Obligatorisk oppgave i MAT 1100, H-03
Løsningsforslag

Oppgave 1:

a) Vi skal regne ut $\int_2^3 xe^{x^2}\,dx$. Substituerer vi $u = x^2$, får vi $du = 2x\,dx$. De nye grensene er gitt ved $u(2) = 2^2 = 4$ og $u(3) = 3^2 = 9$. Dermed får vi:

$$\int_2^3 xe^{x^2}\,dx = \int_4^9 \frac{1}{2}e^u\,du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_4^9 = \frac{e^9}{2} - \frac{e^4}{2}$$

b) Vi skal regne ut $\int x\cos x\,dx$. Bruker delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \cos x$. Da er $u' = 1$, $v = \sin x$, og vi får:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

c) Det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ er lik $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ dersom denne grenseverdien finnes. Vi ser derfor først på integralet $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$. Substituerer vi $u = \sqrt{x}$, får vi $x = u^2$ og dermed $dx = 2u\,du$. Grensene er gitt ved $u(1) = \sqrt{1} = 1$ og $u(b) = \sqrt{b}$. Dermed har vi

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2u}{u(u^2+1)}\,du =$$

$$= \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2}{(u^2+1)}\,du = [2\arctan u]_1^{\sqrt{b}} = 2\arctan(\sqrt{b}) - \frac{\pi}{2}$$

der vi har brukt at $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Dette gir

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(2\arctan(\sqrt{b}) - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Oppgave 2: Formelen for volumet til et omdreiningslegeme om y-aksen (se *Kalkulus* 8.6.5) forteller oss at volumet vårt er gitt ved $V = 2\pi\int_0^1 x\arcsin x\,dx$. Integralet $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$ kan naturlig angripes både ved delvis integrasjon og substitusjon. Begge deler fører til mål, men de fleste vil nok synes at vi får penest regninger om vi substituerer $u = \arcsin x$. Da er $x = \sin u$ og $dx = \cos u\,du$. De nye grensene er gitt ved $u(0) = \arcsin 0 = 0$ og $u(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Dermed er

$$I = \int_0^1 x\arcsin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\cdot u\cdot\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin u\cos u\,du$$

For å komme videre må vi bruke delvis integrasjon, men regningene blir enklere om vi først observerer at $\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u$ (husk formelen for sinus til det dobbelte av en vinkel). Dermed har vi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}u\sin 2u\,du$$

Bruker vi nå delvis integrasjon med $U = u$ og $V' = \frac{1}{2}\sin 2u$, får vi $U' = 1$ og $V = -\frac{1}{4}\cos 2u$. Dette gir

$$I = \left[-\frac{u}{4}\cos 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos 2u\, du =$$

$$\frac{\pi}{8} - 0 + \left[\frac{1}{8}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + 0 = \frac{\pi}{8}$$

Vi går tilbake til formelen for volumet og finner

$$V = 2\pi \int_0^1 x \arcsin x\, dx = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Oppgave 3:

a) Vi skal dele $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14$ på $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$. Bruker vi polynomdivisjon, får vi:

$$\begin{array}{l}
x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14 \ : \ x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = \ x + 1 \\
-\underline{(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x)} \\
\qquad\quad x^3 + 6x^2 + 13x + 14 \\
\qquad -\underline{(x^3 + 3x^2 + 6x + 4)} \\
\qquad\qquad\quad 3x^2 + 7x + 10
\end{array}$$

Dette betyr at

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = x + 1 + \frac{3x^2 + 7x + 10}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

b) For å vise at -1 er en rot i polynomet $Q(x)$, setter vi inn:

$$O(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 6(-1) + 4 = -1 + 3 - 6 + 4 = 0$$

Dette betyr at $x - (-1) = x + 1$ er en faktor i $Q(x)$. For å finne faktoriseringen til $Q(x)$ deler vi derfor $Q(x)$ på $x + 1$:

$$\begin{array}{l}
x^3 + 3x^2 + 6x + 4 \ : \ x + 1 = \ x^2 + 2x + 4 \\
-\underline{(x^3 + x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 + 6x + 4 \\
\qquad -\underline{(2x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad\quad 4x + 4 \\
\qquad\qquad -\underline{(4x + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Altså er

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x + 1)(x^2 + 2x + 4)$$

Vi bruker løsningsformelen for annengradsligninger til å faktorisere x^2+2x+4. Annengradsligningen $x^2+2x+4=0$ har røttene:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Dette betyr at $(x^2+2x+4) = (x-(-1+i\sqrt{3}))(x-(-1-i\sqrt{3})) = (x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$. Siden røttene i annengradsligningene er komplekse, ser vi at den reelle faktoriseringen til $Q(x)$ er

$$Q(x) = (x+1)(x^2+2x+4)$$

mens den komplekse faktoriseringen er

$$Q(x) = (x+1)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$$

c) Vi skal beregne

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+12x^2+17x+14}{x^3+3x^2+6x+4}\,dx$$

Fra punkt a) ser vi at

$$I = \int (x+1+\frac{3x^2+7x+10}{x^3+3x^2+6x+4})\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{3x^2+7x+10}{x^3+3x^2+6x+4}\,dx$$

For å beregne det gjenstående integralet

$$I_1 = \int \frac{3x^2+7x+10}{x^3+3x^2+6x+4}\,dx$$

bruker vi delbrøkoppspalting. Vi vet fra b) at $x^3+3x^2+6x+4 = (x+1)(x^2+2x+4)$, så oppsettet blir

$$\frac{3x^2+7x+10}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Ganger vi med fellesnevneren $x^3+3x^2+6x+4 = (x+1)(x^2+2x+4)$, får vi:

$$3x^2+7x+10 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x+1) =$$

$$= (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + (4A+C)$$

Sammenligner vi koeffisientene på venstre og høyre side, ser vi at vi må ha:

$$A+B=3 \qquad 2A+B+C=7 \qquad 4A+C=10$$

Fra den første ligningen får vi $B=3-A$ og fra den siste får vi $C=10-4A$. Setter vi dette inn i den midterste, får vi $2A+(3-A)+(10-4A)=7$ som gir $A=2$. Dermed er $B=3-A=3-2=1$ og $C=10-4A=10-4\cdot 2=2$. Delbrøkoppspaltingen blir dermed

$$\frac{3x^2+7x+10}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{2}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+2x+4}$$

Vi har altså

$$I_1 = \int (\frac{2}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+2x+4})\, dx = 2\ln(x+1) + \int \frac{x+2}{x^2+2x+4}\, dx$$

For å løse det gjenstående integralet

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+4}\, dx$$

regner vi først ut den deriverte til nevneren $N(x) = x^2+2x+4$. Vi får $N'(x) = 2x+2$. Vi "smugler" nå $N'(x)$ inn i telleren:

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+2}{x^2+2x+4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\, dx + \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx$$

I det første integralet setter vi nå $u = x^2+2x+4$ og får $du = (2x+2)\, dx$. Dermed er

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\, dx + \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx = \frac{1}{2}\ln|u| + \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) + \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx$$

Det gjenstår å regne ut:

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx$$

Gjør vi kvadratet i nevneren fullstendig, får vi $x^2+2x+4 = x^2+2x+1+3 = (x+1)^2+3$. Dermed er

$$I_3 = \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{3}+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\, dx$$

Vi setter $u = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$, og får $du = \frac{dx}{\sqrt{3}}$. Dette gir

$$I_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Setter vi nå sammen alle bitene, får vi:

$$I = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Oppgave 4:
a) Vi skal regne ut $I = \int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$. Her er $\sin x$ opphøyd i en odde potens, så vi bruker identiteten $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ til å kvitte oss med alle forekomster av $\sin x$ bortsett fra én:

$$I = \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (cos^2 x - \cos^4 x)\sin x\, dx$$

Vi setter $u = \cos x$ og får $du = -\sin x\,dx$. Dermed er

$$I = \int (u^4 - u^2)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

b) I integralet $I = \int \cos^4 x\,dx$ er alle potenser like. Vi må derfor skrive om ved hjelp av den velkjente formelen $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ som også kan skrives $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Innsatt i integralet gir dette:

$$I = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

For å løse det gjenstående integralet

$$I_1 = \int \cos^2 2x\,dx$$

bruker vi det samme trikset på nytt. Vi skriver $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ og får:

$$I_1 = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$$

Samler vi våre resultater, får vi

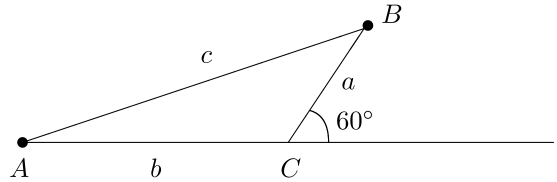
$$I = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}I_1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C\right) =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C'$$

Oppgave 5:
a) Det enkleste er å bruke cosinussetningen som sier at i en trekant med sider a, b og c er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

der C er den motstående vinkelen til siden c (se figuren).

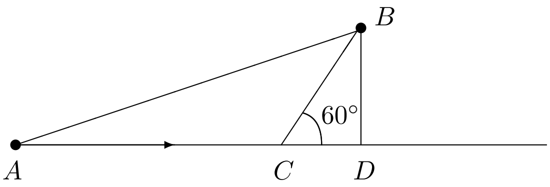


I vårt tilfelle er $a = 3$, $b = 5$ og $C = 180° - 60° = 120°$. Dermed er

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120° = 25 + 9 - 30\cdot(-\frac{1}{2}) = 49$$

Avstanden mellom skipene er altså 7 nautiske mil.

Husker man ikke cosinussetningen, kan man resonnere geometrisk (dette er egentlig å gjennomføre beviset for cosinussetningen!):

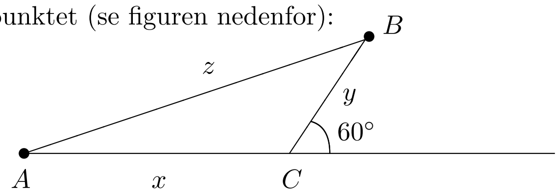


På figuren ovenfor er $CD = CB \cdot \cos 60° = 3 \cdot \cos 60° = \frac{3}{2}$ og $DB = CB \cdot \sin 60° = 3 \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Bruker vi Pythagoras på trekanten ADB, får vi dermed

$$AB^2 = (5 + \frac{3}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{169}{4} + \frac{27}{4} = \frac{196}{4} = 49$$

Altså er $AB = 7$.

b) La $x = x(t)$ være avstanden fra skipet A til punktet C ved et (generelt) tidspunkt t, la $y = y(t)$ være avstanden fra skipet B til punktet C ved det samme tidspunktet, og la $z = z(t)$ være avstanden mellom skipene ved dette tidspunktet (se figuren nedenfor):



Ved å resonnere på samme måte som i punkt a) , ser vi at

$$z^2 = x^2 + xy + y^2$$

(Bruker du cosinussetningen, ser du dette slik: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = x^2 + y^2 - 2xy(-\frac{1}{2}) = x^2 + xy + y^2$). Deriverer vi dette uttrykket mhp. t, får vi (husk kjerneregel og produktregel):

$$2zz' = 2xx' + x'y + xy' + 2yy'$$

Vi løser for z':

$$z' = \frac{2xx' + x'y + xy' + 2yy'}{2z}$$

I den situasjonen vi er interessert i, er $x = 5$, $y = 3$ og — ifølge punkt a) — $z = 7$. Videre er $x' = -10$ (fortegnet er negativt siden skip A *nærmer* seg punkt C og avstanden derfor avtar) og $y' = 11$. Dermed er

$$z' = \frac{2 \cdot 5 \cdot (-10) + (-10) \cdot 3 + 5 \cdot 11 + 2 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 7} = -\frac{9}{14}$$

Dette betyr at avstanden endrer seg med en fart på $\frac{9}{14}$ nautiske mil i timen, og at den avtar (siden z' er negativ).