Plenum 29/4

4.8: 2

4.9: 7, 8, 9, 10, 11

4.8: Elementære matriser

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\widetilde{II} = I + II$ $\qquad$ $\widetilde{\widetilde{II}} = \frac{1}{3}\widetilde{II}$ $\qquad$ $\widetilde{\widetilde{I}} = \widetilde{I} - 2\widetilde{\widetilde{II}}$

Sett opp elementære matriser: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Inverterer: $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Så: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.9: Determinanter

7.) VIS: A, $n\times n$, $\det(rA) = r^n \det(A)$

Bevis: rA svarer til å gange hver rad i A med r. Fra Teorem 4.9.9 endres determinanten med en faktor r for hver rad i A vi ganger med r. Siden alle radene i A ganges med r, blir faktorendringen r^n. Dvs. $\det(rA) = r^n \det(A)$ $\blacksquare$

8) VIS: $\underbrace{\det(A^n) = \det(A)^n}_{(\star)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bevis: Vises ved induksjon:

$n=1$: $\det(A^1) = \det(A) = \det(A)^1 \Rightarrow$ OK for $n=1$!

Anta at påstanden $(\star)$ holder for n, dvs. $\det(A^n) = \det(A)^n$.

Da er:

$$\det(A^{n+1}) = \det(A\,A^n) \overset{\text{Set. 4.9.14}}{=} \det(A)\det(A^n)$$
$$= \det(A)\det(A)^n = \det(A)^{n+1} \quad \blacksquare$$

9) Bevis: La A være en $n \times n$ matrise og anta at A har lineært avhengige rader. Kall radene i A for $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Da fins det, per def av lineær uavhengighet, konstanter $x_1, x_2, \dots, x_n$ s.a:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = 0, \text{ men}$$

Set 4.6.5

der minst én $x_i \neq 0$. Deler på x_i:

$$(\star): \quad \frac{x_1}{x_i}\vec{a}_1 + \frac{x_2}{x_i}\vec{a}_2 + \dots + \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{rad } i \text{ i } A} + \dots + \frac{x_n}{x_i}\vec{a}_n = 0$$

Gjør følgende radoperasjoner på A:

legg $\frac{x_1}{x_i} \cdot \underbrace{\text{rad } 1}_{\vec{a}_1}$ til $\underbrace{\text{rad } i}_{\vec{a}_i}$. Legg så $\frac{x_2}{x_i} \cdot$ rad 2 til rad i, ..., legg $\frac{x_n}{x_i} \cdot$ rad n til rad i.

Hva blir i'te rad i A etter alt dette?

Thm. 4.9.9

$$\vec{a}_i + \frac{x_1}{x_i}\vec{a}_1 + \frac{x_2}{x_i}\vec{a}_2 + \dots + \frac{x_n}{x_i}\vec{a}_n = 0$$

Fra $(\star)$ er rad i nå lik 0. Fra Lemma 4.9.1 er da $\det(A) = 0$ (legge til multippel av en rad til en annen ikke endrer determinant)

10) Ortogonal : $U^{-1} = U^{T}$

VIS: $\det(U) \in \{-1, 1\}$

Bevis: Anta at U er ortogonal. Da er

$$\det(U^{-1}) = \det(U^{T})$$

det. av ortogonal

Fra Kor. 4.9.15:

$$\det(U^{-1}) = \frac{1}{\det(U)}$$

$$\det(U^{T}) = \det(U)$$

$$\frac{1}{\det(U)} = \det(U^{-1}) = \det(U^{T}) = \det(U)$$

$$1 = \det(U)^2$$

$$\det(U) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

11) $A_i(\vec{b})$

a) Vis: $\det(I_i(\vec{x})) = x_i$

MERK: $\det(I_i(\vec{x})^T) = \det(I_i(\vec{x}))$; (*)

$$
I_i(\vec{x}) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{søyle } i \end{array}
$$

$$
I_i(\vec{x})^T = \begin{array}{c} \\ \\ \text{rad } i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots x_i \cdots & & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Hvordan kan I transformeres til $I_i(\vec{x})^T$ vha. radoperasjoner? Gang rad i med x_i. Legg deretter $x_j \cdot \text{rad}_j$ $(j \neq i)$ til rad i. Kun den første operasjonen endrer determinanten, med en faktor x_i.

$\Downarrow$

$$
\underline{\det(I_i(\vec{x}))} \underset{(*)}{=} \det(I_i(\vec{x})^T) = x_i \det(I) = x_i \cdot 1 = \underline{x_i}
$$

$\blacksquare$

b) VIS: $AI_i(\vec{x}) = A_i(\vec{b})$ der $A\vec{x} = \vec{b}$.

Viser dette ved å vise at hver søyle i $AI_i(\vec{x})$ er lik tilsvarende søyle i $A_i(\vec{b})$.

2 muligheter:

1) Søyle j, $j \neq i$: Søyle j i $AI_i(\vec{x})$ er A ganget med j'te søyle i $I_i(\vec{x})$ (per def. av matrisemultiplikasjon).

j'te søyle i $I_i(\vec{x})$ er $\vec{e}_j$, så $\underset{j\text{'te søyle i}}{AI_i(\vec{x})} = A\vec{e}_j = \underline{j\text{'te søyle i } A}$

j'te søyle i $A_i(\vec{b})$ er $\underline{j\text{'te søyle i } A}$ (per def.)

$\Downarrow$

De to søylene er like.

2) Søyle i: Søyle i i $AI_i(\vec{x})$ er A ganget med søyle i i $I_i(\vec{x})$. i'te søyle i $I_i(\vec{x})$ er $\vec{x}$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{søyle } i \text{ i } AI_i(\vec{x})} = A\vec{x} = \underline{\vec{b}}$

Søyle i i $A_i(\vec{b})$ er $\vec{b}$ per def.

$\Downarrow$

De to søylene er like!

$\Rightarrow$ Alle søylene i de to matrisene er like

$\Rightarrow$ Matrisene er like, så $AI_i(\vec{x}) = A_i(\vec{b})$

c) Cramer's regel: A inverterbar, så er

VIS: løsningen av $A\vec{x} = \vec{b}$ gitt v/:

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det(A)} \qquad \left(x_i \det(A) = \det(A_i(\vec{b})) \right)$$

$$\det(A_i(\vec{b})) \underset{b)}{=} \det(A I_i(\vec{x})) \underset{\text{Set. 4.9.14}}{=} \det(A)\det(I_i(\vec{x}))$$

$$\underset{a)}{=} \det(A)\, x_i$$

$\Downarrow$ $\longrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det(A)}$$

$\blacksquare$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$A_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $A_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -8 + 3 = \underline{-5}$

$\det(A_1(\vec{b})) = -16 - 6 = \underline{-22}$

$\det(A_2(\vec{b})) = -4 - 4 = \underline{-8}$

$\underset{\text{Cramer's regel}}{\Rightarrow}$

$x_1 = \frac{-22}{-5} = \underline{\underline{\frac{22}{5}}}$

$x_2 = \frac{-8}{-5} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}}$

5.) Bevis: Viser v/ induksjon.

$n=2$: $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,a_{22} - 0\,a_{21}$

$= \underline{0}$

tilsv. for 2. rad nuller.

$\Rightarrow$ OK ~~for~~ $n=2$!

Anta at lemmaet er sant for $n \times n$ matriser, og anta A er $(n+1)\times(n+1)$ matrise, der j'te rad er nuller. Fra def. av determinant er:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \underset{\text{utvikler om rad } j}{=} 0 \underbrace{\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}}_{\text{determinant for } n\times n \text{ matrise}}$$

rad j

$$\cdots + 0 \underbrace{\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}}_{n\times n \text{ determinant}} = 0$$

■

6.) Bevis: Induksjon

A 2×2: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - 0b = ac$

Anta at lemmaet holder for $n\times n$ matriser, og at A er en $(n+1)\times(n+1)$ matrise som er nedre triangulær. Da er

utvikler om 1. rad

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n+1,1} & \cdots & & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n+1,2} & \cdots & & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}}_{n\times n \text{ matrise}}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} + \cdots + 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}$$

Induksjons-hyp

$$= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{n+1,n+1}$$