

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

DELEKSAMEN I: MAT1100 – KALKULUS.
EKSAMENSDAG: FREDAG 9.10.2009.
TID FOR EKSAMEN: 15.00–17.00.
VEDLEGG: FORMELSAMLING.
TILLATTE HJELPEMIDLER: INGEN.
OPPGAVESETTET ER PÅ 4 SIDER.

KANDIDATNR. _____

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke “straffet” for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 8$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Da er z lik:

- ☐ $-4 + 4i\sqrt{3}$
- ☐ $-4 - 4i\sqrt{3}$
- ☐ $-4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$
- ☐ $-4\sqrt{3} - 4i$
- ☐ $-8 - 8i\sqrt{3}$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -3 + 3i$ har polarkoordinater:

- ☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}$
- ☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- ☐ $r = 3\sqrt{3}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- ☐ $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$
- ☐ $r = 3\sqrt{3}, \theta = \frac{5\pi}{6}$

3. (2 poeng) Dersom $z = \overline{(2+i)(3-i)}$, så er:

- ☐ $z = 5 - i$
- ☐ $z = 7 - i$
- ☐ $z = 7 + 5i$
- ☐ $z = 7 + i$
- ☐ $z = 12 - 3i$

4. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \cos \sqrt{1-x^2}$ er:

- ☐ $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \sin \sqrt{1-x^2}$
- ☐ $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \sin \sqrt{1-x^2}$
- ☐ $2x \sin \sqrt{1-x^2}$
- ☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin \sqrt{1-x^2}$
- ☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin x$

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = 2\sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{x})$ er:

- ☐ $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$
- ☐ $\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^4 - 3x^6 + 7x^7}{7x^4 + 3x^6 + 6x^7}$ er lik:

- ☐ $\frac{6}{7}$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{7}{6}$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - 1}{x}$ er lik:

- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ 1

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ er lik:

- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 2
- ☐ 1

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{5}$, $x > 2$ er:

- ☐ $g(x) = e^{-5x+2}$
- ☐ Det finnes ingen omvendt funksjon
- ☐ $g(x) = e^{5x-2}$
- ☐ $g(x) = 5 \ln(x+2)$
- ☐ $g(x) = e^{5x} + 2$

10. (2 poeng) Funksjonen $f(x) = x^2 - 2x$ er injektiv på intervallet:

- ☐ $(-\infty, 1]$
- ☐ $[-1, \infty)$
- ☐ hele \mathbb{R}
- ☐ $[0, \infty)$
- ☐ $[0, 2]$

11. (3 poeng) Den deriverte til $x^{\sin x}$ er lik:

- ☐ $x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$
- ☐ $\cos(x) x^{\sin x - 1}$
- ☐ $x^{\sin x} \left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{x} \right)$
- ☐ $-x^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $x^{\sin x} \ln(\sin x)$

12. (3 poeng) Det *reelle* tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ har $z = 1 + i$ som rot. De andre røttene er:

- ☐ $1 - i$ og 3
- ☐ $1 - i$ og i
- ☐ $1 - i$ og 2
- ☐ $1 - i$ og -3
- ☐ Har ikke nok informasjon til å finne dem

13. (3 poeng) Anta at f er en deriverbar funksjon med $f(x) > 0$.

La $h(x) = f(x) \ln f(x)$. Da er den deriverte, $h'(x)$ lik:

- ☐ $f'(x) \ln f(x)$
- ☐ $\frac{\ln f(x)}{f(x)} f'(x)$
- ☐ $\ln f(x) + f'(x)$
- ☐ $f'(x)(\ln f(x) + 1)$
- ☐ $\frac{\ln f(x)}{f(x)} f'(x)$

14. (3 poeng) Løsningene til annengradsligningen $z^2 - 4z + 6 = 0$ er:

- ☐ $1 \pm i\sqrt{2}$
- ☐ $2 \pm i\sqrt{2}$
- ☐ $2 \pm i$
- ☐ $2 \pm i\sqrt{3}$
- ☐ Ligningen har ingen komplekse løsninger

15. (3 poeng) Når $x \rightarrow \infty$, har funksjonen $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x}$ asymptoten:

- ☐ $y = 2x + \frac{1}{2}$
- ☐ Den har ingen asymptote
- ☐ $y = x + \frac{1}{2}$
- ☐ $y = 2x + 1$
- ☐ $y = x + 2$

16. (3 poeng) Funksjonen f er definert for $x \geq 0$ ved $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Funksjonen er konkav på mengden:

- ☐ $[\frac{1}{6}, \infty)$
- ☐ Ingen steder
- ☐ $[0, \infty)$
- ☐ $[0, 6]$
- ☐ $[6, \infty)$

17. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \\ 1 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$. Da er

$f'(1)$ lik:

- ☐ 1
- ☐ eksisterer ikke
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

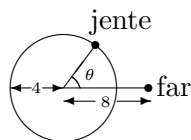
18. (3 poeng) Du skal bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at følgen $x_n = \frac{3n-5}{2n}$ har grenseverdi $\frac{3}{2}$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor stor må du velge N for at $|x_n - \frac{3}{2}| < \epsilon$ når $n \geq N$?

- ☐ større enn $\min\{\frac{\epsilon}{4}, 1\}$
- ☐ større enn $\frac{1}{\epsilon}$
- ☐ større enn $\max\{\epsilon^2, 1\}$
- ☐ større enn $\frac{5}{2\epsilon}$
- ☐ større enn $\frac{3}{5\sqrt{\epsilon}}$

19. (3 poeng) En eske skal ha kvadratisk bunn, men ingen topp. Volumet til boksen skal være 4 dm^3 . Hvor høy må boksen være for at overflatearealet (bunn+sidevegger) skal bli minst mulig?

- ☐ $\sqrt[3]{4} \text{ dm}$
- ☐ $\frac{3}{2} \text{ dm}$
- ☐ 1 dm
- ☐ $\frac{3}{4} \text{ dm}$
- ☐ Vi kan få arealet så lite vi måtte ønske

20. (3 poeng) En jente sitter på en karusell som bruker 4 sekunder på hver omdreining. Stedet hun sitter er 4 m fra karusellens akse. Faren står 8 m fra aksene for å ta et bilde av jenta. Figuren viser situasjonen sett ovenfra. Hvor raskt avtar avstanden mellom de to i det øyeblikket vinkelen θ er $\frac{\pi}{3}$?



- ☐ $\frac{15}{8}\pi \text{ m/s}$
- ☐ $2\sqrt{2}\pi \text{ m/s}$
- ☐ $2\pi \text{ m/s}$
- ☐ $2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$
- ☐ $\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$

SLUTT