Løsninger

1. (i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+1/n} = \dfrac{1}{1+\lim_{n\to\infty} 1/n} = \dfrac{1}{1+0} = 1;$

(ii) $\lim_{n\to\infty} n + 3n^3 + 4 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2 + 3/n^3}{1+4/n^3} = \dfrac{0+0}{1+4} = 0;$

(iii) Vi ser først på $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}$. Ganger vi med "konjugerte" over og under brøkstreken får vi

$$\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = \frac{\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt[4]{n^2}}{\sqrt[8]{n^2+1} + \sqrt[8]{n^2}} \leq \sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt[4]{n^2}$$

og gjør vi det samme en gang til får vi at

$$\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt[4]{n^2} \leq \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{n}.$$

Altså må denne differansen konvergere mot 0.

Samme metode kan brukes til å vise at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1} = 0$, og vi får da at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} + (\sqrt[8]{n^2} - \sqrt[4]{n}) - \sqrt[4]{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}) + \lim_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}) \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(iv) Det enkleste er å se at

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

og at vi dermed må ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Vil vi ha et mer nøyaktig estimat (som kan være nyttig i enkelte sammenhenger) kan vi gjøre som følger:

Vi kan skrive $n! = n(n-1)\cdots(k+1)k!$ for alle $k < n$. Velg k til å være det største heltallet mindre enn $n/2$. Da er

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)k!}{n^n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{k+1}{n}\cdots\frac{k!}{n^k} \leq 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{k!}{n^k} = \frac{k!}{n^k} \leq \frac{(n/2)^k}{n^k} = \frac{1}{2^k}.$$

Når $n \to \infty$ vil $k \to \infty$, så vi har at $a_n \leq 1/2^k$. Samtidig er $a_n \geq 0$, så grenseverdien er 0.

2.

(i) For $\epsilon > 0$, finn N slik at for $n \geq 0$ er $|a_n - L| < \epsilon$ og $|b_n - L| < \epsilon$. Da er, siden $a_n \leq b_n \leq c_n$, også $|b_n - L| < \epsilon$.

(ii) Velg $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$ og $c_n = 1$.

3. Følgen er eventuelt konstant. La L være grensen, og velg $\epsilon = 1/3$. Da finnes N slik at for $n \geq N$ er $|a_n - L| < 1/3$, som betyr at $a_n = a_N$ for $n \geq N$. Altså er følgen konstant.

4.

(i) Hvis $0 < a < 2$, så er $0 < \sqrt{a} < \sqrt{2}$, slik at $\sqrt{2a} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. Samtidig er $a^2 < 2a$, slik at $\sqrt{a^2} < \sqrt{2a}$ og $a < \sqrt{2a}$.

(ii) Fra (i) vet vi at følgen er stigende og begrenset (av 2), slik at den må være konvergent.

(iii) Skriv a_n for ledd n i følgen. Da vet vi at det finnes L slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Da er også $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Men vi har at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2L}$$

slik at $L = \sqrt{2L}$, som gir $L = 2$.

5. Velg N_0 slik at $|a_n - L| < \epsilon/2$ for $n \geq N_0$, og $N \geq N_0$ slik at

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0} |a_n - L| < \epsilon/2$$

for $n \geq N$. Da er, for $n \geq N$,

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0} |a_i - L| + \frac{|a_{N_0+1} - L|}{n} + \cdots + \frac{|a_n - L|}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - N_0}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

slik at følgen konvergerer mot L.

6. La $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, og velg N slik at $|a_n - L| < \epsilon/c$ for $n \geq N$. Da er

$$|ca_n - cL| = c|a_n - L| < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

for $n \geq N$, og vi har resultatet.

7. Definer en følge e_n ved $e_n = \sqrt{b}/a_n - 1$. Det vil si at $a_n = \sqrt{b}(1 + e_n)$. Vi vil vise at e_n konvergerer mot 0, som vil si at $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$. Merk derfor at

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 - b}{2a} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{b}{a_n}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{b}(1 + e_n) + \frac{b}{\sqrt{b}(1 + e_n)}) \\ &= \frac{\sqrt{b}}{2}(1 + e_n + \frac{1}{1 + e_n}) \end{aligned}$$

som gir

$$\sqrt{b}(1 + e_{n+1}) = a_{n+1} = \frac{\sqrt{b}}{2}(1 + e_n + \frac{1}{1 + e_n}).$$

Hvis vi rydder litt i dette, får vi at

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)}.$$

La oss nå dele opp i to tilfeller etter fortegnet på e_n. Anta først $e_n > 0$. Da er

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)} \leq \frac{e_n}{2},$$

og er positiv. Hvis $e_n < 0$ er

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)} \leq \frac{e_n^2}{2},$$

og vi har at e_{n+1} er positiv hvis $e_n > -1$. Dette svarer til at $a_n > 0$, som vi har antatt fra begynnelsen av.

Altså har vi at

$$0 \leq e_{n+1} \leq \min(\frac{\epsilon_n}{2}, \frac{\epsilon_n^2}{2})$$

slik at e_{n+1} konvergerer mot 0. Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$.

8.

(i) Vi har at

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+1+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n} \\
&= 1+(1+\frac{n-1}{2n}+\frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}) \\
&\leq 1+(1+\frac{n-1}{2n}+\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n) \\
&\leq 1+(1+\frac{n-1}{2n}+\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{1-\frac{n-1}{2n}} \\
&= 1+\frac{2n}{n+1} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

der vi har byttet ut den endelige rekken med en geometrisk rekke, og så summert denne.

(ii) Hvis vi skriver om uttrykket vårt, får vi at

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+frac13!(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

og når vi går fra n til $n+1$ vokser alle leddene, samtidig som det dukker opp et ekstra ledd sist i rekken. Altså er følgen voksende.

9.

(i) La $h_n = \sqrt[n]{a}-1$. Da er $a = (1+h_n)^n \geq 1+nh$ slik at $h_n \leq (a-1)/n$. Samtidig er $0 \leq h_n$, slik at $0 \leq h_n \leq (a-1)/n$, og ved skviseteoremet er $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, og $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) La $h_n = \sqrt[n]{n}-1$. Da er $n = (1+h_n)^n \geq 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$, slik at $h_n^2 \leq \frac{2}{n}$. Altså er $0 \leq h_n \leq \sqrt{2/n}$, og ved skviseteoremet er $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(iii) Vi har at $\sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+n}$, slik at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} \geq 1$. Videre er $\sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$, slik at

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2} = 1\cdot 1 = 1.$$

Altså er $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$.

10. Velg $\epsilon < 1$. Siden $|a_{4n+1} - a_{4n+3}| = |1-(-1)| = |2|$ kan vi ikke finne noen grense L som a_n konvergerer mot.

11.

(i) Dette fungerer med samme N for den opprinnelige følgen.
(ii) La $a_n = (-1)^n$.