Kapittel 12

Seksjon 12.1

Oppgave 12.1.1

b)

Vi ser at $a_0 = 14$, $r = \frac{1}{7}$. Dermed er summen $\frac{a_0}{1-r} = \frac{14}{1-\frac{1}{7}} = \frac{14\times 7}{6} = \frac{49}{3}$.

c)

Den geometriske rekken fåes ved å gange hvert ledd med $-\frac{1}{6} < 1$ for å få det neste leddet. Summen blir derfor $\frac{4}{1-(-\frac{1}{6})} = \frac{24}{7}$.

Oppgave 12.1.3

a)

Her er $a_0 = 1$, $r = -x$, så summen er $\frac{1}{1+x}$.

b)

Her er $r = x^2$, så summen er $\frac{1}{1-x^2}$.

d)

Her er $r = e^{-1/2}$, så summen er $\frac{1}{1-e^{-1/2}}$.

Oppgave 12.1.4

a)

Følger av at $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ når $n \to \infty$.

b)

Følger av at $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ når $n \to \infty$.

c)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1-\sin x}} \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Det følger dermed fra divergenstesten at rekken divergerer.

d)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n+3}^{2}}{-\frac{1}{n^2}\frac{n-2}{n+3}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} -5\frac{n^2}{(n+3)(n-2)}} \\
&= e^{-5}\neq 0.
\end{aligned}$$

e)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(2^{1/n}-1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{-n^{-2}2^{1/n}\ln 2}{-n^{-2}} \\
&= \ln 2\neq 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.1.5

a)

Setter vi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k}+\frac{B}{k+1} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

ser vi umiddelbart at $A=-B$ og at $A=1$, slik at $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

b)

Bruker vi det vi viste i a) vil alle ledd i summen kansellere bortsett fra det positive leddet (1) for $k=1$, og det negative leddet (-$\frac{1}{n+1}$) for $k=n$. Resultatet følger.

c)

Det er klart fra b) at summen konvergerer mot 1.

Seksjon 12.2

Oppgave 12.2.1

a)

Funksjonen $f(x) = \ln(x+1)$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+1} dx = \lim_{n \to \infty} [\ln(x+1)]_1^n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) - \ln 2.$$

Rekken vil derfor divergere, siden integralet divergerer (ln går mot uendelig).

b)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{n \to \infty} [\arctan x]_1^n = \lim_{n \to \infty} \arctan n - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

c)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

d)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{\cosh^2 x} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}} dx = \lim_{n \to \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_1^n = \frac{1}{2} e^{-2}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

e)

Funksjonen $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[0, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\pi}{2} - \arctan x dx &= \lim_{n\to\infty} \left(\left[x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) \right]_0^n + \int_0^n \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n(\frac{\pi}{2} - \arctan n) + \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n(\frac{\pi}{2} - \arctan n) + \frac{1}{2} \ln(1+n^2) \right).
\end{aligned}$$

Begge leddene her er større enn 0, og det andre vil gå mot ∞. Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.2

Vi sammenligner med

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p}.$$

Hvis $p \neq 1$ vet vi at dette er

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} u^{1-p} \right]_{\ln 2}^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p} (n^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}).$$

Det er klart at dette konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

For $p = 1$ vil rekken divergere. Integralet ovenfor vil da i stedet bli en logaritmefunksjon, og integralet vil divergere siden $\ln n \to \infty$ når $n \to \infty$.

Oppgave 12.2.3

a)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ til å fastslå at rekken divergerer.

b)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer.

c)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer (bruk at $\arctan n \to \pi/2$).

d)

Vi regner ut (sammenligner med $\frac{1}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+\sqrt{n})\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^{-1/2}} = 1.$$

Rekken vil derfor divergere, siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer.

e)

Vi sammenligner med $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Rekken vil derfor konvergere, siden $\frac{1}{n^2}$ konvergerer.

f)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n^2)\cos(1/n)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = 1,$$

slik at rekken divergerer.

g)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

og dermed konvergerer rekken.

h)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed divergerer rekken.

i)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}}{1/n^{3/2}} &= \lim_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2})(\sqrt{n^3+1}+n^{3/2})}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^3+1-n^3)}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.4

a)

Vi sammenligner rekkene $\sum_n a_n$ og $\sum_n \sin(a_n)$. Hvis $\sum_n a_n$ konvergerer, og siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$

(siden $\lim_{n\to\infty} = 0$) så vil $\sum_n \sin(a_n)$ også konvergere på grunn av grensesammenligningstesten. den motsatte veien følger for eksempel fra at $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sin(a_n)} = 1$.

b)

Siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer så vil $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergere på grunn av a). men da vil $\sum_n \sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ også divergere på grunn av a) igjen.

Oppgave 12.2.5

a)

Forholdstesten gir en grenseverdi på $\frac{1}{3}$, og dermed konvergerer rekken.

b)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 3, og dermed divergerer rekken.

c)

Vi bruker rottesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

d)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

e)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

f)

Vi bruker forholdtesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

g)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{4}{e} > 1.
\end{aligned}$$

Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.7

a)

Rekken konvergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b)

Rekken divergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c)

Rekken divergerer. Bruk sammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

d)

Rekken divergerer på grunn av divergenstesten, siden $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

e)

forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{n^2-(n+1)^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-2n-1}}{n}=0,$$

slik at rekken konvergerer.

f)

Vi sammenligner med $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)(1+1/n)^n}=\frac{1}{e},$$

slik at rekken divergerer.

g)

Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

slik at rekken konvergerer.

Oppgave 12.2.9

Siden summen av de n første tallene er $\frac{n(n+1)}{2}$ så blir summen lik $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$. Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)2^{n+1}}{n(n+1)2^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2},$$

og rekka konvergerer derfor.

Oppgave 12.2.13

a)

Anta $P(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty}P(n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln P(n)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln P(x)}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{P'(x)}{P(x)}}=e^0=1,$$

hvor vi har brukt at $P'(x)$ er et polynom av grad en mindre enn $P(x)$.

b)

På grunn av a) blir grenseverdien for $a_n^{1/n}$ lik $1/2$, og dermed konvergerer rekken på grunn av rottesten.

Seksjon 12.3

Oppgave 12.3.1

a), c), d)

Rekkene er alternerende, og $a_n \to 0$. Det er klart for alle rekkene at de er avtagendene, siden funksjonene n^2+1, $\sqrt{n}$ og $\ln(n)$ er voksende. derfor er alle tre rekkene konvergente (kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt).

b)

Divergerer på grunn av divergenstesten (a_n går ikke mot 0).

e)

På grunn av divergenstesten divergerer rekken, siden det n'te leddet ikke går mot 0.

Oppgave 12.3.3

a)

Det er fort gjort å sjekke at kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.05$. Dette svarer til $\frac{1}{(n+2)^2} < 0.05$, eller $(n+2)^2 > 20$. Det er klart at minste n der dette er oppfylt er $n = 3$. Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{-36+16-9}{144} = -\frac{29}{144}.$$

b)

Vi må finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.25$. Dette er det samme som $\sqrt{n+1} > 4$, eller $n > 15$. legger vi sammen de første 16 leddene finner vi -0.4818.

c)

Rekken er alternerende. Videre er $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{ne}\right| < 1$ for alle n. Det er klart fra dette at kravene i testen for for alternerende rekke er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.1$. Dette svarer til $(n+1)e^{-(n+1)} < 0.1$. Det er fort gjort å sjekke at minste n hvor dette er oppfylt er $n = 3$ ($|a_3| = 0.1494, |a_4| = 0.0733$). Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 - \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} \approx -0.2466.$$

Oppgave 12.3.4

a)

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ er en geometrisk rekke der vi ganger med $-x$ for å få det neste leddet i rekka, og der det første leddet er 1. Summeformelen for en geometrisk rekke gir at summen blir $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k\right| = \left|(-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\right| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}\end{aligned}$$

for $x \geq 0$ (siden da er $1+x > 1$).

c)

Med $f(x) = \ln(1+x)$ er $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Spesielt er $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Så lenge $x \geq 0$ er det klart at restleddet i Taylorrekka går mot 0, slik at Taylorrekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

om 0 konvergerer mot $\ln(1+x)$, det vil si at

$$\left|\ln(1+x) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}\right)\right| = \left|\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \to 0.$$

Rekken her er alternerende, slik at avviket er fra summen er begrenset ved $|a_{n+1}| = \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

d)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ i formelen fra c). Skal vi finne $\ln(3/2)$ med en nøyaktighet bedre enn 0.01 må derfor $\frac{(1/2)^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}(n+2)} < 0.01$. Prøver vi oss frem finner vi at $n = 3$, som gir tilnærmingen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1/2)^{k+1}}{k+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\times 2} + \frac{1}{8\times 3} - \frac{1}{16\times 4} \\ &= \frac{96-24+8-3}{192} = \frac{77}{192} \approx 0.4010.\end{aligned}$$

Oppgave 12.3.6

a)

Siden $n \geq \sqrt{n}$ er $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Dermed er $-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \leq 0$. For n odde er $a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, som dermed er negative. For n like er det klart at leddene er positive, og rekken er derfor alternerende. Det er klart at leddene i rekken går mot 0.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Den første av disse rekkene ser vi fort at oppfyller kravene i testen for en alternerende rekke. Den andre rekken vet vi at er divergent. Da følger det fra Korollar 12.1.8 at $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ er divergent. Grunnen til at dette ikke strider mot testen for alternerende rekker må jo da bli at det siste kravet der (om avtagende ledd) ikke er oppfylt. Hvis leddene var avtagende ville vi for n odde ha at ($-a_n > a_{n+1}$)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1},$$

eller

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

Dette kan du teste at ikke er tilfelle ved å sette inn et par verdier av n (for eksempel $n = 5$). Alternativt kan du begrunne dette ved at leddene $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ vil være mye større enn $\frac{1}{n}$, bare n er valgt stor nok.

Seksjon 12.4

Oppgave 12.4.1

a)

Rekken er betinget konvergent, siden $\sum \frac{1}{n+1}$ divergerer, mens den alternerende rekken konvergerer etter testen for alternerende rekker.

b)

Denne er absolutt konvergent: Sammenlign den positive rekken $\frac{1}{n^2+4}$ med $\frac{1}{n^2}$ (som jo konvergerer).

c)

Betinget konvergent, siden $\sum \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergerer (sammenlign med den divergente $\sum \frac{1}{n}$), og $\sum(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergerer (alle kravene i testen for en alternerende rekke er oppfylt).

e)

Betinget konvergent, siden $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ divergerer (sammenlign med den divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, og $\sum(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ konvergerer. Sistnevnte tilfredsstiller alle kravene i testen for en alternerende rekke: Vi ser lett at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. For å se at rekken er avtagende kan du for eksempel regne ut den deriverte til $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ og sjekke at denne er < 0 for x stor nok.

f)

Rottesten på $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ gir grenseverdien $e^{-1} < 1$, slik at rekken konvergerer absolutt.

Oppgave 12.4.3

a)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a|$. Fra forholdstesten for generelle rekker følger det da at rekken divergerer hvis $|a| > 1$, konvergerer (absolutt)hvis $|a| < 1$. For $a = -1$ ser vi at rekken konvergerer. For $a = 1$ ser vi at den divergerer.

b)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Rekken er derfor (absolutt) konvergent for alle a.

d)

Når $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ vil $|1-a^2| \leq 1$. Forholdstesten vil da gi at rekka konvergerer. Hvis $|a| > \sqrt{2}$ vil $|1-a^2| > 1$, og samme testen gir at rekka divergerer. Når $a = \sqrt{2}, a = -\sqrt{2}, a = 0$ divergerer rekka på grunn av divergenstesten.

Oppgave 12.4.5

a)

Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n c_n|}{|a_n|} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C|a_n|}{|a_n|} = C < \infty,$$

der $|c_n| < C$ for alle n. Da følger det av sammenligningstesten for positive rekker at $\sum_n a_n c_n$ er absolutt konvergent (siden a_n er antatt absolutt konvergent), og dermed konvergent.

b)

Hvis a_n bare er antatt konvergent gjelder resultatet ikke. Dette kan du se for eksempel ved å velge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $c_n = (-1)^n$.

Oppgave 12.4.6

Vi bruker grensesammenligningstesten på de positive rekkene $|a_n|$ og $\frac{|a_n|}{|1+a_n|}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|/(|1+a_n|)}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+a_n|} = 1,$$

Hvor vi har brukt at $a_n \to 0$ på grunn av divergenstesten. Dermed konvergerer også $\frac{a_n}{1+a_n}$ absolutt.

Seksjon 12.5

Oppgave 12.5.1

b)

Forholdstesten gir at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |2x|$. Rekken er defor absolutt konvergent for $|x| < \frac{1}{2}$, divergent for $|x| > \frac{1}{2}$. For $x = \pm\frac{1}{2}$ ser vi fort at rekken divergerer.

d)

Forholdstesten gir at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{-x}$. For $x > 0$ er derfor rekken absolutt konvergent, for $x < 0$ er den divergent. For $x = 0$ ser vi lett at den er divergent.

f)

Rottesten gir en grenseverdi e^x. For $x < 0$ ser vi derfor at rekken er (absolutt) konvergent, for $x > 0$ er den divergent. For $x = 0$ ser vi lett at rekken er divergent.

Oppgave 12.5.2

a)

Vi ser at $\frac{\sin(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$. Siden $\sum M_n$ er konvergent, så konvergerer $\sum_n \sin(nx)n^2$ uniformt på $\mathbb{R}$.

b)

Vi ser at $\left|\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} = M_n$ på $[-1,1]$. Siden $\sum M_n$ er konvergent, så konvergerer $\sum_n \frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$ uniformt på $[-1,1]$.

c)

Vi ser at $|ne^{-nx}| \leq ne^{-n} = M_n$ på $\mathbb{R}$. Siden $\sum M_n$ er konvergent (forholdstesten), så konvergerer $\sum_n ne^{-nx}$ uniformt på $\mathbb{R}$.

Seksjon 12.6

Oppgave 12.6.1

a)

Forholdstesten gir at rekken konvergerer absolutt for $|x-2| < 1$, og divergerer hvis $|x-2| > 1$. Den divergerer hvis $|x-2| = 1$, slik at konvergensintervallet blir $(1,3)$.

b)

Forholdstesten igjen gir at rekken konvergerer for $|x| < 3$, divergerer for $|x| > 3$. For $|x| = 3$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $(-3, 3)$.

c)

Forholdstesten gir konvergens for $|2x - 1| < 1$, dvs. for $x \in (0, 1)$. Det er fort gjort å sjekke at rekken divergerer i endepunktene av dette intervallet, slik at konvergensintervallet blir $(0, 1)$.

d)

Forholdstesten gir konvergens for $|x + 1| < 1$, dvs. for $x \in (-2, 0)$. For $x = -2$ ser vi vi får en alternerende rekke, som oppfyller kravene i testen for konvergens av alternerende rekker. For $x = 0$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $[-2, 0)$.

e)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}|x - 1|.$$

Rekka konvergerer derfor i $(-3, 5)$. Ved sammenligning med rekka $\sum \frac{1}{n^2}$ ser vi at rekka også konvergerer i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-3, 5]$.

f)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/(n+1))}{\sin(1/n)} |x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} \cos(1/(n+1))}{-\frac{1}{n^2} \cos(1/n)} = |x|.$$

Vi ser derfor at rekke konvergerer for $|x| < 1$. Rekka konvergerer ikke for $x = 1$, som kan sees ved å sammenligne med rekken $\sum \frac{1}{n}$. Rekka konvergerer betinget for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. Konvergensområdet blir derfor $[-1, 1)$.

g)

Forholdstesten gir

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2 x}{(2n+2)(2n+1)} \right| \to \left| \frac{x}{4} \right|.$$

Vi ser derfor at rekken konvergerer for $|x| < 4$, og divergerer for $|x| > 4$.

For $|x| = 4$ er dat langt ifra opplagt hva som skjer, og vi bør skrive om leddene i rekken på følgende måte for å se hva som skjer:

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \\
&= \frac{n \times n \times (n-1)(n-1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} 4^n \\
&= \frac{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \times n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} 2^{2n} \\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2 \times 2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} \\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1} \\
&= \frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \cdots \frac{4}{3} \frac{2}{1} \\
&> 1,
\end{aligned}$$

der den siste ulikhetene følger av at hver av faktorene i produktet er > 1. Derfor er rekken divergent for $|x| = 4$, og konvergensintervallet blir $(-4, 4)$.

h)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 7^{1/\sqrt{n}} |2x| = |2x|.$$

Rekka konvergerer derfor i intervallet $(-1/2, 1/2)$. Det er klart at rekka divergerer i endepunktene på grunn av divergenstesten, slik at hele konvergensintervallet også er $(-1/2, 1/2)$.

Oppgave 12.6.3

På $[-1, 1]$ ser vi fort at rekken konvergerer (sammenlign med $\frac{1}{n^2}$). Dermed følger det fra Abels teorem at summen er en kontinuerlig funksjon.

Oppgave 12.6.4

Forholdstesten gir oss at rekken konvergerer for $\frac{|x-1|}{2} < 1$,dvs. for $x \in (-1, 3)$. For $x = -1$ får vi rekken $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, som vi ser fort at er konvergent. Dermed er summefunksjonen en kontinuerlig funksjon på $[-1, 3)$ (Abels teorem igjen) (det er fort gjort å sjekke at rekken divergerer i $x = 3$, slik at vi ikke kan utvide summefunksjonen til en kontinuerlig funksjon med 3 også i definisjonsområdet).

Oppgave 12.6.5

Rekken her er geometrisk. Hvis $|1 - x^2| < 1$ (dvs. $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ får vi en geometrisk rekke, og dsummen blir $\frac{x}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$. For $x = 0$ er alle leddene i rekka 0, slik at summen blir 0. Summefunksjonen blir derfor gitt ved

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

For $x = \pm\sqrt{2}$ og alle andre x-verdier divergerer rekken. Konvergensområdet er altså $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, og summen er altså 0 hvis $x = 0$, og $\frac{1}{x}$ hvis $x \neq 0$ og $|x| < \sqrt{2}$. Vi ser at summefunksjonen ikke er kontinuerlig i dette tilfellet. Dette kan virke som strider mot Abels teorem. Legg imidertid merke til at potensrekken ikke har samme form slik den har i Abels teorem.

Oppgave 12.6.7

a)

For at følgene skal konvergere må vi på grunn av divergenstesten ha at $a_n \to 0$. Vi regner ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

og dermed kan vi bruke grensesammenligningstesten til å slå fast at den ene rekka konvergerer hvis og bare hvis den andre gjør det.

b)

Den gitte rekka konvergerer på grunn av a) hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ gjør det. Denne konvergerer igjen på grunn av a) hvis og bare hvis rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ gjør det. Fra tidligere vet vi fra integraltesten at denne konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

c)

Vi kan bruke grensesammenligningstesten som i a) til å se at rekka har samme konvergensradius som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, og denne ser vi lett at har konvergensradius 1. For $x = 1$ ser vi at rekka divergerer siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, for $x = -1$ ser vi at rekka konvergerer siden den tilsvarende rekka er alternerende. Konvergensområdet er derfor $[-1, 1)$.

Seksjon 12.7

Oppgave 12.7.1

a)

Vi bruker Setning 12.7.1 og 12.7.3 for $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^{n-1}}{n+1} \\ F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{n+1}}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} (x-4)^n}{n!} = 3f(x) \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^n}{n!} = \frac{1}{3}(f(x)-1). \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.2

a)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ er en geometrisk rekke som konvergerer for $|x| < 1$. Bruker vi summeformelen for geometriske rekker får vi $\frac{1}{1-x^2}$.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}.$$

Integrerer vi begge sider får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} &= \int_0^x \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} [-\ln|1-t| + \ln|1+t|]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Ganger vi med 2 på begge sider får vi

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ i b), da får du ligningen som du skal komme frem til.

Oppgave 12.7.3

a)

Bruk summeformelen for en geometrisk rekke med $r = x^3$, $a_0 = x^2$.

b)

Gang først med -3 på begge sider i ligningen fra a):

$$\frac{-3x^2}{1-x^3} = -3\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}.$$

Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$[\ln(1-t^3)]_0^x = \ln(1-x^3) = -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+3}x^{3n+3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{3(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{3n}.$$

c)

Sett inn $x = -1$ i b):

$$\ln(2) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{n}$$

Høyresiden konvergerer (er en alternerende rekke). Siden vi vet fra Abels teorem at summefunksjonen er kontinuerlig, så må summen av rekken bli lik venstresiden. Resultatet er faktisk det samme som det i Eksempel 12.7.4: Dette følger av at $n-1$ er like/odde hvis og bare hvis $3n+1$ er like/odde. Dermed får alle ledd i de to rekkene samme fortegn.

Oppgave 12.7.5

For $m = 1$ sier utsagnet at

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

som følger direkte fra summeformelen for en geometrisk rekke. Anta at vi har vist at

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n.$$

Deriverer vi begge sider får vi

$$\frac{-m}{(1+x)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \binom{m+n-1}{n} x^{n-1}.$$

Deler vi med $-m$ på begge sider får vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^{m+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{m} \binom{m+n-1}{n} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{m} \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(m+n)!}{n!m!} x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \binom{(m+1)+n-1}{n} x^{n}
\end{aligned}$$

Dette viser at påstanden holder også for $m+1$.

Oppgave 12.7.7

a)

Bruk forholdstesten.

b)

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x).$$

c)

$$\begin{aligned}
E(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k y^{n-k}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \right) \\
&= E(x)E(y).
\end{aligned}$$

d)

Følger ved å bruke c) n ganger (start med $x = y = 1$).

e)

Følger ved å bruke c) n ganger (start med $x = y = \frac{1}{m}$).

f)

$$E(p/q) = E((p-1)/q+1/q) = E((p-1)/q)E(1/q) = \cdots = E(1/q)^p = (e^{1/q})^p = e^{p/q}.$$

Seksjon 12.8

Oppgave 12.8.1

a)

Taylor-rekken rundt 1 er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

Forholdstesten viser at denne konvergerer for alle x. Hvis $|x| \leq M$ er restleddet begrenset av $\frac{e^M}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$. Det er klart at vi kan få denne så liten vi vil bare vi velger n stor nok. (eller bruk Setning 12.8.2).

b)

De deriverte av $\sin(x)$ repeterer seg med periode 4: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, $\sin(x)$,.... Det er klart at Taylor-rekken rundt $\pi/4$ blir

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x-\pi/4) - \frac{1}{2!}(x-\pi/4)^2 - \frac{1}{3!}(x-\pi/4)^3 + \frac{1}{4!}(x-\pi/4)^4 + \cdots\right)$$

(på grunn av derivasjonsregelen for $\sin(x), \cos(x)$ kommer det alltid to positive ledd etter to negative ledd, og omvendt). Samme konvergenssområde og begrunnelse ellers som for a).

d)

Taylorrekka blir

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k.$$

Dette er en geometrisk rekke, som har konvergensområde $(0, 2)$ (endepunktene er ikke med på grunn av divergenstesten). Summeformelen for en geometrisk rekke gir summen $\frac{1}{1-(-(x-1)} = \frac{1}{x} = f(x)$, som viser at rekken konvergerer mot funksjonen.

e)

Den deriverte av $\ln(x+1)$ er

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$

Høyresiden må derfor være Taylor-rekken til $\frac{1}{1+x}$. Integrerer vi fra 0 til x får vi

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Vet vet derfor at høyresiden her er Taylor-rekken til $\ln(x+1)$ (og har samme konvergensintervall $(-1,1)$ som rekken for $\frac{1}{x+1}$. Konvergensintervallet her blir faktisk $(-1,1]$, siden vi nå har fått konvergens i det ene endepunktet også (alternerende rekke).

Oppgave 12.8.3

a)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, slik at

$$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^2)2k+1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{4k+2}.$$

b)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, slik at

$$e^{-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{k!}.$$

d)

Siden $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ $(n\geq 1)$ får vi

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\\ \ln(1-x^3) &= -\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n}}{n}\end{aligned}$$

(ser her at den andre rekken ikke er alternerende).

e)

Siden $f^{(n)}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!2^{2n}}$ $(n\geq 0)$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}x^n\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}.\end{aligned}$$

f)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, slik at

$$x^2 e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!}.$$

g)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, slik at

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Siden $f(x)$ er definert slik at den er kontinuerlig i 0, så vil rekken over være Taylorrekka til f.

Oppgave 12.8.5

a)

Vi ser først at

$$f^{(1)}(x) = (2x^2 + 2x + 2x + 1)e^{2x} = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$

Vi ser umiddelbart at dette stemmer med induksjonshypotesen for $n = 1$. Anta at vi har vist at

$$f^{(n)}(x) = (2^n x^2 + 2^n (n+1)x + 2^{n-2} n(n+1))e^{2x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+1)x + 2^{n-1}n(n+1) + 2^{n+1}x + 2^n(n+1))e^{2x} \\ &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+2)x + 2^{n-1}(n+1)(n+2))e^{2x}, \end{aligned}$$

som viser at induksjonshypotesen er riktig for $n+1$ også.

b)

Vi ser at $f^{(n)}(0) = 2^{n-2}n(n+1)$. Taylor-rekken blir dermed

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-2}(n+1)}{(n-1)!} x^n.$$

Ved hjelp av forholdstesten ser vi at denne konvergerer for alle x.

c)

Det er lett å se at vi kan få restleddet så lite vi vil ved å velge n stor nok. Dermed vil Taylor-rekken konvergere mot f for alle x. Setter vi inn $x = -1/2$ ser vi at Taylor-rekken blir

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n+1}{4(n-1)!},$$

som er rekken fra oppgaveteksten. Summen blir dermed $f(-1/2) = (1/4 - 1/2)e^{-1} = -\frac{1}{4e}$.

d)

Vi har

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \\
e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^n}{n!} \\
xe^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1} x^n}{(n-1)!} \\
x^2 e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+2}}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{2^{n-2} x^n}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

Legger vi sammen de to siste rekkene ser vi at vi får for $n \geq 2$ (for $n = 1$ er det lett å se at vi får samme bidrag som i Taylor-rekken over)

$$\frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}x^n}{(n-2)!} = 2^{n-2}\frac{2+(n-1)}{(n-1)!}x^n = 2^{n-2}\frac{n+1}{(n-1)!}x^n,$$

som stemmer med Taylor-rekken over.

Oppgave 12.8.8

a)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\log\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\log\sqrt{n}}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{\frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}}} \right| \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}} \right|} \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2n}} \right|} \\
&= |x|.
\end{aligned}$$

Konvergensradien er derfor 1. Rekka konvergerer for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. For $x = 1$ kan vi sammenligne med den divergente rekka

$\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\log e} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}\ln n} \\
&= \frac{1}{2\log e} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2\log e} \lim_{n\to\infty} n = \infty.
\end{aligned}$$

Det er dermed klart fra grensesammenligningstesten at denne rekka også divergerer for $x = 1$, slik at konvergensområdet er $[-1, 1)$.

b)

Siden potensrekken er lik Taylorrekka til f er $\frac{f^{(310)}(0)}{310!} = \frac{1}{\log\sqrt{310}}$, slik at $f^{(310)}(0) = \frac{310!}{\log\sqrt{310}}$. Vi begrenser så feilen for ledd $N+1, N+2, ...$ slik:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{N+1}\log\sqrt{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}\log\sqrt{N+2}} + \cdots \\
\leq\ & \frac{1}{\log\sqrt{N+1}} \left(\frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \cdots \right) \\
=\ & \frac{1}{2^N \log\sqrt{N+1}} \\
\leq\ & 0.1.
\end{aligned}$$

Det holder derfor å velge N slik at $2^N \log\sqrt{N+1} > 10$. Prøver vi oss frem finner vi at $N = 5$ er den minste slike verdien.

Oppgave 12.8.11

a)

Vi ser ved forholstesten at rekka konvergerer i $(-1, 1)$. Dette er faktisk hele konvergensområdet, sidne vi har divergens i endepunktene på grunn av divergenstesten.

b)

Deriverer vi $h(x)$ får vi $h'(x) = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n+1}$. Integrerer vi denne fra 0 til x får vi at

$$h(x) - h(0) = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

Det er klart at dette er Taylor-rekken til h.

c)

Vi ser at Taylorrekken til h er geomterisk, og at summen blir $h(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$. Vi får videre

$$f(x) = \frac{h'(x)}{x} = \frac{\frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2}}{x} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

Oppgave 12.8.12

a)

Forholdstesten viser at konvergensradien er 1. Rekken er alternerende i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

b)

Kall summen for $s(x)$. Deriverer vi rekka leddvis får vi

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2},$$

der vi har gjenkjent rekka som en geometrisk rekke. Integrerer vi får vi

$$s(x) = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ på begge sider får vi at $C = 0$, og dermed $s(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Oppgave 12.8.13

a)

$$\sum_{n\geq 1} nx^n$$

konvergerer når $|x| < 1$ (bruk forholdstesten). Siden rekken divergerer når $|x| = 1$ (divergenstesten), så er konvergensintervallet $(-1, 1)$.

b)

Vi har at

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

slik at $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Det eneste problemet som kunne oppstå her er når vi deler med x, siden x kan være 0. Dette er ikke noe problem likevel, siden vi kan bruke det vi vet om at summefunksjonen er en kontinuerlig funksjon, også i 0.

Oppgave 12.8.14

a)

Forholdstesten gir at rekka konvergerer for $|x| < \frac{1}{3}$. Rekka konvergerer for $x = -1$ ved testen for alternerende rekker. Rekka divergerer for $x = 1$ ved sammenligning med den divergente rekka $\sum \frac{1}{n}$.

b)

Vi ganger først med x og får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}.$$

Integrerer vi dette får vi

$$xS(x) = -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + C = -\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-3x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 12.8.15

a)

Forholdstesten gir at rekken konvergerer for $|x| < 1$. Siden rekken er alternerende er det klart at konvergensintervallet er $[-1, 1]$.

b)

Vi ganger først med x på begge sider og får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Deriverer vi begge sider får vi at

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrerer vi fra 0 til x får vi

$$xS(x) = \arctan(x),$$

slik at $S(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ for $x \neq 0$. På grunn av kontinuitet av summen av rekka ser vi fort at vi må ha at $S(0) = 1$ (som vi også kunne fått ved å sette inn $x = 0$ i den opprinnelige rekka).

c)

Vi har nå vist at

$$\arctan(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n+1}}.$$

Siden denne rekka er alternerende holder det å finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)!2^{2n+3}} \leq 0.01$. Det er lett å se at minste slik n er 1, slik at tilnærmingen blir

$$s_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \times 2^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}.$$

Dette er ikke helt det samme som svaret i fasiten.

Oppgave 12.8.16

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1. Rekka konvergerer i begge endepunktene ved sammenligningstesten på rekka $\sum \frac{1}{n^2}$. derfor blir konvergensområdet $[-1, 1]$. Deriverer vi rekka leddvis to ganger får vi

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x}.$$

b)

Vi integrerer først og får

$$f'(x) = \ln|1+x| + C,$$

og dermed $f'(x) = \ln(1+x)$ (sett inn $x = 0$), der vi kunne ta bort absoluttverditegnet. Vi integrerer så på nytt og bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(1+x) - \int \frac{x}{x+1} dx \\ &= x\ln(1+x) - x + \ln(x+1) + C \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

c)

Vi ser at $f(1/2) = 3/2\ln(3/2) - 1/2$. Altså har vi at

$$\ln(3/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} f(1/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)}\right).$$

Rekken til høyre er her alternerende. Hvis vi klarer å finne N slik at

$$|a_{N+1}| = \frac{2}{3}\frac{1}{2^{N+1}(N+1)N} \leq \frac{1}{250},$$

så får vi den nøyaktigheten vi skal ha. Vi må altså velge minste mulige N slik at $2^{N+1}(N+1)N \geq 166.66$. Vi finner fort at dette blir $N = 3$, slik at approksimasjonen blir

$$\begin{aligned}
\ln(3/2) &\approx \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^2 2} - \frac{1}{2^3 3 \times 2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{48}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{5}{48} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{72} \\
&= \frac{29}{72} \\
&\approx 0.4028.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.8.17

Vi ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n.$$

Forholdstesten gir at rekken konvergerer når $\frac{|x-1|}{2} < 1$, det vil si når $|x-1| < 2$. Det er klart at rekken divergerer når $|x-1| = 2$ (divergenstesten), slik at konvergensområdet er $(-1, 3)$. La $S(x)$ være summen av rekken. Vi skriver om først:

$$\frac{S(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^{n-1}.$$

Deretter integrerer vi begge sider fra 1 til x:

$$\int_1^x \frac{S(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} = \frac{x-1}{2(1-\frac{x-1}{2})} = \frac{x-1}{3-x}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$\frac{S(x)}{x-1} = \frac{2}{(3-x)^2},$$

slik at $S(x) = \frac{2(x-1)}{(3-x)^2}$.

Oppgave 12.8.18

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1, slik at rekka konvergerer i $(-1, 1)$. Rekka konvergerer ikke i endepunktene $x = -1, x = 1$ på grunn av divergenstesten. Dermed blir konvergensområdet $(-1, 1)$.

b)

Kall summen av rekka for $s(x)$. Deriverer vi rekka får vi først

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Deler vi med x får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Integrerer vi får vi

$$\int \frac{s'(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C.$$

Deriverer vi får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

eller $s'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Ny integrasjon gir at

$$s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = -1$, slik at $s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} - 1$.

Oppgave 12.8.19

a)

Bruk forholdstesten her.

b)

Vi har at

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}.$$

Deriverer vi får vi

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Ganger vi opp med x får vi

$$xs'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

eller

$$s'(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Integrerer vi denne fra 0 til x får vi ligningen i oppgaveteksten.

c)

Muligens kan dette gjøres på flere måter. Metoden nedenfor bruker ikke noe estimat på restleddet i Taylors formel (siden det ikke er så lett å skrive opp en formel for de deriverte i dette tilfellet). Fra a) og b) vet vi nå at

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n!} + \cdots.$$

Vi vil finne ut hvor mange ledd vi trenger på høyresiden for å få til en approksimasjon med en feil $E < 5 \cdot 10^{-6}$. Legg merke til at

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!2} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!2^2} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!2^3} + \cdots \\
&> \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)!} + \cdots \\
&> \frac{1}{(n+2)\cdot(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)\cdot(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)\cdot(n+4)!} + \cdots
\end{aligned}$$

I den første ligningen har vi brukt at $1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1)$. Dermed har vi at, hvis $s_n(x)$ er summen de n første leddene, så er

$$s(1) - s_n(1) \leq \frac{2}{(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

Vi trenger derfor bare velge n slik at

$$\frac{2}{(n+1)\cdot(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Eksperimentering med Matlab gir her at $n = 8$ holder. Summen av de 8 første leddene kan du regne ut med Matlab ved å skrive

```
n = [1:8]; sum(1./(n.*factorial(n)))
```

Vi får da 1.317902, avrundet.

Oppgave 12.8.21

a)

ved forholdstesten ser vi at rekka konvergerer for alle x.

b)

deriverer vi rekka får vi at

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-2)!} x^n \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n \\
&= x^2 e^{-x}.
\end{aligned}$$

som er en rekkeutvikling for $f'(x)$.

c)

Integrerer vi ved delvis integrasjon får vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x}\int 2e^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ og $f(0) = 2$ ser vi at $C = 4$, slik at

$$f(x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 4.$$

Oppgave 12.8.23

Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0.$$

Rekken konvergerer derfor for alle x (selv om $x = 0$ strengt talt ikke gir mening, siden 0^0 ikke gir mening). Kall summen for $S(x)$. Ganger vi med x på begge sider får vi

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$$

hvor vi kjente igjen potensrekken til e^x. Vi ser derfor at $S(x) = \frac{e^x-1}{x}$ for alle x forskjellig fra 0 (definerer vi $S(0) = 1$ kan denne utvides til en kontinuerlig funksjon i 0).

Oppgave 12.8.25

a)

Bruker vi forholdstesten ser vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$. Det er også klart at rekken konvergerer for $x = \pm 1$, slik at konvergensintervallet blir $[-1, 1]$.

b)

Det er klart at $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar for $x \neq 0$. Vi har at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{1-x} = -1 = f(0),$$

slik at f er kontinuerlig i 0. Vi har også at

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1-h)}{h}+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{1-h}+1}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{2h(1-h)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Derfor er f deriverbar i 0 også, og $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

c)

Sett $S(x)$ til å være summen av rekken i a). Deriverer vi får vi først

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

Ganger vi opp med x og deriverer på nytt får vi

$$(xS'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

når $x \in (-1,1)$. Integrerer vi får vi

$$xS'(x) = -\ln(1-x),$$

eller $S'(x) = -f(x)$. Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$S(x) = -\int_0^x f(t)dt = 1 - g(x).$$

Der $S(x)$ konvergerer er det derfor klart at $g(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ konvergerer. Dermed må Taylor-rekken til g om 0 være gitt ved $1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

d)

Vi ser at $g'(x) = f(x)$ for alle x i konvergensområdet. Det er videre klart at $f(x)$ er negativ for alle x, og dermed er $g(x)$ en strengt avtagende funksjon (den deriverte er mindre enn 0), og har dermed en omvendt funksjon h. Siden $g(0) = 1$ har vi at

$$h'(1) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{f(0)} = -1.$$

Utregningen av $h''(1)$ er litt verre, siden vi ikke har lært om sammenhengen mellom de andrederiverte til en funksjon og dens omvendte funksjon. Vi kan imidlertid utlede en slik sammenheng ved å derivere den kjente ligningen

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$$

ved hjelp av kjerneregelen (se også Oppgave 7.4.8 i læreboka). Da får vi

$$h''(x) = -\frac{g''(h(x))h'(x)}{(g'(h(x)))^2}.$$

Setter vi inn $x = 1$, $h(1) = 0$ får vi

$$h''(1) = -\frac{g''(0)h'(1)}{(g'(0))^2} = -\frac{f'(0)h'(1)}{(f(0))^2} = -\frac{-\frac{1}{2} \times (-1)}{1} = -\frac{1}{2}.$$