Prøveeksamen i MAT1100, H2017

Denne prøveeksamenen har 12 spørsmål (1a), 1b), 2 osv.) akkurat som den virkelige eksamenen vil ha ("bonusspørsmålet" 5e) teller ikke med). Arbeidsmengde og vanskelighetsgrad er omtrent den samme som til eksamen. På eksamen vil alle spørsmålene telle like mye.

Oppgave 1. I denne oppgaven er f funksjonen

$$f(x, y) = y\cos(xy)$$

a) Finn de partiellderiverte til f.

b) I hvilken retning vokser f raskest når man står i punktet $(\frac{\pi}{4}, 1)$? Hvis $\mathbf{u}$ er enhetsvektoren i denne retningen, hva er da den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}, \mathbf{u})$?

Oppgave 2. Finn volumet til pyramiden med hjørner i $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (3, -1, 1)$, $\mathbf{d} = (-1, 3, -1)$.

Oppgave 3. En fabrikk som produserer eplesaft, mottar epler fra tre leverandører P, Q og R. Alle leverandørene leverer epler av sortene Gravenstein, Aroma og Summerred.

(i) Produsent P leverer 45% Gravenstein, 15% Aroma og 40% Summerred.

(ii) Produsent Q leverer 25% Gravenstein, 50% Aroma og 25% Summerred.

(iii) Produsent P leverer 30% Gravenstein, 40% Aroma og 30% Summerred.

a) Anta at P leverer x_1 tonn, Q leverer x_2 tonn og R leverer x_3 tonn. Finn en matrise A slik at

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

der y_1 er antall tonn Gravenstein, y_2 er antall tonn Aroma og y_3 er antall tonn Summerred som blir levert.

b) Den inverse matrisen til A er

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 46 & 6 & -54 \\ -65 & -5 & 75 \end{pmatrix}$$

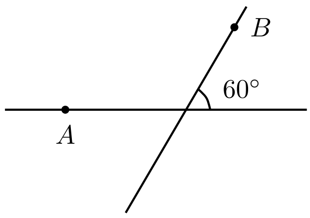
(du behøver ikke å sjekke dette). Finn ut hvor mange tonn hver av leverandørene leverer dersom det i alt blir levert 25 tonn Gravenstein, 31 tonn Aroma og 24 tonn Summerred. Forklar hvorfor det ikke er mulig at det blir levert 30 tonn Gravenstein, 30 tonn Aroma og 15 tonn Summerred.

Oppgave 4. Løs integralene:

a) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5}\,dx$

Oppgave 5. To veier møtes i en vinkel på $60°$ som vist på figuren. Bil A nærmer seg krysset med en fart av 80 km/t, mens bil B kjører bort fra krysset med en fart på 70 km/t. Hvor fort endrer avstanden mellom bilene seg i det øyeblikket A er 3 km fra krysset og B er 5 km fra krysset?



Oppgave 6. I denne oppgaven er f, g to ganger deriverbare funksjoner med kontinuerlige annenderiverte, og

$$h(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

a) Vis at

$$h'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$$

La a og b være to reelle tall. Vi antar heretter at f og g er løsninger av differensialligningen

$$y'' = ay' + by$$

dvs. at $f''(x) = af'(x) + bf(x)$ og $g''(x) = ag'(x) + bg(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Vis at

$$h'(x) = ah(x)$$

c) Forklar at

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \int a\,dx$$

og bruk dette til å vise $h(x) = Ce^{ax}$ for en konstant C.

d) Vi setter nå $a = 2$, $b = -1$ og $f(x) = e^x$. Vis at $f(x)$ er en løsning av differensialligningen $y'' = ay' + b$, og forklar at en hvilken som helst annen løsning g må tilfredsstille ligningen

$$g'(x) - g(x) = Ce^x$$

for en konstant C.

e) *(Bonusspørsmål som forutsetter at man kan løse førsteordens differensialligninger, og som derfor ikke ville ha vært med på en virkelig eksamen).* Bruk resultatet i d) til å finne alle løsningene til $y'' = ay' + by$.

SLUTT