1.1 - 1.8 | Determinanter:

2×2: matriser: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underline{ad - bc}$

3×3: matriser: $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

10.

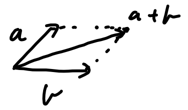
a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(28-3) - (-2)(7-6) + (-1)(1-8)$$

$$= 3\cdot 25 + 2\cdot 1 - (-7) = 75 + 2 + 7 = \underline{\underline{84}}$$

Areal til parallellogram:



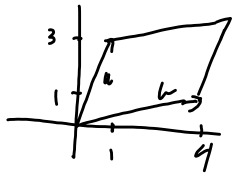
$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Arealet blir absoluttverdien.

$a = (a_1, a_2)$

$b = (b_1, b_2)$

Oppgv. 2 Finn arealet til parallellogram-et utspent av $a = (1,3)$, $b = (4,1)$



$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

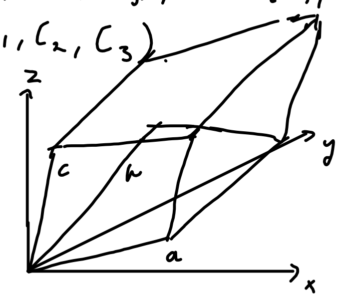
$$= |1 \cdot 1 - 3 \cdot 4| = |1 - 12| = \underline{\underline{11}}$$

Volum av parallellpipeder:

Gitt ved 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

$c = (c_1, c_2, c_3)$



Volum: $V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

---

11. Finn volumet til parallellpidet utspent av $a = (-1,0,2)$

$b = (3,-1,3)$, $c = (4,0,-1)$.

$$V = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1\big((-1)\cdot(-1)\big) + 2(4)$$

$$= -1 + 8 = \underline{\underline{7}}.$$

Determinant for $n \times n$-matriser:

$n \times n$ matrise:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & \\ a_{31} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ & & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Eks: 4×4
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \left| \quad \right| - a_{14} \left| \quad \right|$$

Oppgv 16: Regn ut

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$- 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

---

1) Regn ut de 3 3×3-determinantene
2) Sett inn i uttrykket.

1.1: Oppg. 3: Vis at for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

b) $(x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y$.

Husk $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Skalarprodukt: $x\cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

$x\cdot y = y\cdot x$: kommutativt.

$$(x-y)\cdot(x-y) = \overbrace{x\cdot(x-y)}^{1} - \overbrace{y\cdot(x-y)}^{2}$$

$$\boxed{\text{Regel: } (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c}$$

$$= (x\cdot x - x\cdot y) - (y\cdot x - y\cdot y)$$

$$= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y$$

$$= x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y.$$

Trekantulikheten: 1.2

for alle $a, b \in \mathbb{R}^n$: så er:

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Seksjon 1.2

15) Vis at for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ så er:

i) $|x| - |y| \leq |x-y|$

ii) $|y| - |x| \leq |x-y|$

iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Løsning:

i) $|x| - |y| \leq |x-y| \Leftrightarrow \underbrace{|x| \leq |x-y| + |y|}_{\text{Holder å vise dette}}$.

Av trekantulikheten:

$$\underbrace{|x-y|}_{a} + |\underbrace{y}_{b}| \geq |\underbrace{(x-y)+y}_{a+b}| = |x|.$$

Da har vi vist ulikheten.

ii) $|y| - |x| \leq |x-y|$

Bytter ut x med y og motsatt i i)

$|y| - |x| \leq |y-x| = |-(x-y)| = |x-y|$.

Da har vi vist ii).

iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Omformulering:

$\Updownarrow$

$|x| - |y| \leq |x-y| \leftarrow$ følger fra i)

og

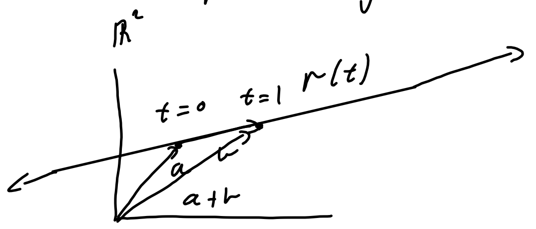
$-(|x| - |y|) \leq |x-y|$.

$\Updownarrow$

$|y| - |x| \leq |x-y| \leftarrow$ følger fra ii).

Parameterfremstillinger:

Gitt et punkt a, og en vektor b:



da er en parameterfremstilling gitt ved $r(t) = a + tb$.

---

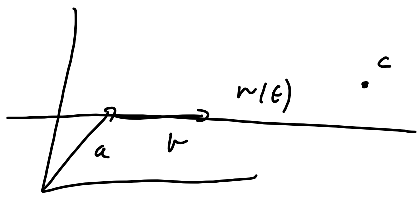
19. (Seksjon 1.2)

Finn en parameterfremstilling for linja gjennom punktet $a=(-3,-2,5,8)$ parallell med $b=(1,-2,-1,3)$. Sjekk om $c=(1,-6,3,14)$ ligger på linja.

$r(t) = a + tb = (-3,-2,5,8)+t(1,-2,-1,3)$

$= (-3,-2,5,8)+(t,-2t,-t,3t)$

$= (-3+t,-2-2t,5-t,8+3t)$.



c ligger på linja kun hvis $\exists t \in \mathbb{R}$ slik at $r(t) = (1,-6,3,14)$.

Får en vektorlikning:

$(-3+t,-2-2t,5-t,8+3t) = (1,-6,3,14)$

$-3+t=1$, $-2-2t=-6$,

$5-t=3$, $8+3t=14$.

$t=1+3=4$. Sjekker de andre:

$-2-2\cdot 4 = -2-8 = -10 \neq -6$.

$\Rightarrow$ c ligger ikke på linja.

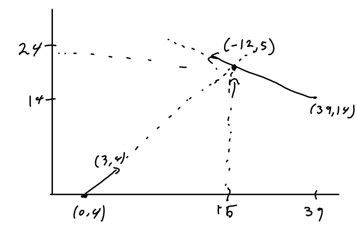
25. To skip på kryssende kurs:

Skip A: $a = (0,4)$, $b = (3,4)$.
hastigheten er 15 knop.

Skip B: $a = (39,14)$, $b = (-12,5)$
hastigheten er 13 knop.

a) hvor vil kursene krysse?
b) Vil de kollidere?

Løsning: Finner kursen til skip A:
$r_1(t) = (0,4) + t(3,4) = (3t, 4+4t)$



Kursen til skip B:
$r_2(s) = (39,14) + s(-12,5)$
$= (39-12s, 14+5s)$.

-Kursene krysser når
$r_1(t) = r_2(s)$. Må finne t og s.

$(3t, 4+4t) = (39-12s, 14+5s)$
i) $3t = 39 - 12s$
ii) $4+4t = 14+5s$.

i) $\Rightarrow$ $t = 13 - 4s$
Setter inn i ii):
$4 + 4(13-4s) = 14+5s$
$4 + 52 - 16s = 14+5s$
$56 - 16s = 14+5s$
$42 = 21s$
$2 = s \Leftrightarrow s = 2$.

Krysser i
$r_2(2) = (39-12\cdot 2, 14+5\cdot 2)$
$= (15, 24)$.

b) Må finne ut hvor skipene befinner seg ved tidspunkt t.
Må skalere retningsvektorene slik at de har lengde lik hastigheten.

Skip A: $|b| = |(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2}$
$= \sqrt{25} = 5$.

$\Rightarrow$ ny retningsvektor:
$c = \frac{15}{5} b = 3b = (9,12)$.

Ny parameterfremstilling
$r_1(t) = (0,4) + t(9,12) = (9t, 4+12t)$

Gjøre tilsvarende for skip B.
$\rightsquigarrow$ ny parameterfremstilling
$r_2(t)$.

For å finne ut om de kolliderer:
Sett $r_1(t) = r_2(t)$.