Løsninger problemsett 1, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Med enkle operasjoner på komplekse tall kan vi komme fram til at $1 = -1$:

   $$1 = \sqrt{1} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

   Hvor på veien går det galt?

   Løsning: For positive reelle tall a og b stemmer det at $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, men dette gjelder ikke nødvendigvis om a og b er negative. Feilen som blir gjort ovenfor er altså å anta at $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$.

2. La z og w være komplekse tall forskjellige fra 0. Vis at z og w står normalt på hverandre (dette skrives ofte $z \perp w$) hvis og bare hvis $\Re(z/w) = 0$.

   Løsning: La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\phi}$ for $r, s \in \mathbb{R}^+$. Da står z og w normalt på hverandre hvis og bare hvis $|\theta - \phi| = \frac{\pi}{2} + k\pi$ for en heltallig k. Dessuten er

   $$\frac{z}{w} = \frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)} = \frac{r}{s}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))$$

   reint imaginær hvis og bare hvis $\cos(\theta-\phi) = 0$ som også er ekvivalent til $|\theta - \phi| = \frac{\pi}{2} + k\pi$ for en heltallig k.

3. La $\mathcal{C}$ være sirkelen i det komplekse planet med sentrum 0 og radius 1, og la P og Q være diametralt motsatte punkter på $\mathcal{C}$. Vis at for alle $X \in \mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ vil trekanten utspent av P, Q og X være rettvinkla.

   Løsning: Ved å dreie på *enhetssirkelen i det komplekse planet* (sirkelen med sentrum 0 og radius 1, i denne oppgava kalt $\mathcal{C}$) kan vi uten tap av generalitet anta at $P = 1$ og $Q = -1$. Et generelt punkt $X \in \mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ kan skrives på formen $X = e^{i\theta}$ for $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. (Hvorfor kan vi ikke ha $\theta = 0$ eller π?)

   Siden
   $$\frac{X-P}{X-Q} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} = \frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = i\tan(\theta/2)$$
   er et reint imaginært tall, står ved forrige oppgave $X - P$ og $X - Q$ normalt på hverandre, og trekanten utspent av P, Q og X er rettvinkla.

   En annen vei gjør nytte av Pytagoras' læresetning etter litt regning:

   $$\begin{aligned}|X-P|^2 + |X-Q|^2 &= |e^{i\theta}-1|^2 + |e^{i\theta}+1|^2 \\ &= (e^{i\theta}-1)\overline{(e^{i\theta}-1)} + (e^{i\theta}+1)\overline{(e^{i\theta}+1)} \\ &= (e^{i\theta}-1)(e^{-i\theta}-1) + (e^{i\theta}+1)(e^{-i\theta}+1) \\ &= (1 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 1) + (1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1) \\ &= 4 \\ &= |P-Q|^2.\end{aligned}$$

   Dermed gir Pytagoras at trekanten utspent av P, Q og X er rettvinkla. Så lenge $X \neq P, Q$ er trekanten heller ikke degenerert.

4. La a, b og c være 3 forskjellige komplekse tall. Vis at følgende 3 påstander er ekvivalente:

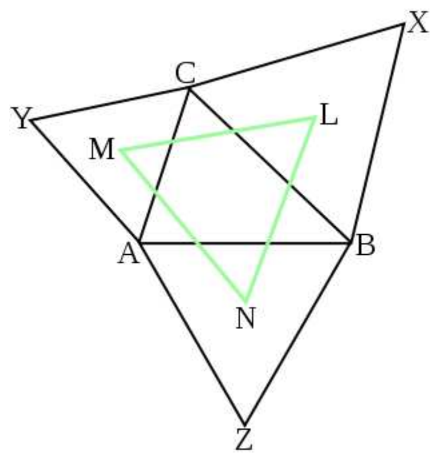
I) Trekanten definert av a, b og c er likesida.

II) $a + e^{2\pi i/3} \cdot b + e^{4\pi i/3} \cdot c = 0$ eller $a + e^{2\pi i/3} \cdot c + e^{4\pi i/3} \cdot b = 0$. (Det første gjelder hvis hjørnene i trekanten ligger i rekkefølgen $a - b - c$ med klokka, det andre hvis mot klokka.)

III) $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$.

Løsningsskisse: Ved en translasjon av planet kan vi rolig anta at $c = 0$. (Hvorfor?) Da reduserer de to siste påstandene til $a^2 - ab + b^2 = 0$ og $(a + e^{2\pi i/3} \cdot b)(a + e^{4\pi i/3} \cdot b) = 0$ som ved utregning av det siste uttrykket ses å være ekvivalente. Dessuten er $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = 0$ ekvivalent til $a^3 + b^3 = 0$ og $a + b \neq 0$. Men at $a^3 + b^3 = 0$, vil si at $b = \sqrt[3]{-1} \cdot a$ der $\sqrt[3]{-1}$ betegner $e^{\pm\pi i/3}$. (Hvorfor ikke -1?) Dette er ekvivalent til at trekanten utspent av a, b og 0 er likesida. (En tegning er til betydelig hjelp her.)

5. Vis ved hjelp av I) og II) i forrige oppgave Napoleons teorem: Dann utvendige likesida trekanter på sidene i en vilkårlig trekant. Da utspenner massesentrene til disse en likesida trekant.



Løsningsskisse: Med notasjonen på tegninga over (som jeg skamløst har rappa fra Wikipedia) kan vi igjen anta at $C = 0$. Massesenteret til en likesida trekant med hjørner i U, V og W, er gitt ved $\frac{1}{3}(U + V + W)$, og noen utregninger gir at

$$
\begin{aligned}
X = & \ \tfrac{1}{3}(B + 0 + (0 - B) \cdot e^{\pi i/3}) &= \frac{1}{3}(B \cdot e^{-\pi i/3}), \\
Y = & \ \tfrac{1}{3}(0 + A + (0 - A)e^{\pi i/3}) &= \frac{1}{3}(A \cdot e^{-\pi i/3}), \\
Z = & &= \frac{1}{3}(A + B + (A - B) \cdot e^{\pi i/3}).
\end{aligned}
$$

Videre har vi

$$
\begin{aligned}
L = & \ \tfrac{1}{3}(B + X + 0), \\
M = & \ \tfrac{1}{3}(0 + Y + A), \\
N = & \ \tfrac{1}{3}(A + Z + B).
\end{aligned}
$$

Ved nå å griseberegne at $L + e^{2\pi i/3} \cdot M + e^{4\pi i/3} \cdot N = 0$ (påstand II) fra forrige oppgave) får vi forhåpentlig det vi ønsker.