12.5, 12.6 og 12.8: Taylorrekker, potensrekker etc.

Taylorrekken til f i punktet a:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Taylorpolynomet av grad n til f i a: Kutt Taylorrekken etter leddet med $(x-a)^n$.

eks. Taylorrekken til $f(x) = e^x$ i $a=0$ er

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Taylorrekken til $f(x) = \ln x$ i $a = 1$ er

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \quad \square$$

Taylors formel Anta at f og dens $(n+1)$ første deriverte er kontinuerlige på et åpent intervall I om a. Da er

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{for alle } x \in I,$$

der $T_n(x)$ er Taylorpolynomet av grad n for f i a, og

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

der c er et tall mellom a og x på tallinjen.

Bevis: Kalkulus kap. 11

Teorem: Konvergens av Taylorrekker

La I være et intervall, og la $a \in I$.
Anta at f er uendelig mange ganger deriverbar på I.
For å bevise at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

for alle $x \in I$ (dvs. vise at T-rekken konvergerer mot $f(x)$ på I),
trenger vi bare å vise at restleddet $R_n(x)$ oppfyller

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{for alle gitte } x \in I$$

Bevis Taylors formel:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \qquad (T_n(x): \text{Taylorpol.})$$

Hvis $R_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$ for alle faste tall $x \in I$,
følger at

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x).$$

Og $T_n(x)$ er jo delsummene av Taylorrekken. □

Teorem: Konvergens av noen berømte Taylorrekken

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

for alle $x \in (-\infty, \infty)$.

Bevis

(1) $f(x) = e^x$, $a = 0$. Restleddet:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \qquad \begin{pmatrix} c \text{ mellom} \\ 0 \text{ og } x \end{pmatrix}$$

$$\leq \left| \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \right| = \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\to 0$ når $n \to \infty$ (fakultet dominerer potens).

(2) $f(x) = \sin x$, $a = 0$ ($\cos x$ tilsv.). Restledd:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \left| f^{(n+1)}(c) \right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\boxed{f^{(n+1)}(c) \text{ er enten } \cos c \text{ eller } \sin c}$

$$\leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

(fak. dom. pot.) □

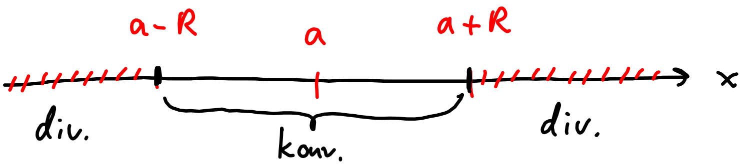
En potensrekke er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

For å avgjøre for hvilke x rekken konvergerer, kan du vanligvis bruke forholdstesten. Vi behandler x som en konstant. Vi finner da alltid at det fins $R \geq 0$ slik at

- rekken konvergerer absolutt for $|x-a| < R$
- rekke divergerer for $|x-a| > R$

R kalles konvergensradien til potensrekken, og a kalles potensrekkens sentrum.



$R = \infty$ (konvergens for alle x) kan forekomme.

Endepunktene $x = a + R$ og $x = a - R$ må sjekkes "manuelt" ved innsetting.

eks. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \cdot n}$

Vi skal finne konvergensområdet (også kalt konvergensintervallet) til denne, dvs. avgjøre for hvilke x den konvergerer.

Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{4^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\frac{4^n\cdot n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\cdot|x-3|\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}\cdot|x-3|$$

1

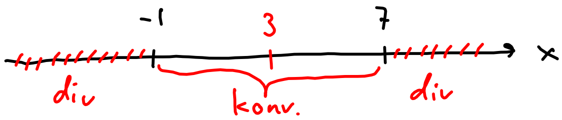
Altså konvergens hvis

$$\frac{1}{4}\cdot|x-3| < 1, \quad \text{dvs.} \quad |x-3| < 4$$

og divergens hvis $|x-3| > 4$. Altså $R = 4$.

Endepunkter: $x = 3+4 = 7$

$x = 3-4 = -1$



$\underline{x=7}$ innsatt i rekken gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7-3)^n}{4^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{(divergent p-rekke)}$$

$\underline{x=-1}$ innsatt i rekken gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-3)^n}{4^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

Konvergerer ved alternerende rekke-testen.

Så rekken konvergerer for $x \in [-1, 7)$