Oppgaver - Uke 2

Oppfriskning fra forrige gang: Et polynom $P(x_1,\ldots,x_n)$ kalles **symmetrisk** dersom $P(x_1,\ldots,x_n) = P(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(n)})$ for alle permutasjoner $\tau \in S_n$. De elementære symmetriske funksjonene er

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + \ldots + x_n \\
s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_nx_{n-1} \\
s_3 &= x_1x_2x_3 + \ldots + x_nx_{n-1}x_{n-2} \\
&\vdots \\
s_n &= x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

Hvis $x_1,\ldots,x_n$ er røttene til et polynom $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ er $a_i = (-1)^i \cdot s_i$.

Oppgave 1

a) La $f(x) = x^2 - 3x + 9$ ha røtter x_1, x_2. Finn et polynom som har røtter x_1^2, x_2^2.

b) La $p(x) = x^2 + bx + c$ og la x_1, x_2 være røttene til p. Se på polynomet

$$D = (x_1 - x_2)^2.$$

Det er klart at p har kun en rot hvis $D = 0$. Hvilken kjent betingelse gir dette på b og c?

Oppgave 2

Husk at $\mathbb{Z}_n = \{x \mod n \mid x \in \mathbb{Z}\}$, der operatsjonen er vanlig '+' modulo n.

a) Tegn opp gangetabellen til $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ og $\mathbb{Z}_6$.

La G være en gruppe. En delmengde $H \subset G$ som også er en gruppe kalles en **undergruppe** av G.

b) Finn undergruppene til gruppene i a). Hva kan du si om antallet elementer i slike undergrupper?

c) Kan du finne en gruppe med uendelig mange undergrupper?

Oppgave 3

La G være gruppen av symmetrier til kvadratet (altså alle rotasjoner, speilinger, o.s.v.). Hvor mange elementer har G?

Oppgave 4 (Litt vanskeligere)

La G være en endelig gruppe og anta $|G| = m \cdot n$, for $m, n > 1$.[1] Vis at G har en undergruppe $\neq \{e\}$.

Oppgave 5 (Vrien)

Du har gitt et polynom $P(x) = x^5 + 10x^4 + 50x^3 + \ldots$. Vis at ikke alle røttene til $P(x)$ kan være reelle.

[1] $|G|$ betegener antall elementer i G.