Grublegruppe 30. okt. 2011: Vektorrom

Ivar Staurseth
ivarsta@math.uio.no

Definisjoner

Definisjon 1. *Et vektorrom over $\mathbb{R}$ består av en abelsk gruppe $(V, +)$, sammen med en **skalar multiplikasjon** $* : \mathbb{R} \times V \to V$ ($*(r, v)$ skrives rv), som tilfredsstiller:*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *for alle* $u, v, w \in V$
2. $u + v = v + u$ *for alle* $u, v \in V$
3. *Det finnes en vektor* $0 \in V$ *slik at* $0 + v = v + 0 = v$ *for alle* $v \in V$
4. *For alle* $v \in V$ *finnes en invers* $-v \in V$ *slik at* $v + (-v) = (-v) + v = 0$

   For alle skalarer $r, s \in \mathbb{R}$ *og alle vektorer* $u, v \in V$ *har vi:*

5. $a(u + v) = au + av$
6. $(a + b)v = av + bv$
7. $(ab)v = a(bv)$
8. $1v = v$

Vi ser at punktene 1-4 er presis det som gjør V til en abelsk (kommutativ) gruppe, mens 5-8 forteller hva vi krever av den ekstra strukturen - vektorromstrukturen over $\mathbb{R}$ - som vi har gitt V. Elementene i V vil vi referere til som **vektorer**. Vi kan definere vektorrom over en generell kropp F[1], men vi skal konsentrere oss om vektorrom over $\mathbb{R}$, **reelle vektorrom**

Merk at det ikke er vektorene i seg selv om bestemmer om det er reelt eller komplekst - men i stedet den skalarmultiplikasjonen vi definerer. De komplekse tallene (under addisjon) kan gi opphav til et reelt vektorrom ved å definere $* : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ på den opplagte måten.

[1] Vi har ikke sagt noe om kropper ennå, så glem dette inntil videre

Definisjon 2. *En delmengde $S \subset V$ som selv er et vektorrom (dvs. oppfyller 1-8 i forrige definisjon, med den samme addisjonen og skalarmultiplikasjonen som er definert på hele V) kalles et* ***underrom*** *av V*

Eksempel 1. $\mathbb{R}^3$ *er et vektorrom over* $\mathbb{R}$ *med den vanlige addisjonen* $(a, b, c) + (x, y, x) = (a + x, b + y, c + z)$ *og multiplikasjonen* $s(x, y, z) = (sx, sy, sz)$

Alle linjer og plan i rommet ($\mathbb{R}^3$) *som går gjennom origo er underrom av* $\mathbb{R}^3$.

Definisjon 3. *La* $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ *være en mengde vektorer i et reelt vektorrom* V. *Underromet som er* ***utspent av W / generert av W*** *er mengden av lineærkombinasjoner av elementene i W:*

$\langle W \rangle$ = *Span(W)* = $\{r_1w_1 + r_2w_2 + ... + r_nw_n | r_i \in \mathbb{R}$ *for* $i = 1, ..., n\}$.

Dersom en delmengde $W \subset V$ *er slik at Span(W) = V, sier vi at* ***W utspenner / genererer vektorrommet V***

Definisjon 4. *En mengde vektorer* $W = \{w_1, w_2, .., w_n\} \subset V$ *er* ***lineært uavhengige*** *dersom likningen (i de ukjente* x_i*-ene):*

$x_1w_1 + ... + x_nw_n = 0$ *kun har en løsning for* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. *Spesielt betyr dette at ingen* w_i *er en lineær kombinasjon av de andre.*

Definisjon 5. *La* V *være et vektorrom. En mengde vektorer* $W = \{w_1, w_2, .., w_n\}$ *som både er lineært uavhengige og som utspenner hele* V *kalles en* ***basis for V***

Antall vektorer i en basis for V *kalles* ***dimensjonen til V****, som ofte skrives dim(V)*

Eksempel 2. *Vektorene* $e_1 = (1, 0)$ *og* $e_2 = (0, 1)$ *utgjør en basis for* $\mathbb{R}^2$, *siden alle vektorer* $(a, b) = ae_1 + be_2$ *er en lineær kombinasjon av disse. Men det finnes mange flere, faktisk vil alle par av vektorer i* $\mathbb{R}^2$ *som er lineært* *uavhengige (i planet betyr det at den ene **ikke** er et multiplum av den andre) utspenne hele* $\mathbb{R}^2$ *, dvs. være en basis for* $\mathbb{R}^2$ *som reelt vektorrom.*

Generelt har vi:

Teorem 1. *La V være et vektorrom av dimensjon n. Da vil ethvert sett av n lineært uavhengige vektorer i V være en basis for V*

.

Teorem 2. *Et reelt vektorrom V av endelig dimensjon n er på en naturlig måte isomorf med $\mathbb{R}^n$. Vi velger (og holder oss til) en bestemt basis $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, og lar en vektor $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n \in V$ assosieres med vektoren $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Definisjon 6. *Et vektorrom har uendelig dimensjon (dim $V = \infty$) dersom det ikke finnes et endelig antall vektorer som utgjør en basis for V*

Funksjoner mellom vektorrom - lineære transformasjoner

Definisjon 7. *La V og W være to reelle vektorrom. En funksjon $T : V \to W$ er en lineær transformasjon dersom:*

$T(rv + su) = rT(v) + sT(u)$ for alle $v, u \in V$ og alle $r, s \in \mathbb{R}$ Lineær algebra handler i bunn og grunn om studiet av lineære transformasjoner mellom vektorrom.

Siden lineære transformasjoner oppfører seg så fint, er det ikke spesielt vanskelig å få oversikt over hva transformasjonen gjør. Dersom $\{w_1, ..., w_n\}$ er en basis for V, og vi kjenner $T(w_1), T(w_2), ...T(w_n)$, er T definert for alle $v \in V$. For en gitt v finnes det $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ slik at $v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + ...a_n w_n$. Siden T er lineær må
$T(v) = a_1 T(w_1) + a_2 T(w_2) + ... + a_n T(w_n)$

Definisjon 8. *En lineær transformasjon $T : V \to V$ (fra et rom V og inn i seg selv) kalles en **lineær operator på V**. En bijektiv lineær transformasjon $T : V \to W$ kalles en **isomorfi**, og dersom en slik bijektiv lineær transformasjon eksisterer mellom to vektorrom, sier vi at de er **isomorfe**.*

.

Oppgaver

Oppgave 1. *I starten ble det nevnt at $\mathbb{C}$ kan betraktes som et reelt vektorrom. Gjelder det samme for $\mathbb{C}^n$? Hva er i så fall dimensjonen til $\mathbb{C}^n$ (som reelt vektorrom)? Hva er dimensjonen om du ser på $\mathbb{C}^n$ som et komplekst vektorrom?*

Oppgave 2. *Vis den siste påstanden i Eksempel 1, nemlig at alle plan og linjer gjennom origo i $\mathbb{R}^3$ er underrom. Finnes det andre underrom?*

Oppgave 3. *Dimensjonen til et vektorrom V (av endelig dimensjon) er definert som antall vektorer i en basis for V. Vis at denne definisjonen er veldefinert, det vil si at alle basiser for et endeligdimensjonalt vektorrom V må ha samme antall elementer (basisvektorer).*

Oppgave 4. *La $C[0,1]$ være mengden av alle kontinuerlige, reelle funksjoner på intervallet $[0,1]$. Forklar hvordan du kan gi denne mengden en vektorromsstruktur (over $\mathbb{R}$). Hva blir dimensjonen?*

Oppgave 5. *La P_n være mengden av alle polynomer av grad høyst n. Forklar hvordan dette blir et reelt vektorrom vha. opplagt addisjonen og multiplikasjon:*
$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ *og* $(rP)(x) = rP(x)$. *Kan du finne en basis for P_n? Hva blir dimensjonen?*

Oppgave 6. *La $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen som roterer alle punkt (betraktet som en pil fra origo til punktet) en vinkel θ i positiv omløpsretning (mot urviseren). Finn et generelt funksjonsuttrykk for $T_\theta(x,y)$*
(Hint: Vis at T_θ er en lineær transformasjon og les s.3)

Oppgave 7. *La V være et vektorrom og $W < V$ et underrom av V. La $dim(V) = n$ og $dim(W) = m$. La videre $T : V \to U$ være en lineær transformasjon mellom vektorrom. Er $T(W) = \{T(x) \in U | x \in W\}$ et underrom av U? Kan du si noe om dimensjonen? Hva om T er en isomorfi??*

Oppgave 8. *Betrakt P_2 (se oppgave 5). La $S \subset P_2$ bestå av de andregradspolynomene som er slik at $P(1) = 0$. Vis at S er et underrom av P_2. Kan du finne en basis for S? Hva er dimensjonen til S?*
(Hint: Bruk at $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ utgjør en basis for hele P_2)

Oppgave 9. *La P_2 være som i forrige oppgave, og betrakt $P_2 \cong \mathbb{R}^3$ ved isomorfien $\tau(P(x) = a + bx + cx^2) = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Finn en parameterisering/likning av $\tau(S) = \{\tau(P) | P \in S\} \subset \mathbb{R}^3$, hvor S er som i forrige oppgave. Hva slags geometrisk objekt er $\tau(S)$?*