Kapittel 3

Seksjon 3.1

Oppgave 3.1.10

Anta at $z = z_1 + iz_2$ og $w = w_1 + iw_2$ er slik at både $z + w$ og zw er reelle. At

$$z + w = z_1 + iz_2 + w_1 + iw_2 = z_1 + w_1 + i(z_2 + w_2)$$

er reell betyr at imaginærdelen er 0, det vil si at $z_2 + w_2 = 0$, som betyr at $w_2 = -z_2$.

At zw er reell betyr at

$$zw = (z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2) = z_1w_1 - z_2w_2 + i(w_1z_2 + w_2z_1)$$

er reell, som på samme måte bare kan skje hvis $w_1z_2 + w_2z_1 = 0$.

Vi har nå brutt ned problemet vårt til å finne alle reelle løsninger av

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1z_2 &= -w_2z_1. \end{aligned}$$

En løsning av disse er opplagt, nemlig at $z_2 = w_2 = 0$, som svarer til at både z og w er reelle. Hvis $z_2 \neq 0$ blir den unike løsningen av likningene

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1 &= -\frac{w_2z_1}{z_2} = -\frac{w_2z_1}{-w_2} = z_1, \end{aligned}$$

som uttrykker at z og w må være konjugerte av hverandre.

Seksjon 3.2

Oppgave 3.2.13

a)

Vi regner ut

$$\begin{aligned} zw &= (1 + i\sqrt{3})(1 + i) = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) \\ \frac{z}{w} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

b)

For z har vi $r = \sqrt{1+3} = 2$, og $\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{3}$.
For w har vi $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, og $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c)

Fra b) ser vi at $\frac{z}{w}$ har polarform $r = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, og $\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Vi har dermed

$$\frac{z}{w} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene ser vi at

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2},\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.14

Vi har at

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{z+w} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})\\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}\\ &= |z|^2 + |w|^2 + \bar{z}w + \overline{\bar{z}w}\\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(\bar{z}w)\\ &= |z|^2 + |w|^2.\end{aligned}$$

Geometrisk betyr $\Re(\bar{z}w) = 0$ at vinklene z og w står vinkelrett på hverandre: Hvis argumentet til z er θ og argumentet til w er ϕ, så blir jo argumentet til $\bar{z}w$ lik $\phi - \theta$ (siden argumentet til $\bar{z}$ er $-\theta$), og $\bar{z}w$ har null i realdel hvis argumentet er $\pm\frac{\pi}{2}$, som skjer bare hvis θ og ϕ skiller seg med $\frac{\pi}{2}$, det vil si at z og w står vinkelrett på hverandre. Men da danner $z, w, z+w$ sidene i en rettvinklet trekant, og det vi har vist er da ikke noe annet enn Pythagoras læresetning.

Oppgave 3.2.16

a)

Vi har at

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)\overline{z+1}} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{|z+1|^2} = \frac{z-\overline{z}}{|z+1|^2}$$

der vi har brukt at $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Dette tallet er rent imaginært, siden $z - \overline{z}$ er det (realdelene kansellerer hverandre.

b)

0, $z-1$, og $z+1$ ligger alle på en sirkel med sentrum i z med radius 1 (0 ligger på denne sirkelen siden $|z|=1$). $z-1$ og $z+1$ ligger også på samme diameter i sirkelen, og det at $\frac{z-1}{z+1}$ er rent imaginær betyr at vektorene $z-1$ og $z+1$ i planet står vinkelrett på hverandre, siden hvis a har vinkel θ og b har vinkel ϕ, så har $\frac{a}{b}$ vinkel $\theta-\phi$, og $\frac{a}{b}$ er rent imaginær hvis og bare hvis $\theta-\phi$ er 90 grader. Med andre ord, i en trekant innskrevet i en sirkel der to av hjørnene ligger på diameteren, så vil vinkelen i det tredje hjørnet være 90 grader.

Oppgave 3.2.18

a)

$1+ti$ og $1-ti$ har samme modulus ($\sqrt{1+t^2}$), og hvis argumentet til $1+ti$ er ϕ, så blir argumentet til $1-ti$ lik $-\phi$. Men da har $\frac{1+ti}{1-ti}$ modulus lik 1 og argument lik $\theta=2\phi$. For alle t ligger dermed punktene på sirkelen om origo med radius 1, som var det vi skulle vise.

b)

Fra a) vet vi at argumentet til $\frac{1+ti}{1-ti}$ er $\theta=2\phi$, der ϕ er argumentet til $1+ti$. Sistnevnte er løsningen på $\tan\phi=t$, slik at $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=t$.

Oppgave 3.2.21

Fra trekantulikheten kan vi skrive

$$\begin{aligned}|z| &= |z-w+w| \leq |z-w|+|w| \\ |w| &= |w-z+z| \leq |w-z|+|z| = |z-w|+|z|,\end{aligned}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned}|z|-|w| &\leq |z-w| \\ |w|-|z| &\leq |w-z| = |z-w|.\end{aligned}$$

Siden en av de to venstresidene her er lik $||z|-|w||$, så kan vi konkludere med at $||z|-|w|| \leq |z-w|$.

Seksjon 3.3

Oppgave 3.3.8

Vi skal regne ut $(1+i)^{804}$ og $(3-i)^{173}$ ved hjelp av de Moivres formel. Da $1+i$ har modulus $\sqrt{2}$ og argument $\frac{\pi}{4}$ får vi

$$\begin{aligned}
(1+i)^{804} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{804} \\
&= \sqrt{2}^{804}\left(\cos\left(\frac{804\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{804\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}^{2\times 402}\left(\cos(201\pi)+i\sin(201\pi)\right) \\
&= 2^{402}\left(\cos(200\pi+\pi)+i\sin(200\pi+\pi)\right) \\
&= 2^{402}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right) \\
&= -2^{402}.
\end{aligned}$$

$\sqrt{3}-i$ har modulus 2 og argument $-\frac{\pi}{6}$, og vi får dermed også

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^{173} &= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{173} \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(-\frac{173\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{173\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\
&= -2^{172}(\sqrt{3}+i).
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.9

Bruker vi De Moivres formel får vi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n &= \left(\frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n \\
&= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n \\
&= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos\theta-i\sin\theta)^n} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n} \\
&= \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)} = \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)} \\
&= \frac{1+i\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}}{1-i\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}} = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.10

Vi har først bruk for at formlene

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta, \end{aligned}$$

som jo gjelder for reelle θ, også gjelder for komplekse z, det vil si

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i\sin z. \end{aligned}$$

Disse vises ved at vi først regner ut $\cos z + i\sin z$ ved hjelp av definisjonene

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

fra Seksjon 3.3 (e^{-iz}-leddene vil da kansellere), deretter regner vi ut $\cos z - i\sin z$ på samme måte (e^{iz}-leddene vil da kansellere). Vi får nå

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{(\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) - (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)}{2i} \\ &= \frac{2i(\cos z\sin w + \sin z\cos w)}{2i} = \sin z\cos w + \cos z\sin w, \end{aligned}$$

der halvparten av leddene i telleren kansellerte. På samme måte får vi at

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\ &= \frac{(\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) + (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)}{2} \\ &= \frac{2(\cos z\cos w - \sin z\sin w)}{2} = \cos z\cos w - \sin z\sin w. \end{aligned}$$

Oppgave 3.3.12

a)

Formelen $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ kan bevises ved induksjon på nøyaktig samme måte som for reelle tall. Formelen er opplagt sann for $n = 0$. Hvis vi har vist den for $0, 1, \ldots, n$, så får vi for $n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} z^k &= \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + z^{n+1} \\ &= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + \frac{z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} \\ &= \frac{z^{n+1}-1+z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} = \frac{z^{n+2}-1}{z-1}, \end{aligned}$$

som viser at formelen holder også for $n+1$. Dermed holder formelen for alle n.

b)

Setter vi inn $z = e^{ik\theta}$ i formelen fra a) får vi først at $z^k = e^{ik\theta}$, og deretter

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Høyresiden fra svaret i b) kan omskrives slik:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{2i}}{\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som er det uttrykket vi skulle frem til. Vi har her brukt formlene for cosinus og sinus uttrykt ved hjelp av eksponentialfunksjoner.

d)

Setter vi opp realdel og imaginærdel i uttrykket i c) får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \\
&= \left(\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene i disse uttrykkene får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Seksjon 3.4

Oppgave 3.4.14

Bruker vi formelen for løsningen av andregradslikningen får vi

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4(1-i)^2 - 28i}}{2} = \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4-8i-4-28i}}{2} \\ &= \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{-36i}}{2} = -1 + i \pm 3\sqrt{i} \\ &= -1 + i \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}(1+i). \end{aligned}$$

Velget vi positivt fortegn her får vi roten $-1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} + i(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2})$. Velger vi negativt fortegn får vi roten $-1 - \frac{3}{2}\sqrt{2} + i(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2})$. Modulus for begge røttene blir

$$\sqrt{(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2})^2 + (1 + \frac{3}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{2} + 1 + \frac{9}{2}} = \sqrt{11}.$$

Argumentet θ til den første roten ligger i første kvadrant og er gitt ved at $\cos\theta = \frac{-1+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{22}(3\sqrt{2}-2)$, som vi må slå inn på kalkulator.

Oppgave 3.4.19

a)

$(1+z)^5 = (1-z)^5$ kan skrives $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$, og femterøttene til 1 er på formen $e^{2k\pi i/5}$, $1 \leq k \leq 5$. Disse kan også skrives på formen w^k, der $w = e^{2\pi i/5}$. Vi har altså at $\frac{1+z}{1-z} = w^k$, som kan skrives $1 + z = (1-z)w^k$, eller $z(1+w^k) = w^k - 1$, eller $z = \frac{w^k-1}{w^k+1}$.

b)

Erstatter vi 5 med n i utregningen over, og w med $w_n = e^{2\pi i/n}$, så vil utregningen gå på samme måte, og vi får $z = \frac{w_n^k - 1}{w_n^k + 1}$, $1 \leq k \leq n$.

c)

Vi kan skrive

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{2k\pi i/n} - 1}{e^{2k\pi i/n} + 1} = \frac{\left(e^{2k\pi i/n} - 1\right)\left(e^{-2k\pi i/n} + 1\right)}{\left|e^{2k\pi i/n} + 1\right|^2} \\ &= \frac{1 - 1 + e^{2k\pi i/n} - e^{-2k\pi i/n}}{\left|e^{2k\pi i/n} + 1\right|^2} \\ &= \frac{e^{2k\pi i/n} - e^{-2k\pi i/n}}{\left|e^{2k\pi i/n} + 1\right|^2}. \end{aligned}$$

Dette er et rent imaginært tall, siden $e^{2k\pi i/n} - e^{-2k\pi i/n} = 2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ er rent imaginært, og sidene nevneren er reell. Dermed ligger alle løsningene på den imaginære aksen, som jo utgjør en rett linje i det komplekse planet.

Seksjon 3.5

Oppgave 3.5.13

a)

$-1 + i\sqrt{3}$ kan skrives på polarform som $2e^{2\pi i/3}$, slik at kvadratrøttene blir $\pm\sqrt{2}e^{\pi i/3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

b)

Bruker vi formelen for løsningen av andregradslikningen får vi

$$z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

To av røttene er dermed kvadratrøttene til $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, som på grunn av a) må bli $\pm\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$. Siden de konjugerte også er røtter, så vil de siste røttene være $\pm\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$. Mer kompakt kan dermed alle røttene skrives $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, der alle fire fortegnsvalg er tillatt. Vi ser at alle røttene har modulus 1, og har argumenter $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. Ganger vi sammen bidragene for de konjugerte røttene finner vi

$$\begin{aligned}
(z - e^{i\frac{\pi}{3}})(z - e^{i\frac{5\pi}{3}}) &= z^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)z + 1 = z^2 - z + 1 \\
(z - e^{i\frac{2\pi}{3}})(z - e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)z + 1 = z^2 + z + 1.
\end{aligned}$$

Vi kan derfor skrive $z^4 + z^2 + 1 = (z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$.

Oppgave 3.5.15

Formelen for summen av en geometrisk rekke sier at $z^4 + z^2 + 1 = \frac{z^6-1}{z^2-1}$ når $z^2 \neq 1$. Når $z^6 = 1$ så er det da klart at dette blir 0.