Kapittel 7

Seksjon 7.1

Oppgave 7.1.1

La sidene til innhegningen være x og y, der y er den delen som står mot låven. Lengden på gjerdet blir $2x + y = 50$, slik at $y = 50 - 2x$. Arealet blir derfor $A = xy = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2$. Setter vi den deriverte lik 0 får vi at

$$A'(x) = 50 - 4x = 0,$$

som gir at $x = 12.5m$, og $y = 50 - 2x = 25m$. Det maksimale arealet blir derfor $12.5 \times 25m^2 = 312.5m^2$.

Oppgave 7.1.4

På 1 time kjører bilen v mil, slik at bensinforbruket per mil blir $\frac{2+0.08v^2}{v} = \frac{2}{v} + 0.08v$. Deriverer vi dette får vi $-\frac{2}{v^2} + 0.08$. Setter vi dette lik 0 får vi at $\frac{2}{v^2} = 0.08$, som gir at $v^2 = 25$, og deretter $v = 5$. Dette må bli et minimum, siden bensinforbruket per mil går mot uendelig både når $v \to 0$, og når $v \to \infty$. Vi har altså minimum bensinforbruk per mil for $v = 5$ mil per time, eller $50km/h$.

Oppgave 7.1.7

Høyden på renna er $20 \sin\theta$, og bredden på siderenna er $20 \cos\theta$. Arealet av tverrsnittet blir dermed

$$20 \times 20 \sin\theta + 20 \sin\theta \times 20 \cos\theta = 400 \sin\theta(1 + \cos\theta) = 200 \sin(2\theta) + 400 \sin\theta.$$

Deriverer vi dette får vi $400(\cos(2\theta) + \cos\theta)$. Skal dette bli 0 må $\cos(2\theta) + \cos\theta = 0$, som også kan skrives $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$. Løser vi denne finner vi at $\cos\theta = -1$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Førstnevnte gir tverrsnitt 0, som jo er et minimumspunkt for arealet. Sistnevnte må være et maksimum, der $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Oppgave 7.1.9

a)

La sidene i rektanglet være x og y. Skal omkretsen være c så må $2x + 2y = c$, som gir at $y = \frac{1}{2}c - x$. Arealet blir da $A = xy = x\left(\frac{1}{2}c - x\right) = \frac{1}{2}cx - x^2$, og vi får at $A'(x) = \frac{1}{2}c - 2x$. Skal dette være 0 må $x = \frac{c}{4}$, som svarer til at alle sidene er like lange, altså at vi har et kvadrat.

b)

La sidene i pakken være x, y, z. På grunn av a) kan vi anta at grunnflaten er kvadratisk, siden vi er ute etter å maksimere volum. Summen av omkretsen og største lengde blir da $4x + z$. Setter vi dette til 300 må $z = 300 - 4x$, og volumet blir derfor $V = x^2(300 - 4x) = 300x^2 - 4x^3$. Vi får nå at $V'(x) = 600x - 12x^2 = 12x(50 - x)$, og skal dette være 0 må enten $x = 0$ eller $x = 50$. Det er sistnevnte som må maksimere volumet, siden den første gir volum 0. Vi får altså at $x = y = 50$, og $z = 300 - 4x = 100$.

Oppgave 7.1.15

La θ være vinkelen mellom diameteren og linjen fra sentrum i sirkelen til et av de øverste hjørnene på trapesen. Det er klart at høyden på trapesen er $r \sin\theta$, og at øverste kant på trapesen har lengde $2r\cos\theta$. Siden nederste kant på trapesen har lengde $2r$, så blir arealet lik

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2r + 2r\cos\theta)r\sin\theta = r^2\sin\theta(\cos\theta + 1) = \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta) + r^2\sin\theta.$$

Vi får da at

$$A'(\theta) = r^2(\cos(2\theta) + \cos\theta).$$

Skal dette bli 0 må $\cos(2\theta) + \cos\theta = 0$, som også kan skrives $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$. Løser vi denne finner vi at $\cos\theta = -1$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Førstnevnte gir areal 0, som jo er et minimumspunkt for arealet. Vi må ha et maksimum for en θ, siden enhver kontinuerlig funksjon på et begrenset intervall har maksimum og minimum. Videre kan ikke endepunktene i intervallet ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) våre maksimum, siden for disse punktene blir arealet 0. Derfor må maksimum inntreffe i et indre punkt, som er det punktet vi har funnet. For maksimum finner vi at $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, som gir areal

$$r^2\sin\theta(\cos\theta + 1) = r^2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Seksjon 7.2

Oppgave 7.2.7

La z være lengden på det opplyste området, og x være avstanden fra gjerdet. Vi har da at $\frac{\frac{z}{2}}{x} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, som gir at $z = \frac{2}{3}\sqrt{3}x$. Dette gir at $z'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}x'(t)$, og hvis $x'(t) = 1$ som angitt i oppgaven, så blir $z'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Oppgave 7.2.13

La x være avstanden mellom bilen og stolpen, og la z være avstanden mellom bilen og radaren. Avstanden til radaren er $\sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Vi har også at $x^2 = z^2 - 7^2$. Deriverer vi begge sider får vi $2x(t)x'(t) = 2z(t)z'(t)$, som gir at $x'(5) = \frac{z(5)z'(5)}{x(5)} = \frac{25\times 30}{24} = 31.25m/s$.

Seksjon 7.4

Oppgave 7.4.8

Bruker vi kjerneregelen en gang har vi jo $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$. Deriverer vi denne som en brøk får vi

$$g''(x) = \frac{0 - f''[g(x)]g'(x)}{(f'[g(x)])^2} = -\frac{f''[g(x)]g'(x)}{(f'[g(x)])^2}$$

Merk at vi kan skrive dette enda mer kompakt som $g'(x) = -\frac{f''[g(x)]}{(f'[g(x)])^3}$ ved å substituere $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$. Med $f(x) = \sin x$ har vi $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Vi har også at $f(\pi/6) = 1/2$, slik at $g(1/2) = \pi/6$, og dermed

$$\begin{aligned} f'(g(1/2)) &= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \\ f''(g(1/2)) &= -\sin(\pi/6) = -1/2. \end{aligned}$$

Dermed blir

$$g''(1/2) = -\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Oppgave 7.4.10

Med $f(x) = xe^{(1-x^2)/2}$ har vi at $f'(x) = (1-x^2)e^{(1-x^2)/2}$. Det er klart at $f'(x) > 0$ på $(-1,1)$, slik at f er injektiv på $(-1,1)$. Den omvendte funksjonen er definert på $[f(-1), f(1)] = [-1,1]$. Vi får til slutt at

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 1^-}(1-y)[g'(y)]^2 &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-f(x)}{[f'(x)]^2} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-xe^{(1-x^2)/2}}{(1-x^2)^2 e^{1-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-xe^{(1-x^2)/2}}{(1-x^2)^2} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(-1+x^2)e^{(1-x^2)/2}}{-4x(1-x^2)} \\ &= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 1^-}\frac{-1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Seksjon 7.6

Oppgave 7.6.7

a)

Vi skriver om likningen til

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x = 0,$$

og regner ut at

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) &= \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} - 2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0 \\ f(1) &= 1 - 2\arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0. \end{aligned}$$

Det følger derfor fra skjæringssetningen at likningen har minst en løsning. Vi regner også ut at

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} - 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-2x-x^2-2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-2x-3x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Det er raskt å sjekke at andregradlikningen i telleren ikke har reelle røtter, slik at $f'(x) < 0$ overalt. Siden f dermed er strengt avtagende, så finnes det bare en løsning av likningen i det gitte intervallet.

b)

Vi har at $\phi'(x) = \frac{\frac{(1+x)^2}{1+x^2} - 2(1+x)\arctan x}{(1+x)^4} = \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x}{(1+x)^3}$. Vi vet fra a) at telleren er > 0 for $x < x_0$, og < 0 for $x > x_0$. Tar vi med nevneren i betraktningen ser vi at f er avtagende på $(\infty, -1)$ og $[x_0, \infty)$, og voksende på $(-1, x_0]$.

På $(-1, \infty)$ ser vi fra fortegnet til den deriverte at x_0 er et maksimum. Videre ser at ϕ er negativ for $x < -1$, og siden $\phi(x_0)$ er positiv, ser vi at x_0 også er et globalt maksimum. Maksimumsverdien blir $\phi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2}$.

Oppgave 7.6.13

a)

Derivasjon gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Siden de to funksjonene har samme derivert så blir $f'(x) - g'(x) = 0$, slik at $f(x) - g(x)$ blir en konstant. $f(x) - g(x)$ er imidlertid ikke definert for $x = 0$, slik at vi kan bare slutte at $f(x) - g(x)$ er konstant på $(-\infty, 0)$, og konstant på $(0, \infty)$. Det er imidlertid klart at $\lim_{x\to 0^-}(f(x) - g(x)) = -\frac{\pi}{2}$, og $\lim_{x\to 0^+}(f(x) - g(x)) = \frac{\pi}{2}$. Derfor er $f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{2}$ for $x < 0$, og $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2}$ for $x > 0$

b)

Linjestykket som forbinder punktene $(x_0, y_0) = (n, \arctan n)$ og $(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{n}, \arctan\left[-\frac{1}{n}\right]\right)$ er gitt ved $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, som blir

$$y - \arctan n = \frac{\arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - \arctan n}{-\frac{1}{n} - n}(x - n) = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{n} - n}(x - n),$$

der vi har brukt at

$$\begin{aligned} &\arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - \arctan n \\ &= \arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - (-\arctan(-n)) = f(-n) - g(-n) = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

der vi hra brukt at $f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{2}$ på $(-\infty,0)$ fra a). Setter vi inn $(x,y)=(x_n,0)$ og ganger opp med $\frac{1}{n}+n$ får vi at

$$-\arctan n\left(\frac{1}{n}+n\right)=\frac{\pi}{2}(x_n-n),$$

som gir at $x_n=n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)-\frac{2\arctan n}{n\pi}$, som er uttrykket vi skulle frem til. Grenseverdien blir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)-\frac{2\arctan n}{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{\pi}\arctan n}{\frac{1}{n}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}}\\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Oppgave 7.6.15

a)

La d være den horisontale kateten i den rettvinklede trekanten med vertikal katet x, og med vinkel 30°. Vi har da at $\tan(30°)=\frac{x}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, slik at $d=\sqrt{3}x$. Vi ser også at vinkelen $v(x)$ kan skrives som en differens av to vinkler, nemlig som vinklene i de rettvinklede trekantene med vertikal katet x og horisontal katet $60+d$ og $10+d$, respektive:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \arctan\left(\frac{60+d}{x}\right)-\arctan\left(\frac{10+d}{x}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{60+\sqrt{3}x}{x}\right)-\arctan\left(\frac{10+\sqrt{3}x}{x}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)-\arctan\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{-\frac{60}{x^2}}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{-\frac{10}{x^2}}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{10}{x^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

c)

Setter vi $v'(x)=0$ så må

$$\frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2},$$

som gir at

$$6+6\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2=1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2.$$

Ganger vi opp med x^2 og flytter alt over på en side får vi

$$3600+120\sqrt{3}x+3x^2-600-120\sqrt{3}x-18x^2-5x^2=-20x^2+3000=0.$$

Løser vi dette finner vi at $x^2=150$, og $x=\pm 5\sqrt{2}$. Det er klart at $x=5\sqrt{2}$ blir et maksimum: $v(x)$ går mot 0 når x går mot 0 og mot ∞, slik at funksjonen er begrenset. Dermed må også v ha et maksimum i et indre punkt.