# Løsninger problemsett 5, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Jensens ulikhet sier at hvis $f$ er en reell konveks funksjon på et intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, gjelder for alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ og vekter $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ at

$$\frac{\sum a_j f(x_j)}{\sum a_j} \geq f\left(\frac{\sum a_j x_j}{\sum a_j}\right).$$

Den mest brukte varianten er den hvor alle vektene $a_j = \frac{1}{n}$ er like og summerer til 1. Da tar ulikheta formen

$$\frac{1}{n}\sum f(x_j) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum x_j\right).$$

a) Bevis Jensens ulikhet, for eksempel ved induksjon på $n$.

b) Vis at hvis $g$ er konkav istedenfor konveks, men at betingelsene ellers er som i innledninga, gjelder

$$\frac{\sum a_j g(x_j)}{\sum a_j} \leq g\left(\frac{\sum a_j x_j}{\sum a_j}\right).$$

(Hint: Se på funksjonen $-g$.)

c) La $T$ være en trekant med innvendige vinkler $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$. Bruk Jensens ulikhet på funksjonen $\sin x$ til å vise at $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

d) (Eksamen MAT1100 H04.) Løs oppgave 7.1.15 i Kalkulus.

e) Vis at av alle n-goner innskrevet i en gitt sirkel har det regulære størst areal.

f) (Eksempel fra MAT1110.) Vi har en 1 meter lang ståltråd som skal deles i maksimalt tre biter. Hver bit skal så bøyes sammen til et kvadrat. Hva er det minste samlede areal disse kvadratene kan ha?

g) La $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Vis ved hjelp av funksjonen $f(x) = -\log(x)$ AM-GM-ulikheta

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

(Venstresida definerer det aritmetiske gjennomsnittet (mean på engelsk) av $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mens høyresida definerer det geometriske gjennomsnittet av de samme talla.)

h) Et punkt $(x, y, z)$ ligger i første oktant (der $x, y, z > 0$) i rommet og er slik at produktet $xyz$ av koordinatene er lik 1. Hva er den minste mulige avstanden fra punktet til origo?

i) Vis Nesbitts ulikhet: For positive tall $a$, $b$ og $c$ er

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**Løsning:**

a) Dette gjorde vi klokka 16.23-16.34 mandag 28. september.

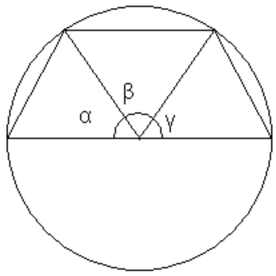
b) Hvis $g$ er konkav, er $f = -g$ konveks. Skriver vi opp hva Jensens ulikhet sier om $f$ og ganger med $-1$ på begge sider får vi det ønska resultatet.

c) Sinusfunksjonen er konkav på $[0, \pi]$ fordi den andrederiverte her er $-\sin x \leq 0$. Siden $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, gir Jensens ulikhet på den konkave funksjonen $\sin x$ at

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og resultatet følger.

d) Trekk hjelpelinjer og navngi vinkler som på den lekre figuren under. Arealet av trapeset er nå




gitt ved $\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Siden $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, ser vi med hjelp av forrige oppgave at arealet er oppad begrensa av $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. Velger vi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ får vi også dette arealet som dermed må være det faktiske maksimum. Dette illustrerer et viktig poeng: Bruker vi Jensens ulikhet, får vi en øvre (eller nedre) skranke for et funksjon på et gitt område, men det er ikke gitt at dette ekstremet faktisk kan oppnås, dette må sjekkes i hvert enkelt tilfelle.

Merk også at vi har vist et litt mer generelt resultat enn vi blei bedt om: For at vi skal ha med et trapes å gjøre, må vi ha $\alpha = \gamma$, men dette har vi ikke brukt på noe sted i beregninene.

e) (Ufullstendig) Trekk hjelpelinjer fra sentrum i sirkelen til alle de $n$ hjørnene og beregn arealet ved å summere arealene av likebeinte trekanter som i forrige oppgave. Jensens ulikhet gir igjen en øvre skranke for arealet av n-gonen, og denne oppnås om man velger alle vinkler fra sentrum like.

f) La bitene ha lengde $x$, $y$ og $z$, alle nødvendigvis i intervallet $[0, 1]$ og slik at $x + y + z = 1$. (Vi regner for enkelhets skyld uten enheter.) Arealet av de 3 kvadratene er nå $A = (\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{4})^2 + (\frac{z}{4})^2$. Funksjonen $f(X) = X^2$ er konveks på hele $\mathbb{R}$, og spesielt på $[0, 1]$ siden $f''(X) \equiv 2 > 0$. Ved Jensens ulikhet er derfor

$$16A = f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(\frac{x+y+z}{3}) = 3f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3},$$

slik at $A \geq \frac{1}{48}$. Dette arealet oppnås ved å velge $x = y = z = \frac{1}{3}$.

g) Hvis $f(x) = -\log x$, er $f''(x) = x^{-2} > 0$ for alle $x > 0$; $f$ er konveks. Da er

$$\frac{1}{n}(\sum -\log(x_j)) \geq -\log(\frac{1}{n}\sum(x_j)).$$

Men siden $\sum \log x_j = \log(\prod x_j)$ sitter vi etter å ha ganga med $-1$ og brukt noen regneregler for logaritmer igjen med

$$\log(\prod x_j^{\frac{1}{n}}) \leq \log(\frac{1}{n}\sum x_j).$$

Anvender vi eksponentialfunksjonen på begge sider (denne er voksende og bevarer dermed ulikheta) får vi AM-GM.

h) Avstanden til origo er gitt ved $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ved forrige oppgave er

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = (xyz)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Dette gir $d \geq \sqrt{3}$, noe som kan oppnås ved å velge $x = y = z = 1$.

i) La $f(x) = \frac{x}{S-x}$ der $S = a+b+c$. Siden $f''(x) = \frac{S}{(S-x)^2} > 0$ for alle $x \in (0, S)$, er $\frac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c) \geq f(\frac{a+b+c}{3}) = f(S/3) = \frac{S/3}{S-S/3} = \frac{1}{2}$. Siden $f(a) = \frac{a}{b+c}$ og tilsvarende for $b$ og $c$, holder Nesbitts ulikhet. Er du interessert i flere bevis, har Wikipedia $4$ andre å by på.

2. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hvilke av følgende påstander om $f$ gjelder alltid? Bevis eller gi et moteksempel.

a) Kontinuerlig og surjektiv $\Rightarrow$ monoton.

b) Kontinuerlig og monoton $\Rightarrow$ surjektiv.

c) Monoton og surjektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.

d) Monoton og injektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.

e) Kontinuerlig og injektiv $\Rightarrow$ monoton.

f) Kontinuerlig og monoton $\Rightarrow$ injektiv.

g) Bijektiv $\Rightarrow$ kontinuerlig.

**Løsning:** De fleste påstandene holder ikke. Har du et annet moteksempel enn det som er presentert her, er det sjølsagt like godt. Spør meg gjerne om du er i tvil.

a) Holder ikke. Se på $x \sin x$.

b) Holder ikke. Se på $e^x$. Denne er også strengt monoton.

c) Holder. Anta for motsigelse at $f$ er diskontinuerlig i $y$. Da kan vi finne en $\epsilon > 0$ slik at det for alle $\delta > 0$ fins en $x$ så $|x-y| < \delta$, men $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. La oss anta at $f$ er voksende og at vi alltid kan finne $x > y$ - tilfellene der $f$ er avtagende og/eller $x < y$ kan gjøres tilsvarende.

Påstand: Det finnes ingen $z$ slik at $f(z) = f(y)+\epsilon/2$. Bevis: Siden $f$ er voksende, er $z > y$. Men $f(x) \geq f(y) + \epsilon > f(y) + \epsilon/2 = f(z)$, så $x > z > y$. Men vi kan finne en slik $x$ så $0 < x - y < \delta$ uansett hvor liten $\delta$ er. Dermed kan det ikke eksistere noen $z$ som tilfredsstiller kravet, og $f$ kan ikke ta verdien $f(y) + \epsilon/2$ som strider mot at $f$ er surjektiv.

d) Holder ikke. Se på funksjonen som er $x$ for negative $x$ og $x + 1$ for $x = 0$ og positive $x$.

e) Holder. Anta at $f$ ikke er monoton. Da kan vi finne $a$, $b$ og $c$ med $a < c < b$ slik at $f(a) > f(c)$ og $f(b) > f(c)$. (Lag ei tegning!) Hvis $f(a) = f(b)$, er ikke funksjonen injektiv. Hvis $f(a) > f(b) > f(c)$, kan vi ved skjæringssetninga finne en $d$ mellom $a$ og $c$ slik at $f(d) = f(b)$. Siden $d \neq b$ (hvorfor?), er ikke funksjonen injektiv. Tilfellet $f(b) > f(a)$ vises tilsvarende, og $f$ må altså være monoton.

f) Holder ikke. Se på en konstant funksjon. Krever vi imidlertid at funksjonen skal være strengt monoton, holder påstanden.

g) Holder ikke. Se på funksjonen som er identiteten (funksjonen $f(x) = x$ kalles ofte så) unntatt for $x = \pm 1$ hvor den er $-x$. Et annet (og stiligere) eksempel som blei foreslått i løpet av timen, er funksjonen som er $x$ for rasjonale tall og $-x$ for irrasjonale tall. Denne er bijektiv, men kun kontinuerlig i 1 punkt. (Hvilket?)