 1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

For å se hva som skjer i bruddpunktet, går vi fram på samme måte som i a). De ensidige grenseverdiene til $g'(x)$ er

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\sin x) = 0, \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Grenseverdiene er like, altså er $g'(x)$ kontinuerlig. Vi gjentar prosessen med $g''(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} g''(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\cos x) = -1, \qquad \text{mens} \qquad \lim_{x\to 0^+} g''(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

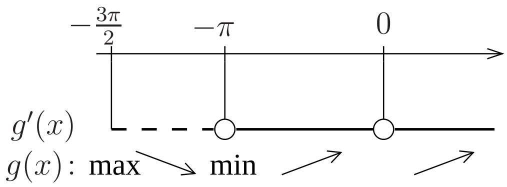
Her fikk vi ikke samme svar. Det betyr at $g''(x)$ ikke er kontinuerlig i bruddpunktet.

b) Når vi skal finne nullpunktene til g, må vi ta hvert av de to funksjonsuttrykkene for seg. Når $x \in [-\frac{3\pi}{2}, 0]$, er $g(x) = \cos x$. I det aktuelle intervallet er dette lik null for $x = -\frac{3\pi}{2}$ og $x = -\frac{\pi}{2}$.

Når $x > 0$, er $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Dette uttrykket er alltid positivt når x er større enn 0, så her får vi ingen flere nullpunkter. Som konklusjon får vi at de eneste nullpunktene til g er

$$x = -\frac{3\pi}{2}, \qquad x = -\frac{\pi}{2}.$$

c) Vi lager fortegnslinja til $g'(x)$ på vanlig måte. Du kan selv sjekke at resultatet blir som på figur 46.



Figur 46: Fortegnslinja til $g'(x)$.

Av fortegnslinja kan vi lese at g har et lokalt maksimum i endepunktet $x = -\frac{3\pi}{2}$. Maksimalverdien her er $g(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) = 0$. Videre har g et lokalt minimumspunkt i $x = -\pi$, med tilhørende minimumsverdi lik $g(-\pi) = \cos(-\pi) = -1$. I tillegg har grafen til g et terrassepunkt i punktet $(0, g(0)) = (0, 1)$.

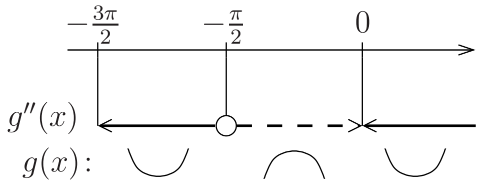
Fortegnslinja til $g'(x)$ gir også at grafen til g er avtagende i intervallet $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ og voksende i intervallet $[-\pi, \infty)$.

d) Her må vi finne fortegnslinja til $g''(x)$. Sjekk selv at den blir seende ut som på figur 47.

Fortegnslinja forteller oss at g er konveks i de to intervallene $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ og $(0, \infty)$, og konkav i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Grafen har dermed to vendepunkter, nemlig $(-\frac{\pi}{2}, g(-\frac{\pi}{2})) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ og $(0, g(0)) = (0, 1)$.

e) La oss oppsummere hva vi har funnet ut om grafen til g:

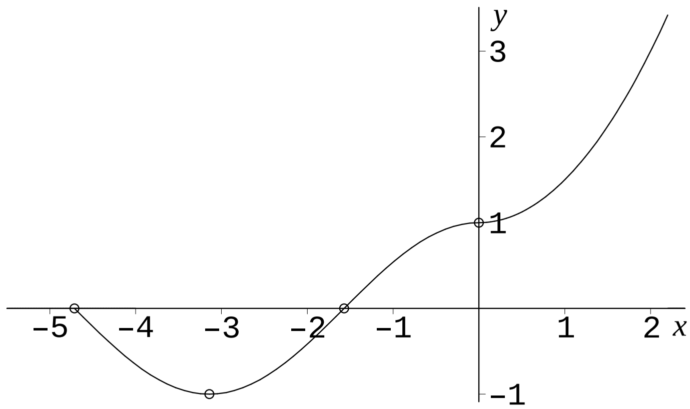
- Vi har nullpunkter i $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ og $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.



Figur 47: Fortegnslinja til $g''(x)$.

- Grafen har et toppunkt i $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ og et bunnpunkt i $(-\pi, 0)$.
- Grafen har vendepunktene $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ og $(0, 1)$. Det siste er også et terassepunkt.
- Grafen er avtagende i $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ og voksende i $[-\pi, \infty)$.
- Grafen er konveks i $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, \infty)$ og konkav i $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Med alle disse opplysningene, trenger vi ikke regne ut noen flere punkter for å tegne grafen til g. Resultatet er vist på figur 48. □



Figur 48: Grafen til $g(x)$ i Eksempel 8.9.

8.7 Oppgaver

Oppgave 8.1. Lag fortegnslinja til $f'(x)$ og finn alle lokale maksimumspunkter og minimumspunkter til f.

a) $f(x) = x^2 - 2$ b) $f(x) = 1 - x - 3x^2$

c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 7$

Oppgave 8.2. Tegn fortegnslinja til funksjonen og les av hvor funksjonen er positiv og negativ.

a) $f(x) = (x+1)(2-3x)(x-10)$ b) $g(y) = \ln(y^2 + \frac{3}{4})$

c) $h(z) = -\frac{\sin z}{(z-1)(z+1)}, \quad z \in [0, 2\pi]$

Oppgave 8.3. Eva er glad i plantene sine, og hun prøver å finne ut hvor mye vann de bør få for å leve lengst mulig. For en spesiell plantetype vet hun av erfaring at den forventede levetiden L, målt i uker, er tilnærmet gitt ved formelen

$$L(v) = 5\ln(2v+2) - 2v + 1,$$

der v er antall desiliter vann planten får daglig. Regn ut $L'(v)$ og avgjør hvor mye vann Eva bør gi planter av denne typen. Hvor mange uker kan hun regne med å beholde en slik plante dersom hun gir akkurat riktig mengde vann hver dag? Gi svaret både eksakt og som desimaltall.

Oppgave 8.4. Simen hopper ut i vannet fra en 16 meter høy klippe. Fra fysikken vet vi at avstanden h ned til vannoverflaten etter t sekunder, er gitt ved formelen

$$h(t) = 16 - 4.9t^2.$$

Anta nå at pulsen til Simen under hoppet er gitt ved at

$$p(L) = 120 - 50e^{-0.3L-0.8} - 0.5L,$$

der $p(L)$ er pulsen i det han har falt L meter nedover. (Når $h = 10$, er for eksempel $L = 6$.)

a) Hvor lang tid tar svevet?

b) Uttrykk p som en funksjon av tiden t. Hva er pulsen etter 1 sekund?

c) Etter hvor mange sekunder oppnår pulsen sin maksimale verdi? Hva er denne verdien?

d) Skisser grafene til $p(L)$ og $p(t)$ i hvert sitt koordinatsystem. Pass på at intervallet du tegner grafen over, passer til denne oppgaven.

Oppgave 8.5. La f være funksjonen gitt ved at $f(x) = ax^2 + bx + c$, der a, b og c er reelle konstanter. Vis at grafen til f ikke kan ha noen vendepunkter.

Oppgave 8.6. La f være funksjonen gitt ved $f(x) = e^{\sin x}$, der $D_f = [0, 2\pi]$.

a) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Bestem alle de lokale ekstremalpunktene til f og bestem deres natur.

c) Vis at dersom grafen til f har et vendepunkt for $x = a$, så er $\cos a = \tan a$. Bruk dette til å avgjøre hvor mange vendepunkter grafen har. (Du trenger ikke finne dem.)

d) Tegn en skisse av grafen til f i et koordinatsystem. Avgjør hvilke av ekstremalpunktene til f som er globale.

Oppgave 8.7. Rasmus forsøkte å lære seg spansk. Han var ivrig i begynnelsen, men etter hvert dabbet interessen av, og han begynte å glemme det han hadde lært. Ordforrådet hans den første måneden etter at han startet, kan beskrives ved modellen

$$g(t) = 100(0.8^{0.25t} - 0.8^t), \quad t \in [0, 30]$$

der $g(t)$ er antall spanske ord han behersket etter t dager.

a) Hvor mange spanske ord behersket Rasmus etter 2 dager?

b) Hvor mange nye ord lærte han seg den tredje dagen?

c) Etter hvor mange dager oppnådde han sitt største ordforråd? Hvor mange spanske ord kunne han da?

d) Vis at grafen til g har et vendepunkt, og finn dette. Tegn til slutt grafen til g.

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 8.8. I denne oppgaven skal vi studere grafen til funksjonen

$$h(x) = -\frac{1}{4}\sin 2x + \cos x,$$

der x er restriktert til intervallet $[0, \pi]$.

a) Tegn grafen til h på kalkulatoren. Hvor mange vendepunkter synes du det ser ut som grafen har?

b) Regn ut $h''(x)$ og bestem vendepunktene til grafen ved regning.

c) Finn likningen til vendetangenten i hvert av vendepunktene.

Oppgave 8.9. En matematikkstudent finner ut at antall hybelkaniner på rommet hans en bestemt måned er gitt ved at

$$H(t) = 11 + \frac{1}{2}t + 15 \sin \frac{1}{3}t, \quad t \in [0, 30]$$

der $H(t)$ er antall hybelkaniner etter t dager.

a) Skisser grafen til H på kalkulatoren.

b) Bestem ved regning det største og minste antall hybelkaniner som forekom i løpet av denne måneden? (Du får love til å bruke enkle kalkulatorfunksjoner.)

c) Anta nå at formelen for $H(t)$ er gyldig også etter at måneden er slutt. Vil antall hybelkaniner på rommet til studenten gå opp eller ned på lang sikt? Begrunn svaret ditt ved å bruke uttrykket for $H(t)$.

9 Integrasjon

Målet med dette kapittelet er å gå gjennom tre av de mest brukte teknikkene for integrasjon: Delvis integrasjon, substitusjon, og integrasjon ved delbrøkoppspalting. Vi bruker ikke så mye tid på de mange (interessante) teoretiske aspektene ved integrasjon her – det får du mer av i MAT1100.

9.1 Ubestemte integraler

Som du kanskje husker fra skolen, er integrasjon på mange måter det motsatte av derivasjon. Men integrasjon er generelt sett mye vanskeligere enn derivasjon. Et kjent sitat av den norske matematikeren Viggo Brun lyder: «Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!»

Definisjon 9.1. Ubestemt integral
La f være en kontinuerlig funksjon. Dersom F er en funksjon slik at $F'(x) = f(x)$, kalles F en *antiderivert* funksjon av f.
Vi definerer det *ubestemte integralet* $\int f(x)\,dx$ til å være en generell antiderivert av f. Dette kan vi skrive som

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

der C er en konstant, og F er en antiderivert funksjon av f. Å finne ubestemte integraler kalles *integrasjon*, eller *antiderivasjon*.

Tallet C i definisjonen over fortjener en kommentar. Fordi den deriverte av en konstant er null, blir $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ uansett hva C er. To antideriverte til f vil aldri skille seg fra hverandre med mer enn en konstant. Derfor sier vi at $F(x) + C$ er en generell antiderivert.

Eksempel 9.1. Finn det ubestemte integralet $\int 3x^2\,dx$.

Løsning. Vi vet at $(x^3)' = 3x^2$. Dette betyr at $F(x) = x^3$ er en antiderivert til $f(x) = 3x^2$. Det ubestemte integralet blir dermed

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

$\square$

Eksempel 9.2. Finn det ubestemte integralet $\int (\sin x + x)\, dx$.

Løsning. Vi antideriverer hvert ledd for seg. Vi ser først (etter å ha tenkt oss litt om) at en antiderivert av $\sin x$ er $-\cos x$. Kontroll: $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$.

For å finne en antiderivert til x, kan vi bruke derivasjonsregelen $(x^2)' = 2x$. Ved å dele på 2 får vi at $(\frac{1}{2}x^2)' = x$, det vil si at en antiderivert av x er $\frac{1}{2}x^2$.

Når vi setter dette sammen, ser vi at en antiderivert til $f(x) = \sin x + x$ er $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}x^2$. Det ubestemte integralet blir derfor

$$\int (\sin x + x)\, dx = -\cos x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

□

Ved å tenke «omvendt derivasjon», som i eksemplene over, kan vi enkelt lage mange fine integrasjonsformler. I Teorem 9.2 har vi listet opp de mest brukte. Hver av disse formlene er funnet ved å «snu» en av derivasjonsreglene i 7.2.

Selv om integrasjonsreglene i Teorem 9.2 kommer gratis dersom du kan de tilsvarende derivasjonsreglene, vil du spare mye tid på å kunne dem utenat. Merk at reglene 1, 2 og 3 alle er spesialtilfeller av regel 4.

Eksempel 9.3. Finn integralet $\int \frac{4}{x^3} - 2 \cdot 3^x\, dx$.

Løsning. Ved å bruke Teorem 9.2 får vi at

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^3} - 2 \cdot 3^x\, dx &= 4\int x^{-3}\, dx - 2\int 3^x\, dx \\ &= 4\frac{1}{-3+1}x^{-3+1} - 2\frac{1}{\ln 3}3^x + C = -2x^{-2} - \frac{2}{\ln 3}3^x + C.\end{aligned}$$

□

Nært knyttet til ubestemte integraler er (ikke overraskende) *bestemte* integraler:

Definisjon 9.3. Bestemt integral

La f være en kontinuerlig funksjon. Det *bestemte integralet* $\int_a^b f(x)\, dx$, der $[a, b] \subseteq D_f$, er gitt ved at

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

der F er en antiderivert av f.

Teorem 9.2. Integrasjonsregler

Spesielle regler

La a være en konstant. Da gjelder:

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C$

2. $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

3. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

4. $\displaystyle\int x^a\,dx = \tfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

6. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

7. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, \quad (a > 0)$

8. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

Generelle regler

La f og g være kontinuerlige funksjoner, og a en konstant. Da gjelder:

11. $\displaystyle\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

12. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

13. $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Som du ser av definisjonen, må vi finne en antiderivert før vi kan regne ut det bestemte integralet. I dette heftet vil vi fokusere på teknikker for å antiderivere, og ikke bry oss så mye med bestemte integraler.

Vi kan likevel ikke la være å nevne en av de viktigste tolkningene av bestemte integraler, nemlig arealberegning:

Teorem 9.4. Arealberegning ved bestemt integrasjon
La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon, og anta at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$. Verdien av det bestemte integralet $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ er da lik arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen, og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$.

9.2 Delvis integrasjon

I en del tilfeller klarer vi ikke å løse integralet bare ved hjelp av reglene i Teorem 9.2. Da må vi ty til mer avanserte metoder. Mange av disse metodene har sitt utspring i kjente derivasjonsformler. I denne seksjonen skal vi se på en integrasjonsteknikk som kommer fra produktregelen for derivasjon.

Vi husker at produktregelen sier følgende: Dersom $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare funksjoner, så er

$$\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Nå integrerer vi begge sider av denne likningen. Da får vi (ved å bruke regel 12 fra Teorem 9.2) at

$$\int \big[u(x)v(x)\big]'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Det som står på venstresiden her, er intet annen enn $u(x)v(x)$, fordi integrasjon og derivasjon opphever hverandre. Dermed har vi fått

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Etter en liten omstokking, har vi nå vist formelen for delvis integrasjon:

Teorem 9.5. Delvis integrasjon
Anta at u og v er deriverbare funksjoner slik at de deriverte u' og v' er kontinuerlige. Da gjelder formelen

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx. \tag{23}$$

Det viser seg (selv om man kanskje ikke skulle tro det) at formelen (23) forenkler mange vanskelige integraler. Men ikke alle! Det finnes dessverre ingen regel som forteller akkurat når det lønner seg å bruke delvis integrasjon. Og for å gjøre ting enda verre: I de tilfellene der delvis integrasjon fungerer, er det ikke alltid opplagt hvilken faktor som bør være $u(x)$ og hvilken som bør være $v'(x)$.

Det er imidlertid ingen grunn til å deppe for mye over dette. Med litt erfaring vil du etter hvert kjenne igjen integral-typer der delvis integrasjon kan fungere. De aller vanligste av disse typene er disse:

Integraler som kan løses ved delvis integrasjon
Når integranden er et produkt – der den ene faktoren blir *enklere* ved derivasjon, samtidig som den andre *ikke blir (mye) mer komplisert* ved integrasjon – prøver vi delvis integrasjon.

Noen typiske eksempler ($P(x)$ står for et polynom):

- $\int P(x) \cdot \sin x \, dx$. Sett $u = P(x)$ og $v' = \sin x$.
- $\int P(x) \cdot \cos x \, dx$. Sett $u = P(x)$ og $v' = \cos x$.
- $\int P(x) \cdot e^x \, dx$. Sett $u = P(x)$ og $v' = e^x$.
- $\int P(x) \cdot \ln x \, dx$. Sett $u = \ln x$ og $v' = P(x)$.

I de tre første eksemplene, blir $P(x)$ forenklet ved derivasjon, mens den andre faktoren – hhv. $\sin x$, $\cos x$ og e^x – ikke blir mer komplisert ved integrasjon. I det siste eksemplet kvitter vi oss med $\ln x$ ved å derivere denne. $P(x)$ blir riktignok noe mer komplisert ved derivasjon, men det går likevel fint (se Eksempel 9.5).

Eksempel 9.4. Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int x \cos x \, dx$.

Løsning. Vi setter $u = x$ og $v' = \cos x$. Dette gir $u' = 1$ og $v = \sin x$. Integralet blir dermed:

$$\int \overset{u \cdot v'}{x \cdot \cos x} \, dx = \overset{u \cdot v}{x \cdot \sin x} - \int \overset{u' \cdot v}{1 \cdot \sin x} \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$\square$

Eksempel 9.5. Finn en antiderivert til funksjonen $h(x) = (x^2 - 2x) \ln x$.

Løsning. Vi beregner det ubestemte integralet $\displaystyle\int h(x) \, dx$ ved delvis integrasjon. Her lønner det seg å bytte rekkefølge på faktorene og sette $u = \ln x$ og $v' = x^2 - 2x$. Vi får da:

$$\begin{aligned}\int \overset{u}{\ln x} \cdot \overset{v'}{(x^2 - 2x)}\, dx &= \overset{u}{\ln x} \cdot \overset{v}{(\tfrac{1}{3}x^3 - x^2)} - \int \overset{u'}{\frac{1}{x}} \cdot \overset{v}{(\tfrac{1}{3}x^3 - x^2)}\, dx \\ &= \ln x \cdot (\tfrac{1}{3}x^3 - x^2) - \int (\tfrac{1}{3}x^2 - x)\, dx \\ &= \ln x \cdot (\tfrac{1}{3}x^3 - x^2) - \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + C.\end{aligned}$$

Funksjonen $H(x) = \ln x \cdot (\frac{1}{3}x^3 - x^2) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ er derfor en antiderivert til $h(x)$. □

Noen ganger må vi bruke delvis integrasjon flere ganger for å regne ut et integral:

Eksempel 9.6. Beregn $\displaystyle\int \frac{1}{2}x^2 e^x\, dx$.

Løsning. Vi setter $u = \frac{1}{2}x^2$ og $v' = e^x$. Da er $u' = x$, og $v = e^x$. Dermed får vi at

$$\int \frac{1}{2}x^2 e^x\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int xe^x\, dx. \tag{24}$$

For å løse det siste integralet, bruker vi delvis integrasjon igjen. Denne gangen setter vi $u = x$, og $v' = e^x$. Da blir $u' = 1$, og $v = e^x$, slik at

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int 1e^x\, dx = xe^x - e^x + C. \tag{25}$$

Setter vi dette inn i (24), får vi endelig svaret:

$$\int \frac{1}{2}x^2 e^x\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - xe^x + e^x + C.$$

□

9.3 Integrasjon ved substitusjon

Som vi så i forrige seksjon ga produktregelen for derivasjon opphav til en nyttig integrasjonsteknikk, nemlig delvis integrasjon. En annen derivasjonsregel vi kan utnytte tilsvarende er kjerneregelen. Integrasjonsteknikken vi får ut av dette, kalles integrasjon ved *variabelskifte*, eller *substitusjon*.

Teorem 9.6. Substitusjon
Dersom f er kontinuerlig, og u deriverbar, så er

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du, \tag{26}$$

der vi må sette inn $u = u(x)$ i høyresiden etter å ha regnet ut integralet.

Bevis (for spesielt interesserte). Vi deriverer begge sider i (26). Dersom vi får samme svar, er de to ubestemte integralene like.

Den deriverte av venstresiden er lett – den blir $f(u(x)) \cdot u'(x)$.

På høyresiden må vi være mer forsiktige, siden vi skal derivere med hensyn på x, mens integrasjonsvariabelen er u. La F være en antiderivert til f. Da er

$$\int f(u)\, du = F(u) + C.$$

Når vi setter inn $u = u(x)$, blir høyresiden i (26) altså lik $F(u(x)) + C$. Dette deriverer vi nå med hensyn på x ved å bruke kjerneregelen. Da får vi

$$\big[F(u(x)) + C\big]' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Vi fikk samme svar, og teoremet er dermed bevist. □

La oss se hvordan vi bruker dette i praksis.

Eksempel 9.7. Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int \cos(x^2 - 1) \cdot 2x\, dx$.

Bevis. Her ser vi at cosinusfunksjonen i integranden har en kjerne, nemlig $x^2 - 1$. Det er et tegn på at vi bør prøve substitusjon, med $u(x) = x^2 - 1$. Da blir $u'(x) = 2x$, og vi får følgende utregning:

$$\int \cos(x^2 - 1) \cdot 2x\, dx = \int \cos(u(x)) \cdot u'(x)\, dx \overset{(*)}{=} \int \cos u\, du = \sin u + C.$$

I overgangen merket $(*)$ brukte vi Teorem 9.6. Til slutt må vi huske å sette inn $u = u(x) = x^2 - 1$ i svaret. Resultatet av integrasjonen blir da at

$$\int \cos(x^2 - 1) \cdot 2x\, dx = \sin(x^2 - 1) + C.$$

□

Selv om eksemplet over viste en korrekt bruk av substitusjon, blir det fort tungvint å tenke «omvendt kjerneregel» på denne måten. I stedet bruker vi som regel en annen føringsmetode for substitusjon, som er lettere å holde styr på.

I den alternative føringen bruker vi notasjonen $\frac{du}{dx}$ om den deriverte:

$$u'(x) = \frac{du}{dx}$$

Ganger vi opp med dx her, får vi at

$$u'(x)dx = du.$$

Hvis du ser nøye etter i (26) i Teorem 9.6, ser du at det er akkurat denne utskiftingen som har skjedd: Vi bytter ut $u'(x)dx$ med du, og skriver u i stedet for $u(x)$.[1]

Basert på dette, fører vi utregningen av integralet i Eksempel 9.7 slik:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u & = & x^2 - 1 \\ \dfrac{du}{dx} & = & 2x \\ du & = & 2x\,dx \end{array}} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ Sett } x^2 - 1 \text{ til å være kjernen.} \\ \leftarrow \text{ Deriver m.h.p. } x. \\ \leftarrow \text{ Gang opp med } dx. \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\int \cos(x^2 - 1) \cdot 2x\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(x^2 - 1) + C.$$

Som vi så eksempel på her, kan substitusjonsmetoden forvandle et komplisert integral til et som er mye lettere ved et enkelt håndgrep. Av den grunn gir substitusjon ofte svært pene og tilfredsstillende utregninger!

Vi tar et par eksempler til.

Eksempel 9.8. Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\,dx.$

Bevis. Her er det kanskje ikke umiddelbart opplagt hva vi bør velge som kjerne. Legg merke til at integranden $\frac{1}{x \ln x}$ kan skrives som $\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$. Hvis vi nå husker at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ser vi at substitusjonen $u = \ln x$ virker lovende. Vi får:

[1] Denne sjongleringen med dx og du krever beviser vi ikke har ambisjoner om å gå inn i her. Størrelsene dx og du kalles *differensialer*, derav ordet *differensialregning*.

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln x \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \overset{\downarrow}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

□

Eksempel 9.9. Finn det ubestemte integralet $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Bevis. Her virker det tilsynelatende rart å prøve med substitusjon. Den eneste fornuftige kjernen å snakke om, er $u = \sqrt{x}$, men den deriverte $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ er jo slett ikke noen faktor i integranden.

Vi kan imidlertid gjøre et lite triks. Hvis $u = \sqrt{x}$, kan vi nemlig sette

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u},$$

og dette vil vise seg å gi fruktbare resultater. Selve substitusjonen blir slik:

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{x} &= u \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{du}{dx} \\ dx &= 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du \end{aligned}}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \overset{\downarrow}{=} \int e^{u}\cdot 2u\,du.$$

Ved første øyekast ser det kanskje ikke ut som at dette gjorde saken noe særlig enklere. Men integralet til høyre er perfekt mat for delvis integrasjon! Faktisk fant vi nesten akkurat dette integralet underveis i Eksempel 9.6 i forrige seksjon. Fra utregning (25) slutter vi at

$$\int 2ue^{u}\,du = 2ue^{u} - 2e^{u} + C.$$

Til slutt setter vi inn $u = \sqrt{x}$ og får det endelige svaret:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$\square$

Du stusser kanskje over at vi skriver «vi *prøver* substitusjonen ...» og lignende formuleringer. Dette er et bevisst ordvalg, for å understreke at det ikke finnes noen faste oppskrifter på hvordan man regner ut et gitt integral. Mange ubestemte integraler lar seg ikke regne ut i det hele tatt!

Moralen blir som følger: Dersom vi synes at et integral «lukter» substitusjon, prøver vi med den mest naturlige kjernen, og regner i vei. Kjører vi oss fast, må vi gå tilbake til start og prøve noe nytt. Det samme gjelder for delvis integrasjon.

9.4 Integrasjon av rasjonale uttrykk

Den siste teknikken vi skal se på er integrasjon av rasjonale uttrykk (se Definisjon 4.5). Her har vi allerede gjort alt forarbeidet i kapittel 4, så integrasjonen blir ganske enkel.

Integrasjon av rasjonale uttrykk

La $I = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, og $Q(x) \neq 0$.[1]

- Dersom graden til $P(x)$ er mindre enn graden til $Q(x)$, regner vi ut I ved først å finne delbrøkoppspaltingen til integranden og deretter integrere leddene hver for seg.
- Dersom graden til $P(x)$ er større eller lik graden til $Q(x)$, må vi først utføre polynomdivisjonen $P(x) : Q(x)$. Hvis det blir noe restledd, finner vi delbrøkoppspaltingen til dette. Til slutt kan vi regne ut I ved å integrere leddvis.

Det eneste vi trenger å kunne i tillegg til teorien i kapittel 4, er følgende enkle integrasjonsregler:

[1]Med den teorien vi har gått gjennom til nå, klarer vi å finne I på måten beskrevet her bare dersom nevneren $Q(x)$ lar seg faktorisere fullstendig i lineære faktorer. Hva som skjer når dette ikke går, for eksempel hvis $Q(x) = x^2 + 1$, lærer du i MAT1100.

Teorem 9.7. *For alle $a \in \mathbb{R}$ og alle naturlige tall $r \geq 2$ gjelder:*

$$a)\ \int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C \qquad b)\ \int \frac{1}{(x-a)^r}\,dx = \frac{-1}{(r-1)(x-a)^{r-1}} + C$$

Bevis. Begge formlene følger umiddelbart ved å substituere $u = x - a$ og bruke Teorem 9.2. □

La oss se på et par eksempler.

Eksempel 9.10. Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)x}\,dx$.

Løsning. Vi utfører delbrøkoppspaltingen som i kapittel 4, og finner at

$$\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

Teorem 9.7a) gir dermed:

$$\int \frac{1}{(x-1)x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\,dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln|\frac{x-1}{x}| + C.$$

□

Eksempel 9.11. Regn ut $\displaystyle\int \frac{7x-3}{(x-3)^2(x+5)}\,dx$.

Løsning. I følge teorien for delbrøkoppspalting finnes det konstanter A, B og C slik at

$$\frac{7x-3}{(x-3)^2(x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+5}.$$

Som forklart i kapittel 4 gir dette opphav til et likningssystem der A, B og C er de ukjente. Løser vi dette på vanlig måte, finner vi at $A = \frac{1}{2}$, $B = 3$ og $C = -\frac{1}{2}$. Kombinert med Teorem 9.7 får vi fra dette at

$$\begin{aligned}\int \frac{7x-3}{(x-3)^2(x+5)}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} - \frac{1}{2}\ln|x+5| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|\frac{x-3}{x+5}| - \frac{3}{x-3} + C.\end{aligned}$$

□

Til slutt gjør vi et eksempel der graden i telleren er større enn graden i nevneren. Da må vi bruke polynomdivisjon for å gjøre graden i telleren mindre enn graden i nevneren. Etter at vi har gjort dette, er resten av regningen som før.

Eksempel 9.12. Finn integralet $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}\,dx.$

Løsning. Her har telleren grad 3, mens nevneren har grad 2. Da er det bare å sette igang med polynomdivisjon. Vi finner:

$$\begin{array}{rl} x^3 - 2x^2 + 0x - 1 & : \; x^2 - 1 = x - 2 \\ -\, \underline{(x^3 \qquad\quad - \; x)} & \\ -2x^2 \; + \; x - 1 & \\ -\, \underline{(-2x^2 \qquad + 2)} & \\ x - 3 & \end{array}$$

Resultatet av divisjonen ble altså $x - 2$, med en rest på $x - 3$. Dette betyr at

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} = x - 2 + \frac{x - 3}{x^2 - 1},$$

slik at

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}\,dx = \int \left(x - 2 + \frac{x - 3}{x^2 - 1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{x - 3}{x^2 - 1}\,dx. \tag{27}$$

Det siste integralet løser vi ved delbrøkoppspalting som i de to foregående eksemplene. Ved konjugatsetningen er $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, og vi finner på vanlig måte oppspaltingen $\dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}$. Dermed er

$$\int \frac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}\,dx = 2\ln|x + 1| - \ln|x - 1| + C = \ln\left|\frac{(x + 1)^2}{x - 1}\right| + C.$$

Til slutt setter vi dette inn i (27) og får det totale resultatet:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln\left|\frac{(x + 1)^2}{x - 1}\right| + C.$$

□

9.5 Oppgaver

Oppgave 9.1. Finn de ubestemte integralene ved å bruke formlene i Teorem 9.2.

a) $\displaystyle\int x^4\,dx$ b) $\displaystyle\int (1-6x^2+6x^3)\,dx$ c) $\displaystyle\int \big(\frac{3}{x}+2\sin x\big)\,dx$

d) $\displaystyle\int \big(e^x-\frac{1}{3\cos^2 x}\big)\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^3}\,dx$ f) $\displaystyle\int 2^{x+3}\,dx$

Oppgave 9.2. Matematikklærer Christian retter en prøve der en av oppgavene var å regne ut det ubestemte integralet $\int \frac{1}{x}dx$. Elevene i klassen er flinke, men en smule originale, og han stusser litt over noen av løsningene han har fått inn:

$$\text{i) } \ln|2x|+C \qquad \text{ii) } -\ln\left|\frac{3}{x}\right|+C \qquad \text{iii) } -\frac{1}{4}\ln\frac{2}{x^4}+C$$

a) Vis ved å derivere at alle tre svarene er korrekte.

b) Hvordan kan dette være riktig? Teorem 9.2 sier jo at $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$.

Oppgave 9.3. Løs integralene ved å bruke delvis integrasjon.

a) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$ c) $\displaystyle\int (3x-2)\cos x\,dx$

d) $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\ln x\,dx$

Oppgave 9.4. Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int (2x^2-x+3)\cos x\,dx$ ved å bruke delvis integrasjon to ganger. Sjekk at du har regnet riktig ved å derivere svaret.

Oppgave 9.5. Vis at $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$. (Hint: Skriv integralet som $\displaystyle\int \ln x\cdot 1\,dx$ og bruk delvis integrasjon.)

Oppgave 9.6. Løs integralene ved substitusjon.

a) $\displaystyle\int \cos 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(3-x)}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x})\,dx$

Oppgave 9.7. La $F(x)$ være en antiderivert til funksjonen $f(x)$. Vis at hvis a og b er reelle tall, og $a \neq 0$, så er

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

(Hint: Substituer $u = ax + b$.)

Oppgave 9.8. Bruk resultatet i Oppgave 9.7 til å løse følgende integraler:

a) $\displaystyle\int 2e^{11x+100}\,dx$ b) $\displaystyle\int \left(\cos(1+\frac{x}{2}) + \sin(1-\frac{x}{2})\right) dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+x}{3}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{2}{2x-1} - \frac{6}{3x+1}\,dx$

Oppgave 9.9. Bruk svarene du fikk i Oppgave 4.9 til å finne integralene under.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{6x}{(x-2)(x+4)}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{3-x}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Oppgave 9.10. Bruk resultatet av Oppgave 4.10 til å finne integralet

$$\int \frac{4x^2-9x+6}{x^3-3x^2-4x+12}\,dx.$$

Oppgave 9.11. Bruk svarene du fikk i Oppgave 4.11 til å finne integralene under.

a) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2(2-x)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Ekstraoppgaver hvis du har tid:

Oppgave 9.12.

a) Vis at $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. (Hint: Bruk formelen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.)

b) Bruk a) til å finne $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$. Sjekk at du har fått riktig svar ved å derivere.

Oppgave 9.13. La $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Regn ut $f(-1)$ og faktoriser $f(x)$ i lineære faktorer.

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{4}{3x^3-3x^2-3x+3}\,dx.$$

10 Differensiallikninger

Gjennom hele skolegangen støter man på begrepet «likninger». Disse kommer i mange ulike varianter: Likninger av første og annen grad, eksponential- og logaritmelikninger, uoppstilte likninger, likningssett med flere ukjente, og så videre. Alle disse har imidlertid én ting til felles, nemlig at målet er å finne verdien til et eller flere ukjente *tall*.

Likningene vi nå skal se på, bryter totalt med dette mønsteret. Nå er det ikke lenger et ukjent tall x vi ønsker å finne, men derimot en *funksjon* $y(x)$. Vi definerer det nye begrepet:

Definisjon 10.1. Differensiallikning En *differensiallikning* er en likning der følgende er oppfylt:

- Den ukjente er en funksjon.
- Likningen involverer en eller flere av den ukjentes deriverte.

Erfarne løsere av differensiallikninger har lov til å bruke kortformen 'difflikning'.

Difflikningene vi skal jobbe med i dette heftet vil bare inneholde den *første*deriverte y' av den ukjente funksjonen. Slike likninger er av *første orden*. Høyere ordens difflikninger er tema i flere kurs ved UiO, for eksempel MAT-INF1100.

Den enkleste typen difflikninger ser slik ut:

$$y' = f(x)$$

Denne løses enkelt og greit ved å antiderivere (integrere ubestemt). Hvis $F(x)$ er en antiderivert av $f(x)$, får vi som generell løsning:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Når konstanten C varierer, gir dette en hel familie av løsningsfunksjoner. Noen ganger får vi en tilleggsopplysning (ofte kalt *initialbetingelse* eller *initialverdi*) om funksjonen y, som gjør oss i stand til å plukke ut en partikulær løsning.

Eksempel 10.1. Løs initialverdiproblemet

$$y' = 1 + \frac{1}{x}, \qquad \text{med} \quad y(e) = 1.$$

Løsning. Vi finner først den generelle løsningen ved å integrere ubestemt:

$$y = y(x) = \int (1 + \frac{1}{x})\,dx = x + \ln|x| + C.$$

Deretter bruker vi betingelsen $y(e) = 1$ for å finne riktig verdi av C:

$$\begin{aligned} y(e) &= 1 \\ e + \ln|e| + C &= 1 \\ C &= 1 - e - \ln e = -e \end{aligned}$$

Den partikulære løsningen er derfor $y = x + \ln|x| - e$. □

Difflikninger dukker opp i utallige naturvitenskapelige sammenhenger. Her er et typisk eksempel:

Eksempel 10.2 (Newtons avkjølingslov)**.** I fysikken lærer vi at under bestemte ideelle forhold har vi at

> *endringen i temperaturen til en gjenstand er proporsjonal med differansen mellom gjenstandens temperatur og omgivelsenes temperatur.*

Vi ønsker å lage en difflikning som beskriver denne loven. Setningen over er en smule tungt fordøyelig, så vi tar det punkt for punkt. La $T(t)$ være gjenstandens temperatur som funksjon av tiden t, og la A være temperaturen i omgivelsene. Da er

$$\begin{aligned} \text{endringen i temperaturen til gjenstanden} &= T'(t) \\ \text{differansen mellom gjenstandens og omgivelsenes temp.} &= T(t) - A \end{aligned}$$

At disse størrelsene er proporsjonale, betyr at det finnes en konstant r slik at

$$T'(t) = r(T(t) - A). \tag{28}$$

Dermed har vi funnet en første ordens difflikning som beskriver Newtons avkjølingslov. Her er $T(t)$ den ukjente funksjonen, mens r og A bare er konstanter. Vi skal løse likningen i Eksempel 10.4.

10.1 Separable difflikninger

Difflikninger på formen

$$p(y)y' = q(x), \tag{29}$$

der vi kan separere variablene til hver sin side av likhetstegnet, kalles *separable*. Disse løses ved å integrere begge sider med hensyn på x:

$$\int p(y)y'\,dx = \int q(x)\,dx \tag{30}$$

Poenget nå er å endre integrasjonsvariabelen på venstre side fra x til y, ved å utføre en enkel substitusjon. Husk at y hele tiden er en funksjon av x, så vi kan skrive (jf. føringen av substitusjon i forrige kapittel)

$$\begin{aligned} y &= y(x) \\ \frac{dy}{dx} &= y'(x) \\ dy &= y'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dette betyr at $y'\,dx$ i (30) kan byttes ut med dy, og vi står igjen med

$$\int p(y)\,dy = \int q(x)\,dx. \tag{31}$$

Resten av regningen består av å finne de to ubestemte integralene, og til slutt løse med hensyn på y. Vi skal vise dette i et eksempel, men først en viktig formaning: Ikke glem konstanten C i integrasjonen! Egentlig får vi én konstant for hvert integral, men det er vanlig å slå dem sammen til én, som i eksemplet under. Pass på at du skjønner dette.

Eksempel 10.3. Finn den partikulære løsningen av difflikningen

$$y \cdot y' = \sin x,$$

som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Løsning. Her gjenkjenner vi lett at likningen er separabel: Den er allerede på formen (29). Som beskrevet over integrerer vi derfor begge sider, og bruker at $y'dx = dy$. Da får vi:

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= \int \sin x\,dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\cos x + C \\ y^2 &= 2(-\cos x + C) = C_1 - 2\cos x \qquad \text{(der } C_1 = 2C) \\ y &= \pm\sqrt{C_1 - 2\cos x} \end{aligned}$$

Dette er den generelle løsningen. Det gjenstår å avgjøre om vi skal ha pluss eller minus foran rottegnet, og verdien av konstanten C_1. Initialbetingelsen sier at $y = -1$ når $x = \frac{\pi}{2}$. Siden $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ gir dette at

$$\begin{aligned} -1 &= \pm\sqrt{C_1 - 2\cos(\tfrac{\pi}{2})} \\ -1 &= \pm\sqrt{C_1}. \end{aligned}$$

Vi ser at vi er nødt til å velge minustegnet, og sette $C_1 = 1$. Den søkte funksjonen er dermed

$$y = -\sqrt{1 - 2\cos x}.$$

□

10.2 Første ordens lineære difflikninger

Første ordens lineære difflikninger er på formen

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Ordet 'lineær' henspiller her kun på y-variabelen, og betyr at det ikke forekommer y^2-ledd eller $\sin(y)$ og slike ting. Derimot er det ingen begrensning på funksjonene $f(x)$ og $g(x)$, de kan være hva som helst.

En typisk førsteordens lineær difflikning er denne:

$$y' + (2x + 1)y = e^{-x^2}$$

Vi ser raskt at likningen ikke er separabel, vi klarer ikke skrive likningen på formen (29). Men vi kan angripe likningen ved å utføre et triks: Vi ganger på begge sider av likningen med e^{x^2+x}.

Dette virker kanskje som en merkelig ting å gjøre, men ikke tenk på det foreløpig – alt skal bli tindrende klart om litt! La oss bare se hva som skjer med likningen, som etter multiplikasjonen ser slik ut:

$$y'e^{x^2+x} + (2x + 1)ye^{x^2+x} = e^{-x^2}e^{x^2+x} \tag{32}$$

Dersom vi stirrer lenge nok på venstresiden, ser vi mirakelet: Det som står der, er den deriverte av én enkelt funksjon, nemlig $y \cdot e^{x^2+x}$. Kontroller selv at den deriverte av denne (bruk produktregelen og kjerneregelen) er nøyaktig lik venstresiden i (32). Høyresiden kan også forenkles litt, så alt i alt har vi at

$$\left[ye^{x^2+x}\right]' = e^x.$$

Vi integrerer begge sider (uten å glemme konstanten C!) og får

$$ye^{x^2+x} = e^x + C.$$

Til slutt er det nå en smal sak å løse med hensyn på y. Vi deler på e^{x^2+x} og finner at den generelle løsningen er

$$y = \frac{e^x + C}{e^{x^2+x}} = \frac{1}{e^{x^2}} + \frac{C}{e^{x^2+x}}.$$

Se tilbake på løsningen over. Den mystiske faktoren e^{x^2+x} gjorde at likningen kunne løses ved integrasjon. Finnes det alltid en slik *integrerende faktor*? Og i så fall – hvordan finner vi den?

Svaret er at for første ordens lineære difflikninger finnes det alltid en integrerende faktor, som i prinsippet er lett å finne. Vi skriver resultatet i en egen boks:

Integrerende faktor
Difflikningen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

løses ved å gange på begge sider av likningen med den *integrerende faktoren*

$$e^{F(x)},$$

der $F(x)$ er en vilkårlig antiderivert til $f(x)$. Likningen får da formen

$$\left[ye^{F(x)}\right]' = g(x)e^{F(x)},$$

som løses ved å integrere begge sider.

Merk. Som vi har nevnt tidligere, fins det mange funksjoner som er slik at deres antideriverte ikke kan beskrives med vanlige formeluttrykk. Hvis $f(x)$ er en slik funksjon, vil heller ikke løsningsfunksjonen y være gitt ved noen pen formel. Som regel kan vi likevel finne ut mye om funksjonen, for eksempel ved rekkeutvikling eller ved hjelp av en datamaskin.

Vi viser metoden i et eksempel til, der vi løser difflikningen som beskriver Newtons avkjølingslov.

Eksempel 10.4. En kopp kaffe har ved tiden $t = 0$ temperaturen 95°. Koppen står i et rom med temperatur 20°, og etter 1 minutt er kaffen avkjølt til 80°. Hvis prosessen følger Newton avkjølingslov, hva er kaffetemperaturen etter 10 minutter?

Løsning. La oss skrive difflikningen (28), med $A = 20$, slik:

$$T' - rT = -20r$$

I følge oppskriften i boksen over, kan likningen løses ved å gange med den integrerende faktoren $e^{\int -r\,dt} = e^{-rt}$. (Merk at den frie variabelen i dette eksempelet er t i stedet for x.) Likningen transformeres med dette til

$$\left[Te^{-rt}\right]' = -20re^{-rt},$$

som vi integrerer enkelt og greit (husk at r bare er en konstant):

$$Te^{-rt} = \int -20re^{-rt}\,dt = -20r\frac{1}{-r}e^{-rt} + C = 20e^{-rt} + C.$$

Vi løser for T ved å gange med e^{rt}, og ser at den generelle løsningen er

$$T(t) = 20 + Ce^{rt}.$$

For å bestemme C og r bruker vi opplysningene vi har fått. For det første gir $T(0) = 95$ at

$$95 = 20 + Ce^{r\cdot 0},$$

med andre ord $C = 75$. Dernest medfører $T(1) = 80$ at

$$80 = 20 + 75e^{r\cdot 1},$$

som forenkles til at $e^r = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$, altså $r = \ln(\frac{4}{5})$. Den partikulære løsningen som beskriver avkjølingen i vårt tilfelle, er dermed

$$T(t) = 20 + 75e^{\ln(\frac{4}{5})t}.$$

Et par trykk på kalkulatoren gir til slutt svaret: $T(10) = 20 + 75e^{\ln(\frac{4}{5})10} \approx 28°$. $\square$

Legg merke til at difflikningen i dette eksempelet også er separabel:

$$T' = rT - 20r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{rT - 20r}T' = 1$$

Vi kunne derfor løst likningen med metoden fra forrige seksjon, med omtrent samme arbeidsmengde som i eksempelet over. Generelt vil difflikningen $y' + f(x)y = g(x)$ alltid være separabel dersom både $f(x)$ og $g(x)$ er konstante funksjoner.

10.3 Oppgaver

Oppgave 10.1. Forklar i hvert tilfelle hvorfor difflikningen er separabel, og finn den generelle løsningen.

a) $y' = y^2$ b) $y' = e^{x-y}$ c) $(\cos^2 x)y' - \dfrac{1}{y} = 0$

Oppgave 10.2. Løs difflikningene med de oppgitte initialbetingelsene:

a) $y' + 8y = 0, \quad y(0) = 8$ b) $y' = -5y, \quad y(1) = e$

c) $y' = \dfrac{y}{2}, \quad y(2) = 2$

Oppgave 10.3. Finn den generelle løsningen av difflikningen.

a) $y' = x + y$ b) $y' + y = e^x$

c) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^3}$ d) $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$

Oppgave 10.4. La $h(x)$ være en funksjon med antiderivert $H(x)$. Bruk dette til å skrive opp den generelle løsningen i hver av difflikningene under. Hint: Stirr lenge nok på venstresidene!

a) $xy' + y = h(x)$ b) $(\sin x)y' + (\cos x)y = h(x)$

Oppgave 10.5. Finn den generelle løsningen av difflikningen

$$y' = 2y + 3$$

på to forskjellige måter. Løs først som separabel difflikning, og deretter ved å gange med en integrerende faktor. Kontroller at svarene blir like.

Oppgave 10.6. Pizzaen du har laget deg har temperatur 225° i det du tar den ut av ovnen. Etter 2 minutter er det varmeste fyllet nede i 150°, men du tør ikke starte å spise før dette tallet har blitt 75°. Hvis temperaturen i rommet er 25°, og pizzaen følger Newtons avkjølingslov, når kan du begynne å spise?

Oppgave 10.7. Løs difflikningen med initialbetingelse, og skriv svaret så enkelt som mulig:

$$y' = (xy)^3, \qquad y(1) = -1$$

Utfordring hvis du har tid:

Oppgave 10.8. Et rykte spres i en populasjon med N mennesker. En enkel modell for spredningen er gitt ved følgende antakelse:

> *Økningen i antallet som har hørt ryktet, er proporsjonal med antall mulige møter mellom de som har hørt og de som ikke har hørt ryktet.*

La $y(t)$ angi antall personer som har hørt ryktet ved tiden t. Vi antar at ryktespredningen startes av én person ved $t = 0$.

a) Forklar at modellen kan beskrives med difflikningen

$$y' = ky(N - y), \qquad y(0) = 1.$$

Hva slags likning er dette?

b) Løs likningen. (Hint: Bruk delbrøkoppspalting.)

c) En vakker høstdag er det 10 000 personer på Blindern. Plutselig begynner det å ryktes at det er funnet et nytt primtall! Ryktet sprer seg som ild i tørt gress, og etter 10 minutter har 50 personer hørt nyheten. Hvis vi antar at spredningen følger modellen over, hvor mange har hørt ryktet etter 20 minutter? Hvor lang tid tar det før 5000 har hørt det?

d) Tegn grafen til $y(t)$ for spredningen av primtallsryktet.

Fasit

Oppgave 1.1: a) $-2 \in \mathbb{Z}$ b) $\pi \notin \mathbb{N}$ c) $y \in \mathbb{R}$ d) $z \in [1,5)$
e) $x \in \{0,1,2\}$

Oppgave 1.2: a) Usann b) Sann c) Usann d) Sann
e) Sann f) Sann

Oppgave 1.3: a) Mengden av alle partall. b) Mengden av alle positive oddetall. c) Mengden av alle naturlige tall som er en mer enn et kvadrattall.

Oppgave 1.4: a) $A \cup B = \{0,1,2,4,5,6\}$, $A \cap B = \emptyset$
b) $A \cup B = [1,3]$, $A \cap B = \{1\}$ c) $A \cup B = \{-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$,
$A \cap B = \{1,2\}$ d) $A \cup B = [0,5]$, $A \cap B = (2,3)$

Oppgave 1.5: a) A b) A c) A d) $\emptyset$

Oppgave 1.6: a) $\{4,8,12,\dots\}$ eller $\{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$ b) $[2,\pi] \cup \{12\}$
c) $\{a^2 \mid a \in \mathbb{N}, a > 5\}$

Oppgave 1.7: a) $\Rightarrow$ b) $\Leftarrow$

Oppgave 1.8: a) $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Z}$ (Gyldig.)
b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1) \in \mathbb{N}$ (Ugyldig, fordi utsagnet ikke er sant for $n = 1$.)
c) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ (Ugyldig, fordi utsagnet ikke er sant for $x = 0$.)
d) $b \in \{-1,0,1\} \Rightarrow b^2 \in \{0,1\}$ (Gyldig.) e) $0 < y < 1 \Rightarrow \sqrt{y} > y$ (Gyldig.)

Oppgave 1.9: a) For eksempel er $1 - 2 \notin \mathbb{N}$.

b) Lukket under multiplikasjon, men ikke addisjon. (F.eks. er $1 + 1 \notin \{-1,0,1\}$.)

c) Du må vise at dersom m og n er to vilkårlige partall, så er $m+n$, $m-n$ og mn også partall. Hint: Skriv $m = 2r$ og $n = 2s$, der $r, s \in \mathbb{Z}$.

d) Mengden av oddetall er ikke en ring fordi den ikke er lukket under addisjon (heller ikke subtraksjon). For eksempel er $1 + 3 = 4$, som ikke er oddetall. (Mengden *er* imidlertid lukket under multiplikasjon – kan du vise det?)

e) Hint: I hvert tilfelle må du vise at mengdene er lukket under alle 4 regneoperasjoner. Gjør det nøye, det går fortere enn du tror!

f) Hint: Dersom $\mathbb{N}$ skal være inneholdt i en kropp, må også $\mathbb{Z}$ være det, siden en kropp er lukket under subtraksjon. Men da må også alle mulige brøker være med i kroppen, siden en kropp er lukket under divisjon.

g) Scarlet Johansson? Brad Pitt? Nei, verdens mest fascinerende kropp består av bare to tall: 0 og 1. For å gjøre mengden $\{0, 1\}$ til en kropp må vi imidlertid gjøre et triks: Vi «omdefinerer» $1 + 1$ til å være lik 0 i stedet for 2. Dermed blir også $0 - 1 = 1$, og det er nå lett å sjekke at mengden vår er lukket under alle de fire regneartene. Denne kroppen kalles gjerne $\mathbb{F}_2$, og er den minste kroppen som finnes (bortsett fra den «trivielle» kroppen $\{0\}$).
Når vi endrer reglene for pluss og minus som vi gjorde i trikset over, må vi egentlig sjekke litt flere ting før vi kan kalle mengden vår en kropp. Mer om dette, og om mange andre artige kropper, lærer du i kurset MAT2200.

Oppgave 2.1: a) -17 b) 25 c) $\frac{1}{36}$ d) 1

Oppgave 2.2: a) $a^{\frac{3}{2}}$ b) $\frac{1}{x}$ c) y^4 d) $(b-1)^3$

Oppgave 2.3: a) $a^{\frac{3}{4}}$ b) a^4 c) $a^2 - 1$

Oppgave 2.4: $\dfrac{det}{gikk}$

Oppgave 2.5: a) $1 + a + \frac{1}{4}a^2$ b) $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ c) $e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

Oppgave 2.6: a) $x - 1$ b) $50 - a$ c) $4 - e^x$ d) $6x + 6$

Oppgave 2.7: a) $(x+3)^2$ b) $(2x-1)^2$ c) $(y-6)^2$

Oppgave 2.8: a) $x + 3$ b) $\dfrac{x+2}{2-x}$ c) $\sqrt{5} + x$ d) $\dfrac{1}{x - 2y}$
e) $(x^2 + a)(x + \sqrt{a})$ f) $a(b-a)(b^2 + a^2)$

Oppgave 2.9: $(x^2 - y^2 + 1)^2$

Oppgave 2.10: a) $x = 3,\quad x = -1$ b) $x = 7,\quad x = 5$ c) $x = -\frac{2}{3},\quad x = -2$

d) $x = \frac{5}{4}, \quad x = -\frac{5}{6}$ e) $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{7})$ f) $x = \frac{1}{12}(-5 \pm \sqrt{97})$

Oppgave 2.11: a) $(x-3)(x+1)$ b) $(x-7)(x-5)$ c) $(3x+2)(x+2)$
d) $(x-\frac{5}{4})(6x+5)$ e) $-2(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2})$ f) $6(x+\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{97}}{12})(x+\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{97}}{12})$

Oppgave 2.12: a) i) Inger ii) Uavgjort iii) Christin b) Nei. De kunne like gjerne bare startet med tallet N og vekslet på å dele på 2 og trekke fra 1, helt til en av dem kommer under 1.

c) Spillet blir uavgjort hvis og bare hvis $N = 2^{n+1} - 2$ eller $N = 3 \cdot 2^n - 2$, der n er et naturlig tall.

Oppgave 2.13: a) $x = 1, \quad x = -2$ b) $x = 2\ln 2, \quad x = \ln 2$
c) $x = e^{1/2} = \sqrt{e}, \quad x = e^{-2}$ d) $x = \ln 2 + 1, \quad x = 1$

Oppgave 2.14: a) $\ln 2$ b) $\ln 6$ c) $\ln 2 - 2$

Oppgave 2.15: a) $x = 0$ b) $x = 2\ln 3$ c) $x = \frac{1}{2}\ln 2$ d) $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 4}$
e) $x = \frac{1}{3}$ f) $x = \dfrac{\ln 3}{\ln \frac{3}{2}}$ g) $x = \dfrac{2\ln 2}{\ln \frac{7}{2}}$ h) $x = \pm\sqrt{2}$

Oppgave 2.16: a) $\ln 3 + a$ b) $\ln(a+1)$ c) $-\ln(a+1)$ d) $2(\ln a)^2$
e) $-\ln a$

Oppgave 2.17: $2(\sqrt{x^2 - y^2} - x)$

Oppgave 2.18: Ingen fasit.

Oppgave 2.19: Ingen fasit.

Oppgave 2.20: Ingen fasit.

Oppgave 3.1: a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $D_g = [0, \infty)$ c) $D_h = (-\infty, 1]$
d) $D_A = (\frac{3}{2}, \infty)$ e) $D_f = \mathbb{R}$ minus punktene 3 og $\frac{5}{3}$ f) $D_y = [-2, 2]$

Oppgave 3.2: a) $V_f = (0, \infty)$ b) $V_g = [-3, 9]$ c) $V_h = [-1, \infty)$
d) $V_k = (-\infty, 1]$

Oppgave 3.3: a) Hint: I intervallet $[0,1)$ er $f(x) = x$. I intervallet $[1,2)$ er $f(x) = x-1$. Slik kan du fortsette. Grafen ligner litt på et sagblad!

b) $D_f = [0,\infty)$ og $V_f = [0,1)$ c) Diskontinuerlig for alle $x \in \mathbb{N}$.

Oppgave 3.4: a) $2-\sqrt{x}+\ln x$, $D_h = (0,\infty)$ b) $\frac{2-\sqrt{x}}{\ln x}$, $D_h = (0,\infty)-\{1\}$

c) $\frac{\ln x}{2-\sqrt{x}}$, $D_h = (0,\infty)-\{4\}$ d) $2-\sqrt{\ln x}$, $D_h = [1,\infty)$

e) $\ln(2-\sqrt{x})$, $D_h = [0,4)$

Oppgave 3.5: a) Se Eksempel 3.4.

b) Bruddpunktene er $x = 3$ og $x = 10$. Grafen er diskontinuerlig i begge disse.

c) Ikke lurt. Du kan spare 25 kr ved å kjøpe 10 kg og gi bort (eller selge!) 1 kg.

d) $[\frac{5}{2},3)$ og $[8,10)$.

Oppgave 3.6: a) 17 b) 2.13 c) $-y$ d) $1-x$

Oppgave 3.7: a) $f(x) = x+2$ når $x \geq -2$, og $-x-2$ når $x < -2$.

b) $f(x) = e^x$ når $x \geq 0$, og e^{-x} når $x < 0$.

c) $f(x) = x+1$ når $x \geq 0$, og $5x+1$ når $x < 0$.

d) $f(x) = 1$ når $x > 0$, og -1 når $x < 0$.

e) $f(x) = x^2-2x$ når $x \geq 2$, og $2x-x^2$ når $x < 2$.

f) $f(x) = x^2-1$ når $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, og $1-x^2$ når $x \in (-1,1)$.

Oppgave 3.8: Ingen fasit. Spør gruppelærer hvis du er usikker!

Oppgave 3.9: Hint: Når du tar absoluttverdien, skal de bitene av grafene som er under x-aksen, speiles om denne aksen.

Oppgave 3.10: a) Nei. Hvis dette skulle ha vært grafen til en funksjon f, måtte for eksempel $f(0)$ vært *både* -1 og 1. Dette strider mot definisjonen.

b) Ja, det er grafen til $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Oppgave 3.11: a) $V_f = [5,\infty)$ b) $V_g = [-\frac{5}{4},\infty)$ c) $V_h = (-\infty,\frac{7}{12}]$

Oppgave 3.12: a) D_f er mengden av alle dager det arrangeres forkurs. $V_f \subseteq \mathbb{Z}$.

Oppgave 4.1: a) $x - 3$ b) -3 c) $x - 4$ d) $2x - 3$

Oppgave 4.2: a) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ b) $x^3 + x^2 + x + 1$

Oppgave 4.3: a) $1 + \dfrac{8}{x-3}$ b) $x - \dfrac{5x-1}{x^2+2}$ c) $2x^2 - 2x$

Oppgave 4.4: a) Ja b) Nei c) Ja d) Nei e) Ja

Oppgave 4.5: a) $(x-3)(x-2)(x+2)$ b) $(x-1)(x+3)(x+5)$
c) $3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})(x-1)$

Oppgave 4.6: Nullpunktene til g er $x = -1$ og $x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Oppgave 4.7: a) Dette følger fra nullpunktsetningen, fordi $1^n - 1 = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Nullpunktsetningen gir: $x^n - 1$ er delelig med $x+1$ hvis og bare hvis $(-1)^n - 1 = 0$. Dette er sant hvis og bare hvis n er et partall.

Oppgave 4.8: a) $a = 2010$ b) Ja, sett $a = k^{2009} + 2009k$.

Oppgave 4.9: a) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$ b) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{4}{x+4}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}}{x-2} - \dfrac{\frac{5}{4}}{x+2}$

Oppgave 4.10: $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x+2}$

Oppgave 4.11: a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{2-x}$ b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Oppgave 4.12: $\dfrac{2008}{2009}$

Oppgave 4.13: $h(x) = x(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Oppgave 4.14: $\dfrac{n(5n+9)}{2(n+1)(n+2)}$

Oppgave 5.1: Bruk Pythagoras.

Oppgave 5.2: a) $BC = 4$ og $AB = 4\sqrt{3}$ b) $14\sqrt{2}$ c) $AC = 3$ og

$BC = 2\sqrt{3}$ d) Sidelengden er $\frac{5}{\sqrt{2}}$; arealet er $\frac{25}{2}$ e) 12 f) 54

Oppgave 5.3: $4\sqrt{3}$

Oppgave 5.4: a) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 0 e) Ikke def.
f) $-\sqrt{3}$

Oppgave 5.5: a) $V_f = [0, 2]$ b) $V_g = [-2, 2]$ c) $V_h = [0, 5]$ d) $V_f = \{3\}$

Oppgave 5.6: a) $\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ b) Sett $u = v$ i a).

c) Sett f.eks. $\tan 2u = \frac{\sin 2u}{\cos 2u}$, og bruk kjente formler for å skrive ut teller og nevner.

Oppgave 5.7: a) $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, eller enklere $x = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$
b) $x = 2k\pi$ og $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ c) $x = 3k\pi$

Oppgave 5.8: a) $2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ b) $3\sqrt{2}\sin(x + \frac{7\pi}{4})$, eventuelt $3\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$
c) $4\sin(x + \frac{2\pi}{3})$ d) $\sqrt{5}\sin(x + \tan^{-1}(2)) \simeq \sqrt{5}\sin(x + 1{,}1)$

Oppgave 5.9: a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ og $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ d) $x = 2k\pi$ og $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Oppgave 5.10: a) 4 m b) 14.47° c) $\frac{100}{37}$ m d) $D = \dfrac{(4y^2 + x^2)\tan\alpha}{2y - x\tan\alpha}$

Oppgave 5.11: Ingen fasit.

Oppgave 5.12: a) Hint: Bruk Pythagoras. b) 4.6 km c) 15.9 km
d) 195 m e) Samme svar f) 371 m

Oppgave 5.13: a) Vinkelen er avhengig av forholdet mellom glassets høyde og diameter.

b) Glasset må være slik at diameter=høyde.

c) 38.7°

d) Svaret er såpass nærme 45° at hun lar seg lure og blir med ham hjem for å se på kalkulatorsamlingen hans.

Oppgave 5.14: a) Trekanten kan enten være en 30°-60°-90°-trekant, eller en 45°-45°-90°-trekant.

b) For å få 30°-60°-90°, kan man f.eks. kreve at den ene *ikke-rette* vinkelen er dobbelt så stor som den andre. (Katetene har da lengder 2 og $2\sqrt{3}$.) For å få 45°-45°-90°, kan man presisere ved f.eks. å si at *den største* vinkelen er dobbelt så stor som en av de andre. (Begge katetene har da lengde $2\sqrt{2}$.)

Oppgave 5.15: a) $h(x) = \sin\sqrt{x}, \quad D_h = [0, \infty)$

b) $h(x) = \sqrt{\sin x}, \quad D_h = \cdots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \cdots$

Oppgave 5.16: Ingen fasit.

Oppgave 5.17: a) Hint: Løs likningen $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ med hensyn på $\cos u$. Bruk begrensningen på u til å velge den riktige løsningen.

b) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

c) $\tan u = (\sqrt{\tan^2 2u + 1} - 1)/\tan 2u$; $\quad \sqrt{2} - 1$.

Oppgave 6.1: a) 2 b) 0 c) Eksisterer ikke d) $\frac{1}{2^e}$ e) -1

Oppgave 6.2: a) 4 b) $-\frac{4}{3}$ c) Eksisterer ikke d) 1

Oppgave 6.3: Hint: Divider med x oppe og nede i det rasjonale uttrykket.

Oppgave 6.4: a) 2 b) 8

Oppgave 6.5: a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) 3 d) Eksisterer ikke e) $\frac{1}{2}$ f) 1

Oppgave 6.6: Nei, fordi $\sin x$ svinger mellom -1 og 1 uten å nærme seg noe bestemt tall.

Oppgave 6.7: 0

Oppgave 6.8: a) Grafen er ikke kontinuerlig.

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ikke kontinuerlig, fordi $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Oppgave 6.9: a) 3 b) $a = \dfrac{2}{5}$ c) $a = 2$

Oppgave 6.10: Horisontal asymptote: $y = -1$. Vertikal asymptote: $x = 3$.

Oppgave 6.11: Horisontal asymptote: $y = 1$. Vertikal asymptote: $x = -1$.

Oppgave 6.12: -36

Oppgave 6.13: a) To. (Se Eksempel 6.8.)

b) Et klassisk eksempel er $\tan x$. Andre eksempler kan man lett lage ved å velge funksjoner på formen $\frac{1}{g(x)}$, der $g(x)$ er en funksjon med uendelig mange nullpunkter, som $\sin x$ og $\cos x$.

Oppgave 6.14: a) Ja, $y = 0$. b) $\frac{7}{15}$ c) $x = -1$ og $x = -3$

Oppgave 7.1: a) $20x^4 + \dfrac{4}{5x^5}$ b) $(e+1)x^e$ c) $\ln(\pi)\pi^x$ d) $\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$

e) $-12x + 35$ f) $e^x \ln x + \frac{1}{x}e^x$ g) $\dfrac{3x^2 + 12x - 1}{(x+2)^2}$ h) $-x^{\frac{a+a^2}{1-a-a^2}}$

i) $-\dfrac{\tan a}{\sin^2 x}$

Oppgave 7.2: $-2te^2m \cdot x + etra - helma$

Oppgave 7.3: a) Hint: Variabelen x kan ikke behandles som en konstant.

b) $x^x(\ln x + 1)$.

Oppgave 7.4: a) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ b) $\dfrac{1}{1+t}$ c) $-7\sin 7\theta$

d) $4008x(x^2+1)^{2003}$ e) $2xe^{x^2}$ f) $-6\sin^{-4}\varphi\cos\varphi$

g) $10(\ln x + \tan x)^9(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\cos^2 x})$ h) $\dfrac{\cos\varphi - \sin\varphi}{2\sqrt{\sin\varphi + \cos\varphi}}$

Oppgave 7.5: a) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ b) $-6(3-2x)^2$ c) $(3\sin^2 x + 6\sin x - 1)\cos x$

d) $\dfrac{\sin x + x\cos x}{2\sqrt{x\sin x}}$ e) $-x(2\ln x + 1)\sin(x^2 \ln x)$ f) $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{e^x}}$

g) $e^{\frac{x-1}{x+1}}\dfrac{2}{(x+1)^2}$ h) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

Oppgave 7.6: a) $\dfrac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ b) $\dfrac{3}{\cos^2 3x}e^{\tan 3x}$ c) $-\ln 2\sin x\, e^{\cos x}2^{e^{\cos x}}$

d) $\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-\ln(1-x^2)}}$

Oppgave 7.7: $y = \pm 2x$

Oppgave 7.8: a) $f'(1) = -2$ b) $y = -2x + 4$

Oppgave 7.9: $x^{x^x + x} \cdot (\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x})$

Oppgave 7.10: Hint: La $f(x) = ax + b$, og finn tangenten i et vilkårlig punkt $(x_0, f(x_0))$.

Oppgave 8.1: a) $x = 0$ (min.) b) $x = -\frac{1}{6}$ (maks.)

c) $x = 0$ (maks.) og $x = \frac{1}{3}$ (min.) d) Terrassepunkt i $x = -1$, ingen maks/min.

e) $x = -1$ (min.), $x = 0$ (maks.) og $x = 1$ (min.)

Oppgave 8.2: a) Positiv i $(-\infty, -1)$ og $(\frac{2}{3}, 10)$, negativ i $(-1, \frac{2}{3})$ og $(10, \infty)$.

b) Positiv i $(-\infty, -\frac{1}{2})$ og $(\frac{1}{2}, \infty)$, negativ i $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

c) Positiv i $(0, 1)$ og $(\pi, 2\pi)$, negativ i $(1, \pi)$.

Oppgave 8.3: Hun bør gi planten $\frac{3}{2}$ desiliter om dagen. Forventet levetid er da $L(\frac{3}{2}) = 5\ln 5 - 2 \approx 6$ uker.

Oppgave 8.4: a) 1.8 sekunder. b) $p(t) = 120 - 50e^{-1.47t^2 - 0.8} - 2.45t^2$.

Etter 1 sekund er pulsen ca 112.4. c) 1.33 sekunder. $p_{\text{maks}} = 114$.

Oppgave 8.5: Vi får at $f''(x)$ er konstant lik $2a$. $f''(x)$ har dermed ingen nullpunkter, og dette betyr at grafen til f ikke har noen vendepunkter.

Oppgave 8.6: a) $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$, $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

b) $x = 0$ (min.), $x = \frac{\pi}{2}$ (maks.), $x = \frac{3\pi}{2}$ (min.), $x = 2\pi$ (maks.)

c) Grafen har 2 vendepunkter. d) $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$ er globale.

Oppgave 8.7: a) 25 ord b) 8 nye ord c) Etter omtrent 8 dager. Da kunne han 47 ord. d) Vendepunkt: $(16.6, 37.2)$.

Oppgave 8.8: a) Vanskelig å si (synes i hvert fall jeg).

b) $h''(x) = \sin 2x - \cos x$. Vendepunkter: $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ og $(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{8})$.

c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}(\pi + 3\sqrt{3})$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$ og $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}(5\pi - 3\sqrt{3})$. (Rekkefølgen er den samme som i b).)

Oppgave 8.9: b) Minimum: 3 hybelkaniner. Maksimum: $37.9 \approx 38$ hybelkaniner.

c) Antallet vil gå opp på lang sikt. (I uttrykket for $H(t)$ vil sinus-leddet alltid holde seg mellom -15 og 15, mens $\frac{1}{2}t$-leddet øker med tiden.)

Oppgave 9.1: a) $\frac{1}{5}x^5 + C$ b) $x - 2x^3 + \frac{3}{2}x^4 + C$ c) $3\ln|x| - 2\cos x + C$

d) $e^x - \frac{1}{3}\tan x + C$ e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$ f) $\frac{8}{\ln 2}2^x + C$

Oppgave 9.2: b) Alle svarene skiller seg fra $\ln|x|$ med kun en konstant. F.eks. er $\ln|2x| = \ln|x| + \ln 2$.

Oppgave 9.3: a) $-x\cos x + \sin x + C$ b) $xe^x + C$

c) $(3x-2)\sin x + 3\cos x + C$ d) $3x^{\frac{1}{3}}(\ln x - 3) + C$

Oppgave 9.4: $(2x^2 - x - 1)\sin x + (4x-1)\cos x + C$

Oppgave 9.5: Ingen fasit.

Oppgave 9.6: a) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ b) $-\tan(3-x) + C$ c) $\ln(x^4+1) + C$

d) $e^{\sin x} + C$ e) $-2\cos(\sqrt{x}+1) + C$ f) $x\ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x + C$

Oppgave 9.7: Ingen fasit.

Oppgave 9.8: a) $\frac{2}{11}e^{11x+100} + C$ b) $2\sin(1+\frac{x}{2}) + 2\cos(1-\frac{x}{2}) + C$

c) $2(\frac{2+x}{3})^{\frac{3}{2}} + C$ d) $\ln|2x-1| - 2\ln|3x+1| + C$

Oppgave 9.9: a) $\ln|\dfrac{x+1}{x+2}| + C$ b) $2\ln|x-2| + 4\ln|x+4| + C$

c) $\frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$

Oppgave 9.10: $3\ln|x-3| - \ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

Oppgave 9.11: a) $2\ln|\frac{x}{2-x}| - \dfrac{3}{x} + C$

b) $\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C$

Oppgave 9.12: b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Oppgave 9.13: a) $f(-1) = 0, \quad f(x) = (x+1)(x-1)^2$

b) $\dfrac{1}{3}\ln|\dfrac{x+1}{x-1}| - \dfrac{2}{3x-3} + C$

Oppgave 10.1: a) $y = -\frac{1}{x+C}$ b) $y = \ln(e^x + C)$ c) $y = \pm\sqrt{2\tan x + C}$

Oppgave 10.2: a) $y = 8e^{-8x}$ b) $y = e^{6-5x}$ c) $y = 2e^{\frac{1}{2}x-1}$

Oppgave 10.3: a) $y = Ce^x - x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ c) $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{x^2}$

d) $y = (x+C)e^{-\sin x}$

Oppgave 10.4: a) $y = \dfrac{H(x)+C}{x}$ b) $y = \dfrac{H(x)+C}{\sin x}$

Oppgave 10.5: $y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$

Oppgave 10.6: Du kan hugge inn $\frac{4\ln 2}{\ln(8/5)} \approx 5.9$ minutter etter at du tok ut pizzaen.

Oppgave 10.7: $y = -\sqrt{\frac{2}{3-x^4}}$

Oppgave 10.8: a) Første ordens, separabel difflikning b) $y = \dfrac{N}{(N-1)e^{-kNt} + 1}$

c) $y(10) = 50$ gir $k \approx 3.917 \cdot 10^{-5}$. Med denne verdien får vi at $y(20) \approx 2016$ personer har hørt om primtallet etter 20 minutter, og at det tar ca 23.5 minutter før 5000 har hørt det. (Merk: Funksjonen er svært sensitiv for avrunding av k. Med $k = 3.9 \cdot 10^{-5}$ får vi f.eks. $y(20) \approx 1962$.)

Register