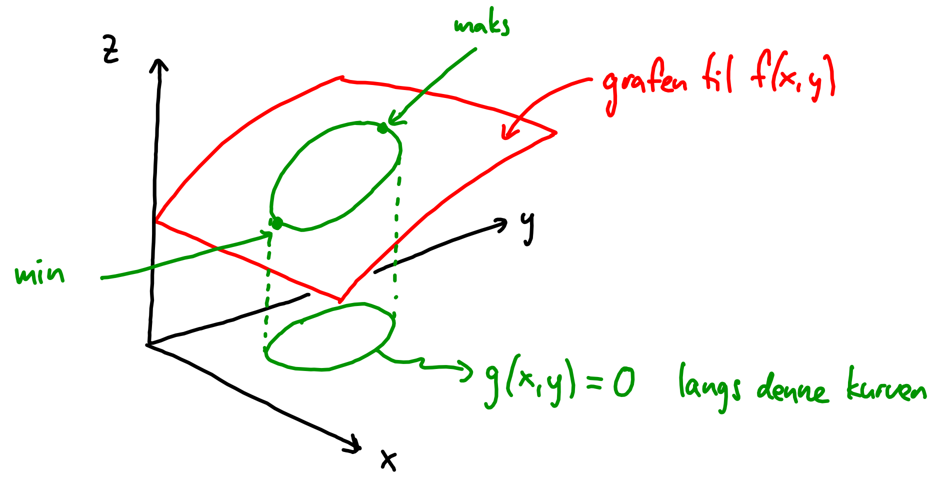
5.10 Lagrange-metoden

Metode for å maksimere/minimere skalarfunksjoner $f(x_1,\dots,x_m)$ under en eller flere bibetingelser av typen

$$g(x_1,\dots,x_m) = 0$$

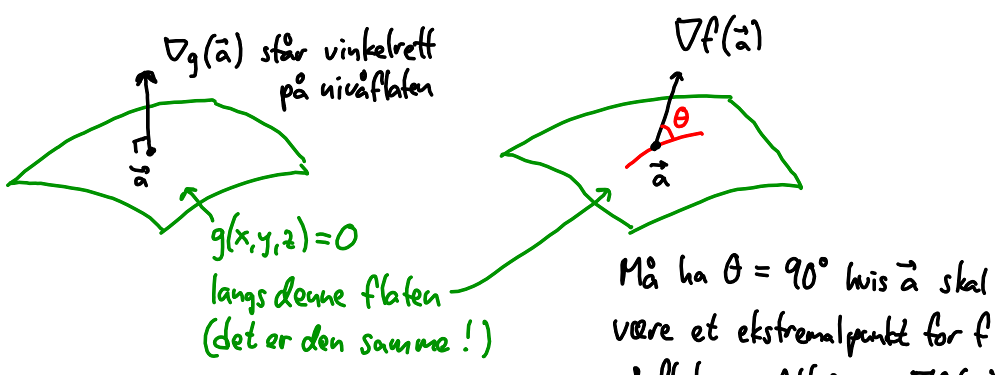


Teorem (Lagrange)

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, og at $f,g : A \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige partiellderiverte.
Hvis $\vec{a}$ er et lokalt ekstremalpunkt for f på A under bibetingelsen $g(x_1,\dots,x_m) = 0$, og vi har $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$, så fins et konstant tall $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{a})$$

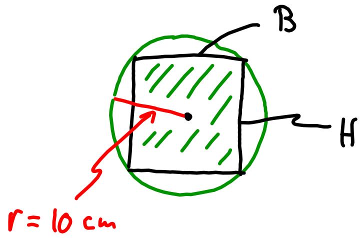
Intuitiv forklaring i tilfellet tre variable



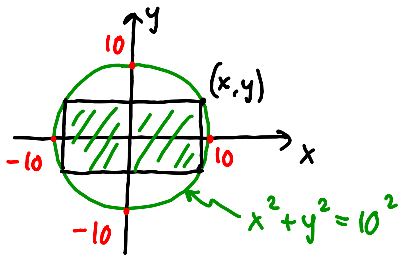
Må ha $\theta = 90°$ hvis $\vec{a}$ skal være et ekstremalpunkt for f på flaten. Altså er $\nabla f(\vec{a})$ parallell med $\nabla g(\vec{a})$. $\square$

eks. 1 Skal skjære ut bjelke med rektangulært tverrsnitt fra en tømmerstokk med radius 10 cm.

Hvordan skal B og H velges for at bjelken skal få størst mulig tverrsnittareal?



Løsn. Lager koordinatsystem:



Skal maksimere

$$f(x,y) = 2x \cdot 2y = 4xy$$

under bibetingelsen

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 100 = 0$$

Lagrange: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ gir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Vi får dermed:

$$\begin{cases} 4y = \lambda \cdot 2x & \text{I} \\ 4x = \lambda \cdot 2y & \text{II} \\ x^2 + y^2 = 100 & \text{III} \end{cases}$$

Kan anta $x, y > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I gir } \frac{y}{x} = \frac{\lambda}{2} \\ \text{II gir } \frac{x}{y} = \frac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \text{ altså } \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \quad y^2 = x^2, \text{ dvs. } x = y$$

III gir da $2x^2 = 100$, dvs. $x = \sqrt{50} = y$.

Ved ekstremalverdisetningen vet vi at f har et globalt maksimum på kurven $g(x,y) = 0$, siden kurven er lukket og begrenset. Ved Lagrange følger at dette maksimumet må være

$$f(\sqrt{50}, \sqrt{50}) = 4 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 4 \cdot 50 = 200$$

Altså: Bør velge $B = H = \underline{\underline{2\sqrt{50}}}$ (cm)

eks. 2 Skal finne maksverdien for $f(x,y,z) = xyz$ under bibetingelsen

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Løsn. Døper $g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1$

Bibetingelse : $g(x,y,z) = 0$.

Lagrange : $\nabla f = \lambda \nabla g$ gir

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} yz = \lambda \cdot 2x & \text{I} \\ xz = \lambda \cdot \frac{1}{2}y & \text{II} \\ xy = \lambda \cdot \frac{1}{2}z & \text{III} \end{cases}$$

Har også $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ IV

Vi kan anta $x, y, z > 0$, fordi $f(x,y,z) = xyz$ åpenbart har positive funksjonsverdier under den gitte bebetingelsen.

$$\left.\begin{aligned} &\text{II gir } \frac{xz}{y} = \frac{\lambda}{2} \\ &\text{III gir } \frac{xy}{z} = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \text{ så } \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}, \quad xz^2 = xy^2, \text{ dvs. } y = z.$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{I gir da } \frac{y^2}{2x} = \lambda \\ &\text{II gir da } 2x = \lambda \end{aligned}\right\} \text{ så } \frac{y^2}{2x} = 2x, \text{ dvs. } y^2 = 4x^2$$

$$y = 2x$$

$y = z = 2x$ innsatt i IV gir så $x^2 + x^2 + x^2 = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Så $y = z = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vi har $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

Bibetingelsen beskriver en ellipsoide i rommet, og denne er lukket og begrenset. Ved ekstremalverdisetningen vil derfor f ha et globalt maksimumspunkt under bibetingelsen (f kontinuerlig).

Dette betyr at globalt maksimum for f oppnås i punktet $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Maksimumsverdi : $\underline{\underline{\frac{4}{3\sqrt{3}}}}$

$\boxed{\text{Lagrange-metoden med flere bibetingelser : Se 5.10.5}}$

Finne maks/minpunkt $\vec{a}$ for $f(x_1, \dots, x_m)$ under bibetingelser

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

Enten er da $\nabla g_1(\vec{a}), \dots, \nabla g_k(\vec{a})$ lineært avhengige, eller så fins konstanter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{a})$$

(se eksempel 5.10.6).

Bevis for Lagrange-metoden (én bibetingelse)

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ være åpen, og la $f, g : A \to \mathbb{R}$ ha kontinuerlige partiellderiverte. Anta at $\vec{a}$ er et lokalt ekstremalpunkt for f på A under bibetingelsen $g(x_1, \dots, x_m) = 0$, og anta at $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$.

Vi antar $\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \neq 0$.

Ved implisitt funksjonsteoremet fins en omegn U om $(a_1, \dots, a_{m-1})$ i $\mathbb{R}^{m-1}$ og $h : U \to \mathbb{R}$ slik at

$$g(x_1, \dots, x_{m-1}, h(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0 \quad \text{for alle } (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U.$$

$$h(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m$$

Definerer $\phi : U \to \mathbb{R}$ og $\psi : U \to \mathbb{R}$ ved

$$\phi(x_1, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, \dots, x_{m-1}, h(x_1, \dots, x_{m-1}))$$

$$\psi(x_1, \dots, x_{m-1}) = g(x_1, \dots, x_{m-1}, h(x_1, \dots, x_{m-1}))$$

Da må $(a_1, \dots, a_{m-1})$ være et lokalt ekstremalpunkt for ϕ, så kjerneregelen gir

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{m-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a}) \cdot \boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{m-1})}$$

for $1 \leq j \leq m-1$. Videre er $\psi = 0$ på hele U, så vi har også

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{m-1}) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \cdot \boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{m-1})}$$

Løser vi mhp. $\boxed{}$ i begge disse og setter uttrykkene lik hverandre, får vi for $1 \leq j \leq m-1$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})}{\frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a})} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{a})}{\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a})}$$

(Merk: Holder også for $j = m$!)

dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a}) = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{a}), \quad \text{der } \lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a})}{\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a})}$$

for $1 \leq j \leq m$. □

Gradientmetoden (5.11)

Gitt $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, vil finne minimum av $f(\vec{x})$ ved iterasjonen

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \nabla f(\vec{x}_n) \cdot t$$

der $t > 0$ er minste positive løsning av

$$\nabla f\left(\vec{x}_n - \nabla f(\vec{x}_n) \cdot t\right) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0$$

skalarprodukt

Poenget er at t tilsvarer et punkt der det antakelig ikke er lurt å gå lenger samme vei.