Problemsett 7, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. Definer for alle hele $n \geq 0$ funksjonen
$$I(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$
Vis at $I(0) = 1$ og at $I(n) = nI(n-1)$. (Hint: Delvis.) Bruk dette til å vise at $I(n) = n!$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   Definisjonen av funksjonen $I(n)$ over antyder at vi kan utvide definisjonsområdet til fakultetsfunksjonen med ikke-heltallige positive verdier. Dette gjøres gjennom *Gammafunksjonen* som er definert ved
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$
for $x > 0$.

2. Storebroren til Gammafunksjonen heter *Betafunksjonen* og er definert ved
$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$
for $x, y > 0$. Vis følgende egenskaper.

   i) $\beta(1, 1) = 1$
   ii) $\beta(x, 1) = \frac{1}{x}$
   iii) $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
   iv) $\beta(x, y) = \frac{x-1}{y}\beta(x-1, y+1)$

   Kan du også vise at
$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1}$$
for heltallige x og y?

3. Det kan vises at (1) gjelder for alle $x, y > 0$. Bruk dette til å finne en verdi for $\Gamma(\frac{1}{2})$. Vis også at
$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!}\sqrt{\pi}$$
for heltallige n.

4. La f være en positiv kontinuerlig funksjon på det lukka intervallet $[0, \infty)$. Ta for deg de 3 påstandene under.

   1) f er begrensa.
   2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
   3) $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$.

   Hvilke påstander impliserer hvilke? Gi bevis eller finn moteksempler.