UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/utsatt eksamen i MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag: 19. august 2010.
Tid for eksamen: 0900 – 1200.
Oppgavesettet er på 8 sider.
Vedlegg: Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator, vedlagt formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

*Du må begrunne alle svar, og vise nok mellomregninger
til at man lett kan følge argumentene dine.*

Oppgave 1

Sett

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

der a er et reelt tall.

a

Regn ut determinanten til A. For hvilke a er A invertibel?

Svar: Vi regner ut langs første rad,

$$\det(A) = a\left(a^2 - 2\right) - 2a = a\left(a^2 - 4\right).$$

A er invertibel hvis $\det(A) \neq 0$, altså for $a \notin \{0, \pm 2\}$.

(Fortsettes på side 2.)

b

Bestem når ligningen

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

har entydig løsning, har uendelig mange løsninger, og ikke har noen løsninger.

Svar: Den utvidede matrisen til ligningsystemet blir

$$\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & b_1\\ 2 & a & 2 & b_2\\ 0 & 1 & a & b_3\end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix}1 & a/2 & 1 & b_2/2\\ 0 & 1 & a & b_3/2\\ 0 & 0 & -2a(1-a^2/4) & b_1 - b_2a - b_3(1-a^2/2)\end{pmatrix}.$$

Vi vet allerede at for $a \notin \{0 \pm 2\}$ har ligningsystemet entydig løsning. Vi får tre tilfelle der vi enten kan ha ingen eller mange løsninger. Hvis siste raden i matrisen blir "$0 = 0$" har vi mange løsninger, hvis ikke, har vi ingen løsninger.

$$\begin{aligned} a &= 0, && \text{Mange løsninger hvis } b_1 - b_3 = 0\text{, ellers ingen,}\\ a &= 2, && \text{mange løsninger hvis } b_1 - b_2 + b_3 = 0\text{, ellers ingen,}\\ a &= -2, && \text{mange løsninger hvis } b_1 + b_2 + b_3 = 0\text{, ellers ingen.}\end{aligned}$$

c

Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer til A.

Svar: Det karakteristiske polynomet til A blir

$$(a-\lambda)\left((a-\lambda)^2 - 4\right),$$

som har røtter $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + 2$ og $\lambda_3 = a - 2$.

For λ_1 blir ligningene for egenvektoren $(x, y, z)^T$: $ax + y = ax$, $2x + ay + 2z = ay$ og $y + az = az$, løsinger gir $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

For λ_2 blir ligningene $ax + y = (2 + a)$, $2x + ay + 2z = (2 + a)y$ og $y + az = (2 + a)z$. Disse har løsning $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

For λ_3 blir ligningene $ax + y = (-2 + a)$, $2x + ay + 2z = (-2 + a)y$ og $y + az = (-2 + a)z$. Disse har løsning $(x, y, z) = (1, -2, 1)$.

(Fortsettes på side 3.)

d

Sett $x_0 = z_0 = 1$ og $y_0 = 0$. Skriv vektoren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ som en lineærkombinasjon av egenvektorene du fant i forrige punkt.}$$

Svar: Vi ser at

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e

Definer en følge $\{\mathbf{x}_n\}$ ved

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \mathbf{x}_0.$$

Vis at $x_n = z_n$. For $a = 1$, bestem grensen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n}.$$

Svar: Vi har at

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+2)^n + (a-2)^n \\ 2\left((a+2)^n - (a-2)^n\right) \\ (a+2)^n + (a-2)^n \end{pmatrix}$$

Vi ser at $x_n = z_n$. For $a = 1$ blir

$$\frac{y_n}{z_n} = 2\frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n} \to 2$$

når $n \to \infty$.

Oppgave 2

Finn den minste avstanden fra kjeglen $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ til punktet $(x, y, z) = (3, 3, 0)$.

(Fortsettes på side 4.)

Svar: Vi bruker Lagranges multiplikatormetode på

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2, \text{ med bibetingelse } g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Vi får ligningene

$$\left.\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y - 3 &= \lambda y \\ z &= -\lambda z \end{aligned}\right\} \text{ og } z^2 = x^2 + y^2.$$

Hvis $z = 0$, så blir $x = y = 0$ ved den siste ligningen, $f(0,0,0) = 18$. Hvis $z \neq 0$ blir $\lambda = -1$, og $x = y = 3/2$. Da blir $z^2 = 9/2$, og

$$f(3/2, 3/2, \pm\sqrt{9/2}) = 9 < 18 = f(0,0,0).$$

Altså blir minste avstand 3.

Hvis vi ikke ville bruke Lagrange, så kunne vi sett geometrisk at minste avstand blir 3, (likesidet trekant).

Oppgave 3

Betrakt avbildningen F fra (u,v) planet til (x,y) planet gitt ved

$$x = u + v, \quad y = v - u^2.$$

a

Regn ut Jacobideterminanten til F.

Svar:

$$|\det(F')| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = |-1 - 2u| = 2u + 1.$$

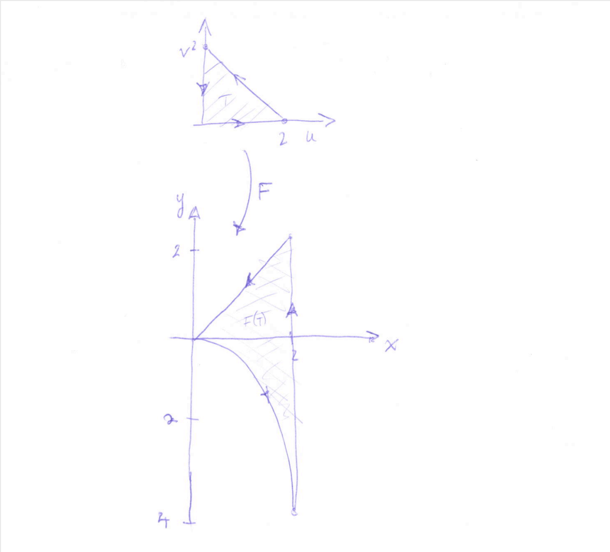
b

La T være trekanten i (u,v) planet med hjørner $(0,0)$, $(2,0)$ og $(0,2)$. Skissér $F(T)$.

Svar: Nedre kant blir avbildet til linjen $F(u,0)$, $u \in [0,2]$, som blir kurven $(u, -u^2)$. Den skrå linjen blir avbildet på kurven $F(u, 2-u) = (2, 2-u-u^2)$, u mellom 2 og 0. Den vertikale

(Fortsettes på side 5.)

linjen blir avbildet på kurven $F(0, v) = (v, v)$ for v mellom 2 og 0. Tilsammen gir dette bildet under.



c

Hva blir

$$\iint_{F(T)} \frac{dxdy}{(x - y + 1)^2}$$

(Du kan få bruk for formelen

$$\int \frac{dv}{v^2 - 5v + 7} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2v - 5}{\sqrt{3}}\right) + \text{konstant. })$$

Svar: Vi har at

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv = (2u + 1)dudv,$$

samt at $x - y + 1 = u + v - v + u^2 + 1 = u^2 + u + 1$ Derfor blir integralet

$$\begin{aligned}
\iint_T \frac{2u+1}{(u^2+u+1)}\,dudv &= \int_0^2 \int_0^{2-v} \frac{2u+1}{(u^2+u+1)^2}\,dudv \\
&= \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{(2-v)^2 + (2-v) + 1}\right) dv \\
&= \int_0^2 1 - \frac{1}{v^2 - 5v + 7}\,dv \\
&= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2v-5}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{v=0}^{v=2} \\
&= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Oppgave 4

a

La

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}\right)$$

og $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$. Beregn

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Svar: Vi ser at $\mathbf{F} = \nabla\phi$, der ϕ er

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2 + 1\right).$$

Videre er $\mathbf{r}(-\pi) = (-\pi, 2)$ og $\mathbf{r}(\pi) = (\pi, 2)$. Vi får at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(-\pi)) = 0.$$

(Fortsettes på side 7.)

b

La D være området i (x, y) planet beskrevet ved $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq \sqrt{1-x}$. Beregn dobbelintegralet

$$\iint_D \sqrt{x\,(x+y^2)}\,dxdy$$

(Hint: Bruk koordinatskifte $x = r^2\cos^2(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.)

Svar: Vi regner ut at

$$x + y^2 = r^2 \text{ og } \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x+y^2}}.$$

Videre blir Jacobideterminanten

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = 2r^2\cos(\theta) = 2\sqrt{x\,(x+y^2)}.$$

Derfor blir

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x\,(x+y^2)}\,dxdy &= \int_0^1 2\int_0^{\pi/2} r^4\cos^2(\theta)d\theta dr\\ &= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)+1\,d\theta = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

Oppgave 5

Konvergerer disse rekkene? Svarene skal begrunnes

a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

Svar: Vi regner først ut at

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

og sammenligner med $\sum 1/n$,

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{2}.$$

Rekka divergerer.

(Fortsettes på side 8.)

b

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$$

(Hint: Når du tester, kan det lønne seg å sette $u = \log(n)$.)

Svar: Vi sammenligner med $\sum 1/n^2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2 a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log(n)^{\log(n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\log(n)}}{\log(n)^{\log(n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^2}{\log(n)}\right)^{\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\log(n)(2-\log(n))} \\
&= e^{\lim(\log(n)(2-\log(n)))} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Derfor blir rekka konvergent.

c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

Svar: Vi sammenligner med $\sum 1/n$,

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\log(n)/n} = 1.$$

Rekka divergerer.