Plenum 21/09-12

4.3: 1 c), 3a), b), d), 4 b), 11, 13, 14, 15, 18 4vent.

5.1: 1a), b), c), 3a), b), 5a), b), e), g), 6a), b), 7, 9a), b), c)

4.3: 1) c) $\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 + 2n - 13}{7n - 4}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{13}{n^3}}{\frac{7}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = \infty$

Deler på n^3 oppe og nede

3) b) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+n}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}+1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

4) b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n} = 0$

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $N \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N$ er

$$\left| \frac{2\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{2\sin n}{n} \right| = \frac{2|\sin n|}{n}$$

$$< \varepsilon$$

Merk: $|\sin n| \leq 1$ for alle n.

Derfor er det nok å finne $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \quad \left(\frac{2|\sin n|}{n} \leq \frac{2}{n} \right)$$

Velg N til å være det første heltallet større (eller lik) enn $\frac{2}{\varepsilon}$. Da er, for alle $n \geq N$

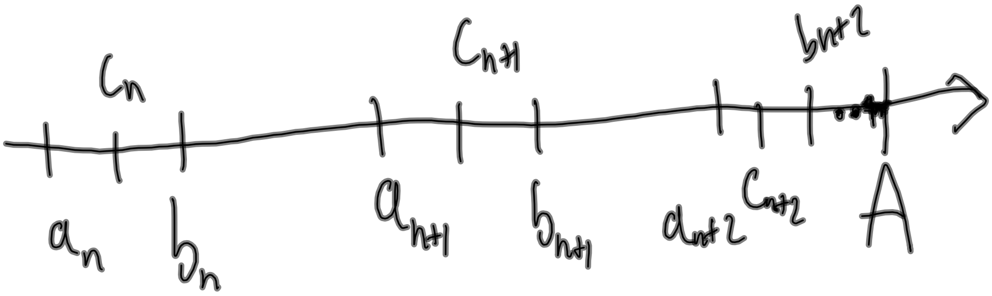
$$\left| \frac{2\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

11.) Skviselemma

Anta $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = A$, og

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ for alle } n.$$

Vil vise: Da er $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = A$



La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da fins, siden $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, $N_a \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_a$ er $|a_n - A| < \varepsilon$.

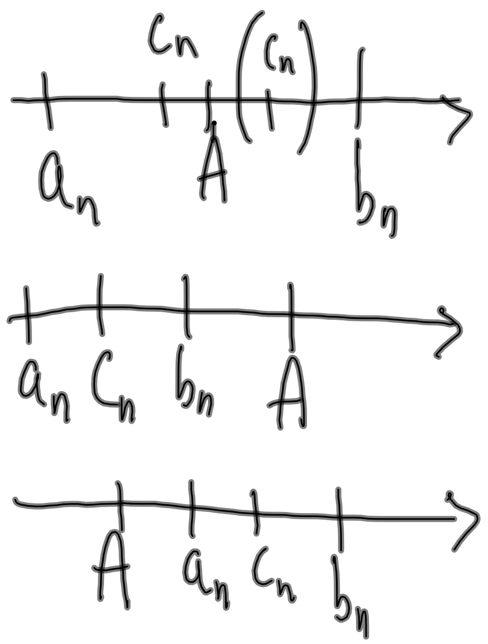
Tilsvarende, siden $\lim_{n \to \infty} b_n = A$, fins $N_b \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_b$ er

$|b_n - A| < \varepsilon$.

Merk: For alle n,

$$|c_n - A| \le \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\}$$

(siden $a_n \le c_n \le b_n$)



Velg $N = \max\{N_a, N_b\}$. Da er, for alle $n \geq N$,

$$|c_n - A| \le \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\}$$

$$< \varepsilon .$$

siden $|a_n - A| < \varepsilon$ og $|b_n - A| < \varepsilon$

Dermed er

$$\underline{\underline{\lim_{n \to \infty} c_n = A .}}$$