Løsningsforslag uke 35, 2016

Vi minner om konjugasjonsreglene:

Proposisjon 3.1.5. *Hvis z og w er komplekse tall, så er*

(i) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$,

(ii) $\overline{z} - \overline{w} = \overline{z-w}$,

(iii) $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$,

(iv) $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$ *for* $w \neq 0$.

Oppgave 3.1.8. Bevis regnereglene for konjugasjon (3.1.5).

Løsning. Skriv $z = a + ib$ og $w = c + id$ for reelle tall a, b, c og d. Regelen (iii) er vist i boken, så vi nøyer oss med de tre andre.

Bevisene for (i) og (ii) er så like at vi tillater oss å skrive $\pm$ og dermed ta begge bevisene i ett. Venstresiden i (i) og (ii) blir

$$\begin{aligned}\overline{z} \pm \overline{w} &= (a - ib) \pm (c - id)\\ &= a \pm c - i(b \pm d),\end{aligned}$$

og høyresiden er lik

$$\begin{aligned}\overline{z \pm w} &= \overline{(a + ib) \pm (c + id)}\\ &= \overline{a \pm c + i(b \pm d)}\\ &= a \pm c - i(b \pm d).\end{aligned}$$

Siden disse uttrykkene er like, er (i) og (ii) bevist. Alternativt, anta at vi har bevist (i) først. Da kan vi bevise (ii) ved å utnytte at $\overline{z} - \overline{w} = \overline{z} + \overline{-w} = \overline{z + (-w)}$.

For (iv) er trikset å utvide brøken med den konjugerte til nevneren. Venstresiden blir da

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \frac{a - ib}{c - id}\\ &= \frac{a(c + id) - ib(c + id)}{(c - id)(c + id)}\\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Martin Helsø
martibhe@math.uio.no
B1220, Niels Henrik Abels hus 26. august 2016

Ved en tilsvarende utregning, eller [Kalkulus, Proposisjon 3.1.4(iv)], har vi at

$$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Det følger dermed at $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$. ■

Oppgave 3.1.9. Vis at $\overline{z}w$ og $z\overline{w}$ er konjugerte.

Løsning. Alt vi trenger å gjøre er å regne ut at $\overline{\overline{z}w} = z\overline{w}$:

$$\overline{\overline{z}w} = \overline{\overline{z}}\,\overline{w} = z\overline{w}$$

Den første likheten er egenskap (iii) i Proposisjon 3.1.5. Den andre likheten holder fordi $\overline{\overline{z}} = z$ for alle komplekse tall z. ■

Oppgave 3.2.10. Skisser følgende områder i det komplekse planet:

a) $\{z : |z| = 1\}$,

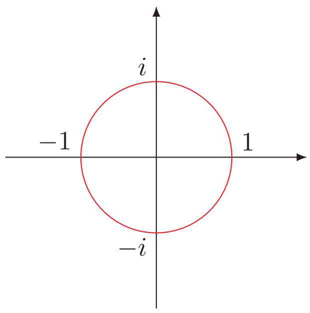
b) $\{z : |z-1| < 2\}$,

c) $\left\{z : |z-(i+1)| \geqslant \frac{1}{2}\right\}$,

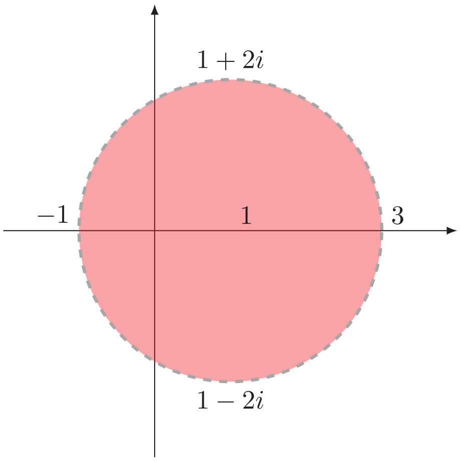
d) $\{z : |z-2| < |z-i+2|\}$.

Løsning. Disse oppgavene kan løses med regning. Da setter man $z = x+iy$ og behandler uttrykket algebraisk slik at man finner en passende parametrisering av området. Det er derimot mye enklere å utnytte det geometriske tolkningen av $|z-w|$ som *avstanden mellom de to komplekse tallene z og w.*

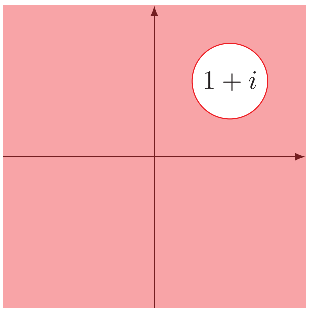
a) Siden $|z|$ kan skrives som $|z-0|$ er dette mengden av alle punkter som har avstand 1 fra origo. Mengden er altså sirkelen med sentrum i origo og radius 1.



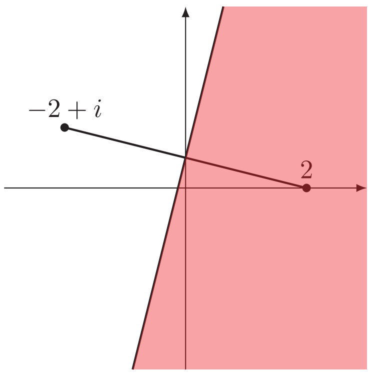
b) Dette er mengden av alle punkter som har avstand *mindre enn* 2 fra punktet 1. Det vil si alle punkter *innenfor* sirkelen med sentrum i 1 og radius 2. Siden ulikheten $<$ er streng, er ikke sirkelranden med i området.



c) Dette området er mengden av alle punkter som har avstand *større enn eller lik* $\frac{1}{2}$ fra punktet $1+i$. Mengden er dermed alle punkter *utenfor* sirkelen med sentrum i $1+i$ og radius $\frac{1}{2}$. Siden ulikheten $\geqslant$ ikke er streng, er sirkelranden med i området.



d) For å kunne bruke den geometriske tolkningen vår må vi først skrive om $|z-i+2| = |z-(-2+i)|$. Området er altså de punktene som har kortere avstand til punktet 2 enn de har til punktet $-2+i$. Punktene som har lik avstand til 2 og $-2+i$ ligger på midtnormalen til linjestykket mellom 2 og $-2+i$. Mengden vi er ute etter er dermed punktene som ligger nedenfor denne midtnormalen.



■

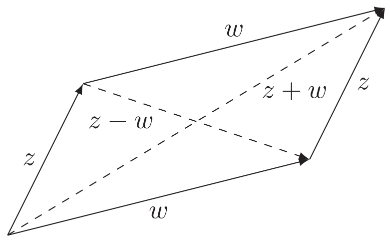
Oppgave 3.2.15. Vis at $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ for alle komplekse tall z og w. Forklar at dette viser at summen av kvadratene til sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene til diagonalene.

Løsning. Den første delen av oppgaven er begynne med venstresiden av den oppgitte likheten og regne:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &\overset{1}{=} (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&\overset{2}{=} (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&\overset{3}{=} (z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}) + (z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w}) \\
&\overset{4}{=} 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\
&\overset{5}{=} 2|z|^2 + 2|w|^2.
\end{aligned}$$

I steg 1 og 5 har vi brukt at $|z|^2 = z\overline{z}$ for alle komplekse tall z. I steg 2 har vi brukt egenskapene (i) og (ii) i Proposisjon 3.1.5. I steg 3 og 4 har vi ganget ut parentesene og ryddet opp i uttrykket.

For den andre delen av oppgaven, betrakt et parallellogram der sidene er z og w betraktet som vektorer. Ved de vanlige reglene for vektorer får vi at diagonalene kan uttrykkes som henholdsvis $z+w$ og $z-w$.



■

Referanser

[Kalkulus] Tom Lindstrøm. *Kalkulus.* 4. utg. Universitetsforlaget, 2006.