UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Lørdag 26. mai 2018 (prøveeksamen)
Tid for eksamen:	10.00 – 15.00. (Gjennomgang kl. 15.15)
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Prøveeksamen inneholder 16 deloppgaver som kan tenkes å telle likt. (Den ekte eksamenen vil inneholde 10 deloppgaver som teller 6 poeng hver.) Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La M være matrisen gitt ved $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 11 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Finn den reduserte trappeformen til M.

b) Finn en basis for $\mathbf{R}^3$ som inneholder to av søylevektorene i M.

Oppgave 2. Finn brennpunktene til ellipsen

$$9(x-5)^2 + 25(y+3)^2 = 225$$

Oppgave 3. Avgjør for hvilke reelle tall x rekkene konvergerer:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n}(x-3)^n$

Oppgave 4. Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$$

konvergerer, og finn eventuelt integralets verdi.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$f(x, y) = xy + 1.$$

a) Vis at f har ett stasjonært punkt, og avgjør om dette er et lokalt maksium, minimum eller et sadelpunkt.

b) Begrunn at f har et globalt maksimumspunkt på området R bestående av punktene $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som oppfyller $x^2 + y^2 \leq 1$, og finn maksimumsverdien til f på R.

Oppgave 6. La $a > 0$ være et reelt tall, og la T være området i $\mathbf{R}^3$ bestående av alle punkter (x, y, z) som oppfyller $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{a - x^2 - y^2}$. Beregn trippelintegralet

$$\int\int\int_T z \ dxdydz.$$

Oppgave 7. Finn summen av rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$. (Hint: $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$.)

Oppgave 8. La C være en enkel, lukket kurve i $\mathbf{R}^2$ med en glatt parametrisering $\mathbf{r}$ orientert mot klokken, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$$

a) Anta at origo ikke ligger i området som er begrenset av C eller på C selv. Bruk Greens teorem til å vise at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

b) La $\epsilon > 0$, og la C_ϵ være kurven parametrisert ved $\mathbf{s}(t) = (\epsilon \cos t, \epsilon \sin t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$. Vis at

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi.$$

c) Anta nå at origo ligger i det indre av området som er begrenset av C. Vis at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Oppgave 9.

a) Finn den inverse av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Finn en (2×2)-matrise A som er slik at $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 2, og $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 7.

Oppgave 10. La A være en kvadratisk matrise, og anta at $\mathbf{x}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ. Vis at da er $\mathbf{x}$ også en egenvektor for matrisen $A - 2A^2 + 3A^3$, og bestem den tilhørende egenverdien.

SLUTT