Et løsningsforslag

Fredrik Meyer

21. oktober 2016

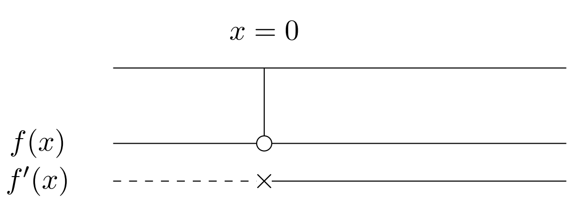
Husk at et kritisk punkt til en funksjon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er et punkt $c \in \mathbb{R}$ som er et lokalt maksimum eller minimum for $f(x)$. Dette skjer når enten c er et av endepunktene til $[a, b]$ eller når $f'(c) = 0$ eller når f ikke er deriverbar i c.

Oppgave 1 (Oppgave 6.4.1e)**.** La $f(x) = x+3x^{2/3}$ på intervallet $[-\frac{1}{2}, 1$. Finn de kritiske punktene til $f(x)$ og bestem maksimum og minimumspunkter. $\blacksquare$

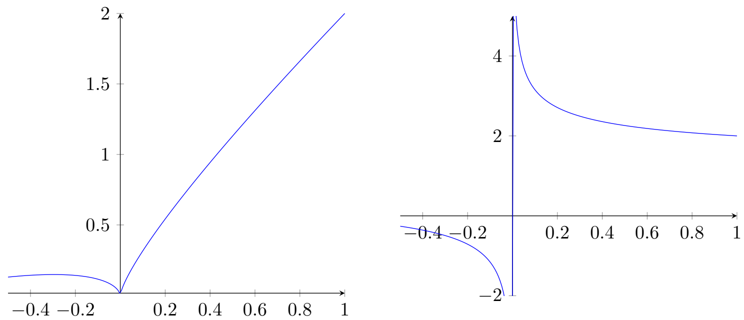
Løsning 1. Selv om oppgaven ikke spør om, er det ofte en god ide å finne nullpunktene til en funksjon først, slik at vi kan få et bedre bilde av hvordan den ser ut. Så vi starter med å finne nullpunktene.

Anta at x er et nullpunkt. Da er $f(x) = x + 3x^{2/3} = 0$. Først ser vi at hvis $x = 0$, så har vi et nullpunkt. Anta så at $x \neq 0$. Da kan vi dele på x, og vi får at $1 + 3x^{-1/3} = 0$. Dette omformer vi til $3x^{-1/3} = -1 \Leftrightarrow 1/x = -1/27 \Leftarrow x = -27$. Funksjonen har altså to nullpunkter, men det ene er langt utenfor intervallet. Se Figure 1.

Deriverer vi funksjonen får vi $f'(x) = 1 + 2x^{-1/3}$. Krever vi at denne skal være null, finner vi at $x = -8$. Dette er utenfor definisjonsområdet, så den deriverte har ingen nullpunkter i $[-\frac{1}{2}, 1]$. Derimot har vi et problem når $x = 0$. I $x = 0$ er ikke $f'(x)$ kontinuerlig, så $x = 0$ er et kritisk punkt. Den deriverte har ingen nullpunkter på intervallet, men vi vet ennå ikke om



Figur 1: Fortegnslinjer for $f(x) = x + 3x^{2/3}$.



(a) Et plott av $f(x)$.

(b) Plott av $f'(x)$.

hvor den er positiv eller negativ. For å finne dette ut kan vi sette inn for to verdier på begge sider av $x = 0$. Setter vi inn $x = -\frac{1}{2}$ får vi $f'(-frac12) = 1 - 2^{4/3} < 0$. Setter vi inn for $x = 1$, får vi $f'(1) = 1 + 2 = 3$. Dermed er den deriverte negativ for $x < 0$ og positiv for $x > 0$.

Fra figuren er det nå lett å finne maksimum og minimumspunktene til f. Siden $f(x)$ er positiv for alle $x \neq 0$, må $x = 0$ være det eneste nullpunktet. Siden funksjonen synker for negative x og øker for positive x, er begge endepunktene lokale maksima. For $x = -frac12$ er $f(-frac12) \approx 1.39$. For $x = 1$ har vi $f(1) = 1 + 2 = 3$, som er større. Dermed er 3 maksimumverdien for $f(x)$ og 0 er minimumverdien.

Se Figure 2a for et plott av $f(x)$.

$\heartsuit$