Lineærkombinasjoner (4.6)

La
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Da er
$$A\vec{x} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ x_1 \qquad x_2 \end{array} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ der $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er søylene i A.

Det betyr at matriseligningen
$$A\vec{x} = \vec{b}$$
kan også skrives som en vektorligning
$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Definisjon: Anta $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$. Vi sier at $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ dersom det finnes tall $x_1, x_2, \dots, x_k$ slik at

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k = \vec{b}$$

Med andre ord, $\vec{b}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$ dersom matriseligningen

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad , \quad A = \underbrace{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]}_{\text{matrisen med } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \text{ som søyler.}}$$

har en løsning

Setning: $\vec{b}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ dersom matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning, dvs når trappeformen til den utvidede matrisen $[A, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}]$ ikke har et pivotelement i siste søyle. ← OBS.

Eksempel: Avgjør om $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, og finn i så fall koeffisientene i lineærkombinasjonen $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$

Dette er det samme som $A\vec{x} = \vec{b}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

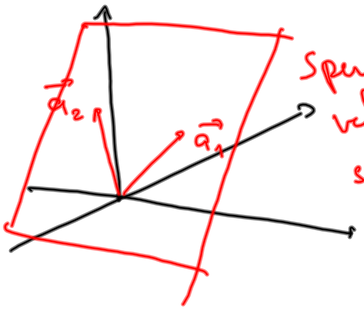
Vi bruker MATLAB til å bringe den utvide matrise $[A, \vec{b}]$ på redusert trappeform.

MATLAB viser at ligningssystemet har entydig løsning $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -1$.

Dette betyr at

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-2)\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = \vec{b} \quad \text{(sjekk selv)}.$$

Notasjon: Hvis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$, så er spennet $\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ til $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ mengden av alle lineærkombinasjoner til $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$.



Spennet til to ikke-parallelle vektorer i $\mathbb{R}^3$ er planet som inneholder vektorene.

Spørsmål: Når kan enhver vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, dvs når $\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \mathbb{R}^m$?
Dette er det samme som å spørre om vår $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsninger for alle $\vec{b}$, og det vil vi skjer når trappeformen til A har et pivotelement i alle linjer.

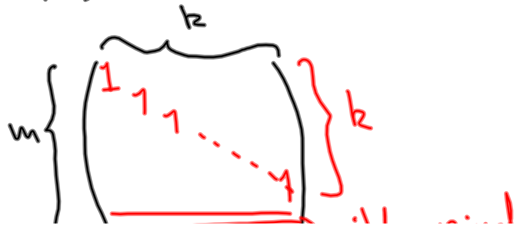
Setning: $\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis trappeformen til $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$ har pivotelementer i alle linjer.

Eksempel: Vil $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utspenne hele $\mathbb{R}^4$? Putt

$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ inn i MATLAB og kjør rref(A).

Korollar: Dersom $\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k) = \mathbb{R}^m$, så er $k \geq m$.

Bevis. Hvis $k < m$, så er det ikke plass til pivotelementer i alle linjer.



Lineær uavhengighet

Definisjon: Vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ kalles lineært uavhengige dersom enhver vektor $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ på nøyaktig én måte, dvs

$$\left.\begin{aligned} \vec{b} &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k \\ \text{og} \quad \vec{b} &= y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \dots + y_k\vec{a}_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k.$$

Setning: Følgende er ekvivalent:

(i) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ er lin. uavhengig.

(ii) $\vec{0}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ på bare én måte, dvs at hvis $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k = \vec{0}$, så må $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Siden enhver vektor i spennet bare kan skrives som en lin. komb. på én måte, så kan selvfølgelig ikke $\vec{0}$ skrives som en lin. komb. på mer enn én måte.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Anta at (ii) holder og at $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$. La oss anta at

$$\left.\begin{aligned} \vec{b} &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k \\ \vec{b} &= y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \dots + y_k\vec{a}_k \end{aligned}\right\} \text{Vi må vise at } x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k.$$

Trekker uttrykkene fra hverandre

$$\vec{0} = \vec{b} - \vec{b} = \underbrace{(x_1 - y_1)}_{= 0}\vec{a}_1 + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{= 0}\vec{a}_2 + \dots + \underbrace{(x_k - y_k)}_{= 0}\vec{a}_k$$

dvs $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k$.

Hvordan sjekker vi om $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_k$ er lin. uavh.?

Dette er det samme som at ligning

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_k\vec{a}_k = \vec{0} \quad \text{bare har én løsning}$$

dvs $\quad A\vec{x} = \vec{0}$ bare har én løsning $\vec{x} = \vec{0}$

Dette gjelder dersom alle søylene i trappeformen til A er pivotsøyler.

Setning: Vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_k$ er lin. uavh. dersom alle søylene i trappeformen til $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, .. \vec{a}_k]$ er pivotsøyler.

Gitt vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_k$, så kan vi alltid finne en lineært uavhengig delmengde $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, .., \vec{a}_{i_m}$ slik

$$Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_k) = Sp(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, .., \vec{a}_{i_m})$$

Fremgangsmåte:

$$\underbrace{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_k]}_{} \sim \cdots \sim \overbrace{\underbrace{[\vec{\tilde{a}}_1, \vec{\tilde{a}}_2, .., \vec{\tilde{a}}_k]}_{}}^{\text{trappeform}}$$

Plukk ut de tilsvarende søylene her, da er vi ferdig.

Plukk ut pivotsøylene $\vec{\tilde{a}}_{i_1}, \vec{\tilde{a}}_{i_2}, .., \vec{\tilde{a}}_k$.

Ilovdlag: Dersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige, så er $k \leq m$.

Hvorfor? Fordi trappeformen til $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$ har kun pivotsøyler, og det er kun mulig hvis $k \leq m$.

Basiser

En mengde vektorer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ kalles en basis for $\mathbb{R}^m$ dersom den er lineært uavhengig og spenner ut hele $\mathbb{R}^m$, dvs at ethvert element $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives som en lin. komb.

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k \quad \text{på nøyaktig én måte.}$$

Observasjon: En basis for $\mathbb{R}^m$ har nøyaktig m elementer.

Hvorfor? For å spenne ut hele rommet, må $k \geq m$; for å være lin. uavh., må $k \leq m$ $\Big\}$ $k = m$.

Standardbasis for $\mathbb{R}^m$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

En liten observasjon: Anta at $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$

(i) Dersom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ spenner ut hele $\mathbb{R}^m$, så er de også lin. uavhengige.

(ii) Dersom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ er lin. uavh., så spenner de ut hele rommet.

Altså: Dersom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ er like mange vektorer som rommet $\mathbb{R}^m$ har dimensjon, så er det nok å sjekke det ene kravet til basis – det andre følger automatisk med.