Kontor B523, 5. etg. NHA

Arne.Hole@ils.uio.no

Semesterplan

MatLab: Appendix A (Python: Se semesterside)

- Matriser i MatLab

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & -1 & 11 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 55 & 20 & 73 \\ 103 & 44 & 139 \\ 112 & 10 & 150 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55 & 20 & 73 \\ 103 & 44 & 139 \\ 112 & 10 & 150 \end{bmatrix}$$

1.9 Lineæravbildninger

Hvis A er en $(m \times n)$-matrise, så definerer den en funksjon/avbildning $\vec{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$$\vec{T}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

eks. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ (3×2) gir $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

F. eks. $\vec{T}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+8 \\ -4+40 \\ 12+56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 36 \\ 68 \end{pmatrix}$

Standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}(\vec{e}_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Så:}$$

Poeng 1: En matrise avbilder alltid standardbasisvektorene på søylevektorene sine.

Videre: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gir

$$\vec{T}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \vec{T}(\vec{e}_1) + x_2 \cdot \vec{T}(\vec{e}_2) \quad \square$$

Poeng 2: Hvis A er en $(m \times n)$-matrise, så oppfyller den tilhørende funksjonen $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{T}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot \vec{T}(\vec{e}_1) + \dots + x_n \cdot \vec{T}(\vec{e}_n)$$

Definisjon 1.9.1

En funksjon $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en lineæravbildning hvis vi for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ har

(i) $\vec{T}(c\vec{x}) = c \cdot \vec{T}(\vec{x})$

(ii) $\vec{T}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{T}(\vec{x}) + \vec{T}(\vec{y})$

Hvis A er en $(m \times n)$-matrise, så er funksjonen $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definert ved $\vec{T}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ en lineæravbildning.
(Bevis: Regneregler for matriser.)

Setning 1.9.5

Anta at $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Da fins en unik $(m \times n)$-matrise A slik at

$$\vec{T}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n$$

(Altså er <u>alle</u> lineæravbildninger gitt ved matriser.)

<u>Bevis</u>

$$\vec{T}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \vec{T}(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n)$$

$$\overset{\boxed{\text{Linearitet, krav (ii)}}}{=} \vec{T}(x_1\vec{e}_1) + \ldots + \vec{T}(x_n\vec{e}_n)$$

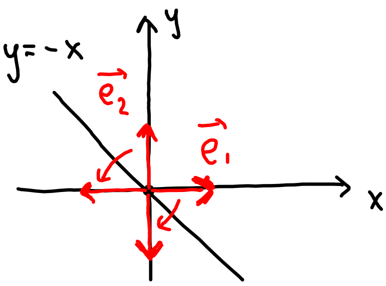
$$\overset{\boxed{\text{Linearitet, krav (i)}}}{=} x_1 \cdot \vec{T}(\vec{e}_1) + \ldots + x_n \cdot \vec{T}(\vec{e}_n) \qquad (*)$$

La A være matrisen med $\vec{T}(\vec{e}_1), \ldots, \vec{T}(\vec{e}_n)$ som søyler.

Da blir $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ akkurat dette $(*)$ (Poeng 2) □

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hvordan finne matrisen til en lineæravbildning?} \\ \to \text{Se hva den gjør med standardbasisvektorene}\end{array}}$

eks. Finne matrisen til lineæravbildningen $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler om linjen $y = -x$.



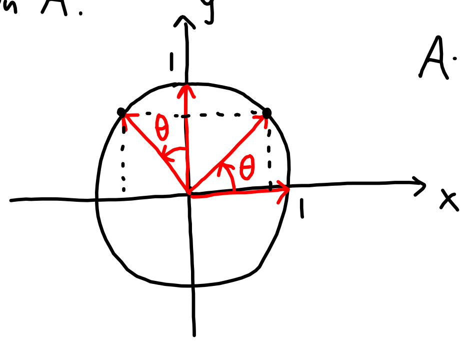
$\vec{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Matrisen:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}}}$$

eks. Finne matrisen som dreier alle vektorer en vinkel θ om origo. Kall matrisen A.



$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}}$$

$\boxed{\text{1.10 Affinavbildninger}}$

En funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en <u>affinavbildning</u> hvis det fins en $(m \times n)$-matrise A og en vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ ("konstantleddet") slik at

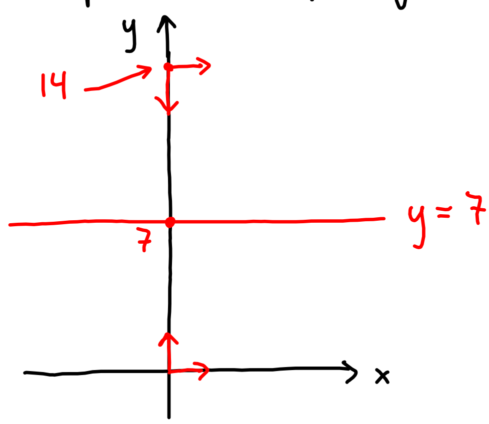
$$\vec{F}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{c} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Hvis $\vec{c} = 0$, er dette en lineæravbildning.)

<u>eks.</u> Finne matrisen og konstantleddet til affinavbildningen

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

som speiler om linjen $y = 7$.



$$x \mapsto x$$
$$y \mapsto 7 + (7 - y) = 14 - y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Så $$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matrisen}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}}_{\text{konst. ledd}}$$