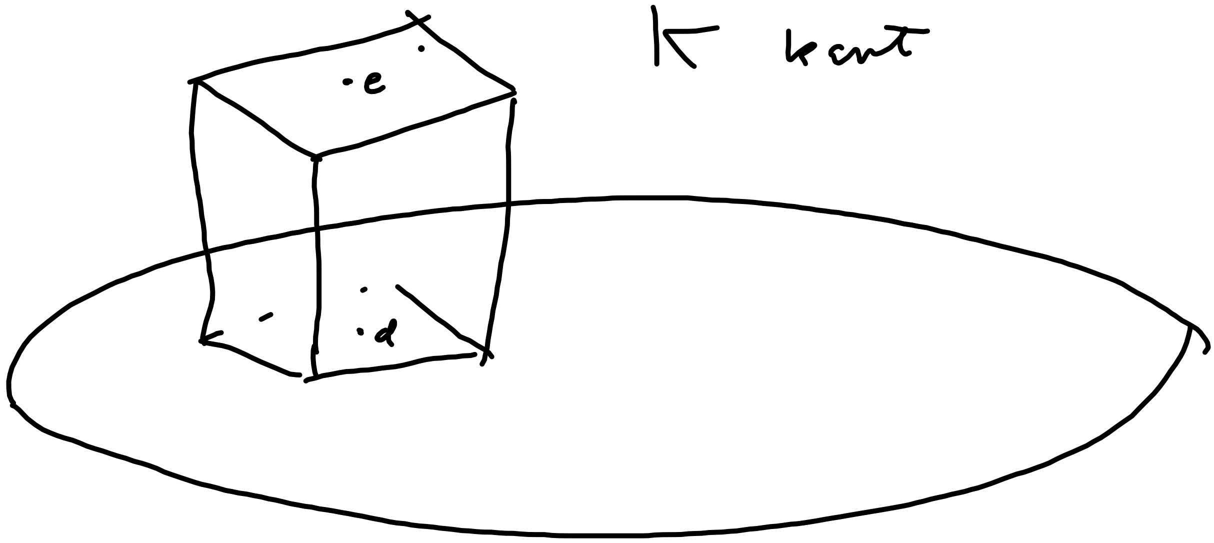
5.5.4



Skal vise at det fins punkt e
på kartet som svarer til det punktet
det ligger rett over i terrenget

$F : K \longrightarrow T$

$x \longrightarrow y = F(x)$ x svarer til y i terrenget

$G = F^{-1} : T \to K$

$p : K \to T$

$p(x)$ punktet i terrenget slik at x ligger rett over dette punktet.

F, G, p er alle kontinuerlige.

Et kart har vanligvis en skala

(f.eks. $1/10000$, $d(x_1,x_2) = \frac{1}{10000}\, d(F(x_1),F(x_2))$

Kan anta $d(x_1,x_2) = c\, d(F(x_1),F(x_2))$

der $0 < c < 1$

Se på $G \circ p = F^{-1} \circ p = H$

$$d(H(x),H(x')) = d(G(p(x)),G(p(x'))) = c(p(x),p(x')) = c(x,x')$$

fordi p er projeksjon og bevarer avstand. H er altså en kontraksjon med kontraksjons faktor c = målestokken på kartet. $H : \overline{K} \to \overline{K}$

La $x_0 \in K$, definer $\{x_n\}$ følge i K, ved $x_{n+1} = H(x_n)$

Banach fikspunkt teorem

$\Rightarrow \exists\, e \in \overline{K}$ s.t. $x_n \to e$

Sett $y_n = p(x_n)$

(x_n) er Cauchy følge og p bevarer avstand så (y_n) er Cauchy følge i terrenget

da finnes $d \in T$ s.a. $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d$

Da vil $G(y_n) \longrightarrow G(d)$

$G(y_n) = G(p(x_n)) = H(x_n) = x_{n+1} \to e$

Må ha $G(d) = e$ dvs. e og d svarer til hverandre

Har videre $y_n = p(x_n) \longrightarrow p(e)$

$$\begin{array}{ccc} y_n = p(x_n) & \longrightarrow & p(e) \\ \downarrow & & \\ d & = & \end{array}$$

e er vårt søkte punkt

(e ligger i K eller i $\bar{K} - K$ ved at det svarer til d)

5.5.5

$A^{\text{lukket}} \subset \mathbb{R}^m$

$F: A \to A$, anta at

$F^{\circ k} = \underbrace{F \circ \cdots \cdots \circ F}_{k}$ er en kontraksjon

med kontraksjonsfaktor $0 < c < 1$.

a) Viser først x er fikspunkt for F

$\Rightarrow x$ er fikspunkt for $F^{\circ k}$

Bevis $F^{\circ k}(x) = \underbrace{F(F \cdots\cdots F}_{k}\overbrace{(x)}^{\overset{x}{\shortparallel}}))$

$= \underbrace{F(F \cdots\cdots F}_{k-1}(x)))\overset{\text{fortsetter}}{=} \cdots F(x) = x$

b) ~~X~~ La være entydig fikspunkt for $F^{\circ k}$ (siden $F^{\circ k}$ er kontraksjon)

Da er også $F(x)$ et fikspunkt for $F^{\circ k}$. Vi har

$$\begin{array}{l} F^{\circ k+1}(x) = F(F^{\circ k}(x)) = F(x) \\ \quad \parallel \\ F^{\circ k}(F(x)) \end{array}$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ er fikspunkt for $F^{\circ k}$

dvs. p.gr. av entydighet er $F(x) = x$

$\Rightarrow$ x er fikspunkt for F

Hvis nå y var et fikspunkt for F

$\overset{a}{\Rightarrow}$ y er da fikspunkt for $F^{\circ k}$

entydighet gir da $y = x$

Har bevist:

F har et entydig fikspunkt

(nemlig fikspunktet til $F^{\circ k}$)

5.5.5 c)

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = \left(2y+1, \frac{x}{3}+1\right)$

F er ingen kontraksjon:

$|F(x,y) - F(u,v)| =$

$= \left(\left((2y+1)-(2v+1)\right)^2 + \left(\left(\frac{x}{3}+1\right) - \left(\frac{u}{3}+1\right)\right)^2 \right)^{1/2}$

Hvis $x = u = 0$

$|F(0,y) - F(0,v)| = 2|y-v|$

$= 2|(0,y)-(0,v)| \quad (2>1)$

$F \circ F(x,y) = F\left(2y+1, \frac{x}{3}+1\right)$

$= \left(2\left(\frac{x}{3}+1\right)+1, \frac{2y+1}{3}+1\right) = \left(\frac{2}{3}x+3, \frac{2y}{3}+\frac{4}{3}\right)$

$|F \circ F(x,y) - F \circ F(u,v)|$

$= \frac{2}{3}|(x,y)-(u,v)| \quad 0 < C = \frac{2}{3} < 1$

kontraksjon.

Skal finne fikspunkt
for f som er ikke fikspunkt
for $f^{\circ 2} = f \circ f$

$$(f \circ f)(x,y) = \left(\frac{2}{3}x+3, \frac{2}{3}y+\frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3}x+3 = x \Rightarrow \frac{1}{3}x = 3, \ x = 9$$

$$\frac{2}{3}y+\frac{4}{3} = y \Rightarrow \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}, \ y = 4$$

$(9,4)$ er fikspunkt for f.

5.6

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - x$

$f(x) = 0, \quad x^3 - x = 0$

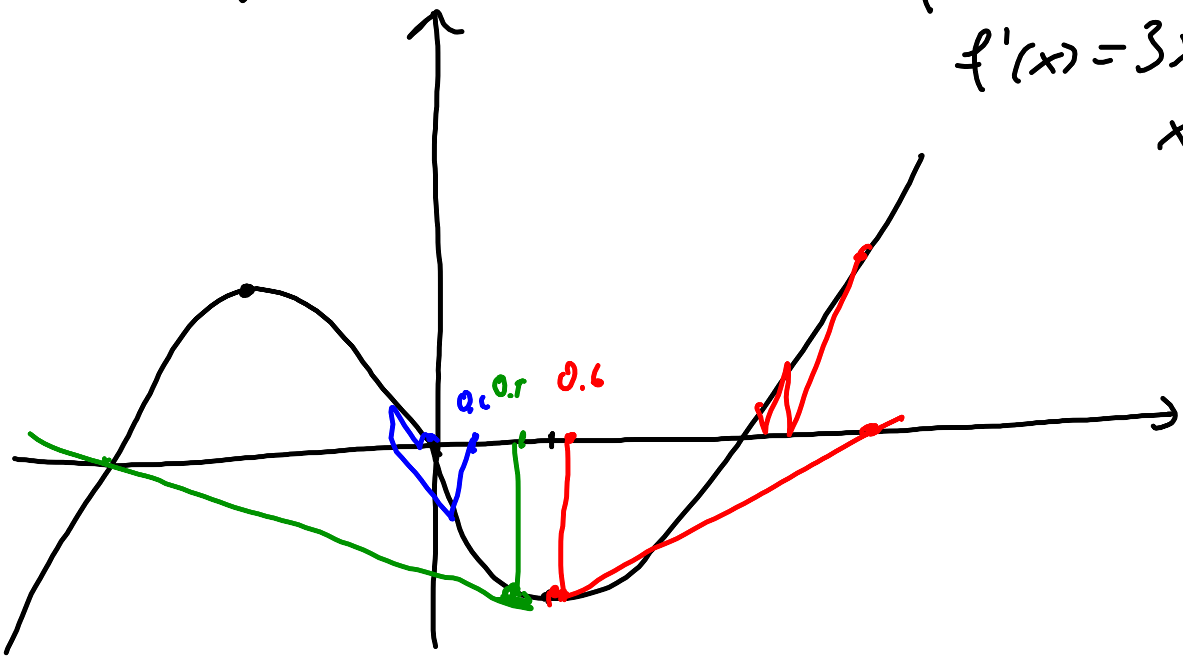
$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = -1, \; x = 1$

skal bruke Newtons metode til å „bekrefte" dette. Eller mer presist: Bekrefte Newtonsmetode ved eksemplet.

$f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$



5) $e^{x+y} = \sin(x-y)$

$y^2 - x^2 = 1$

dvs. finne nullpunkt til

$$F(x,y) = \left(e^{x+y} - \sin(x-y),\ y^2 - x^2 - 1\right)$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} - \cos(x-y), & e^{x+y} + \cos(x-y) \\ -2x & , 2y \end{pmatrix}$$

5.6.6

$$x^2+y^2+z^2=9$$
$$x^2-y^2+2z^2=1$$
$$x+y+10z=1$$

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-9,\ x^2-y^2+2z^2-1,\ x+y+10z-1)$$

$$F(x,y,z)=(0,0,0)$$

$$F'(x,y,z)=$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2y & 4z \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

5.7.3

$$x^3 + y^3 + y = 1 = g(x,y)$$

(x_0, y_0) være punkt på kurven

$$g(x,y) = 1$$

Skal vise at rundt x_0 kan definere

$y = f(x)$ slik at $g(x, f(x)) = 1$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y_0^2 + 1 > 0 \quad \forall y_0 .$$

påstanden følger fra implisitt funksjonsteorem.

$$x^3 + y^3 + y - 1 = 0 , \quad y = f(x)$$

$$3x^2 + 3y^2 f'(x) + f'(x) = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{-3x_0^2}{1 + 3y_0^2}$$

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = xy^2e^z + z$$

Skal vise at rundt $(-1,2,0)$ er flaten $f(x,y,z) = -4$ gitt som $z = g(x,y)$ der $g(-1,2) = 0$, dvs. $f(x,y,g(x,y)) = -4$

Nok å vise at $\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2e^z + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2e^z; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^z$$

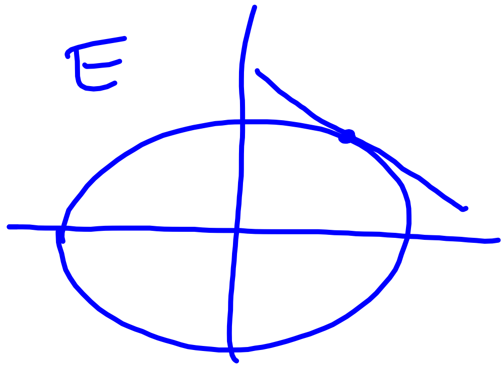
$$\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) = -4e^0 + 1 = -3 \neq 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = \frac{-(-4)}{-3} = \underline{-\frac{4}{3}}$$

6) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (x_0,y_0)\in E$$
$$y_0\neq 0$$

E



$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{2y_0}{b^2}\neq 0 \qquad y_0\neq 0$$

Vet at rundt (x_0,y_0) kan ellipsen skrives som $y=g(x)$

$$g'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=-\frac{\frac{2x_0}{a^2}}{\frac{2y_0}{b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

Stigningstallet til ellipsen

1 b) $x + y^2 + z^3 = 3xyz$

$z(x,y)$ vil framstille dette

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$f(x,y,z) = x + y^2 + z^3 - 3xyz$

$f(x,y,z(x,y)) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 3yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3xz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{1 - 3yz}{3z^2 - 3xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{2y - 3xz}{3z^2 - 3xy}.$$