MAT1110: Oblig 2 våren 2011

John Rognes

(i) Gitt $1 \leq k \leq (n+1)^2$ vil $0 \leq k-1 < (n+1)^2$ og $0 \leq (k-1)/(n+1) < n+1$. La j være største hele tall mindre enn $(k-1)/(n+1)$. Da er $0 \leq j < n+1$, og $j \leq (k-1)/(n+1) < j+1$. Altså er $(n+1)j \leq k-1 < (n+1)(j+1)$. La $i = (k-1)-(n+1)j$. Da er $0 \leq i < n+1$. Altså finnes det hele tall $0 \leq i, j \leq n$ med $k = (i+1)+(n+1)j$.

Hvis også $0 \leq a, b \leq n$ er hele tall med $k = (a+1)+(n+1)b$ er $(i+1)+(n+1)j = (a+1)+(n+1)b$. Da er $i-a = (i+1)-(a+1) = (n+1)b-(n+1)j = (n+1)(b-j)$ delelig med $(n+1)$. Siden $0 \leq i, a \leq n$ er $-n \leq i-a \leq n$, så den eneste muligheten er $i-a=0$, dvs. $a=i$. Da er også $0 = i-a = (n+1)(b-j)$ så $b-j=0$ og $b=j$. Altså er i, j entydig bestemt.

Bemerkning: Første del av resonnementet viser at funksjonen som tar (i,j) til $k=(i+1)+(n+1)j$ er surjektiv. Andre del viser at funksjonen er injektiv. Siden det er $(n+1)^2$ par (i,j), og like mange tall k, er det nok å vise en av disse egenskapene (surjektivitet/injektivitet), og så å appelere til at en surjektiv (eller injektiv) funksjon mellom to endelige mengder med like mange elementer er bijektiv.

(ii) $x_k = f(i,j) = 2$ for alle $1 \leq k \leq N$, så

$$\mathbf{x} = (2, 2, \dots, 2) \in \mathbb{R}^N$$

er vektoren der hver koordinat er 2.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 2au + bv + d$ og $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = bu + 2cv + e$, så $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) = 2a$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 2c$, så $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 2a + 2c$.

(iv) Venstresiden

$$f(i,j-1) + f(i-1,j) - 4f(i,j) + f(i+1,j) + f(i,j+1)$$

er et lineært uttrykk i f, så det er nok å se på tilfellene $f(u,v) = u^2$, uv, v^2, u, v og 1 hver for seg.

For $f(u,v) = u^2$ er uttrykket lik $i^2 + (i-1)^2 - 4i^2 + (i+1)^2 + i^2 = 2$. For $f(u,v) = uv$ er uttrykket lik $i(j-1) + (i-1)j - 4ij + (i+1)j + i(j+1) = 0$. For $f(u,v) = v^2$ er uttrykket lik $(j-1)^2 + j^2 - 4j^2 + j^2 + (j+1)^2 = 2$.

For $f(u,v) = u$ er uttrykket lik $i + (i-1) - 4i + (i+1) + i = 0$. For $f(u,v) = v$ er uttrykket lik $(j-1) + j - 4j + j + (j+1) = 0$. For $f(u,v) = 1$ er uttrykket lik $1+1-4+1+1 = 0$.

For $f(u,v) = au^2 + \cdots + h$ er uttrykket derfor lik $2a + 0b + 2c + 0d + 0e + 0f + 0h = 2a + 2c$.

(iv) De fire likningene er

$$\begin{aligned}
x_2 + x_5 - 4x_6 + x_7 + x_{10} &= 0 \\
x_3 + x_6 - 4x_7 + x_8 + x_{11} &= 0 \\
x_6 + x_9 - 4x_{10} + x_{11} + x_{14} &= 0 \\
x_7 + x_{10} - 4x_{11} + x_{12} + x_{15} &= 0
\end{aligned}$$

så

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(vi) De tolv likningene er

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= 2 \\ x_8 &= 2 \\ x_9 &= 2 \\ x_{12} &= 2 \\ x_{13} &= 2 \\ x_{14} &= 2 \\ x_{15} &= 2 \\ x_{16} &= 2 \end{aligned}$$

så

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(vii)

```
>> A = eye(16);
>> A(6,2) = 1; A(6,5) = 1; A(6,6) = -4; A(6,7) = 1; A(6,10) = 1;
>> A(7,3) = 1; A(7,6) = 1; A(7,7) = -4; A(7,8) = 1; A(7,11) = 1;
>> A(10,6) = 1; A(10,9) = 1; A(10,10) = -4; A(10,11) = 1; A(10,14) = 1;
>> A(11,7) = 1; A(11,10) = 1; A(11,11) = -4; A(11,12) = 1; A(11,15) = 1;
>>
>> b = [2; 2; 2; 2; 2; 0; 0; 2; 2; 0; 0; 2; 2; 2; 2; 2];
>>
>> rref([A b])
```

Den reduserte trappeformen $[C \mid \mathbf{d}]$ har $C = I_{16}$ og

$$\mathbf{d} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

som søylevektor. Siden C er identitetsmatrisen er $\mathbf{x} = \mathbf{d}$ den entydige løsningen.

(viii)

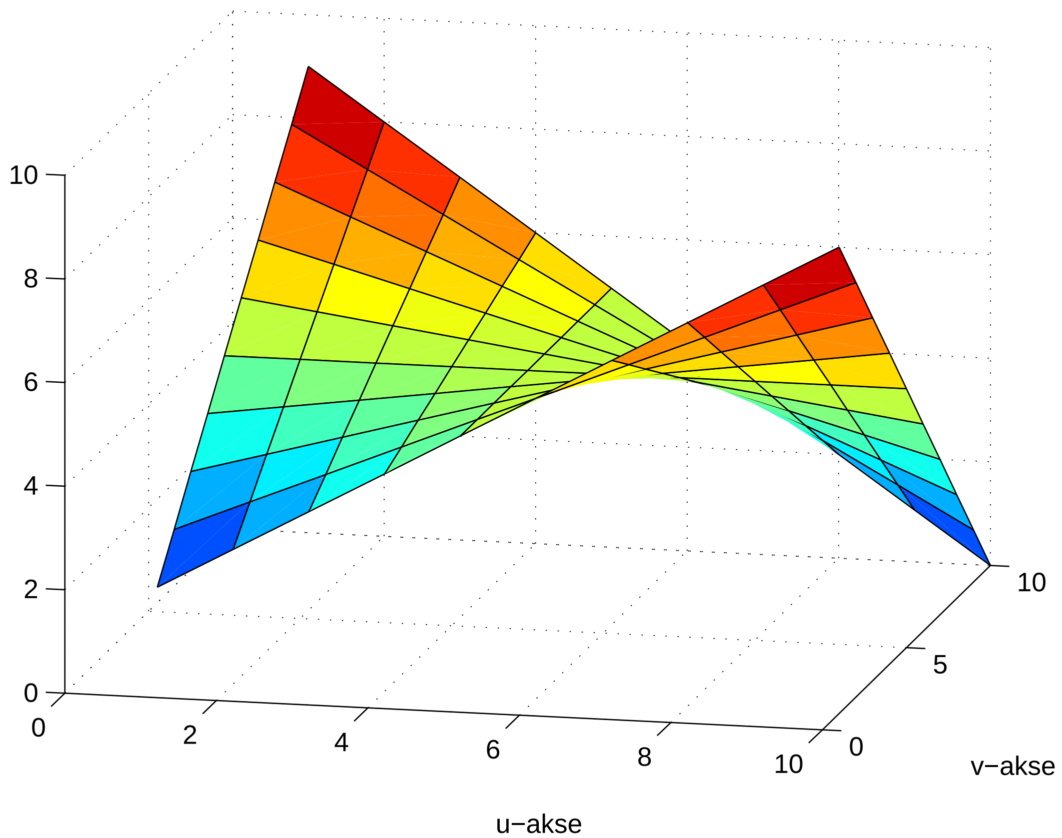
```
>> A = eye(121);        % starter med identitetsmatrisen
>> for (i=1:9)
     for (j=1:9)
       k = (i+1)+11*j;  % justerer rad nr. k
       A(k,k-11) = 1;   % (i,j-1)
       A(k,k-1) = 1;    % (i-1,j)
       A(k,k) = -4;     % (i,j)
       A(k,k+1) = 1;    % (i+1,j)
       A(k,k+11) = 1;   % (i,j+1)
     end
   end
>>
>> b = zeros(121,1);    % starter med nullvektoren
>> for (i=0:10)
     b(i+1) = i;        % j=0
     b(i+111) = 10-i;   % j=10
   end
>> for (j=1:9)          % (eller j=0:10)
     b(1+11*j) = j;     % i=0
     b(11+11*j) = 10-j; % i=10
   end
```

(ix)

```
>> sum(sum(A))
     ans = 40
>> sum(b)
     ans = 200
>>
>> x = A\b;
>> sum(x)
     ans = 605
```

(x)

```
>> [u,v] = meshgrid(1:10,1:10);
>>
>> for (i=1:10)
     for (j=1:10)
       k = i+1+11*j;
       f(i,j) = x(k);
     end
   end
>>
>> surf(u,v,f)
```


10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
u−akse
0
5
10
v−akse