MAT1100 - Grublegruppen
Notat 6

Jørgen O. Lye

Vektorrom og indreprodukt

Vektorrom

Vi trenger å si litt om vektorrom og indreprodukt for å formulere Fourier-rekker. Definisjonen av vektorrom kan man tenke på som en formalisering av hvordan vektorer fungerer i $\mathbb{R}^n$. Et vektorrom er en mengde V med et begrep om addisjon og hvor man har en del krav. I det følgende så er $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ hvor $\mathbb{K}$ enten er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\exists\, \mathbf{0} \in V$ slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}\ \forall\ \mathbf{u} \in V$.
- $\mathbf{v} \in V \implies -\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
- $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Dette er egenskaper man har for vanlige vektorer. Hakket mindre trivielt er funksjonsrom, f.eks. kontinuerlige funksjoner eller L^p-rommene.

Basis

En samling vektorer $\{\mathbf{e}_n\}$ kalles en basis hvis enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som en lineærkombinasjon av disse:

$$\mathbf{v} = \sum_n c_n \mathbf{e}_n$$

Man krever også at ingen $\mathbf{e}_i$ kan skrives som en sum av de andre $\mathbf{e}_j$. Eksempelet man bør tenke på er standard enhetsvektorene til $\mathbb{R}^n$. Dvs de som ligger langs koordinataksene.

Indreprodukt

Et indreprodukt er en generalisering av skalarproduktet eller prikkproduktet i $\mathbb{R}^n$. Gitt et vektorrom V, så kalles $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ et indreprodukt dersom følgende gjelder:

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
- $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ og 0 hvis og bare hvis $\mathbf{u} = 0$.

Som sagt bør man tenke på prikkproduktet her. At man driver og kompleks-konjugerer slipper man unna når man jobber reelt, men man må ha det med i det komplekse tilfellet.

Noen kommentarer er på sin plass når det gjelder listen over. Det er vanlig blant matematikere å kreve linearitet i første argument istedenfor andre argument i punkt 2, dvs kreve $\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Fysikere derimot sverger religiøst til den formen jeg har gitt over.

Hvis man dropper betingelsen om at $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ kaller man indreproduktet for et pseudo-indreprodukt. Spesiell og generell relativitetsteori krever at man er villig til å droppe siste betingelse. Man mister da litt kontroll og intuisjon.

Indreprodukt og metrikker

Hvis man har et indreprodukt kan man definere en metrikk ved

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Det er verdt å sjekke at dette blir en metrikk. Det er ikke sant at alle metrikker kommer fra et indreprodukt på denne måten. Hvis det er ønskelig kan vi se på dette. Det er ikke så grusomt vanskelig å vise, men man må nesten vite trikset. Det er ikke åpenbart bare fra definisjonene.

Ortonormal basis

En basis kalles ortogonal dersom $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ når $i \neq j$. En basis kalles ortonormal dersom $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ når $i \neq j$, og $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$. Siste relasjon skrives ofte $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ hvor δ_{ij} er en Kronecker-delta, og er definert som

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ når } i = j \\ 0 \text{ når } i \neq j \end{cases}$$

L^2-indreproduktet og Fourier

Husk at vi definerte $L^2(U)$ i forrige notat på følgende vis:

$$L^2(U) = \{\text{Integrerbare funksjoner } f : U \to \mathbb{R} \text{ eller } \mathbb{C} \text{ slik at } \int_U |f|^2 \, dx < \infty\}$$

Dette rommet påstod vi at var et metrisk rom sist gang. Det er faktisk også et indreproduktrom med indreprodukt gitt ved

$$\langle f, g \rangle = \int_U \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

Dette indreproduktet gir opphav til metrikken til L^2 fra forrige notat. Det som kanskje ikke er opplagt, men som kan vises, er at ingen av de andre L^p-metrikkene kommer fra et indreprodukt. Dette gjør L^2 ganske spesiell.

Fourier

La oss spesialisere til tilfellet $U = [-\pi, \pi]$. Påstanden til Joseph Fourier (1768-1830) var at alle funksjoner i $L^2([-\pi, \pi])$ kan skrives som følgende rekke:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

hvor generelt sett er $c_n \in \mathbb{C}$. Påstanden er med andre ord at $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2([-\pi, \pi])$. Det er et ikke-trivielt teorem at dette er sant, dvs at disse rekkene konvergerer, og at alle funksjoner i L^2 kan skrives slik. Fourier selv klarte ikke å vise dette.

Videre er det en komplikasjon hva vi mener med konvergens her. Metrikken til L^2 er gitt ved integralet. Så teoremet sier at man får konvergens i denne metrikken. Det dekker ikke uten videre punktvis-konvergens. Med det mener man at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \right|^2 dx \to 0$$

men ikke uten videre at

$$\left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \right| \to 0$$

for alle x. Det viser seg derimot at det siste er "så godt som sant", i en teknisk forstand vi kan se litt på senere.

Hvis man er villig til å tro på konvergens, så er et spørsmål hvordan man finner c_n. Først kan vi sjekke at $\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ er ortonormale. Dvs vi må regne ut

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx} \, dx$$

Gjør man dette (det er en ganske grei oppgave), så ser man at man faktisk har

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{mn}$$

Det som ikke er trivielt er den delen av definisjon av basis som sier at alle funksjoner i $L^2([-\pi, \pi])$ kan skrives ved hjelp av e^{inx}.

Hvis man antar den biten stemmer, så kan man finne c_n med følgende triks. Skriv først

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Ta så indreprodukt på begge sider med $\mathbf{e}_m$, og bruk lineariteten til indreproduktet:

$$\langle \mathbf{e}_m, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

Tenk litt over siste overgang. Dette er den vanligste bruken av en Kroneckerdelta. Vi kan altså finne tallene c_m ved å regne ut følgende:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} \, dx$$

Merk komplekskonjugasjonen som er en viktig del av definisjonen av indreproduktet.

Eksempler

La oss prøve å bruke dette til noe. F.eks. finne Fourier-rekken til noen enkle funksjoner.

$f(x) = x^2$

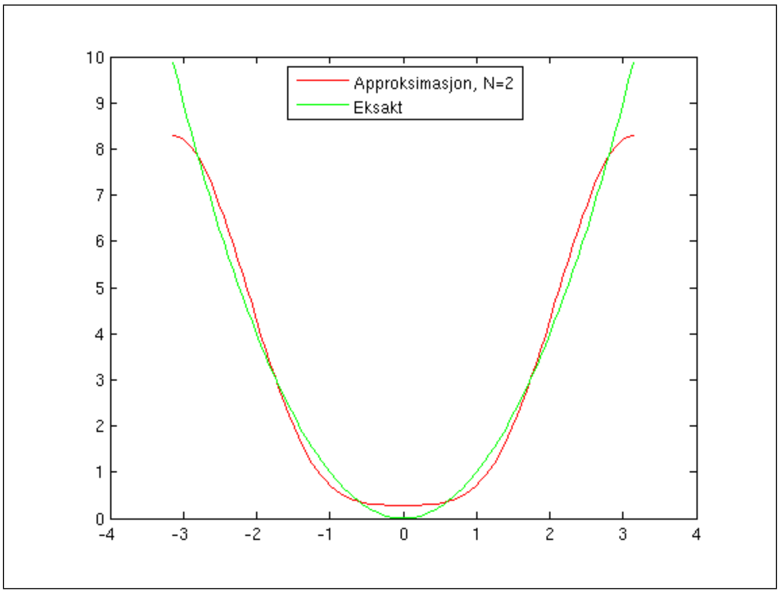
Bruker man formelen for c_n som står over, så er det en fin liten oppgave å regne ut c_n. Ta $n = 0$-tilfellet for seg. For $n \neq 0$, delvis integrer 2 ganger, og bruker at $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Gjør man dette rett finner man at

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

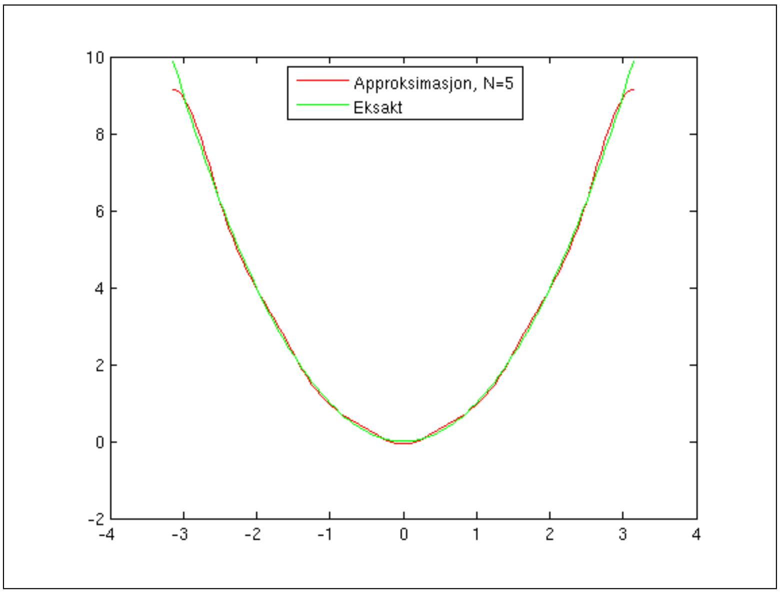
Det denne formelen betyr er at

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

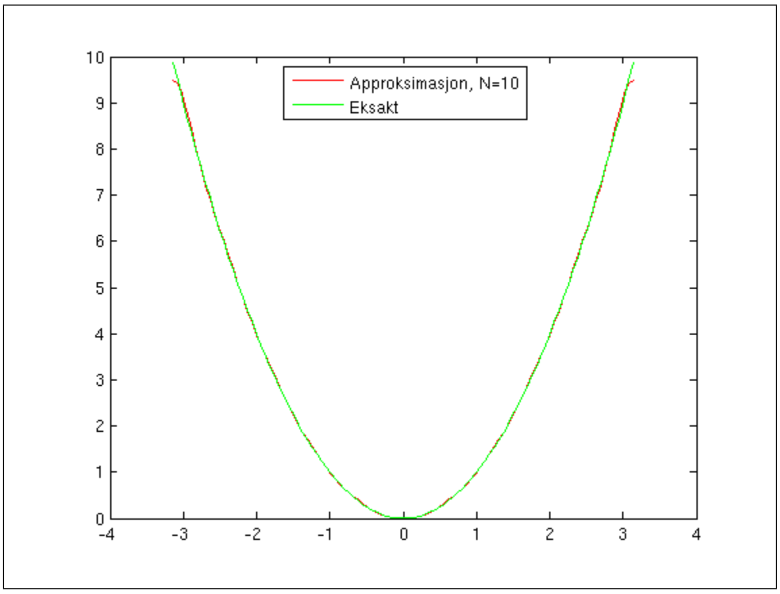
Dette skal gjelde for $x \in [-\pi, \pi]$. Noen plott av hvordan dette ser ut grafisk er gitt i figurene 1-3.



Figur 1: Plot av $f(x) = x^2$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 2$



Figur 2: Plot av $f(x) = x^2$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 5$



Figur 3: Plot av $f(x) = x^2$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 10$

Hvis man stoler på konvergensen av disse rekkene kan man putte inn

$x = \pi$ i denne ligningen, og finne at

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Heaviside

Definerer Heaviside-funksjonen H ved

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Hvis man begrenser denne til intervallet $[-\pi, \pi]$ kan vi finne dens Fourier-rekke.

Dette er igjen en liten regneoppgave. Gjør man det finner man at

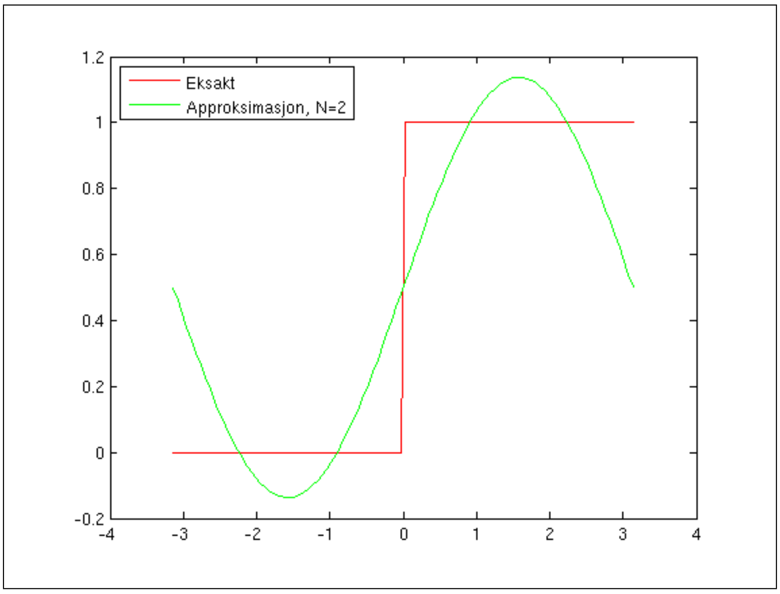
$$H(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right)\sin(nx)$$

Igjen så mener man at

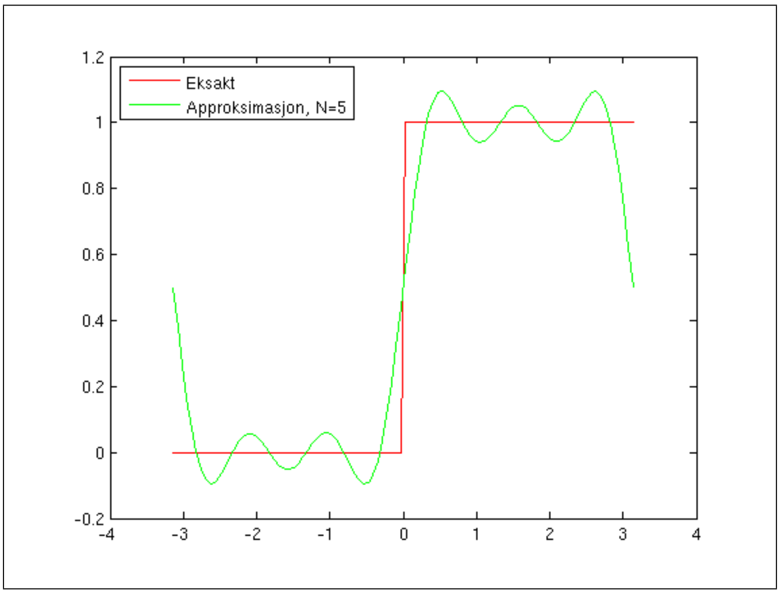
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right)\sin(nx) \to H(x)$$

når $N \to \infty$. Plott av denne situasjonen er lagt ved som figurer 4-6.

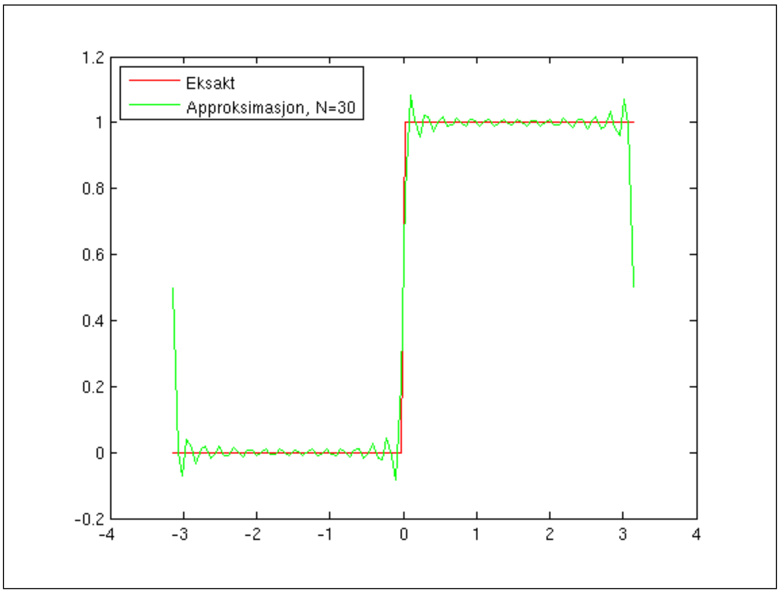
Hvis man i denne formelen putter inn $x = 0$, finner man at $H(0) = \frac{1}{2}$. Men jeg definerte den jo som $H(0) = 1$. Noen forslag til hva som går galt? Og hvorfor $\frac{1}{2}$? Et hint er plottene.



Figur 4: Plot av $H(x)$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 2$



Figur 5: Plot av $H(x)$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 5$



Figur 6: Plot av $H(x)$ mot den trunkerte Fourier-rekken med $N = 30$

Merk flippene ved diskontinuiteten som ikke forsvinner. At man får slike flipper ved diskontinuiteter kalles ofte Gibbs fenomen, oppkalt etter Josiah Willard Gibbs, en matematiker/fysiker som drev med litt av hvert.

Sinus og cosinus

Som man ser i det forrige eksempelet kan man istedenfor å jobbe med e^{inx} heller bruke $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$. Dette er den mer vanlige måten å starte på. Det er gjørbart å vise at hvis $f(x)$ er en reell funksjon, kan man alltid velge de komplekse tallene c_n slik at man kan skrive

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

der c, a_n og b_n er reelle.

Noen små spørsmål

Hvis man skriver $f(x)$ som en Fourier-rekke og bruker cosinus og sinus, hvordan kan man da vite at den ikke vil inneholde et konstantledd og at det ikke vil være noen cosinus-ledd?

På samme måte (uten å regne), hvordan kan man vite at det ikke vil være noen sinus-ledd i funksjonen $f(x) = x^2$?