Kapittel 5

Hvis $A \subset \mathbb{R}$, så er en funksjon fra A til $\mathbb{R}$ en regel som til hvert tall $x \in A$ tilordner et tall $y = f(x)$ i $\mathbb{R}$

Vi kaller A <u>definisjonsområdet</u> til f og skriver $A = D_f$

Dersom funksjonen er gitt ved en formel, f.eks

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x-7},$$

så underforstår vi gjerne at definisjonsområdet består av de x'ene som gjør formelen meningsfull.

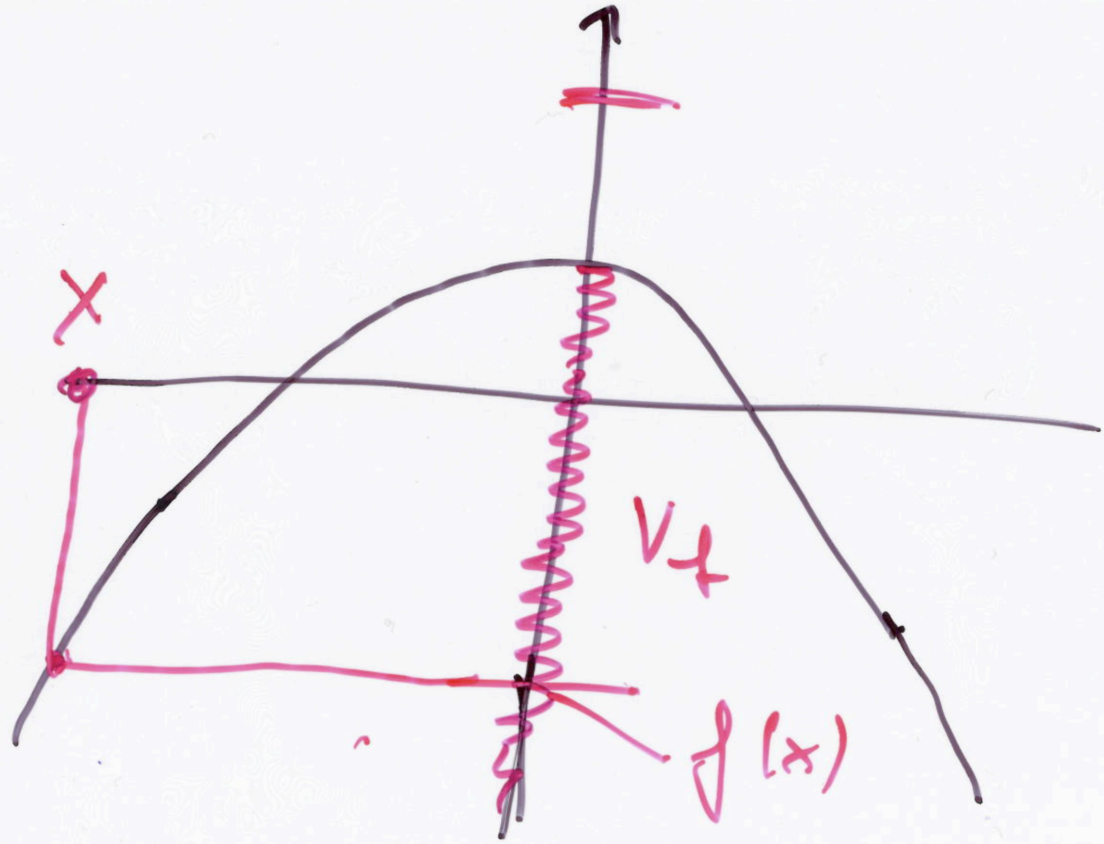
I vårt tilfelle må da

$$x > -2 \quad \text{og} \quad x \neq 7$$

$$D_f = (-2, 7) \cup (7, \infty)$$

Verdimengden til f er

$$V_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$$

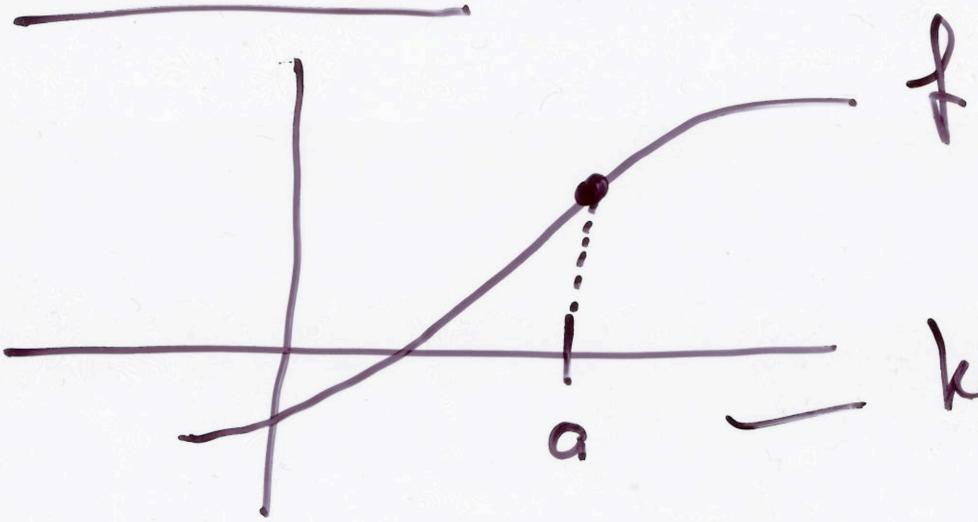


Eksempel:

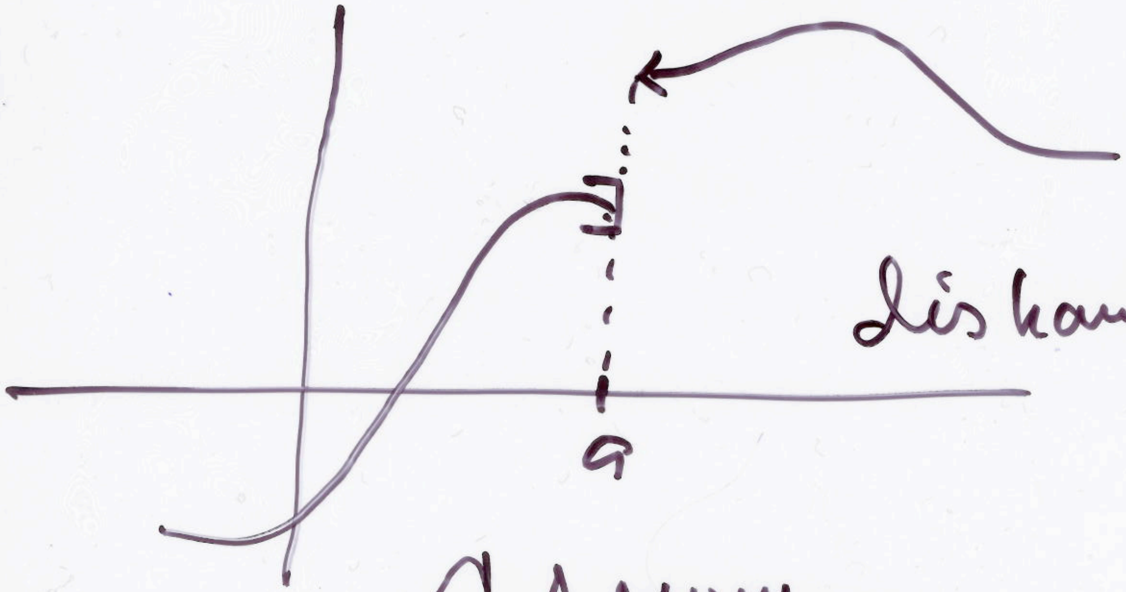
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

Kontinuitet

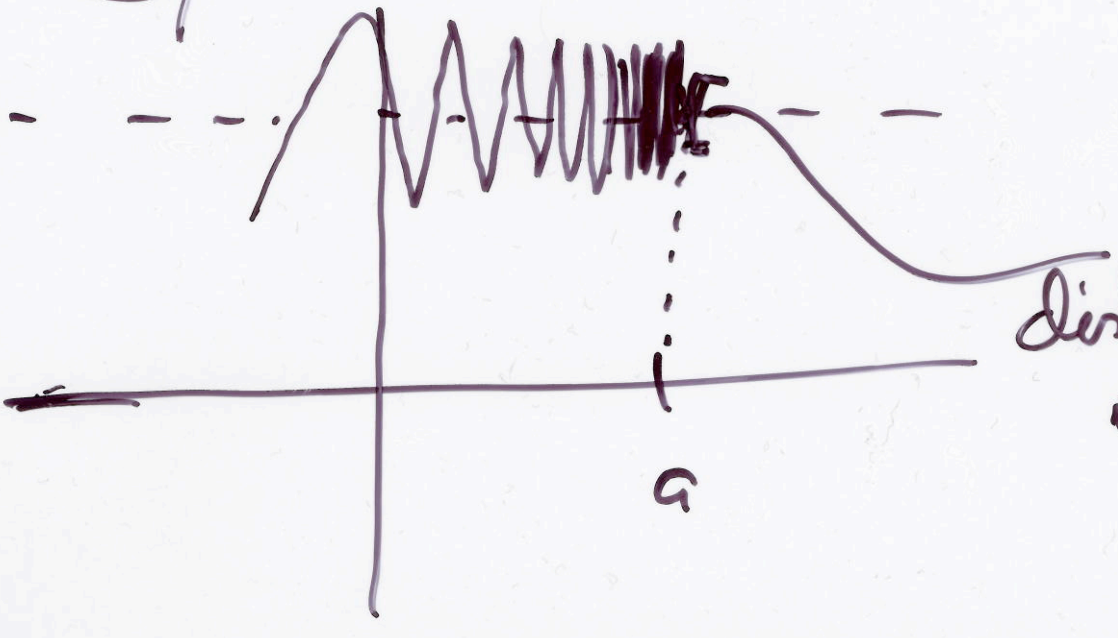
Intuitivt:



kontinuitet i a



diskontinuitet i a



diskont. i a.

Sette ord på intuisjonen:

f er kontinuerlig i a dersom:

(i) $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x går mot a

(ii) $f(x)$ er nær $f(a)$ når x er nær a

(iii) Vi kan få $f(x)$ så nær $f(a)$ vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær a.

(i) Innebygget litt vrangel

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Setter ord på intuisjonen:

f er kontinuerlig i a dersom:

(i) $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x går mot a

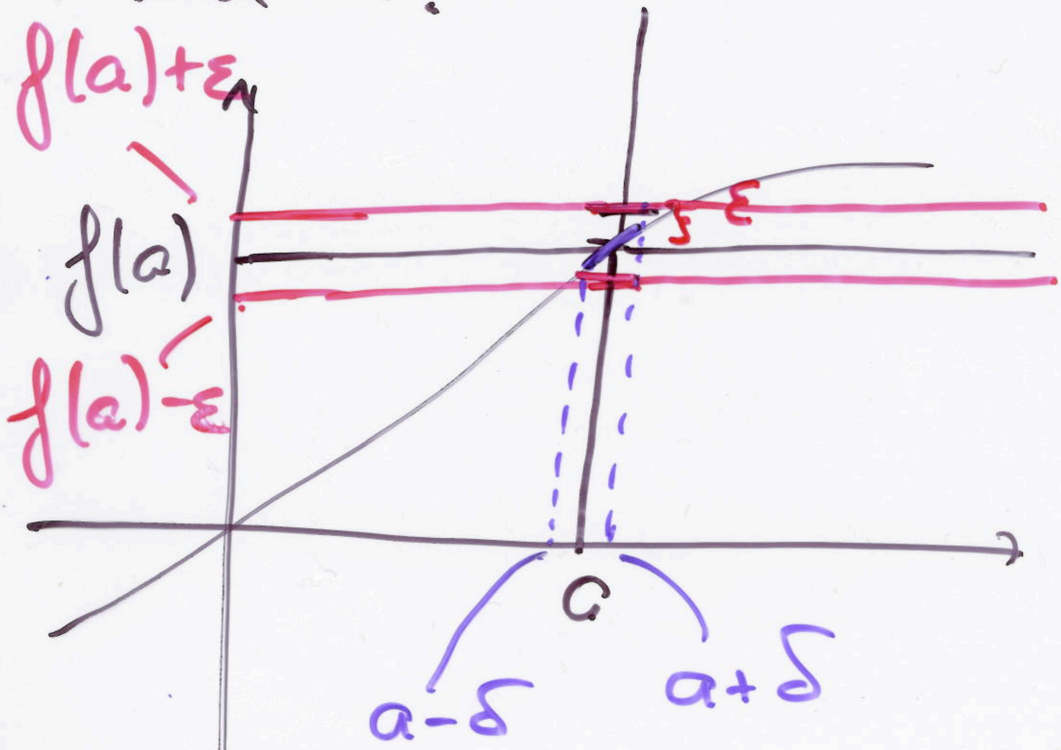
(ii) $f(x)$ er nær $f(a)$ når x er nær a

(iii) Vi kan få $f(x)$ så nær $f(a)$ vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær a.

(i) Innebygget litt krangel

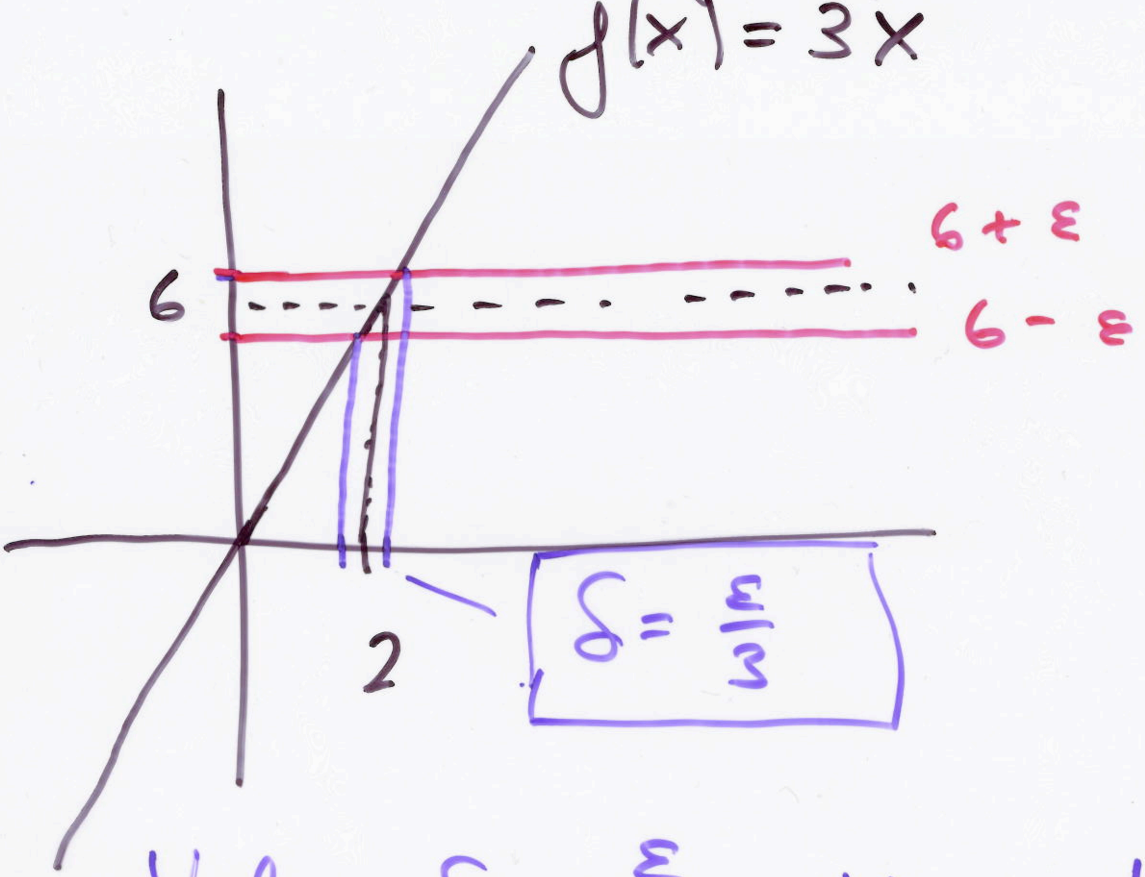
$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Utgangspunkt: Vi kan få $f(x)$ så nær $f(a)$ vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær a.



Definisjon: f er kontinuerlig i a dersom det til enhver $\varepsilon > 0$, så finnes det en $\delta > 0$ slik at
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ når $|x - a| < \delta$
og $x \in D_f$.

Eksempel: Vis at $f(x) = 3x$ er kontinuerlig i punktet $a = 2$



Velg $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Hvis $|\overbrace{x-2}^{h}| < \delta$,

$x - 2 = h$

$x = 2 + h$

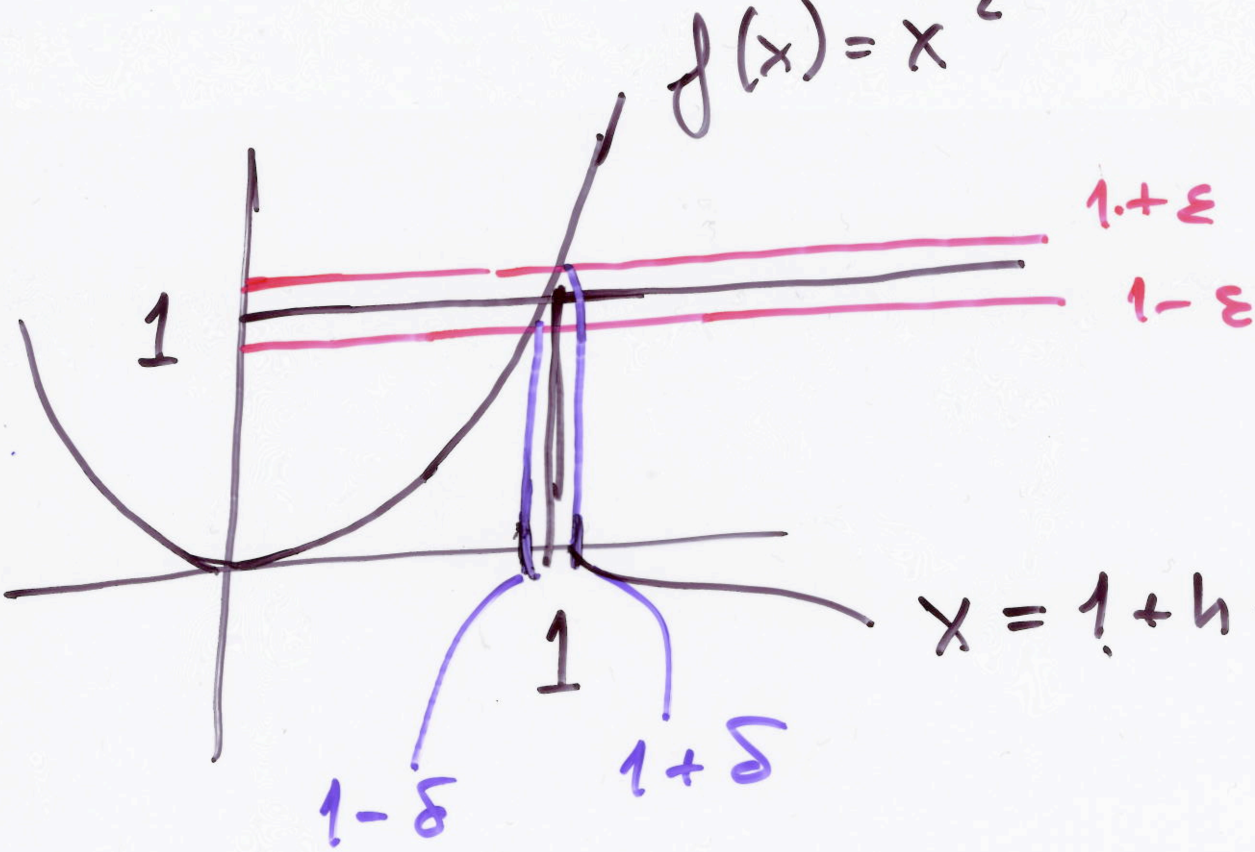
så er

$$|f(x) - f(2)| = |3(2+h) - 3\cdot 2|$$

$$= |6 + 3h - 6| = 3\underbrace{|h|} < 3\delta$$

$$= 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \underline{\varepsilon}$$

Eksempel: Vis at $f(x) = x^2$ er kontinuerlig i $a = 1$



$x = 1 + h$:

$$|f(x) - f(1)| = |f(1+h) - f(1)|$$

$$= |(1+h)^2 - 1^2| = |(\cancel{1} + 2h + h^2) - \cancel{1}|$$

$$= \underline{|h|(2+h)} < \varepsilon$$

ønsker meg

Velger $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$

Vi må vise at hvis $|x-1|<\delta$,

så er $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$. Velg at

$$|f(x)-f(1)| = \underbrace{|h|}_{<\delta}\underbrace{(2+h)}_{<2+\delta} \quad \text{der } h = x-1$$

$$\leq \underbrace{\delta}_{\leq \varepsilon/3}(2+\underbrace{\delta}_{\leq 1}) \leq \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Regler for å vise at mer komplisert funksjoner er kontinuerlige:

Setning: Hvis f og g er kontinuerlige i a, så er $f+g$, $f-g$, fg også kontinuerlig i a. Det samme er $\frac{f}{g}$ forutsatt at $g(a) \neq 0$.

Setning: Dersom g er kont. i punktet a, og f er kont. i punktet $b = g(a)$, så er den sammensatte funksjonen

$$h(x) = f(g(x))$$

kontinuerlig i a.

Fakta: De grunnleggende funksjonene:

$$x^a,\ e^x,\ \ln x,\ \sin x,\ \cos x$$

er kontinuerlige der de er definert.

Eksempel: Vis at

$$f(x) = \frac{x^3 + e^{\sin x}}{x^2 + 1}$$

er kontinuerlig for alle x.

x^3 er kont

$\sin x$ er kont

$\downarrow$

$\left. e^{\sin x} \right\}$ sammensatt.

$x^3 + e^{\sin x}$

x^2 er kont, 1 kont

$x^2 + 1$ er kont

$$\underbrace{\frac{x^2 + e^{\sin x}}{x^2 + 1}}_{\text{kont.}}$$

<u>Definisjon</u>: En funksjon f kalles <u>kontinuerlig</u> dersom den er kontinuerlig i alle punkter $x \in D_f$.

<u>ADVARSEL</u>: Ifølge denne definisjonen er $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig

$f(x) = \frac{1}{x}$