Grublegruppe - Uke 2.
Tirsdag 7.september, 16.15-18.00

Oppgave 1. Bruk definisjonen av konvergens for en følge til å vise at:

(a). $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2010n^2+1} = 0.$ (b). $\lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}.$ (c). $\lim_{n\to\infty} \frac{2000}{\sqrt{2010+n}} = 0.$

Oppgave 2.

(a). Undersøk om følgen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = (-1)^n$ konvergerer eller divergerer.
(b). Vis at enhver konvergent følge er begrenset. Stemmer det at alle begrensede følger er konvergente?

Oppgave 3. La $a_1 = \sqrt{2}$ og $a_n = (\sqrt{2})^{a_{n-1}}$. Vis at følgen $\{a_n\}$ konvergerer og regn ut $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Oppgave 4. Betrakt følgen $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots$

(a). Vis at følgen ikke konvergerer mot 0.
(b). Finnes det noen valg for ϵ slik at følgen konvergerer mot 0?

Oppgave 6. La $\{a_n\}$ og $\{c_n\}$ være konvergente følger som konvergerer mot samme verdi L. Vis at hvis $\{b_n\}$ er en følge slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$, for alle $n \in \mathbb{N}$, da konvergerer også $\{b_n\}$ mot L. Bruk dette til å vise at $\lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{n!} = 0$.

Oppgave 7. Diskuter definisjonen av en Cauchy følge med den som sitter nærmest deg.

(a). Sjekk at følgen $\{\frac{n+1}{n}\}$ er en Cauchy følge.
(b). Vis at enhver konvergent følge er Cauchy.
(c). La $\{a_n\}$ være en følge slik at $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$. Er følgen $\{a_n\}$ Cauchy?

Oppgave 8. En mengde A er sies å være *tellbart uendelig* hvis det finnes en funksjon $f : \mathbb{N} \to A$ slik at:
(i). $f(n) = f(m)$ fører til at $n = m$.
(ii). For hver $a \in A$, finnes det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $f(n) = a$.

(a). Forklar at en mengde A er tellbar uendelig hvis og bare hvis $A = \{a_n\}$.
(b). Vis at mengden av partall, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er alle tellbare uendelige mengder.
(c). Er $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ tellbare uendelige mengder?

Oppgave 9. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som oppfyller kravene:
(i). $f(0) = 1$.
(ii). $f(f(n)) = n$, for alle $n \in \mathbb{Z}$.
(iii). $f(f(n+2)+2) = n$, for alle $n \in \mathbb{Z}$.