MAT 1100: Obligatorisk oppgave 2, H-07

Innlevering: *Senest fredag 2. november, 2007, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller med datamaskin, men besvarelsen skal uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Obligen skal leveres med en egen forside som du finner på**

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h07/obliger.xml

(det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På samme side finner du regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk!

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 50% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Det er bare én oppgave. Den bygger på pensum til og med seksjon 8.3 i *Kalkulus.* Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye. Legg merke til at svaret på de fleste punktene er oppgitt. Selv om du ikke har fått til et punkt, kan du godt bruke resultatet derfra i de neste punktene.

Oppgave: Funksjonen $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\arcsin t}{t} & \text{for } t \neq 0 \\ 1 & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuerlig.

b) Vis at

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t}{t^2} & \text{for } t \neq 0 \\ 0 & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

c) Vis at

$$\arcsin t < \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{for } t > 0$$

og

$$\arcsin t > \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{for } t < 0$$

Bruk dette til å avgjøre hvor f er voksende og hvor den er avtagende. Hva er minimumsverdien til f?

d) Funksjonen $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Vis at F er strengt voksende, og avgjør hvor F er konveks og hvor den er konkav.

e) Vis at

$$x < F(x) < \arcsin x \qquad \text{for } x > 0$$

og

$$\arcsin x < F(x) < x \qquad \text{for } x < 0$$

Slutt