13) c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Vil ha: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ er verken 0 eller ∞.

La $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. Da vil

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Hva med:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} 1 = \underline{\underline{1}} \notin \{0, \infty\}$$

$$\{c_n\} = \{\frac{2}{n}\}$$

5.1: Kontinuitet

1) e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln|x|}$; antar $f \to \mathbb{R}$ (reell funksjon)

$\sqrt{y}$ er definert for $y \geq 0$ (pga.)

$$y = x+2 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$\ln|x|$ er definert for alle $x \neq 0$.

$\frac{1}{\ln|x|}$ er definert for alle $x \neq 0$ og s.a. $\ln|x| \neq 0$,

dvs. $x \neq 1$ og $x \neq -1$

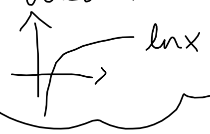
$$\Rightarrow \underbrace{D_f}_{\text{definisjons-mengde } f} = \{ \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{mengden av...}} \mid \underbrace{x \geq -2}_{\text{slik at}},\ x \underbrace{\notin}_{\text{ligger ikke i}} \underbrace{\{-1, 0, 1\}}_{\text{mengden av...}} \}$$

3) c) $f(x) = \ln(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \underbrace{\mathbb{R}_+}_{\text{ikke-neg. reelt tall}} \Rightarrow x^2+1 \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \ln(x^2+1) \in [\ln(1), \lim_{y \to \infty} \ln(y)) = [0, \infty)$$

ln er voksende



Så: $\underbrace{V_f}_{\text{verdimengde } f} = [0, \infty)$

5.) g) $f(x) = \sqrt{x}$ i $x = 4$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $\delta > 0$ s.a. (slik at) når $|x-4| < \delta$, så er $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

La $h := x - 4$ (så $x = h + 4$)

Da er: $|f(x) - f(4)| = |\sqrt{x} - 2| \leq |\sqrt{x} - 2| \, |\sqrt{x} + 2|$

siden $\sqrt{x} \geq 0$ for alle x

$|a \cdot b| = |a| \, |b|$

$= |(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)|$

3. kvadr. set.

$= |x - 4| = |h|$

Velg $\delta = \varepsilon$. Hvis $|x-4| = |h| < \delta$, så er

$$|f(x) - f(4)| < |h| \le \delta = \varepsilon \qquad \left(\delta = \frac{\varepsilon}{2},\ \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right)$$

forrige side

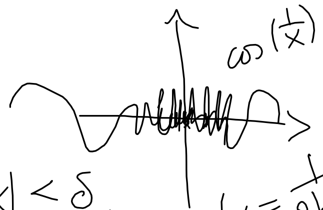
Så dermed er f <u>kontinuerlig</u> i $x=4$.

6) b) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ i pkt. 0.

Merk at $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0_+]{} \infty$ og $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0_-]{} -\infty$, så

$\left(\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty\right)$ $\cos \frac{1}{x}$ vil ossillere

(svinge) fortere og fortere når x nærmer seg 0



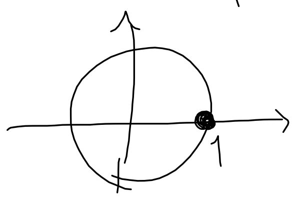
Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten δ man velger vil det være mulig å finne en x s.a. $|x-0| = |x| < \delta$, men $\frac{1}{x} = 2k\pi$ for et heltall k. $\left(x = \frac{1}{2k\pi}\right)$

f.eks

Men da er:

$$\underline{|f(x)-f(0)|} = \left|\cos\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\cos\frac{1}{x}\right|$$

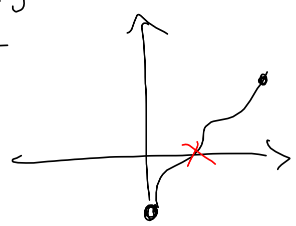
$$= |\cos(2k\pi)| = 1 \underline{\geq} \frac{1}{2} = \underline{\varepsilon},$$



så dermed er f ikke kontinuerlig i $\underline{\underline{x=0}}$.

5.2:

1) b) $\underline{f(x) = e^x - x - 2 \text{ i } [0,2]}$:



f er en kontinuerlig funksjon.

$f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = \underbrace{e}_{\approx 2{,}71}{}^2 - 2 - 2 > 0$

Skjæringssetningen gir da at f har nullpunkt(er) i $(0,2)$.

3) a) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^2 - 2$, $[1, 2]$:

f og g er kont. funk.

$f(1) = 0$
$g(1) = -1$ $\Rightarrow f(1) > g(1)$

$f(2) = \ln(2)$
$g(2) = 2$ $\Rightarrow f(2) < g(2)$

Korollaret til skjæringsset. gir at f og g skjærer hverandre i $(1, 2)$.