p_n er det n-te primtallet: $p_1 = 2, p_2 = 3$, $p_3 = 5$, osv..
Resultat A: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ divergerer.
Resultat B: Bertrands postulat: For alle n ligger det et primtall mellom n og $2n$.

Oppgave 1

Bruk Resultat A til å vise at det fins uendelig mange primtall.

Oppgave 2

Vis at for alle n fins et primtall med n siffer.

Oppgave 3

Vis at $n!$ aldri kan være et kvadrattall for $n > 1$.

Oppgave 4

Kovergerer summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{n+1} - p_n}?$$

Oppgave 5

Vis Legendre's teorem: For p prim, er antall ganger p går opp i $n!$ gitt ved

$$\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

Oppgave 6 (Litt vanskeligere)

For $n \geq 3$, vis at

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \geq p_{n+1} + p_{n+2}$$

og

$$p_{n+1}^2 < p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

Oppgave 7 (Litt vanskeligere)

Vis at uttrykkene

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

aldri tar heltallsverdier $n \geq 5$.

Oppgave 8 (For de tøffe)

Betrakt følgende problem:
Du har gitt et polynomer $P(x)$ slik at for alle primtall p, er $p = P(m)$ for en $m \in \mathbb{N}$. Vis at $\deg P = 1$.