setn. 4.10.4 Anta at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er egenvektorer for A med forskjellige egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Da er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lineært uavhengige.

Skisse av beviset: antar $\vec{v}_1, \dots, v_k$ er lin. avh. (motsigelsebevis), og at det ikke finnes mindre lineært avh. delmengder.

Da finnes $c_i \neq 0$ s.a.

$$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

gang med λ_1

$$A(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k) = \vec{0}$$

legg til

$$\lambda_1 c_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k c_k v_k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_2 + \dots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{v}_k = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ lin. avh. delmengde med færre elementer $\Rightarrow$ motsigelse.

---

eks 4.10.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda-2)+1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

$\lambda = 1$ er en egenverdi med multiplisitet 2

$$\overset{\lambda=1}{I} - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

y er en fri variabel

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en basis for egenvektorene.

eks. 4, 10, 6

$$A = \begin{pmatrix} 5/3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ dobbelrot ; det karakteristiske polynomet.
$\lambda = 2$ enkel rot

---

eks 4.10.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$$

y fri var.

$$\lambda = 1 + 2i : \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = iy \Rightarrow \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix}$ egenvektor, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = 1 - 2i : \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ser at egenvektorene er konjugerte av hverandre.

setn 4.10.8 : A reell, λ kompleks egenverdi med egenvektor $\vec{v}$
da er $\bar{\lambda}$ egenverdi, med egenvektor $\bar{\vec{v}}$

Bevis: $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\bar{\vec{v}} = \bar{A}\,\bar{\vec{v}} = \overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} = \bar{\lambda}\,\bar{\vec{v}}$

4.10.3

def 4.10.9 A kalles symmetrisk hvis $A^T = A$

Vi ser at $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n$ er en ortonormal basis hvis alle vektorene er ortogonale, dvs. $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$, og lengde 1, dvs $\|\vec{v}_i\| = 1$

Teorem 4.10: (Spektralteoremet for symmetriske matriser)

Hvis A er symmetrisk så er alle egenverdiene reelle, og det finnes en ortonormal basis av egenvektorer for A.

Beviset er ikke i boka.

I en ortonormal basis så er det lett å regne ut $c_1, \dots, c_n$ i en lineærkombinasjon $\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$

setn. 4.10.11 Vi har at $c_j = \vec{v} \cdot \vec{v}_j$

Bevis: $\vec{v} \cdot \vec{v}_j = (c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j = \sum_{i=1}^n c_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)$

$= c_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = c_j \|\vec{v}_j\|^2 = c_j$

4.10.4 Diagonalisering av matriser.

Setn 4.10.12 Anta A $n \times n$-matrise og har en basis av egenvektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.
Definer M som matrisen $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, dvs at søylene i M er egenvektorene $\vec{v}_i$.

Da er $M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

D: diagonalmatrise med egenverdiene på diagonalen.

Litt om beviset:

$$\lambda_i \vec{e}_i \xleftarrow{M^{-1}} \lambda_i \vec{v}_i \xleftarrow{A} \vec{v}_i \xleftarrow{M} \vec{e}_i$$

Korollar 4.10.13 Hvis vi har en ortonormal basis av egenvektorer, så er $M^T A M = D$

Bevis: Nok å vise at $M^T = M^{-1}$, når $\{v_i\}_{i=1}^n$ ortonormal basis.

element i,j i $M^T M$ er $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 1$ hvis og bare hvis $i = j$
0 ellers

$\Rightarrow M^T M = I \Rightarrow M^T = M^{-1}$.

Siden $M^{-1} A M = D$ så er $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

$$\det(M^{-1} A M) = \det(M^{-1}) \det(A) \det(M) = \frac{1}{\det(M)} \det(A) \det(M) = \det(A)$$

4.11 Lineære systemer som utvikler seg over tid

$$\vec{x} \to A\vec{x} \to A^2\vec{x} \to \cdots \to A^n\vec{x}$$

etter 0 år, etter 1 år, 2 år, n år.

Setn. 4.11.1 Hvis A har egenverdi λ med egenvektor $\vec{v}$ så har A^n egenverdi λ^n med egenvektor $\vec{v}$.

eks. 4.11.2
Et kjøpesenter har tre stativer X, Y, Z for handlevogner.

Av de vognene som starter dagen i X: 70% ender opp i X, 10% — " — Y, 20% — " — Z

Av de vognene som starter dagen i Y: 30% ender opp i X, 50% — " — Y, 20% — " — Z

Av de vognene som starter dagen i Z: 40% ender opp i X, 20% — " — Y, 40% — " — Z

Sett andelene her inn som søyler i en matrise:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(hvis vi starter dagen med z_0 vogner i stativ Z, så vil disse fordeles som $A\begin{pmatrix}0\\0\\z_0\end{pmatrix} = z_0\begin{pmatrix}0.4\\0.2\\0.4\end{pmatrix}$ i de tre stativene etter endt dag.

Anta at vi starter med x_0 vogner i X, y_0 vogner i Y, z_0 vogner i Z.

Etter n dager har vi da $\vec{v}_n = A^n \underbrace{\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_0}$ vogner i hvert stativ.

$\vec{v}_n = A^n \vec{v}_0$

egenverdiene til A: $\det(\lambda I - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-0.7 & -0.3 & -0.4 \\ -0.1 & \lambda-0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & \lambda-0.4 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 1.6\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08$$

z for eau.

egenvektor for $\lambda = 1$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.3 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}13/6\\5/6\\1\end{pmatrix}$ egenvektor $\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}13\\5\\6\end{pmatrix}$ egenvektor.

Tilsvarende kan vi finne egenvektorer for $\lambda_2 = 0.4$ og $\lambda_3 = 0.2$

Hva skjer når $n \to \infty$?

Vi antar at $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix}144\\0\\0\end{pmatrix}$

Finne c_1, c_2, c_3 slik at $\vec{v}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

Koden vår gir at $c_1 = 6$, $c_2 = 48$, $c_3 = 18$

Siste utregning:

$$\vec{v}_n = A^n\vec{v}_0 = A^n(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3) = c_1\lambda_1^n\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^n\vec{v}_2 + c_3\lambda_3^n\vec{v}_3$$

$$= 6\begin{pmatrix}13\\5\\6\end{pmatrix} + 48\underbrace{(0.4)^n}_{\to 0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 18\underbrace{(0.2)^n}_{\to 0}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$6\begin{pmatrix}13\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\30\\36\end{pmatrix}$$