Komplekse tall (kap 3)

Grunnspørsmål: Hva er $\sqrt{-1}$? Fins det, hva er det, hva kan det brukes til og hvor finner jeg det hen?

Utgangspunkt: Anta at i er en kvadratrot av -1, dvs at $i^2 = -1$.

Kombinerer i med andre tall: $\underbrace{z = a + ib}_{\text{komplekse tall}}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Eksempler: $z = \underbrace{-14}_{a} + \underbrace{2}_{b} i$, $w = \pi + \sqrt{2}\, i$

$z = a + i b$

realdel imaginærdel

<u>Addisjon</u>: $z = a+ib$, $w = c+id$

$$z+w = (a+ib)+(c+id) = \underbrace{a+c}_{\text{realdel}} + i\underbrace{(b+d)}_{\text{imaginærdel}}$$

<u>Eksempel</u>: $z = 3-4i$, $w = 7+5i$

$$z+w = (3+7)-4i+5i = \underline{\underline{10+i}}$$

<u>Subtraksjon</u>: $z = a+ib$, $w = c+id$

$$z-w = a+ib-(c+id) = a+ib-c-id = (a-c)+(b-d)i$$

<u>Multiplikasjon</u>: $z = a+ib$, $w = c+id$

$$zw = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+(ib)(id)$$

$$= ac+iad+ibc+\underbrace{\overset{=-1}{i^2}bd}_{-bd} = \underbrace{ac-bd}_{\text{realdel}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\text{imaginærdel}}$$

<u>Eksempel</u>: $z = 3+4i$, $w = 2+5i$

$$zw = (3+4i)(2+5i) = 6+15i+8i+\underbrace{(4i)(5i)}_{\substack{20i^2 \\ -20}} \underline{\underline{= -14+23i}}$$

Divisjon: $z = a + ib \,,\; w = c + id$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

(ganger med den konjugerte)

$$= \frac{ac - iad + ibc \underbrace{-(ib)(id)}_{=bd}}{c^2 - \cancel{icd} + \cancel{icd} - \underbrace{\underbrace{(id)^2}_{i^2d^2}}_{-d^2}} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\text{realdel}} + i \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{\text{imaginærdel}}$$

Eksempel:

$$\frac{7+2i}{3-4i} = \frac{(7+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{21+28i+6i+\overbrace{(2i)(4i)}^{-8}}{\underbrace{3^2}_{9} \underbrace{-(4i)^2}_{16}}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{13+34i}{25} = \underbrace{\frac{13}{25}}_{\text{realdel}} + \underbrace{\frac{34}{25}}_{\text{imaginærdel}} i$$