Problemsett 6, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Vi sier at en kontinuerlig funksjon f er like eller jamn hvis $f(x) = f(-x)$ for alle x der f er definert, og ulike eller odde hvis $f(x) = -f(-x)$. La

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

   a) Vis at hvis f er en like funksjon på $[-a, a]$, er

$$I = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

   b) Hva er I hvis f er ulike?

   c) La $l_1(x)$ og $l_2(x)$ være like og $u_1(x)$ og $u_2(x)$ ulike funksjoner på $[-a, a]$. Vis at $l_1(x)\cdot l_2(x)$ og $u_1(x) \cdot u_2(x)$ er like funksjoner på dette samme intervallet, mens $l_1(x) \cdot u_1(x)$ er ulike. Hva kan man si om funksjonene om man erstatter multiplikasjon med addisjon?

   d) Fins det noen funksjoner som er både like og ulike?

2. Beregn integralene med så lite integrasjon som mulig.

   a)

$$\int_{-42}^{42} xdx.$$

   b)

$$\int_{-2}^{2} (x^{2007} + x^{2008} + x^{2009})dx.$$

   c)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \tan x dx.$$

   d)

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)dx.$$

   (Hint: Finn en faktorisering av integranden.)

   e)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)dx.$$

3. a) La f være en kontinuerlig funksjon på $[a, b] \subset \mathbb{R}$ så $f(x) + f(a + b - x) = c \in \mathbb{R}$ for alle $x \in [a, b]$. (Dette er en generalisering av oppgave 1: Hvis $a + b = c = 0$, er f en odde funksjon.) Vis at

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}(b - a)c.$$

   b) Finn

$$\int_{-1}^{1} \arccos(x^3)dx.$$

c) Finn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+e^{\sin x}}.$$

d) Finn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+e^{\cos(x+2009)}}.$$

4. Beregn integralene uten å regne.

a)

$$\int_{1}^{11} (\log(x) + \log(\frac{\pi}{x}))dx.$$

b)

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^2 x dx. \text{ (Hint: Sammenlign integralet med } \int_{0}^{2\pi} \cos^2 x dx.\text{)}$$

c)

$$\int_{0}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

d)

$$\int_{1}^{2008} \frac{\sqrt{\log(x)}}{\sqrt{\log(2009-x)} + \sqrt{\log(x)}} dx.$$

5. For hver $c \in (0, \pi]$ definerer vi $T(c)$ som området avgrensa av de vertikale linjene $x = c$ og $x = 2c$, x-aksen og funksjonen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. La $A(c)$ være arealet av $T(c)$ der vi som vanlig lar områder i 1. kvadrant bidra positivt til arealet mens områder i 4. kvadrant bidrar negativt. Drøft hvilke c som gir størst og minst areal $A(c)$.

6. Definer $f(x) = \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x)$ og $g(x) = \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$. Finn $f'(x)$ og $g'(x)$. Forklar hvorfor den ene funksjonen er konstant på hele $\mathbb{R}$ mens den andre ikke er det.