5.4 Iterasjon av funksjoner

$[0,1] \subset \mathbb{R}$

$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$a \in$ initialverdi

$x_0 = a$

$x_1 = f(a)$

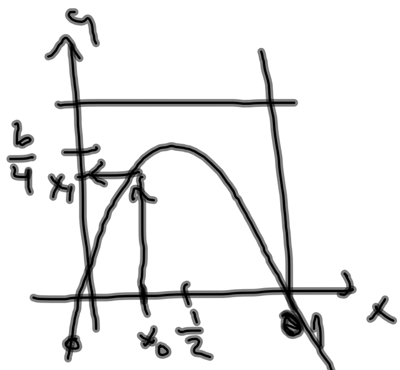
$x_2 = f(f(a)) = f^2(a)$

$\underline{x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0}$

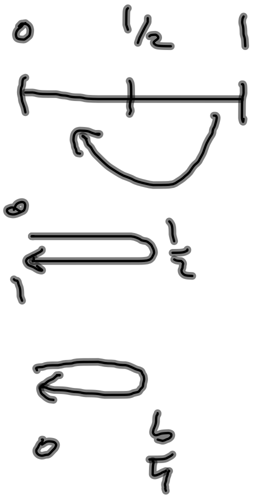
Hva skjer med $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$?

<u>Eks</u> parameter $b \in [0,4]$

$f(x) = b x (1-x)$



foldefunksjon



f kontinuerlig

Hvis $x_n \to y$

når $n \to \infty$

må

$\underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} \longrightarrow f(y)$

når $n \to \infty$

$$\boxed{y = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(y)}$$

<u>Def</u> Hvis $f(y) = y$ kalles y et <u>fikspunkt</u> for f.

For $0 \leq b \leq 1$ er $(x \in [0,1])$

$$f(x) = bx(1-x) \leq x$$

$$b \leq 1,\ 1-x \leq 1$$

$$a = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

gir en avtagende følge, så $x_n \to y$ når $n \to \infty$

Hvilke fikspunkter har $f(x)$?

$$x = f(x) = bx(1-x)$$

$$x = 0 \text{ eller } 1 = b(1-x)$$

$$\iff x = 1 - \frac{1}{b}.$$

<u>$b \leq 1$:</u>

Eneste mulige grense $= 0$

$$f(x) = bx(1-x) \qquad 0 \leq b \leq 1$$

$$x_n \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

For $1 < b \leq 3$ er $x=0$ fortsatt et fikspunkt.

$a = x_0 = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x_n \to 0$
$n \to \infty$

Hvis $a = x_0 > 0$ er $\underbrace{\text{liten}}$ nok til $b(1-x_0) > 1$

så $x_0 < b x_0 (1-x_0) = x_1$

Så $x_n \not\to 0$ når $n \to \infty$

$y = 0$ er et ustabilt fikspunkt

I stedet er $y = 1 - \frac{1}{b} \in [0, \frac{2}{3})$

et stabilt fikspunkt for $1 < b \leq 3$:

Hvis x_n er nær $1 - \frac{1}{b}$ vil x_{n+1} være enda nærmere $1 - \frac{1}{b}$, så $x_n \to 1 - \frac{1}{b}$ når $n \to \infty$.

$f(x) = bx - bx^2$

$f'(x) = b - 2bx$

$f'(1 - \frac{1}{b}) = 2 - b$

Hvis $x_n = 1 - \frac{1}{b} + h$ for små h

vil

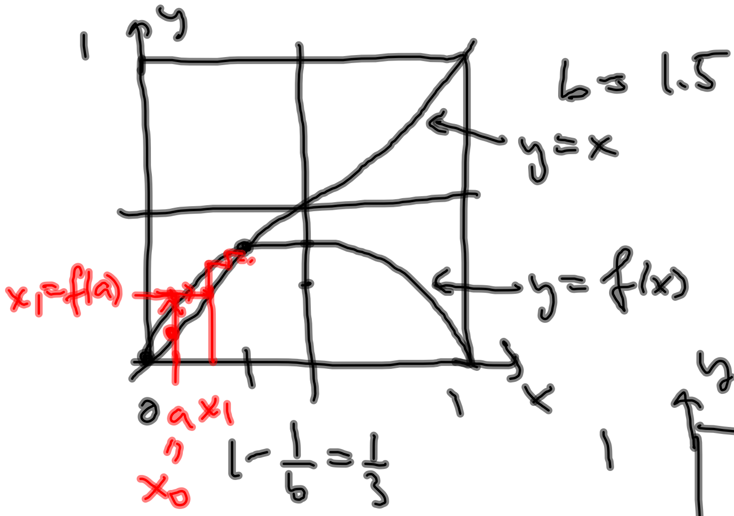
$$f(x_n) \approx f(1-\tfrac{1}{b}) + f'(1-\tfrac{1}{b})h$$
$$= 1 - \frac{1}{b} + \underbrace{(2-b)h}_{\text{ny avstand}}$$

for $1 < b < 3$ er $|2-b| < 1$ så

$$|x_{n+1} - (1 - \tfrac{1}{b})| < |x_n - (1 - \tfrac{1}{b})|$$

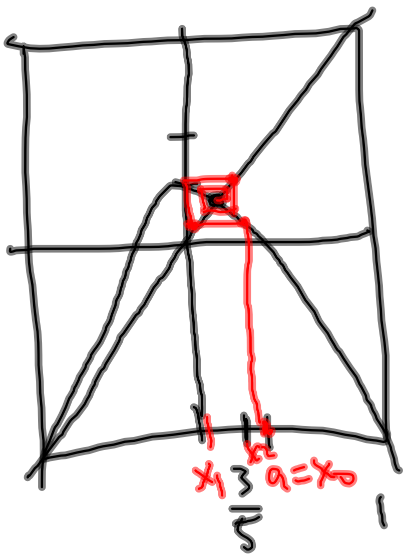
$\to 0$ når $n \to \infty$

$b = 1.5$


1
y
y=x
y=f(x)
x₁=f(a)
0
a
x₁
1
x
x₀
1 − 1/b = 1/3

$b = 2.0$:


y
1
1/2
0
x
0
x₁
x₂
1/2
a=x₀
1


x₁
3/5
x₂
a=x₀
1

$b = 2{,}5$

For $b > 3$ er $f'(1-\frac{1}{b}) = 2-b < -1$

så om $x_n = 1-\frac{1}{b}+h$ vil

$$x_{n+1} \approx 1-\frac{1}{b}+\underbrace{(2-b)h}_{\text{større enn } h \text{ i absoluttverdi}}$$

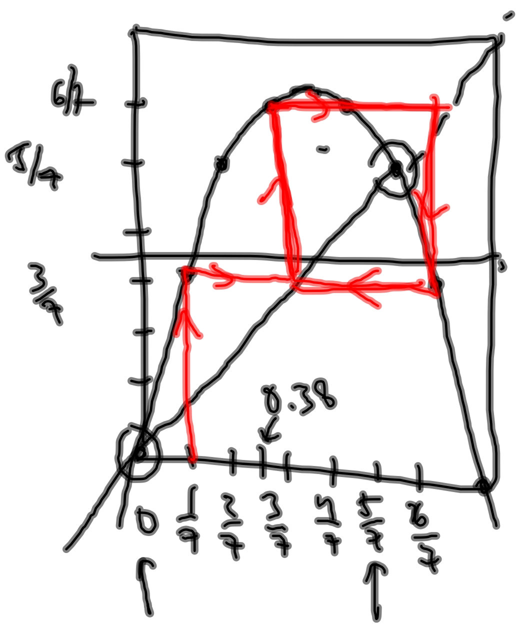
Nå er både $y=0$ og $y=1-\frac{1}{b}$

ustabile fikspunkter,

$\{x_n\}$ kan ikke være konvergent

(hvis ikke en $x_n = 0$ eller $1-\frac{1}{b}$).

$b = 3.5 = \frac{7}{2}$



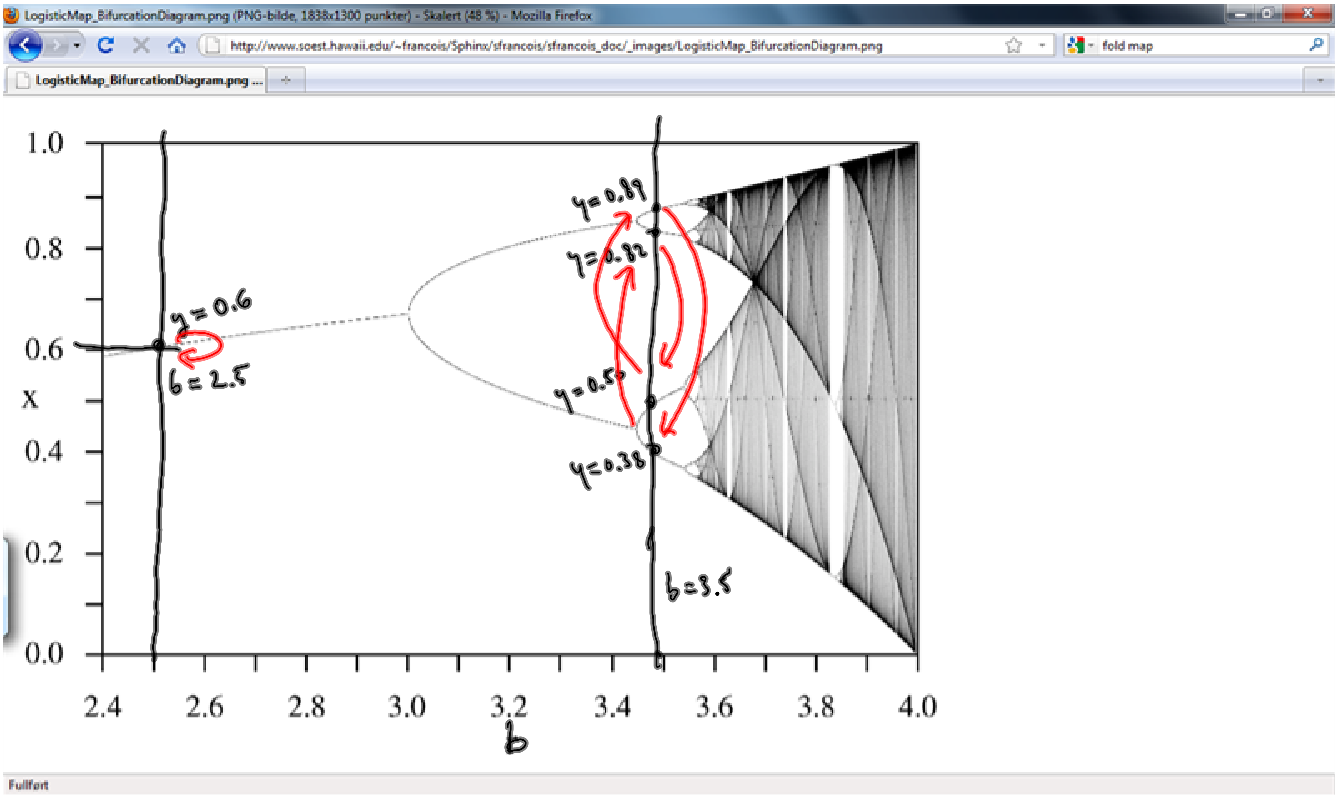
$x_0 = \frac{3}{7},\ x_1 = \frac{6}{7},\ x_2 = \frac{3}{7},\ x_3 = \frac{6}{7}, \dots$

Periodisk løsning, ustabil bane med periode 2

$f'(\frac{3}{7}) = \frac{1}{2} \quad f'(\frac{6}{7}) = -\frac{5}{2}$

For $b > 3.57\dots$ oppstår kaos.

Nesten alle startverdier $a = x_0$ gir følgen $\{x_n\}$ som ikke konvergerer mot noen bane med endelig periode


LogisticMap_BifurcationDiagram.png (PNG-bilde, 1838x1300 punkter) - Skalert (48 %) - Mozilla Firefox
http://www.soest.hawaii.edu/~francois/Sphinx/sfrancois/sfrancois_doc/_images/LogisticMap_BifurcationDiagram.png
fold map
LogisticMap_BifurcationDiagram.png ...
1.0
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0.0
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0
b
y = 0.6
b = 2.5
y = 0.89
y = 0.82
y = 0.5
y = 0.38
b = 3.5
Fullført

LH 5.5 Banachs fikspunktteorem

$A \subseteq \mathbb{R}^m \quad \vec{F}: A \to A \quad (\vec{F}(A) \subseteq A)$ in $\mathbb{R}^m$

Def $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ er et fikspunkt for $\vec{F}$ hvis $\vec{F}(\vec{y}) = \vec{y}$

Def En kontinuerlig $\vec{F}$ kalles en kontraksjon dersom det finnes en konstant (kontraksjons-konstanten) $C \in [0,1)$ $(C<1)$

med
$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C\,|\vec{x} - \vec{y}|$$
for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$.

Gitt $\vec{a} \in A$ danner vi en følge $\{\vec{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ med $\vec{x}_0 = \vec{a}$ og $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$ for $n \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{x}_n = \vec{F}^{\circ n}(\vec{a})$.

<u>Lemma</u> Hvis $\vec{F}$ er en kontraksjon med kontraksjonsfaktor C er

$$|\vec{F}^{\circ n}(\vec{x}) - \vec{F}^{\circ n}(\vec{y})| \leq C^n |\vec{x} - \vec{y}|.$$

$\vec{x} \underset{d}{\text{———}} \vec{y}$

$\vec{F}(\vec{x}) \underset{\leq C\cdot d}{\text{———}} \vec{F}(\vec{y})$

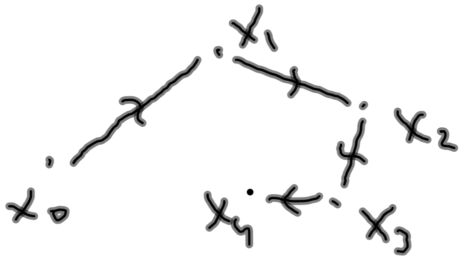
$F^2(x) \underset{\leq C\cdot C\cdot d = C^2 d}{\text{———}} F^2(y)$

$\vdots$

Spesialtilfelle: $\vec{x} = \vec{x}_0$ og $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{x}_1$

da er $\vec{F}^n(\vec{x}) = \vec{x}_n$ og $\vec{F}^n(\vec{y}) = \vec{x}_{n+1}$:

$$|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| \leq C^n |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|.$$



Banachs fikspunktteorem

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikketom og lukket

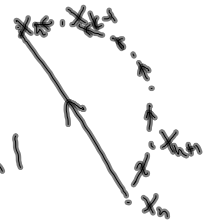
$\vec{F} : A \to A$ kontraksjon.

Da har $\vec{F}$ ett og bare ett fikspunkt i A.

Bevis La $\vec{x}_0 = \vec{a} \in A$ være vilkårlig, og definer $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$ for $n \geq 0$.

Da er $\{\vec{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ en Cauchy-følge.

For $k > n$ er



$$
\begin{aligned}
|\vec{x}_k - \vec{x}_n| &\leq |\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}| + \dots + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| \\
&\leq C^{k-1}|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| + \dots + C^n|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \\
&= (C^{k-1} + \dots + C^n)|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \\
&\leq (C^n + C^{n+1} + \dots)|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \\
&= \frac{C^n}{1-C}|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \to 0 \quad \text{når } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Gitt $\varepsilon > 0$ finnes N slik at

$$|\vec{x}_k - \vec{x}_n| < \frac{C^n}{1-C}|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$. Så

$$|\vec{x}_k - \vec{x}_n| < \varepsilon$$

for alle $k, n \geq N$. $\therefore$ $\{\vec{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ er Cauchy

Siden $\mathbb{R}^m$ er komplett vil

$$\vec{x}_n \to \vec{y} \quad \text{når } n \to \infty$$

for $y \in \mathbb{R}^m$. Siden A er lukket må $y \in A$. Da er

$$
\begin{aligned}
y = \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kontinuitet}}}{=} F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(y)
\end{aligned}
$$

Så y er et fikspunkt.

Hvorfor bare ett fikspunkt?

Anta $F(y) = y$ og $F(z) = z$.

$$|z-y| = |F(z) - F(y)| \leq C|z-y|$$

$$\Longrightarrow |z-y| = 0 \Longrightarrow \underline{y = z}.$$

QED

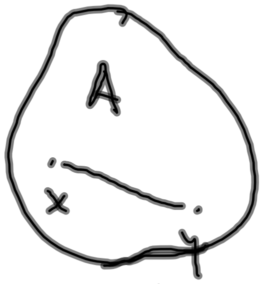
<u>Korollar</u> Fikspunktet $\vec{y}$ er lik grensen $\lim_{n\to\infty} \vec{F}^{\circ n}(\vec{a})$ der $\vec{a} \in A$ er vilkårlig valgt. Videre er

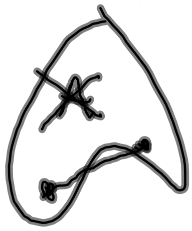
$$|\vec{y} - \vec{x}_n| \leq \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|.$$

Setning 5.5.7

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ være ikketom, lukket og konveks

(for hver par $\vec{x}, \vec{y} \in A$ er linjestykket
$\{(1-t)\vec{x}+t\vec{y} \mid 0 \le t \le 1\} \subseteq A$)





La $\vec{F}: A \to A \subset \mathbb{R}^m$ være deriverbar

på A, med $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$.

Jacobimatrisen er

$$\vec{F}' = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{bmatrix}$$

Hvis

$$|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2 \le C^2$$

for alle m-tupler $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in A$ for en

konstant $C < 1$

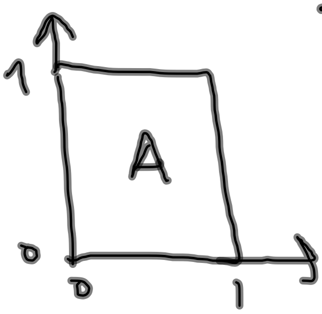
så er $\vec{F}$ en kontraksjon med kontraksjons-

konstant C.

<u>Eksempel m = 2</u>

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x + \cos y}{2} \\ \frac{y + \cos x}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$



$$\vec{F} : A \longrightarrow A$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$0 \leq \cos y, \cos x \leq 1$$

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x,y) \\ \nabla F_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sin y \\ -\frac{1}{2}\sin x & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}_1 = (x_1, y_1), \quad \vec{c}_2 = (x_2, y_2) \in A$$

$$|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + |\nabla F_2(\vec{c}_2)|^2$$
$$\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sin y_1\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sin x_2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 1 = C^2 < 1$$

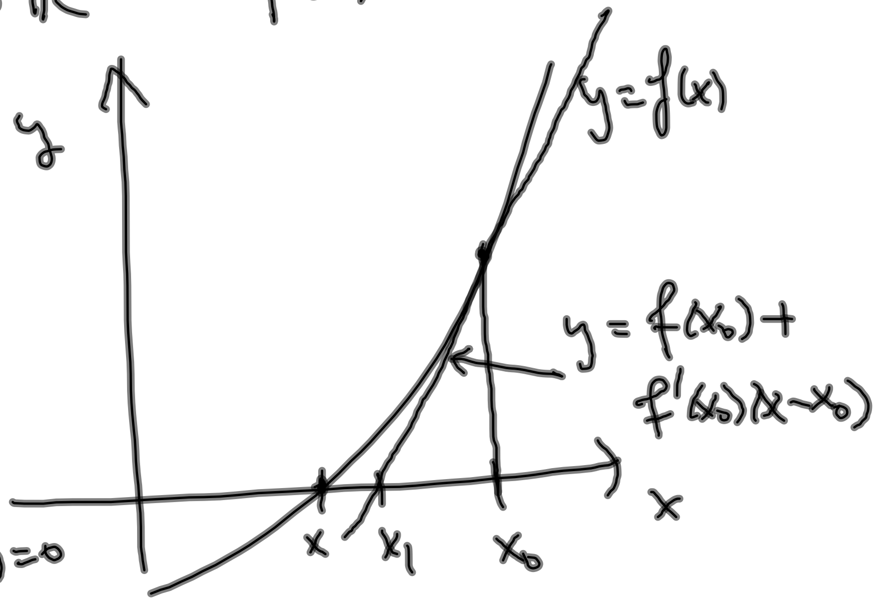
$\therefore$ $\vec{F} : A \longrightarrow A$ har ett og bare ett fikspunkt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.7391 \\ 0.7391 \end{pmatrix}.$$

$$F\begin{pmatrix} 0.7391 \\ 0.7391 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7391 \\ 0.7391 \end{pmatrix}. \checkmark$$

5.6 Newtons metode

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 0$?



I stedet for $f(x) = 0$

Løser vi

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$-x + x_0 = f'(x_0)^{-1} f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0)$$