Løsningsforslag oblig I høst 2013, Mat 1100

Oppgave 1

a) Teksten sier at

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n^2 + 196}{4}} \quad \text{for } n \geq 1, \text{ og } a_1 < 6$$

b) Hvis følgen konvergerer mot et tall L, får vi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3a_n^2 + 196}{4}}$$

dvs.

$$L = \sqrt{\frac{3L^2 + 196}{4}}$$

$$L^2 = \frac{3L^2 + 196}{4}$$

$$4L^2 = 3L^2 + 196$$

$$L^2 = 196$$

$$L = 14$$

Skal nå bevise at følgen er oppad begrenset av 14.
Vi har $a_1 < 6 < 14$, og hvis $a_n < 14$ får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n^2 + 196}{4}} < \sqrt{\frac{3 \cdot 14^2 + 196}{4}} = 14.$$

Dermed følger (induksjon) at $a_n < 14$ for alle $n \geq 1$.

c) Siden $a_n < 14$ for alle n, får vi $a_n^2 < 14^2 = 196$ for alle n.
Så:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n^2 + 196}{4}} > \sqrt{\frac{3a_n^2 + a_n^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a_n^2}{4}} = a_n$$

Ergo er følgen voksende.

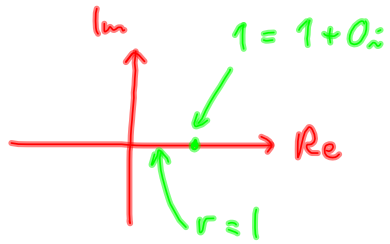
d) Fra b) og c) vet vi at følgen er voksende og oppad begrenset. Dermed konvergerer den ved kompletthetsegenskapen for følger (kompletthetsprinsippet).

e) Regningen vi gjorde under b) viser at hvis følgen konvergerer, så konvergerer den mot 14.
Kombinert med d) får vi nå at følgen faktisk konvergerer mot 14.

Altså: Skatten ligger begravd 14 fot fra døren

Oppgave 2

a) $1 = 1 + 0i = re^{i\theta}$



med $r = 1$ og $\theta = 0$.

Vi finner åttenderøttene:

$$w_0 = \sqrt[8]{r}\, e^{i(\theta/8)} = \sqrt[8]{1}\, e^{i\cdot 0} = 1\, e^{i\cdot 0} = 1$$

$$w_+ = e^{i(2\pi/8)} = e^{i(\pi/4)}$$

$$w_1 = w_+ w_0 = e^{i(\pi/4)} \cdot 1 = e^{i(\pi/4)}$$

$$w_2 = w_+ w_1 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/4)} = e^{i(\pi/2)}$$

$$w_3 = w_+ w_2 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/4 + \pi/2)} = e^{i(3\pi/4)}$$

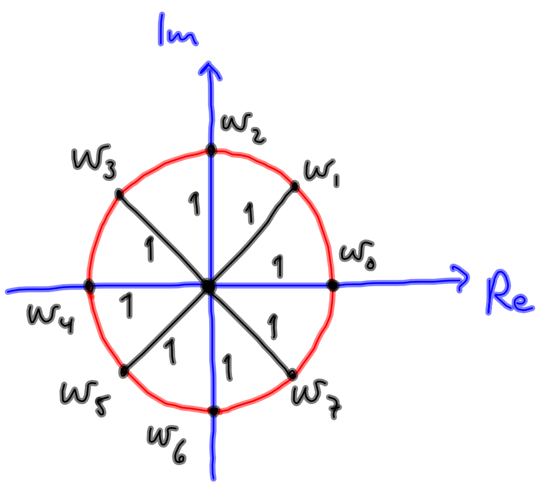
$$w_4 = w_+ w_3 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(3\pi/4)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = e^{i\pi}$$

$$w_5 = w_+ w_4 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i\pi} = e^{i(5\pi/4)}$$

$$w_6 = w_+ w_5 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(5\pi/4)} = e^{i(6\pi/4)} = e^{i(3\pi/2)}$$

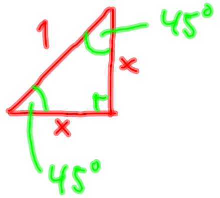
$$w_7 = w_+ w_6 = e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(6\pi/4)} = e^{i(7\pi/4)}$$

b)



Røttene ligger jevnt fordelt på sirkelen med radius 1 og sentrum origo, med w_0 i punktet $1+0i$.

c) Hjelpefigur:



Vi får $x^2 + x^2 = 1^2$ ved Pyth.

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{dvs.} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vi ser da fra figuren under b) at røttene på formen $a + bi$ blir:

$$w_0 = 1 \qquad w_4 = -1$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \qquad w_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$w_2 = i \qquad w_6 = -i$$

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \qquad w_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

[Alternativt kunne vi satt inn i svarene fra b) ved formelen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$]

Oppgave 3

a) $(3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$

Dermed:

$$(3+i)^4 - 11(3+i)^3 + 46(3+i)^2 - 86(3+i) + 60$$

$$= (8+6i)^2 - 11(8+6i)(3+i) + 46(8+6i) - 86(3+i) + 60$$

$$= 64 + 96i + 36i^2 - 11(24 + 8i + 18i + 6i^2) + 368 + 276i$$

$$- 258 - 86i + 60$$

$$= 64 + 96i - 36 - 264 - 286i + 66 + 368 + 276i$$

$$- 258 - 86i + 60$$

$$= 0 + 0i = 0.$$ Ergo er $z = 3 + i$ en løsning.

b) Siden polynomet

$$P(z) = z^4 - 11z^3 + 46z^2 - 86z + 60$$

har reelle koeffisienter, vet vi at det konjugerte

$$\overline{3+i} = 3-i$$

også er en rot. Vi har

$$[z-(3+i)]\cdot[z-(3-i)] = [z-3-i]\cdot[z-3+i]$$

$$= z^2 - 3z + \cancel{i}z - 3z + 9 - \cancel{3}i - \cancel{i}z + \cancel{3}i - i^2$$

$$= z^2 - 6z + 10.$$

Så $z^2-6z+10$ er en faktor i $P(z)$. Polynomdivisjon:

$$(z^4 - 11z^3 + 46z^2 - 86z + 60) : (z^2 - 6z + 10) = z^2 - 5z + 6$$

$$\begin{array}{l}
\underline{z^4 - 6z^3 + 10z^2} \\
\quad -5z^3 + 36z^2 - 86z + 60 \\
\quad \underline{-5z^3 + 30z^2 - 50z} \\
\qquad\qquad 6z^2 - 36z + 60 \\
\qquad\qquad \underline{6z^2 - 36z + 60} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Likningen $z^2 - 5z + 6 = 0$ gir $z = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Ergo: $P(z) = (z-(3+i))\cdot(z-(3-i))\cdot(z-3)\cdot(z-2)$.

Øvrige løsninger: $\underline{\underline{z = 3-i}}$, $\underline{\underline{z=3}}$, $\underline{\underline{z=2}}$.

Oppgave 4

Regelen $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ gjelder ikke generelt for komplekse tall. Overgangen

$$\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

i "beviset" er ikke korrekt.