MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-06

Innleveringsfrist: *Fredag 24. februar, 2006, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk å skrive navn på besvarelsen!** *Se forøvrig*

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h04/Obliger.xml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 50% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB (eventuelt Octave), må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Oppgavesettet består av tre oppgaver. Oppgave 1 og 2 kan gjøres uavhengig av hverandre, men oppgave 3 bygger på begge de to andre.

Oppgave 1: En by har nettopp innført et system med "bysykler" der man kan låne en sykkel fra et sykkelstativ og levere den fra seg ved et annet (eller ved det samme om man bare skal en tur i nærområdet). Foreløpig har byen 4 stativer som vi kaller X, Y, Z, U. Myndighetene er interessert i å undersøke lånemønsteret for syklene, og har derfor en månedlig undersøkelse av hvor de forskjellige syklene befinner seg. Denne undersøkelsen viser at av de syklene som befant seg i stativ X en måned, befinner 40% seg i X måneden etter, 20% befinner seg i Y, 20% i Z og 10% i U, mens 10% er ute av drift fordi de enten er forsvunnet eller inne til vedlikehold. Tilsvarende tall for syklene som opprinnelig var i Y, Z og U, fremgår av tabellen nedenfor.

Utgangspunkt	Prosentfordeling neste måned				
	i X	i Y	i Z	i U	ute av drift
X	40%	20%	20%	10%	10%
Y	10%	40%	20%	20%	10%
Z	10%	20%	25%	25%	20%
U	30%	20%	20%	20%	10%

I forbindelse med undersøkelsen får hvert stativ påfyll med nye/reparerte sykler. Påfyllet tilsvarer 15% av antall sykler som står i stativet.

a) La x_n, y_n, z_n, u_n være antall sykler i henholdsvis X, Y, Z, U rett etter den n-te undersøkelsen (og rett etter påfyllet av nye/reparerte sykler). Forklar at

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 0.46x_n + 0.115y_n + 0.115z_n + 0.345u_n \\
y_{n+1} &= 0.23x_n + 0.46y_n + 0.23z_n + 0.23u_n \\
z_{n+1} &= 0.23x_n + 0.23y_n + 0.2875z_n + 0.23u_n \\
u_{n+1} &= 0.115x_n + 0.23y_n + 0.2875z_n + 0.23u_n
\end{aligned}$$

b) Skriv en m-fil som gitt x_1, y_1, z_1, u_1 returnerer x_n, y_n, z_n, u_n for n fra 1 til 50. Du kan f.eks. la rutinen returnere resultatet i form av en matrise der første rad består av $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$, andre rad består av $y_1, y_2, \ldots, y_{50}$ osv.

c) Velg $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 100$, og bruk MATLAB til å tegne følgene $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$ i samme koordinatsystem.

d) Lag en ny MATLAB-figur der du plotter følgene $\{\frac{x_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{y_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{z_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{u_n}{1.0071^{n-1}}\}$ i samme koordinatsystem. (Hint: Dersom du ønsker å beholde den gamle figuren, kan du aktivere et nytt figurvindu ved å gi kommandoen `>> figure(2)`. Plottene dine kommer nå i dette vinduet inntil du enten aktiverer et nytt figurvindu eller går tilbake til det opprinnelige ved å gi kommandoen `>> figure(1)`.)

e) Gjenta plottingen i c) og d), men bruk starttilstanden $x_1 = 200$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $u_1 = 200$. Ser du et mønster? Eksperimenter gjerne med andre startverdier.

Oppgave 2: I denne oppgaven er A en $n \times n$-matrise. En ikke-null vektor $\mathbf{v}$ kalles en *egenvektor* for A dersom det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vi kaller λ *egenverdien* til $\mathbf{v}$. (λ er den greske bokstaven "lambda". Du kan lese mer om egenvektorer og egenverdier i kapittel 5 av Lays bok, men det er ikke nødvendig for å løse oppgaven).

a) Vis at $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hva er egenverdien?

b) Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ, så er $A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$ for alle $n \in \mathbf{N}$.

c) Anta at $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ er egenvektorer for A med egenverdier henholdsvis λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k. Anta videre at $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Finn $A^n\mathbf{w}$ uttrykt ved $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k og c_1, c_2, $\ldots$, c_k.

d) Anta at tallverdien $|\lambda_1|$ til λ_1 er ekte større enn tallverdien til alle de andre egenverdiene. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n \mathbf{w}}{\lambda_1^n} = c_1 \mathbf{v}_1$$

Oppgave 3: a) Vi går tilbake til oppgave 1, og lar

$$\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix}$$

være fordelingen av sykler den n-te måneden. Forklar at $\mathbf{w}_{n+1} = A\mathbf{w}_n$ der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.115 & 0.115 & 0.345 \\ 0.23 & 0.46 & 0.23 & 0.23 \\ 0.23 & 0.23 & 0.2875 & 0.23 \\ 0.115 & 0.23 & 0.2875 & 0.23 \end{bmatrix}$$

Forklar også hvorfor $\mathbf{w}_n = A^{n-1}\mathbf{w}_1$.

I MATLAB kan vi finne egenvektorene og egenverdiene til en $n \times n$-matrise B ved å gi kommandoen `>> [u,D]=eig(B)`. MATLAB returnerer da to $n \times n$-matriser u og D der søylene i u er egenvektorene til B, og der D er en diagonalmatrise med egenverdiene til B på diagonalen. Egenverdiene og egenvektorene kommer i samme rekkefølge slik at første egenverdi hører til første egenvektor osv.

b) Bruk MATLAB til å vise at matrisen A ovenfor har fire egenverdier λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. Sørg for å ordne rekkefølgen slik at λ_1 er egenverdien med størst tallverdi. (NB: MATLAB gir av og til egenvektorer der *alle* komponentene er negative. For å få en egenvektor som er greiere å arbeide med, kan du da bare fjerne alle minustegnene i denne vektoren.)

c) Vis at egenvektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ til A danner en basis for $\mathbf{R}^4$, dvs. at de er lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbf{R}^4$ (bruk gjerne MATLAB).

d) Velg

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

og skriv denne vektoren som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ (bruk gjerne MATLAB). Benytt oppgave 2d) til å finne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{n-1}\mathbf{w}_1}{\lambda_1^{n-1}}$$

Sammenlign med resultatene i oppgave 1c) og d). Hva regner du med å få dersom du velger en annen starttilstand $\mathbf{w}_1$?