MAT 1110: Oblig 1, V-12, Løsningsforslag

Oppgave: a) Jacobi-matrisen er $\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$.

b) Lineariseringen i punktet $\mathbf{a}$ er gitt ved $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. I vårt tilfelle er $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, og vi får:

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbf{F}'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

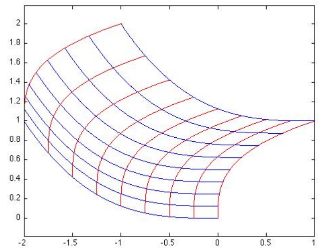
$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x - 2y - \frac{1}{4} \\ x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) De loddrette linjene i rutenettet er gitt ved $x = a$, $y = t$, der $0 \leq t \leq 1$ og $a = 0, \frac{1}{K}, \frac{2}{K}, \ldots, \frac{K-1}{K}, 1$, mens de vannrette er gitt ved $x = t$, $y = a$ for de samme t- og a-verdiene. Bildet av de loddrette strekene er dermed gitt ved $u(t) = a^3 - 2t$, $v(t) = a + t^3$, mens bildet av de vannrette strekene er gitt ved $u(t) = t^3 - 2a$, $v(t) = t + a^3$. I programmet lagrer vi verdiene for bildet av de vannrette strekene i variablene w og z, slik at vi har $w(t) = t^3 - 2a$, $z(t) = t + a^3$

Programmet fungerer som angitt nedenfor:

```
function [u,v,w,z] = Oblig1(K) %Input K bestemmer hvor mange ruter
                               %det skal være i hver retning.
for m=1:K+1                    %Denne løkken styrer a-verdien
    a=(m-1)/K;                 %a angir posisjonen til de m-te linjene i xy-planet
    for n=1:1001               %Denne løkken lager kurvene i uv-planet
        t(n)=(n-1)*0.001;      %t er parameteren i kurvefremstillingen
        u(n)=a^3-2*t(n);       %beskriver u-koord. til bildet av de loddrette linjene
        v(n)=a+t(n)^3;         %beskriver v-koord. til bildet av de loddrette linjene
        w(n)=t(n)^3-2*a;       %beskriver u-koord. til bildet av de vannrette linjene
        z(n)=t(n)+a^3;         %beskriver v-koord. til bildet av de vannrette linjene
    end
    plot(u,v)                  %plotter bildet av de loddrette linjene
    axis('equal')              %sørger for samme målestokk på begge akser
    hold on                    %sørger for at alle kurver kommer på samme figur
    plot(w,z,'r')              %plotter bildet av de vannrette linjene
end
hold off
end
```

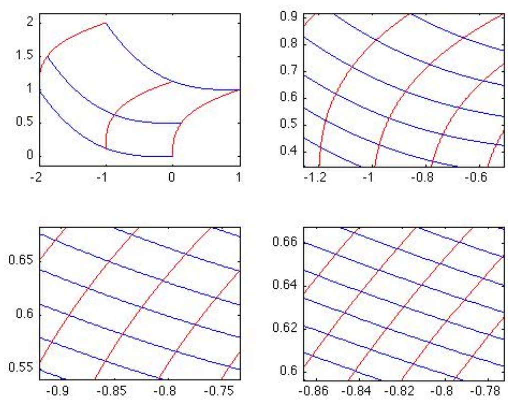
Programmet kjøres best ved å lagre det som en m-fil og kalle på det fra kommandovinduet ved å gi kommandoen `[u,v,w,z]=Oblig1(8);` (for å få figuren for $K = 8$). Resultatet vises på figuren nedenfor.



Kommentar: *Overraskende mange valgte å kopiere hele programmet inn i kommandovinduet for hver kjøring istedenfor å lagre det som en m-fil med K som input-variabel. Dette er en ganske ineffektiv og arbeidskrevende fremgangsmåte som er bortimot ubrukelig når programmene blir større. Det var også mye dårlig kommentering som ikke forklarte hvordan programmet virket.*

d) Kommandosekvensen nedenfor tegner $\mathbf{F}(S_K)$ for $K = 2, 10, 40, 100$. Zoomer du inn på punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-0.875, 0.625)$ i hvert vindu (bruk zoomknappen i figurvinduet), får du figurene nedenfor.

```
subplot(2,2,1)
[u,v,w,z]=Oblig1(2);
subplot(2,2,2)
[u,v,w,z]=Oblig1(10);
subplot(2,2,3)
[u,v,w,z]=Oblig1(40);
subplot(2,2,4)
[u,v,w,z]=Oblig1(100);
```

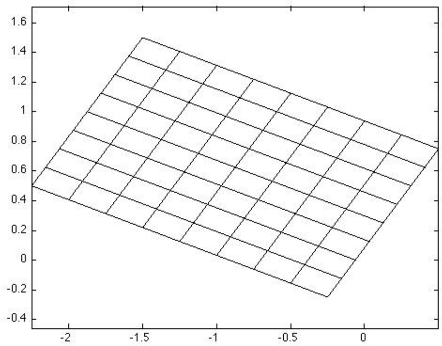


Legg merke til at rutene blir mindre krumme dess mer vi zoomer.

e) Programmet nedenfor tegner $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$. Det er bygget opp på samme måte som det første programmet, bortsett fra at formlene for $\mathbf{F}$ er byttet ut med formlene for $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$.

```
function [u,v,w,z] = Oblig2(K)
for m=1:K+1
    a=(m-1)/K;
    for n=1:1001
        t(n)=(n-1)*0.001;
        u(n)=3*a/4-2*t(n)-1/4;
        v(n)=a+3*t(n)/4-1/4;
        w(n)=3*t(n)/4-2*a-1/4;
        z(n)=t(n)+3*a/4-1/4;
    end
    plot(u,v,'k')
    axis('equal')
    hold on
    plot(w,z,'k')
end
hold off
end
```

Lagrer vi programmet som en m-fil, vil kommandoen `[u,v,w,z]=Oblig2(8);` produsere et bilde av $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_8)$. Resultatet ser du nedenfor.

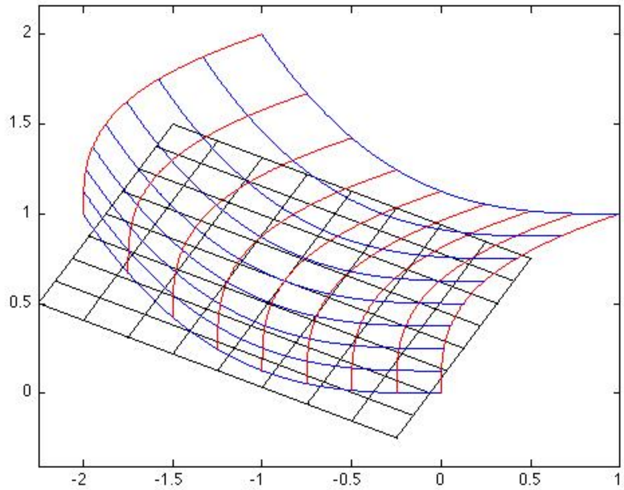


Siden $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er en affinavbildning, består dette rutenettet av parallellogrammer.

For å tegne $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_8)$ og $\mathbf{F}(S_8)$ i samme koordinatsystem, skriver du

```
[u,v,w,z]=Oblig1(8);
hold on
[u,v,w,z]=Oblig2(8);
```

og får:



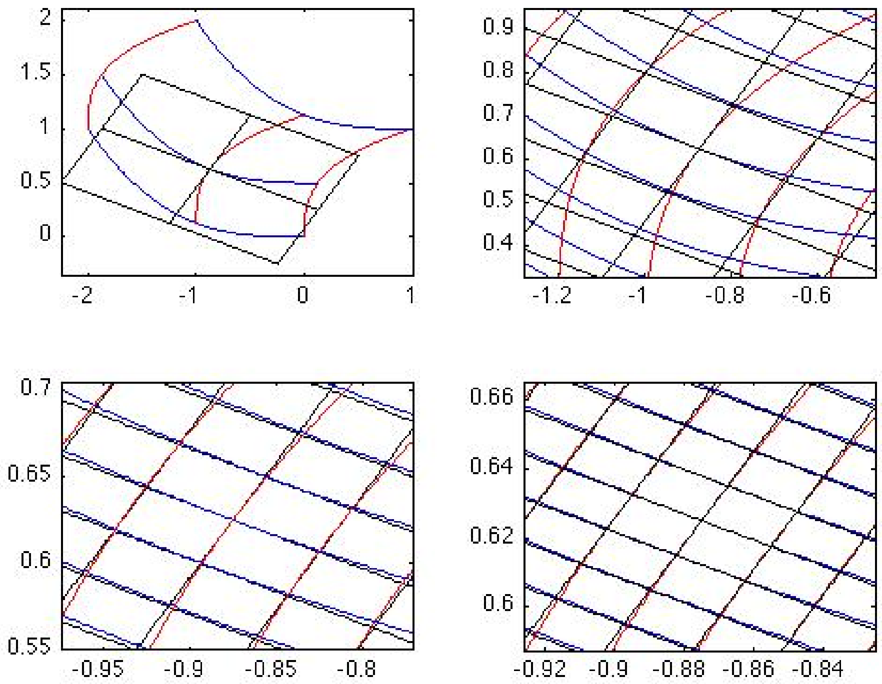
Legg merke til at de to rutenettene er nesten sammenfallende i området rundt $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-0.875, 0.625)$. Lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er altså en god tilnærming til $\mathbf{F}$ i dette området.

f) For å tegne $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_K)$ og $\mathbf{F}(S_K)$ i samme figur for $K = 2, 10, 40, 100$, kan vi bruke denne kommandosekvensen:

```
subplot(2,2,1)
[u,v,w,z]=Oblig1(2);
hold on
[u,v,w,z]=Oblig2(2);
subplot(2,2,2)
[u,v,w,z]=Oblig1(10);
hold on
[u,v,w,z]=Oblig2(10);
subplot(2,2,3)
[u,v,w,z]=Oblig1(40);
hold on
[u,v,w,z]=Oblig2(40);
subplot(2,2,4)
[u,v,w,z]=Oblig1(100);
hold on
[u,v,w,z]=Oblig2(100);
```

Zoomer du inn på punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-0.875, 0.625)$ i hvert vindu, får du figurene nedenfor. Legg merke til at de to rutenettene faller bedre og bedre sammen dess finere oppløsningen er. Dette reflekterer at lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$

blir en bedre og bedre tilnærming til $\mathbf{F}$ (også relativt sett) dess nærmere $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vi kommer.



g) Arealet til de fire rutene i $\mathbf{F}(S_{100})$ som har hjørner i punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, er med stor nøyaktighet lik arealet til de tilsvarende rutene i $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_{100})$. Siden $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er en affinavbildning med "forstørrelsesfaktor" $|\det(\mathbf{F}'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})|$, er det samlede arealet til disse rutene lik $4 \cdot 10^{-4} \cdot |\det(\mathbf{F}'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{41}{16} = \frac{41}{4} \cdot 10^{-4}$.

Kommentar: *Det er selvfølgelig mange korrekte måter å anslå arealet på, men metoden ovenfor er den som oppgave legger opp til, og som har størst læringsverdi i vår sammenheng.*