Problemsett 2, grublegruppe MAT1100 høst 2009

1. (En klassiker) En gammel sjørøver gjemte på sine eldre dager en skatt ned på en øy med følgende instrukser til den som måtte ønske å grave den fram: "På øya er det kun en kokospalme, et banantre og en galge. Start ved galgen, gå til kokospalmen, plukk en kokosnøtt, vend 90 grader mot klokka og gå deretter like mange skritt som det var fra galgen til palmen. Legg fra deg nøtta. Start så på ny ved galgen, gå til banantreet, vend denne gang 90 grader med klokka og gå igjen like mange skritt som det var fra galgen til treet. Skatten ligger nå begravd midt mellom der du står og kokosnøtta."

   Du bestemmer deg for å få fatt i denne skatten, og drar derfor til øya. Der viser det seg at galgen er råtna slik at du kun er i stand til å finne kokospalmen og banantreet. Oppdraget kan nå synes umulig, men heldigvis kan du så mye om komplekse tall at du allikevel er i stand til å finne skatten. Hvordan?

2. Vis ved hjelp av definisjonen av en konvergent følge at $a_n = \frac{n!}{n^n}$ konvergerer.

3. Anta at a_n, b_n og c_n er følger slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle n. Anta dessuten at både a_n og c_n konvergerer mot en grense L. Vis at at b_n også konvergerer mot L.

4. Vis at hvis $0 < a < \alpha$, er $a < \sqrt{\alpha a} < \alpha$. Forklar at følgen gitt ved $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n}$ er konvergent og finn $\lim_{n\to\infty} a_n$. Hva er $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$?

5. La $d : X \times X \to \mathbb{R}$ være en metrikk. (Det vil si at $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ og $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ for alle $x, y, z \in X$.) Vis at $d(x,y) \geq 0$ for alle $x, y \in X$.

6. Er følgende funksjoner metrikker på $\mathbb{R}$?

   a) $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x = y \\ 1 & \text{hvis } x \neq y \end{cases}$

   b) $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

   c) $d(x,y) = \sin(x-y)$

   d) $d(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{hvis } y \geq x \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$

   e) $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$

7. Vis at hvis d er en metrikk, er også $d' = \frac{d}{1+d}$ en metrikk.