Kapittel 8

Seksjon 8.2

Oppgave 8.2.15

La Π være en partisjon av $[a, b]$, og la $m_i^{(f)}, M_i^{(f)}$ være infimum og supremum av f på intervallene i partisjonen. Hvis $m_i^{(f)}, M_i^{(f)}$ har samme fortegn, så er det klart at $M_i^{(f)} - m_i(f) = M_i^{(|f|)} - m_i^{(|f|)}$. Hvis de har motsatt fortegn så har vi at $M_i^{(|f|)} - m_i^{(|f|)} \leq M_i^{(f)} - m_i^{(f)}$. Den siste ulikhetene gjelder derfor i alle tilfeller. Siden f er integrerbar kan vi finne en partisjon Π slik at Ø(Π)-N(Π) $< \epsilon$. Da har vi at

$$\sum_i (M_i^{(|f|)} - m_i(|f|))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_i (M_i^{(f)} - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon$$

slik at Ø(Π)-N(Π) $< \epsilon$ gjelder også hvis vi bytter ut f med $|f|$. Men da er også $|f|$ integrerbar.

Siden $M_i^{(f)} \leq M_i^{(|f|)}$ vil enhver øvre trappesum for f være dominert av tilsvarende øvre trappesum for $|f|$, og ulikheten gitt i oppgaven følger direkte ved å ta grenseverdier.

Seksjon 8.3

Oppgave 8.3.7

a)

Her er det klart at både teller og nevner går mot 0 når $x \to 0$, slik at vi ved å kombinere analysens fundamentalteorem og L'Hôpitals regel får

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} dt}{1} = 1.$$

b)

Det er klart at nevneren går mot ∞, og telleren gjør det samme siden eksponenten i integraden går mot 0, slik at integranden går mot 1 (og da vil jo integralet gå mot ∞). Vi kan derfor bruke L'Hôpitals regel, og får

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_1^x e^{1/t} dt}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x}}{2x} = 0.$$

Oppgave 8.3.9

Sett $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, der $a \leq x \leq b$. Bruker vi middelverdisetningen på $F(x)$ ser vi at det finnes en $c \in [a,b]$ slik at $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$. Setter vi inn $F'(c) = f(c), F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(x)dx$ får vi $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$. Resultatet følger nå ved å gange opp med $(b-a)$ på begge sider.

Oppgave 8.3.12

a)

Funksjonene $g_1(x) = \phi(-x)$ og $\phi_2(x) = -\phi(x)$ (vi bruker kjerneregelen sammen med analysens fundamentalteorem for å derivere den førstnevnte) $g_1'(x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x$, $g_2'(x) = \ln\cos x$. Vi har derfor at $g_1(x) = g_2(x) + C$. Siden $g_1(0) = g_2(0)$ følger det at $C = 0$, og at $g_1(x) = g_2(x)$, og dermed at $\phi(-x) = -\phi(x)$.

b)

Fra fundamentalteoremet har vi at $\phi'(x) = -\ln\cos x$. Vi får også at $\phi''(x) = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$.

c)

Vi ser at $\phi'(x) > 0$ for alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, slik at ϕ er voksende. Siden $\tan x < 0$ for $x \in (-\pi/2, 0)$, og $\tan x > 0$ for $x \in (0, \pi/2)$, så er ϕ konkav på $(-\pi/2, 0)$, konveks på $(0, \pi/2)$.

d)

Siden $\phi(x) = 0$ kan vi kombinere L'Hôpitals regel og analysens fundamentalteorem, og vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

e)

Setter vi inn $x = 0$ ser vi rask at begge sidene blir like, siden $\phi(0) = 0$. For å vise at venstre og høyre side er like trenger vi derfor bare sjekke at de deriverte er like. Den deriverte av venstresiden er $-\ln\cos x$. Bruker vi kjerneregelen for å derivere høyresiden får vi

$$\begin{aligned}
&-2\frac{1}{2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\frac{1}{2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2\\
= \quad & -\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2\\
= \quad & -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)-\ln 2\\
= \quad & -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)-\ln 2\\
= \quad & -\ln\left(\frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)-\ln 2\\
= \quad & -\ln\left(\frac{1}{2}\cos x\right)-\ln 2=\ln 2-\ln\cos x-\ln 2=-\ln\cos x,
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

f)

Vi viser først at grenseverdien $I=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\phi(x)$ eksisterer. Siden ϕ er voksende trenger vi bare motbevise at $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$ (funksjonsverdiene nær $\pi/2$ kan da sees på om som verdiene i en voksende og begrenset følge, og slike følger vet vi er konvergente). Vi kan skrive om likningen vi fant i e) til

$$2\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)=\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)=2\phi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+x\ln 2. \tag{1}$$

Når $x<\pi/2$ er det klart at $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}>x$, og siden ϕ er voksende så er det klart at $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)>0$. Hvis $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$, så vil $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\to\infty$, siden $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\to\pi/2$ også, men da vil også venstresiden i (1) gå mot ∞, siden $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)>0$. Men siden $\phi(0)=0$ så vil høyresiden i (1) gå mot 0 (siden $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\to 0$), noe som strider mot at venstresiden går mot ∞. Derfor kan ikke $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$, slik at grenseverdien $I=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\phi(x)$ eksisterer.

Vi lar så x gå mot $\pi/2$ nedenfra på venstre og høyre side i identiteten fra e). Venstresiden nærmer seg da I. På høyresiden vil argumentet $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$ nærme seg $\pi/2$ nedenfra, mens argumentet $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ vil nærme seg 0. Siden $\phi(0)=0$ vil høyresiden nærme seg $2I-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Etter å ha tatt grenseverdier på identiteten fra e) ender vi altså opp med

$$I=2I-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

slik at $I=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Oppgave 8.3.14

Siden $g(c)>0$ og g er kontinuerlig, så finnes det en ϵ og et intervall I som inneholder c, med $g(x)>\epsilon$ for alle $x\in I$. La Π være en partisjon som inneholder I som et av sine intervaller. Da har vi at

$$\int_a^b g(x)dx\geq\sum_i m_i(x_i-x_{i-1})\geq\epsilon|I|>0,$$

der $|I|$ er lengden på intervallet I, og der vi har brukt at alle $m_i \geq 0$ (siden $g(x) \geq 0$ for alle x), og at integralet er supremum av alle nedre trappesummer.

Seksjon 8.4

Oppgave 8.4.5

a)

Setter vi inn $y = 1$ i (*) får vi at $f(x) = f(x) + f(1)$, og det følger umiddelbart at $f(1) = 0$.

b)

Vi vet fra (*) at $f(x+h) = f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right)$. Dette kan også skrives om til

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Hvis $x = 1$ vet vi at grenseverdien her er k (siden $f'(1) = k$, slik at $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h} = k$. Men med substitusjonen $u = \frac{h}{x}$ kan vi også skrive

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)}{ux} = \frac{k}{x},$$

slik at f er deriverbar i x også, og $f'(x) = \frac{k}{x}$.

c)

Vi vet at f har formen $f(x) = k\ln x + C$. Siden $f(1) = 0$ følger det umiddelbart at $C = 0$, slik at $f(x) = k\ln x$.

Seksjon 8.5

Oppgave 8.5.3

Middelverdisetningen sier at det finnes en $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ slik at $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$, der vi har brukt at F er en antiderivert til f. Dette kan skrives om til $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Kombinerer vi hintet fra oppgaven og dette finner vi at

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Men dette er ogå lik $R(\Pi, U)$, der $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, og U er utvalget $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Seksjon 8.6

Oppgave 8.6.11

c)

Vi har at $y'(x) = x - \frac{1}{4x}$, slik at buelengden blir

$$\begin{aligned}
\int_1^e \sqrt{1+(y'(x))^2}dx &= \int_1^e \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2}dx = \int_1^e \sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}dx \\
&= \int_1^e \sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}dx = \int_1^e \sqrt{(x+\frac{1}{4x})^2}dx \\
&= \int_1^e (x+\frac{1}{4x})dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}/lnx\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Oppgave 8.6.23

a)

$0 \leq y \leq h$ svarer til at $0 \leq x \leq \sqrt{h}$. Volumet blir derfor

$$\int_0^{\sqrt{h}} 2\pi x f(x)dx = \int_0^{\sqrt{h}} 2\pi x^3 dx = \left[\frac{1}{2}\pi x^4\right]_0^{\sqrt{h}} = \frac{1}{2}\pi h^2.$$

b)

Opplysningen i oppgaven sier at $V'(h) = \pi h$, slik at $V'(1) = \pi$. Dermed gir kjerneregelen at

$$2 = V'(t) = V'(h(t))h'(t) = \pi h'(t),$$

slik at $h'(t) = \frac{2}{\pi}$ (her har vi egentlig betraktet volumfunksjonen som to funksjoner: en der den er en funksjon av høyde, en der den er en funksjon av tid).

Oppgave 8.6.27

a)

Vi får at

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{32}(32-u)^2u^p du = \int_0^{32}(32^2u^p - 64u^{p+1} + u^{p+2})du \\
&= \left[\frac{32^2}{p+1}u^{p+1} - \frac{64}{p+2}u^{p+2} + \frac{1}{p+3}u^{p+3}\right]_0^{32} \\
&= \frac{32^2}{p+1}32^{p+1} - \frac{64}{p+2}32^{p+2} + \frac{1}{p+3}32^{p+3} \\
&= 32^{p+3}\frac{(p+2)(p+3)-2(p+1)(p+3)+(p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= 32^{p+3}\frac{p^2+5p+6-2p^2-8p-6+p^2+3p+2}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{2\times 32^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}.
\end{aligned}$$

b)

Vi har at

$$f'(x) = cm(x-16)^{m-1}(48-x)^n - cn(x-16)^m(48-x)^{n-1}$$

for $16 \le x \le 48$. Skal dette være 0 må $cm(x-16)^{m-1}(48-x)^n = cn(x-16)^m(48-x)^{n-1}$, som gir at $m(48-x) = n(x-16)$. Setter vi inn $x = 28$ får vi $20m = 12n$, eller $m = \frac{3}{5}n$.

c)

Vi gjør først substitusjonen $u = 48 - x$ og får

$$\begin{aligned}
\int_{16}^{48}(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx &= -\int_{32}^{0}(32-u)^2u^{10/3}du = \int_0^{32}(32-u)^2u^{10/3}du \\
&= \frac{2\times 32^{10/3+3}}{(10/3+1)(10/3+2)(10/3+3)} = \frac{2\times 32^{13/3}}{\frac{13}{3}\frac{16}{3}\frac{19}{3}} \\
&= \frac{54\times 32^{13/3}}{13\times 16\times 19} \approx 4.66\times 10^7.
\end{aligned}$$

Siden det gjennomsnittlige antall barn en kvinne føder fra hun er 16 til hun er 48 er gitt ved dette integralet ganget med c, så må vi ha $c\frac{54\times 32^{19/3}}{13\times 16\times 19} = 1.86$ (for at en kvinne i gjennomsnitt skal føde 1.86 barn), eller

$$c = \frac{1.86}{\frac{54\times 32^{19/3}}{13\times 16\times 19}} \approx 4\times 10^{-8}$$

d)

For å løse denne deloppgaven trenger vi et begrep vi egentlig ikke har lært enda: En sannsynlighetstetthetsfunksjon er en funksjon $p(x)$ som er slik at $\int p(x)dx = 1$. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for antall fødsler er altså gitt ved

$$p(x) = \frac{c(x-16)^2(48-x)^{10/3}}{\int_{16}^{48} c(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx} = \frac{(x-16)^2(48-x)^{10/3}}{I_{10/3}}.$$

Gitt sannsynlighetstetthetsfunksjonen $p(x)$, så blir gjennomsnittsalderen for en fødende kvinne $\int_{16}^{48} xp(x)dx$ (denne formelen har dere ikke lært, så det er ikke så lett for dere å løse denne oppgaven!), som blir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{I_{10/3}}\int_{16}^{48} x(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}\int_{0}^{32} c(48-u)(32-u)^2u^{10/3}du \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}\left(48\int_{0}^{32}(32-u)^2u^{10/3}du - \int_{0}^{32}(32-u)^2u^{13/3}du\right) \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}(48I_{10/3} - I_{13/3}) = 48 - \frac{I_{13/3}}{I_{10/3}} \\
&= 48 - \frac{\frac{54\times 32^{22/3}}{16\times 19\times 22}}{\frac{54\times 32^{19/3}}{13\times 16\times 19}} = 48 - \frac{32\times 13}{22} \approx 29.1.
\end{aligned}$$