4.10.9 $\vec{v}$ er en egenvektor $\underbrace{\text{for } A}_{\text{med egenverdi } \lambda_1}$, og $\underbrace{\text{for } B}_{\text{med egenverdi } \lambda_2}$

$$AB\vec{v} = A(B\vec{v}) = A(\lambda_2\vec{v}) = \lambda_2(A\vec{v}) = \lambda_2(\lambda_1\vec{v})$$
$$= \lambda_1\lambda_2\vec{v}$$

$\Rightarrow \vec{v}$ er egenvektor for AB, med tilhørende egenv. $\lambda_1\lambda_2$

4.10.13

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda-a)(\lambda-d) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \lambda = \underline{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}$$

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}}{2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

A: symmetrisk $\iff b = c \implies (a-d)^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$

$\implies$ egenverdiene reelle

4.11.4

x_n : sukkermengden i Viktorias glass } etter n blandingen

y_n : —— " —— Emils —— " ——

Viktoria heller over $\frac{1}{9}$ av sin saft.

Etter at Viktoria har helt ~~saft~~ over til Emil så sitter hun igjen med $\frac{8}{9}x_n$ sukker.

Emil har da $y_n + \frac{1}{9}x_n$ sukker — NB!

Viktoria får tilbake $\frac{1}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right)$ sukker

Vi får
$$x_{n+1} = \frac{8}{9}x_n + \frac{1}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right) = \underline{\underline{0.9x_n + 0.1y_n}}$$
$$y_{n+1} = \frac{9}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right) = \underline{\underline{0.1x_n + 0.9y_n}}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\lambda I - M) = (\lambda-0.9)(\lambda-0.9) - 0.1^2$

$$= \lambda^2 - 1.8\lambda + 0.8 = 0$$

$$\lambda = \frac{1.8 \pm \sqrt{1.8^2 - 4 \cdot 0.8}}{2} = \frac{1.8 \pm \sqrt{3.24 - 3.2}}{2} = \frac{1.8 \pm 0.2}{2}$$

$$= 0.9 \pm 0.1 \Rightarrow \lambda_1 = 0.8, \quad \lambda_2 = 1$$

Egenvektor $\vec{v}_1$ for $\lambda_1 = 0.8$

$$\lambda_1 I - M = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 - 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Med $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ må $x_1 = -y_1$. Setter vi $y_1 = 1$ får vi $\underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Egenvektor $\vec{v}_2$ for $\lambda_2 = 1$:

$$\lambda_2 I - M = \begin{pmatrix} 1 - 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & 1 - 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

c) skriv $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ som lin. komb. av $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \left(= 1\cdot\vec{v}_1 + 3\cdot\vec{v}_2\right)$$

$$M^n\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = M^n\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = M^n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3M^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1^n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\lambda_2^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0.8^n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-0.8^n\\3+0.8^n\end{pmatrix}$$

d) Forhold mellom sukker hos Viktoria og Emil:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{3 - 0.8^n}{3 + 0.8^n} > 0.95$$

$$3 - 0.8^n > 0.95(3 + 0.8^n) = 2.85 + 0.95 \cdot 0.8^n$$

$$0.15 > 1.95 \cdot 0.8^n$$

$$\frac{1}{13} > 0.8^n$$

$$\ln\left(\frac{1}{13}\right) > \ln 0.8^n$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{\ln(0,8)} < n \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{n \geq 12}}$$

4.11.5

a) $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

karakteristisk likning: $\det(\lambda I - M) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{81} = 0$

$= \lambda^2 - \lambda - \frac{19}{324} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{18} \qquad \lambda_2 = \frac{19}{18}$

Egenvektor for $\lambda_1 = -\frac{1}{18}$

$-\frac{1}{18} I - M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$

$\lambda_2 = \frac{19}{18}$: $\frac{19}{18} I - M = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) x_n: antall mottakelige for smitte etter $10n$ år
y_n: antall immune etter $10n$ år

x_{n+1} (antall mottakelige etter $10(n+1)$ år) svarer til
- de som var immune, og nå er mottakelig:
$$y_n - \frac{1}{9}y_n - \frac{4}{9}y_n = \underline{\frac{4}{9}y_n}$$
- \+ de som var mottakelige også etter $10n$ år
$$x_n - \frac{1}{9}x_n - \frac{1}{2}x_n = \underline{\frac{7}{18}x_n}$$
- \+ tilskudd av mottakelige på grunn av fødsel og innvandring
$$\underline{\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{6}(x_n+y_n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{4}{9}y_n + \frac{7}{18}x_n + \frac{1}{9}(x_n+y_n) = \underline{\frac{1}{2}x_n + \frac{5}{9}y_n}$$

Antall immune etter $10(n+1)$ år : $y_{n+1} =$

- de som var immune også etter $10\,n$ år : $\frac{4}{9} y_n$

+ de som var mottakelige og er blitt immune : $\frac{1}{2} X_n$

+ tilskudd : befolkning: $\frac{1}{3} \frac{1}{6}(x_n+y_n) = \frac{1}{18}(x_n+y_n)$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{4}{9} y_n + \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{18}(X_n + y_n) = \frac{5}{9} X_n + \frac{1}{2} y_n$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

c) $x_0 = 8$, $y_0 = 2$: $x_1 \vec{v_1} + x_2 \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{v_1} + 5\vec{v_2}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^n (3\vec{v_1} + 5\vec{v_2}) = 3M^n\vec{v_1} + 5M^n\vec{v_2} = 3\lambda_1^n \vec{v_1} + 5\lambda_2^n \vec{v_2}$$

$$= 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \\ -3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \end{pmatrix}$$

d) andel immune: $\dfrac{y_n}{x_n+y_n} = \dfrac{-3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n}{10\left(\frac{19}{18}\right)^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(-\frac{1}{19}\right)^n + 5}{10} = \frac{5}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

delte med $\left(\frac{19}{18}\right)^n$

50% immune i det lange løp.