Ekstremalverdisetningen (5.8.2)

Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f: A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f maksimumspunkter og minimumspunkter og er følgelig begrenset.

Bevis $M = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\}$ $\quad (M = +\infty$ tillates$)$

Velg følge $\{\vec{x}_n\}$ i A slik at

$$f(\vec{x}_n) \to M \quad \text{når } n \to \infty.$$

Ved Bolzano-Weierstrass, velg konvergent delfølge

$$\{\vec{x}_{n_k}\}$$

Siden A er lukket, har vi (5.1.8)

$$\lim_{k\to\infty} \{\vec{x}_{n_k}\} = \vec{c} \quad , \quad \text{der } \vec{c} \in A.$$

Siden f er kontinuerlig, er (5.1.9)

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_{n_k}) = f(\vec{c})$$

Samtidig har vi $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_{n_k}) = M$. Altså $f(\vec{c}) = M$.

Så M er endelig, og $\vec{c}$ er et maksimumspunkt for f.

Eksistens av minimumspunkt vises tilsvarende. $\square$

5.9 Maksimums- og minimumspunkter

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f: A \to \mathbb{R}$ være deriverbar

Et indre punkt $\vec{a} \in A$ kalles et stasjonært punkt for f hvis

$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, dvs. hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, m$$

Setning 5.9.2

Hvis $\vec{a}$ er et indre punkt i A som er et lokalt ekstremalpunkt for f, så er $\vec{a}$ et stasjonært punkt for f.

Et stasjonært punkt som ikke er et lokalt ekstremalpunkt, kalles et sadelpunkt.

eks. Finne de stasjonære punktene for $f(x,y) = 3x(y^2-y)$.

Løsn.
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3(y^2-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x(2y-1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ gir } \left\{\begin{aligned} y(y-1) &= 0 \quad \mathrm{I} \\ x(2y-1) &= 0 \quad \mathrm{II} \end{aligned}\right.$$

I krever $y = 0$ eller $y = 1$

II " $x = 0$ " $y = \frac{1}{2}$

Stasjonære punkter: $(0,0)$ og $(0,1)$

Uoppstilte problemer: Les seksjon 5.9.3

Taylorrekker og Taylors formel

Taylorrekke, én variabel

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$ hvis rekken konvergerer mot $f(x)$

Taylors formel, én variabel, lineær tilnærming

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \boxed{\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2}$$

Restleddet: c mellom a og x

Taylorrekke, n variable (f skalarfunksjon, antar konvergens)

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\cdot(x_i - a_i)$$
$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})\cdot(x_j - a_j)\cdot(x_i - a_i)$$
$$+ \frac{1}{3!}(\cdots)$$

Taylors formel, n variable, lineær tilnærming

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\cdot(x_i - a_i)$$
$$+ \boxed{\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{c})\cdot(x_j - a_j)\cdot(x_i - a_i)}$$

Restleddet: $\vec{c}$ på linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{x}$
(antar at f har kont. andreordens partiellderiverte)

Restleddet kan skrives:

$$\frac{1}{2!}\underbrace{\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{c}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{c}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{c}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{c}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}\right]}_{\text{tilsvarer summen over } j}\cdot\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

matrise-produkt

$$= \frac{1}{2!}\left[\underbrace{Hf(\vec{c})}_{\text{Hesse-matrisen til } f \text{ i punktet } \vec{c}}\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right]\cdot(\vec{x}-\vec{a}) \qquad (*)$$

skalarprodukt

Fra dette følger at hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{c})$ er positive [negative], blir restleddet positivt [negativt] (5.9.7).

Andrederivert-testen (5.9.2)

La $\vec{a}$ være et stasjonært punkt for en skalarfunksjon f av m variable. Anta at de annenordens partielle deriverte til f er kontinuerlige i en omegn om $\vec{a}$. Da gjelder:

- Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er strengt positive, er $\vec{a}$ et lokalt minimumspunkt
- Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er strengt negative, er $\vec{a}$ et lokalt maksimumspunkt.
- Hvis $Hf(\vec{a})$ har både strengt positive og strengt negative egenverdier, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

Bevis (Skisse)

Anta alle egenverdiene er strengt positive.

La $A = Hf(\vec{a})$. Fra 2.5.2 vet vi at A er symmetrisk.

Fra 4.10.10 vet vi da at hvis $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ er vilkårlig, kan vi skrive

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_m$$

der $\vec{v}_i$ er en egenvektor for A med egenverdi λ_i, og $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ for $i \neq j$.

Dette gir

$$\begin{aligned} A\cdot\vec{x} &= A\cdot(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_m) \\ &= A\vec{v}_1 + \ldots + A\vec{v}_m \\ &= \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_m\vec{v}_m \end{aligned}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (A\cdot\vec{x})\cdot\vec{x} &= (\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_m\vec{v}_m)\cdot(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_m) \\ &= \lambda_1|\vec{v}_1|^2 + \ldots + \lambda_m|\vec{v}_m|^2 > 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = |\vec{v}_j|^2}$

Sammenlikne dette med (*). For $\vec{c}$ nær nok $\vec{a}$, vil $Hf(\vec{c})$ også ha positive egenverdier, gitt at $A = Hf(\vec{a})$ har (kontinuitet). □

eks. Klassifisere de stasjonære punktene $(0,0)$ og $(0,1)$ for $f(x,y) = 3x(y^2-y)$ (jf. tidligere eksempel).

Løsn.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3(2y-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3(2y-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \end{array}\right\} \quad Hf = \begin{pmatrix} 0 & 3(2y-1) \\ 3(2y-1) & 6x \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenverdier: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 \\ -3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$ gir $\lambda = \pm 3$

$(0,0)$ sadelpunkt

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenverdier: $\lambda = \pm 3$ $(0,1)$ sadelpunkt

Spesialmetode for to variable (5.9.9)

Regn ut

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})$$

$$D = AC - B^2 = \det(Hf(\vec{a}))$$

Da:

- $D < 0 \Rightarrow \vec{a}$ sadelpunkt
- $D > 0$ og $A > 0 \Rightarrow$ Lokalt min.
- $D > 0$ og $A < 0 \Rightarrow$ —"— max
- $D = 0$ ingen konkl.

Bevis Poenget er at $\det(Hf(\vec{a}))$ er produktet av egenverdiene (4.10.14).