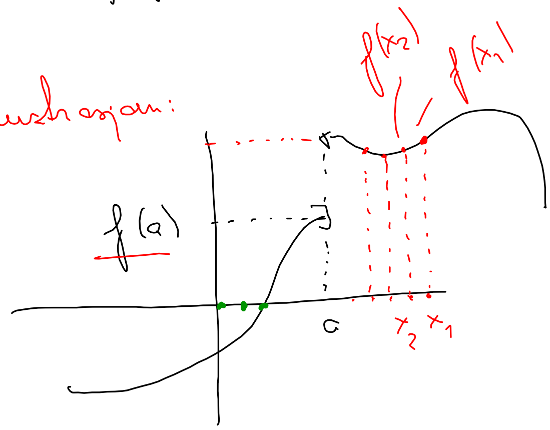
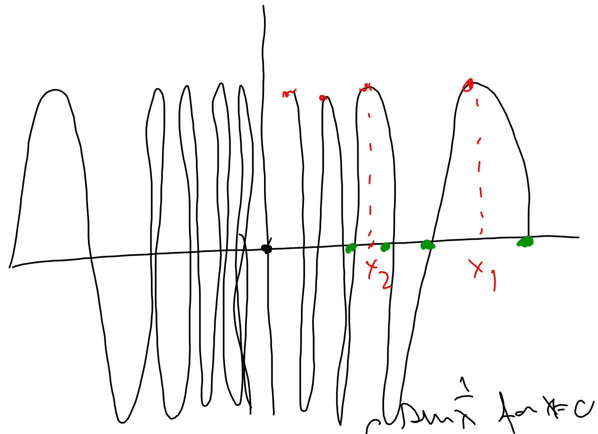
Kontinuitet

Setning: a) Dersom f er kontinuerlig i et punkt a, så vil $f(x_n) \to f(a)$ for alle følger $\{x_n\}$ slik at $x_n \to a$. ← Bevist

b) Dersom f ikke er kontinuerlig i a, så finnes det en følge $\{x_n\}$ slik $x_n \to a$, men $f(x_n) \not\to f(a)$ ← Står i boka.

Illustrasjon:

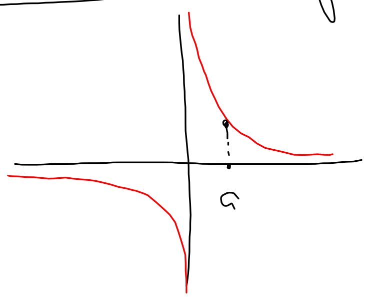


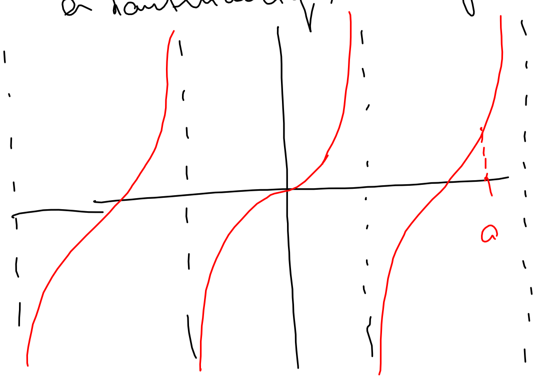


$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Definisjon: En funksjon f er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkter i sitt definisjonsområde.

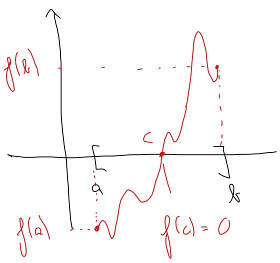
Småskummelt: $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig! · $f(x) = \tan x$





Presisering: $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig, men den er ikke kontinuerlig på $\mathbb{R}$ (siden det finnes punkter der den ikke er definert).

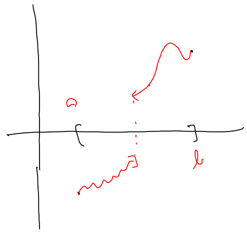
Skjæringssetningen



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

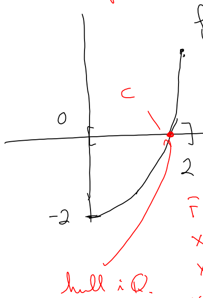
$f(a)<0$, $f(b)>0$

Må det da finnes et punkt $a<c<b$ slik at $f(c)=0$?



Nei!

Hva hvis f er kontinuerlig?



$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$

$f(x)=x^2-2$

$f(0)=-2$

$f(2)=2$

Finner c:

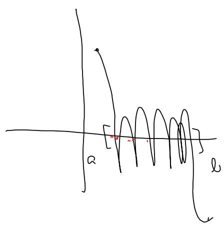
$x^2-2=0$

$x^2=2$

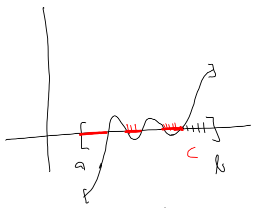
$x=\pm\sqrt{2}$

$c=\sqrt{2}$ ikke i $\mathbb{Q}$

Skjæringssetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn. Da finnes det et punkt $c\in(a,b)$ slik at $f(c)=0$.



Bevis: (Ufor helfelt $f(a)<0$ og $f(b)>0$)



Bruker kompletthetsprinsippet på mengden

$$A=\{x\in[a,b]: f(x)\le 0\}$$

Denne mengden har en minste øvre skranke $c\in(a,b)$.

Må vise at $f(c)=0$. (Gjør dette i to trinn: Vi ser først at $f(c)\ge 0$ og deretter at $f(c)\le 0$, altså er $f(c)=0$)

Betrakt følgen $x_n=c+\frac{1}{n}$. Da er $f(x_n)>0$ og $x_n\to c$.

Siden f er kontinuerlig, $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ge 0$.

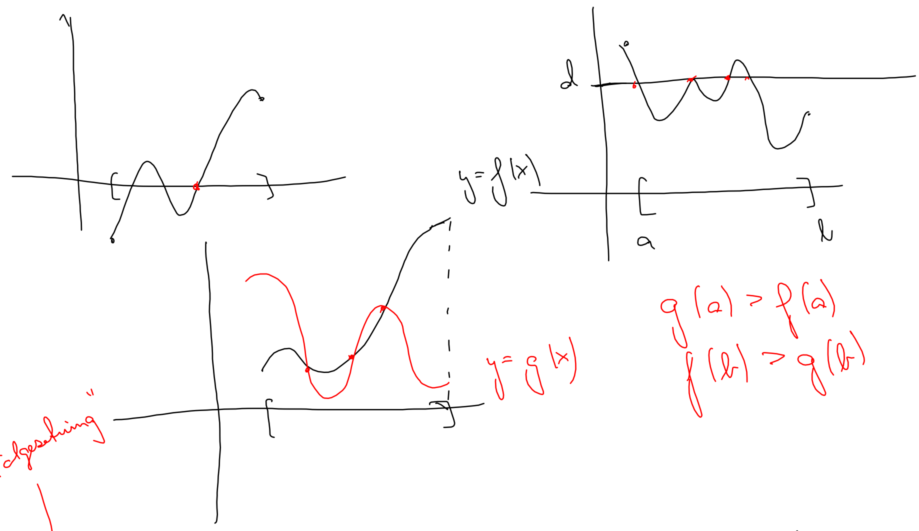
Siden $c=\sup\underbrace{\{x\in[a,b]: f(x)\le 0\}}_{A}$, så finnes det for ethvert tall $n\in\mathbb{N}$ et element z_n slik at $z_n\in A$ og $z_n>c-\frac{1}{n}$. (hvis ikke ville $c-\frac{1}{n}$ vært en øvre skranke for A).

Dermed er $f(z_n)\le 0$ og $z_n\to c$. Siden f er kontinuerlig, er

$$f(c)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)\le 0$$

Vi har dermed vist at $f(c)\ge 0$ og $f(c)\le 0$, og følgelig er $f(c)=\underline{0}$.

Skjæringssetningen på nye eventyr!



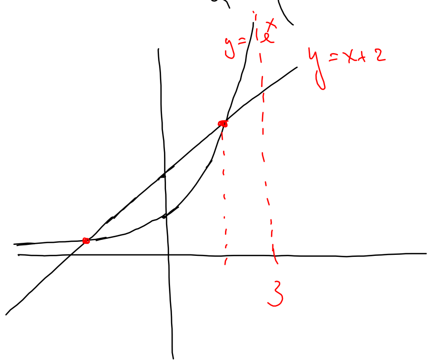
"Følgesetning"

Korollar: Anta at $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner slik at $f(a) < g(a)$ og $f(b) > g(b)$. Da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = g(c)$.

Bevis: La $h(x) = f(x) - g(x)$. Da er h kontinuerlig og $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ og $h(b) = f(b) - g(b) > 0$. Ifølge skjæringssetningen finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at $h(c) = 0$. Men da er

$$f(c) - g(c) = h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c).$$

Eksempel: Vis at det finnes et punkt c slik at $e^c = c + 2$ (dvs at ligningen $e^x = x + 2$ har en løsning)



Ser at $e^3 \geq 2^3 = 8$

$f(x) = e^x$

$f(3) = 8$

$g(3) = 3 + 2 = 5$

$g(x) = x + 2$

På intervallet $[0,3]$ har vi

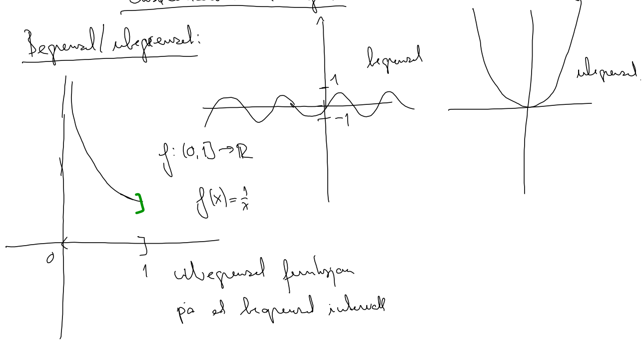
$f(0) = e^0 = 1 < 2 = g(0)$

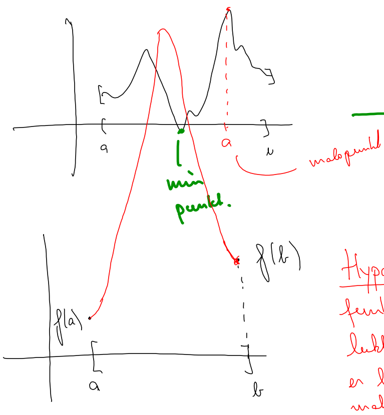
$f(3) = e^3 > 8 > 5 = g(3)$

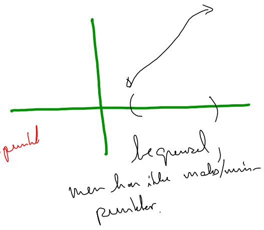
Vi har altså at $f(0) < g(0)$, $f(3) > g(3)$ og dermed sier korollaret vårt at det finnes en $c \in (0,3)$ slik at $f(c) = g(c)$, dvs at $e^c = c + 2$.

Ekstremalverdisetningen

Begrenset/ubegrenset:



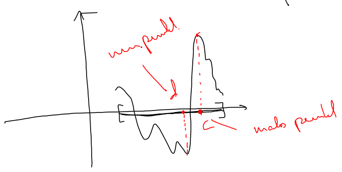


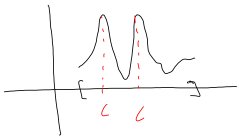


Hypotese: En kontinuerlig funksjon definert på et lukket begrenset intervall er begrenset og har et maksimumspunkt og et minimumspunkt.

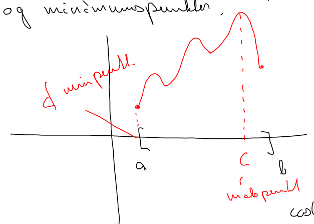
Definisjon: En funksjon $f: A \to \mathbb{R}$ kalles begrenset dersom det finnes et tall M slik $|f(a)| \leq M$.

Definisjon: Et punkt $c \in A$ er et maksimumspunkt for f dersom $f(c) \geq f(a)$ for alle $a \in A$, og $d \in A$ er et minimumspunkt dersom $f(d) \leq f(a)$ for alle $a \in A$.





Ekstremalverdisetningen: Anta $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall $[a,b]$. Da er f begrenset og har maksimums- og minimumspunkter.



Eksempel: Vis at $f(x) = \dfrac{e^{\cos(x^3)}\left(\ln|x+2| + \sqrt{\pi}\right)}{x^{15} + 2e^x}$ } kontinuerlig

har et maksimum på intervallet $\underbrace{[-\sqrt[27]{13\pi}, \sqrt{7}]}_{\text{lukket og begrenset}}$

Svar: f har et maksimumspunkt fordi den er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall (se ekstremalverdisetning)