Funksjoner av to variable

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

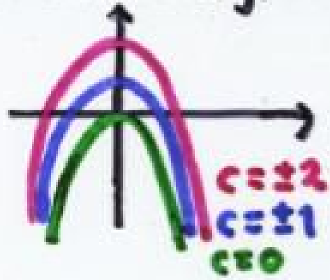
$(x,y) \to f(x,y)$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 4y^2$

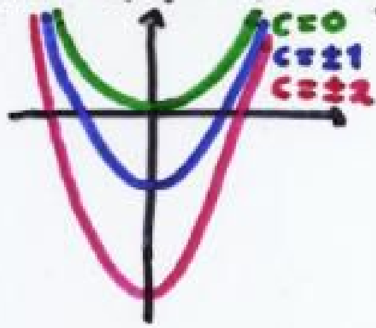
Konturer: Sett inn fast verdi for x eller for y

(snitter grafen med plan som er parallelle med yz-planet eller xz-planet)

Eks: $x = c: \; f(c,y) = c^2 - 4y^2$



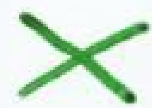
$y = c: \; f(x,c) = x^2 - 4y^2$



Nivåkurver: Sett $f(x,y) = c$ (ser på punkter i samme høyde over xy-planet)

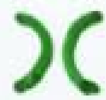
Eks: $f(x,y) = x^2 - 4y^2 = c$

$c = 0: \; x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}x$ Skrå linjer



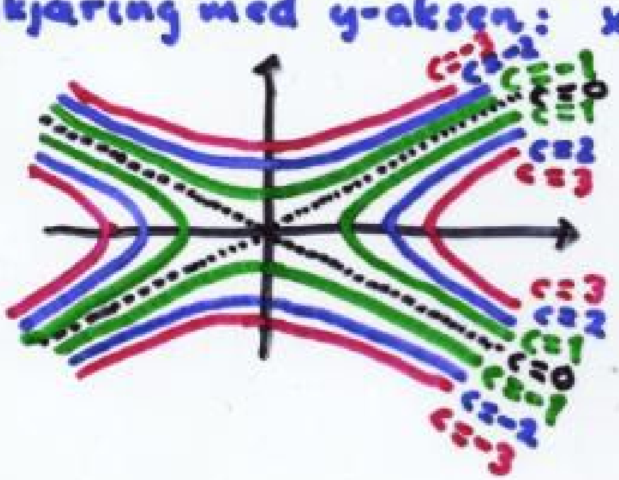
$c > 0: \; x^2 - 4y^2 = c$ Hyperbler

Skjæring med x-aksen: $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{c}$



$c < 0: \; x^2 - 4y^2 = c$ Hyperbler

Skjæring med y-aksen: $x = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{-c}}{2}$ $-c > 0$ siden $c < 0$



Funksjonen vokser når vi går utover x-aksen i begge retninger og avtar utover y-aksen.

Grafen er en "hestesal"

Grenseverdier:

Eks 1: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x^2 + 2xy^3) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1^3 = \underline{\underline{16}}$

Eks 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^4 - 4xy + 3y}{x - y}$ $\underline{\underline{\text{eksisterer ikke}}}$

siden telleren $\to 1$
og nevneren $\to 0^+$ eller 0^-

Eks 3: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3x-y)(2+x-y)}{3x^2 - xy}$ ← "$\frac{0}{0}$"-uttrykk

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(3x-y)}(2+x-y)}{x\cancel{(3x-y)}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+x-y}{x}$ $\underline{\underline{\text{eksisterer ikke}}}$

siden teller $\to 2$
og nevner $\to 0^+$ eller 0^-

Eks 4: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y^2}{x + y^2}$ ← "$\frac{0}{0}$"-uttrykk $\underline{\underline{\text{eksisterer ikke}}}$

fordi når vi nærmer oss punktet $(0,0)$ langs linja $y=0$
får vi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-0}{x+0} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = \underline{1}$

mens når vi nærmer oss punktet $(0,0)$ langs linja $x=0$
får vi $\lim\limits_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} -1 = \underline{-1}$

Oppsummering: For å regne ut $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ prøver vi

- å regne ut $f(a,b)$ hvis f er kontinuerlig
- å faktorisere og forkorte hvis vi får "$\frac{0}{0}$"-uttrykk
- å sjekke om grenseverdien blir forskjellig når vi nærmer oss punktet (a,b) langs ulike baner (s.a. grensen ikke eksisterer)
- å skrive om til polarkoordinater

Retningsderivert til f i punktet $\vec{a}$ og retningen $\vec{r}$:

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$$

Partiellderiverte: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a};\vec{e}_i)$

(Vi deriverer f mhp x_i og later som de andre variablene er konstanter)

Gradient: $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$

Sammenheng mellom gradient og retningsderivert:

Hvis f er C^1 så er $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

(de partiellderiverte eksisterer og er kontinuerlige)

prikkprodukt av vektorer

Geometrisk tolkning av gradienten:

Gradienten $\nabla f(\vec{a})$ peker i den retningen hvor f vokser hurtigst i punktet $\vec{a}$

Maksimal- og minimalpunkt

Nok å sjekke randpunkter, stasjonære punkt ($\nabla f(\vec{a})=0$) og singulære punkt ($\nabla f(\vec{a})$ ikke eksisterer)

Annenderiverttesten (for funksjoner av to variable)

Hvis (a,b) er et stasjonært punkt for $f(x,y)$, la
$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ og la
$D = \det(Hf(a,b)) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

i) $D<0 \Rightarrow (a,b)$ er sadelpunkt
ii) $D>0$ og $A>0 \Rightarrow (a,b)$ er lokalt minimum
iii) $D>0$ og $A<0 \Rightarrow (a,b)$ er lokalt maksimum

($D=0$ gir ingen konklusjon)

Lagranges multiplikatormetode

For å finne eventuelle maksimal- og minimalpunkter for en funksjon $f(\vec{x})$ under bibetingelsen $g(\vec{x}) = c$ er det nok å sjekke de punktene $\vec{a}$ hvor

- $\nabla g(\vec{a}) = 0$ eller
- det finnes et tall λ slik at $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$

(dvs at $\nabla f(\vec{a})$ og $\nabla g(\vec{a})$ er parallelle vektorer)

NB! Metoden gir bare kandidater til maks/min. Du må sjekke/begrunne at de faktisk er maksimal- eller minimalpunkter.

F. eks: Skisser nivåkurvene til f sammen med $g(x,y) = c$
Eller: Bruk annenderiverttesten
Eventuelt: Hvis du bare finner én kandidat, prøv å begrunne at funksjonen må ha et maksimum (eller minimum)

Husk:

Ekstremalverdisetningen:

Enhver kontinuerlig funksjon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har både maksimal- og minimalpunkter på en lukket, begrenset mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$.