UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/utsatt eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra

Eksamensdag: Fredag 19. august 2011

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vi nummererer de tre typene radoperasjoner på matriser som følger:

(I) Å bytte om to rader.

(II) Å multiplisere en rad med et tall forskjellig fra 0.

(III) Å legge et multiplum av en rad til en av de andre radene.

1a

La D være den elementære matrisen som fremkommer når vi multipliserer rad 1 i 2×2 identitetsmatrisen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ med -1, la E være den elementære matrisen som fremkommer fra I_2 når vi legger $+1$ ganger rad 1 til rad 2, og la F være den elementære matrisen som fremkommer fra I_2 når vi legger -1 ganger rad 2 til rad 1.

Skriv opp matrisene D, E og F, og regn ut produktet $DEFE$.

1b

La A være en vilkårlig $2 \times n$-matrise, og la B være matrisen som fremkommer ved å bytte om rad 1 og rad 2 i A.

Forklar hvordan A kan omformes til B ved endelig mange radoperasjoner av type (II) og (III), dvs. ved gjentatte ganger å multiplisere en rad med et tall forskjellig fra 0, eller å legge et multiplum av en rad til en av de andre radene. Pass på å beskrive i hvilken rekkefølge disse operasjonene må gjøres.

(Fortsettes på side 2.)

1c

La G være matrisen som fremkommer ved å bytte om rad 1 og rad 2 i I_2.

Er det mulig å omforme I_2 til G ved endelig mange radoperasjoner av type (III), dvs. ved å legge et multiplum av en rad til en av de andre radene, uten å bruke operasjoner av type (I) eller (II)? Svaret må begrunnes.

Oppgave 2

La A være mengden av punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der

$$g(x, y) = (x-2)^2 + y^2 \leq 1\,,$$

og la $f\colon A \to \mathbb{R}$ være funksjonen definert ved

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 2}\,.$$

2a

I følge ekstremalverdisetningen er det to betingelser på A og en betingelse på f som sikrer at f har minimumspunkter og maksimumspunkter. Hva er disse tre betingelsene?

2b

Beregn de partielle deriverte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

for (x, y) i det indre av A. Finn det stasjonære punktet $\vec{a}$ til f i det indre av A, og den tilhørende funksjonsverdien $f(\vec{a})$.

2c

Beregn Hesse-matrisen $Hf(\vec{a})$ til f i det stasjonære punktet $\vec{a}$, og bruk annenderiverttesten for å avgjøre om $\vec{a}$ er et lokalt minimumspunkt, et lokalt maksimumspunkt eller et sadelpunkt.

2d

Randen til A er gitt ved bibetingelsen $g(x, y) = 1$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne de lokale maksimums- og minimumspunktene for f på randen til A.

2e

Randen til A kan også parametriseres ved funksjonen $\vec{r}(t) = (2 + \cos t, \sin t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$. Bruk denne parametriseringen til å finne de lokale maksimums- og minimumspunktene for f på randen til A.

(Fortsettes på side 3.)

2f

Finn de globale maksimumspunktene og minimumspunktene for f på hele A.

Oppgave 3

La $\vec{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\vec{T}(u,v,w) = \begin{bmatrix} u+v+w \\ uv+uw+vw \\ uvw \end{bmatrix} .$$

3a

Beregn Jacobi-matrisen $\vec{T}'(u,v,w)$, og vis at

$$\det \vec{T}'(u,v,w) = (u-v)(u-w)(v-w) .$$

3b

La D være mengden av punkter $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ der $1 \geq u \geq v \geq w \geq 0$. Beregn volumet

$$\iiint_{\vec{T}(D)} 1 \, dxdydz$$

av billedmengden $\vec{T}(D) \subset \mathbb{R}^3$.

SLUTT