GRUBLEGRUPPE MAT1100 H17
OPPGAVESETT 1
LØSNINGSFORSLAG

SIMON FOLDVIK
31. AUGUST 2017

Den første oppgaven i dette settet har til hensikt å illustrere hvordan begrepskonflikter i dagligtalen ikke nødvendigvis kan overføres til matematisk terminologi. Tallet i eksisterer ikke i noen mindre grad enn tallet 1, selv om det første kalles *imaginært* og det andre *reelt*. Vi må heller komme til enighet om hva det vil si at et matematisk objekt *eksisterer* og hvordan vi kan konstruere nye fra gamle.

Oppgave 1. Finnes det noe komplekst tall som er både reelt og imaginært?

> **Løsningsforslag.** Ja, nemlig 0. Det er altså mulig at et tall er både reelt og imaginært.
>
> Et naturlig oppfølgningsspørsmål er om det finnes andre komplekse tall enn 0 med denne egenskapen. Det er ikke tilfelle. For anta at $z = x + iy$ er et komplekst tall som er både reelt og imaginært (her er x og y reelle tall). Ettersom z er reelt, må $y = 0$; ettersom z er imaginært, må $x = 0$. Med andre ord: antagelsen om at z er både reelt og imaginært fremtvinger konklusjonen $z = 0$. ■

Tilsvarende "konflikter" forekommer også i andre situasjoner. For eksempel er intervallet $(-\infty, +\infty)$ både åpent og lukket... Hva sier dette om terminologien?

Resten av oppgavene i settet har to hensikter:

- Å gi trening i å skrive bevis for påstander som ikke er spesielt innviklede.
- Å utvikle noen metoder som senere vil vise seg nyttige for å bevise mer kompliserte påstander.

Følgende sitat av Roger Godement[1] er relevant i den forbindelse:

> «There are two fundamental aspects here. In the first place, to elaborate a systematic technique for manipulating approximations to allow one to give perfectly precise definitions of such concepts as convergence, continuity, differentiability etc. [...] in essence, it consists of demonstrating equalities by replacing them by more and more precise inequalities: one shows that $a = b$ by proving that $|a - b| < 1/10^n$ for every integer n. This is the fundamental difference between analysis and arithmetic or algebra.»

[1] Roger Godement. *Analysis I: Convergence, Elementary Functions.* Springer, Universitext, 2004, side 3.

Bevisføringen i det som følger er inspirert av Snorre H. Christiansen, men holder ikke den samme typografiske standaren.[2] Den kan også beskyldes for å være stakkato; dette er for å klargjøre den logiske strukturen.

Oppgave 2. La x og y være reelle tall. Vis at

$$x = y \qquad \iff \qquad |x - y| < \epsilon \text{ for alle } \epsilon > 0.$$

Gjelder dette også for komplekse tall?

Løsningsforslag. Her er det to påstander å bevise.

($\implies$) Anta at $x = y$.

La $\epsilon_0 > 0$. Antagelsen om at $x = y$ medfører $|x - y| = 0 < \epsilon_0$.

Vi konkluderer med at ulikheten $|x - y| < \epsilon$ holder for alle $\epsilon > 0$.

($\impliedby$) Anta nå at

$$\text{ulikheten} \quad |x - y| < \epsilon \quad \text{holder for alle } \epsilon > 0. \tag{1}$$

I argumentet som følger står vi fritt til å bruke innholdet i antagelse (1).

Anta, for å oppnå en selvmotsigelse, at $x \neq y$. Da er $x - y \neq 0$, og følgelig er $|x-y| > 0$. La $\epsilon_0 = |x-y| > 0$. Ifølge (1) er $|x - y| < \epsilon_0$. Med andre ord, vi har at

$$|x - y| < |x - y|.$$

Antagelsen $x \neq y$ fører til en selvmotsigelse. Vi konkluderer med at $x = y$. ■

En observant leser vil se at det foregående argumentet fungerer like så godt for komplekse tall. Svaret på spørsmålet på slutten av Oppgave 2 er derfor positivt.

Oppgave 3. La x og y være reelle tall. Vis at

$$x \leq y \qquad \iff \qquad x < y + \epsilon \text{ for alle } \epsilon > 0.$$

Løsningsforslag. Her er det to påstander å bevise. Vi overlater det til leseren å vise implikasjonen fra venstre til høyre og nøyer oss her med å vise den andre.

($\impliedby$) Anta at

$$\text{ulikheten} \quad x < y + \epsilon \quad \text{holder for alle } \epsilon > 0. \tag{2}$$

Vi skal ut ifra denne antagelsen argumentere ved motsiglese for at ulikheten $x \leq y$ må holde.

Anta at $x > y$. Da er $x - y > 0$. La $\epsilon_0 = x - y > 0$. Ved (2) følger det at

$$\begin{aligned} x &< y + \epsilon_0 \\ &= y + (x - y) \\ &= x, \end{aligned}$$

[2] http://folk.uio.no/snorrec/17VMat2400/notesWeek08.pdf.

det vil si $x < x$.

Antagelsen $x > y$ fører til selvmotsigelsen $x < x$. Vi konkluderer med at $x \leq y$. ■

Bruk Oppgave 2 og Oppgave 3 til å vise følgende.

Oppgave 4. La x og y være reelle tall. Da gjelder:

$$x = y \quad \Longleftrightarrow \quad |x - y| < \frac{1}{n} \text{ for alle naturlige tall } n \geq 1;$$

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x < y + \frac{1}{n} \text{ for alle naturlige tall } n \geq 1.$$

Løsningsforslag. Her skal vi bare bemerke at dette følger fra Oppgave 2 og Oppgave 3 ved følgende observasjon: for alle $\epsilon > 0$ finnes det et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $1/n < \epsilon$ (hvorfor?). Detaljene overlates til leserne. "■"