

L'Hopitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{når } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{eller} \\ \infty \end{cases}$$

(forutsatt at $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer eller er $\pm \infty$)

$$\text{Eks 1: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \ln x}{e^x - x \cdot e} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{e^x - e} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^x} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

Andre ubestemte uttrykk må omformes før vi kan bruke L'Hopitals regel: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^∞

$$\begin{aligned} \text{Eks 2: } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x \cdot e^{-\frac{1}{x}}) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - e^{-\frac{1}{x}}) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{\frac{0}{0} \text{ l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Uttrykk av typen 1^∞ , 0^0 og ∞^0 kan behandles ved hjelp av følgende triks: $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)}$

$$\text{Eks 3: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan x)}{x - \frac{\pi}{4}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{x - \frac{\pi}{4}}}$$

Regner ut grensen i eksponenten:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{x - \frac{\pi}{4}} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \underline{\underline{2}}$$

$$\text{Dermed blir: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}} = \underline{\underline{e^2}}$$