Fra sist: Definerte linjeintegral av vektorfelt (3.4)

Setning 3.4.3: "Kjente regneregler" gjelder for linjeintegraler av vektorfelt, slik som

$$\int_{\mathcal{C}} (\vec{F}+\vec{G})\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

Setning 3.4.4 Anta $\vec{r}$ er en stykkevis glatt parametrisering av $\mathcal{C}$, og at $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_m$ er definert ved $\vec{r}: [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$

Da er

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots + \int_{\mathcal{C}_m} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Setning 3.4.5 $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ gir samme verdi for alle (ekvivalente) parametriseringer av $\mathcal{C}$, gitt at de har samme orientering.

Skisse av bevis:

La $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, være to parametriseringer

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1'(t)\,dt$$

(ekvivalens betyr: finnes ϕ s.a. $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$)

$$= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}_2(\phi(t)))\cdot \left(r_2(\phi(t))\right)' dt$$

$$\overset{\text{kjerneregel}}{=} \int_a^b \vec{F}(\vec{r}_2(\phi(t)))\vec{r}_2'(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

$$\overset{u=\phi(t) \Rightarrow du = \phi'(t)dt}{=} \int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(u))\vec{r}_2'(u)\,du \quad \blacksquare$$

Eksempel 3.4.6

Partikkel med masse m utsettes for kraft $\vec{F}$

arbeid langs kurven $\mathcal{C}$:

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)\,dt$$

Newtons 2. lov : $\vec{F} = m\vec{a}$

$$|v(t)|^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$\left((v(t))^2\right)' = \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 2\,\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \frac{1}{2}\left((v(t))^2\right)'$$

$$= m \int_a^b \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)\,dt = m \int_a^b \left(\frac{1}{2}(v(t))^2\right)' dt$$

analysens fundamentalteorem

$$= m\left[\frac{1}{2} v(t)^2\right]_a^b = \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2$$

$\left(\frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}\right.$

= endring i kinetisk energi

Seksjon 3.5 Gradienter og konservative felt.

Anta at $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kont. deriverbar. Vi definerte:

$$\nabla\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$

Setning 3.5.1 (Spesiell egenskap for linjeintegral av gradientvektorfelt)

Vi har at $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$

($\vec{r}$ stykkevis glatt parametrisering av $\mathcal{C}$)

Samme integral for alle kurver fra $\vec{r}(a)$ til $\vec{r}(b)$!

<u>Bevis</u>: Anta at $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er en glatt parametrisering.

Vi velger c, d, $a < c < d < b$, slik at $\vec{r}$ er deriverbar i hele $[c,d]$

Vi viste i sek. 3.2 at $(\phi(\vec{r}(t)))' = \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$

Da blir:

$$\int_{\mathcal{C}_{c,d}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \int_c^d \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_c^d (\phi(\vec{r}(t)))'\,dt$$

$$\overset{\text{analysens fund. teorem}}{=} \Big[\phi(\vec{r}(t))\Big]_c^d = \phi(\vec{r}(d)) - \phi(\vec{r}(c))$$

Hvis vi lar $c \to a$, og $d \to b$, så vil vi i grensen få

at $\int_{\mathcal{C}_{a,b}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$.

Def 3.5.3: $\vec{F}$ kalles for et konservativt felt i A hvis det finnes en ϕ s.a. $\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x})$, alle $\vec{x}$ i A

ϕ kalles da for en potensialfunksjon for $\vec{F}$ (i A)

Eksempel 3.5.4 Vi ser på $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{k\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$

La oss se på $\phi(\vec{x}) = -\frac{k}{|\vec{x}|}$, og vise $\nabla\phi = \vec{F}$

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{k}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} = -k\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -k\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x_i = k\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{-\frac{3}{2}} x_i$$

$$\nabla\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) = k\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$$

$$= \frac{k}{\left(|\vec{x}|^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{x} = \frac{k\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = F(\vec{x}).$$

Setning 3.5.5 (nødvendig betingelse for konservativt felt)

Hvis $\vec{F}$ er konservativ i A så er $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x})$, for $\vec{x}\in A$

Bevis: Vi har at $F_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$, $F_j = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}$$

Setning 3.5.7: Betingelsen $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ er også tilstrekkelig, hvis A også er åpen og enkeltsammenhengende

Eksempel 3.5.6 definert for $(x,y) \neq 0$

Vi defineres $\vec{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$

Vi regner ut at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, og $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow$ betingelser fra setning 3.5.5 er oppfylt.

Definisjonsmengden til $\vec{F}$ er ikke enkeltsammenhengende;

La oss ta kurven $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

Vi har at $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt$

$\vec{F}(\vec{r}(t))$

$= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{j}$

$= -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$= \int_0^{2\pi} (-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}) \cdot (-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})\,dt$

$= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$

Hvis $\vec{F}$ var konservativ så ville vi kunne ϕ slik at $\vec{F} = \nabla\phi$,

og da blir $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(2\pi)) - \phi(\vec{r}(0))$

$= \phi((1,0)) - \phi((1,0)) = 0$

Dermed kan ikke $\vec{F}$ være konservativ!

La oss finne en potensialfunksjon ϕ for

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

Vi krever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1(x,y,z) = 2x \Rightarrow \phi(x,y,z) = x^2 + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y,z) = 2y \Rightarrow \phi(x,y,z) = y^2 + C_2(x,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3(x,y,z) = 2z \Rightarrow \phi(x,y,z) = z^2 + C_3(x,y)$$

Legg sammen disse: $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\nabla\phi = (2x, 2y, 2z)$$