Elementære matriser

Elementære radoperasjoner:

(i) Bytte om på to rader,

(ii) Gange en rad med et tall $\neq 0$,

(iii) Legge et multiplum av en rad til en annen.

DEF: En elementærmatrise er en matrise som fremkommer ved å utføre en radoperasjon på I_n.

Eks:

$$I_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observer: Enhver elementær matrise er inverterbar, siden du kan bruke den omvendte radoperasjonen til å komme tilbake til I_n.

Setning: Det å utføre en radoperasjon på en matrise A er det samme som å gange A fra venstre med elementærmatrisen som fremkommer ved å utføre den samme radoperasjonen på I_n.

"Bevis":

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Setning: Enhver matrise A kan skrives som $A = E \cdot D$ der D er den reduserte trappematrisen til A og E er et endelig produkt av elementærmatriser.

Bevis:

$$A \sim A_1$$
$$A_1 = E_1 \cdot A \sim A_2$$
$$A_2 = E_2 \cdot E_1 \cdot A$$
$$\vdots$$
$$E_m \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = D.$$

D: redusert trappeform.

Den inverse matrisen til en elementærmatrise er også elementær

$$E_1^{-1} \circ \cdots \circ E_{m-1}^{-1} \circ \underbrace{\cancel{(E_m^{-1} \circ E_m)}}_{id} \cdot E_{m-1} \circ \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_1^{-1} \circ \cdots \circ E_m^{-1} \circ D$$

så $A = \underbrace{E_1^{-1} \circ \cdots \circ E_m^{-1}}_{= E} \circ D$ ∎

Korollar: Enhver invertibel matrise er et produkt av elementære matriser.

Bevis: For en inv. matrise er den reduserte trappeformen I_n.

DETERMINANTER

(2×2)-determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \cdot d - b \cdot c$.

Induktiv definisjon av determinanter.

La $n \geq 2$ og anta at vi har definert determinanter for $(n-1)\times(n-1)$-matriser.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{11}\cdot \det(A_1) - a_{12}\cdot \det(A_2) + a_{13}\cdot \det(A_3) - \cdots \pm a_{1n}\cdot \det(A_n).$$

Eksempel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-6) + 2\cdot(-2) + 3(-1).$$

Lemma: Dersom en søyle eller en rad i A er null, så er $\det(A) = 0$.

Bevis: Induksjon på n.

Se på $n=2$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

lett å se.

apr 11-14:36

Anta nå at det er sant for $(n-1)\times(n-1)$-matriser for $n>2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\det(A_1) - a_{12}\det(A_2) + \ldots \pm a_{1n}\cdot\det(A_n) = 0. \quad ■$$

<u>Lemma:</u> Dersom A er nedre/øvre triangulær så er determinanten produktet av alle diagonalelementene.

<u>Bevis:</u> For $n=2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a\cdot c.$

ok.

Anta sant for $(n-1)\times(n-1)$-matriser.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & * & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\det(A_1) \mp a_{12}\det(A_2) \cdots \pm a_{1n}\det(A_n)$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} + 0 \quad ■$$

Sammenheng mellom determinanter og radoperasjoner

Teorem: (i) Dersom vi bytter om på to rader i en matrise skifter derminanten fortegn

Eks: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da$

(ii) Dersom du multipliserer en rad med et tall c så skaleres determinanten med c.

(iii) Dersom du legger et multiplum av en rad til en annen da forandres ikke determinanten.

Korollar: Dersom to rader i en matrise A er like så er determinanten lik 0.

Bevis: anta $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$.

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\sim} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \longleftarrow \underline{\det = 0}.$$

$A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]$

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\div 1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \overset{\div \frac{1}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longleftarrow \det = -2.$$

så determinanten til den opprinnelige matrisen er åtte.

apr 11-15:14

Teorem: For en $(n\times n)$-matrise e følgende ekvivalent.

(i) $A \sim I_n$,

(ii) A er invertebar,

(iii) $\det(A) \neq 0$,

(iv) $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle $\vec{b}$,

(v) $A\vec{x} = 0$ har bare en løsning,

(vi) Søylene i A er lineært uavhengige.

Determinanten til et produkt

Teorem: Dersom A og B er $(n\times n)$-matriser så er $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Bevis: Tilfelle 1: $\det(B) = 0$

da fins $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ med $B(\vec{x}_1) = B(\vec{x}_2) = 0$,

men $x_1 \neq x_2$.

Da er $(AB)\vec{x}_1 = (AB)x_2 = 0$, så $\det(AB) = 0$

$= \det(A)\cdot\det(B)$

Tilfelle 2: $\det A = 0$ $\det B \neq 0$.

Da er $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = 0$ for $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$.

Siden $\det(B) \neq 0$ er B invertbar,

og vi setter $\vec{b}_1 = B^{-1}\vec{x}_1$ og $\vec{b}_2 = B^{-1}\vec{x}_2$,

forskjellige

Har $AB(\vec{b}_1) = Ax_1 = 0 = Ax_2 = AB(\vec{b}_2)$.

så $\det(AB) = 0 = \det(A)\cdot\det(B)$.

Tilfelle 3: $\det(A) \neq 0$.

Da er A et produkt av elementærmatriser

$$A = E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_n$$

Observer: Dersom E er en elementærmatrise og B er en matrise av samme dim. så er $\det(E \cdot B) = \det(E) \cdot \det(B)$.
Dette er p.g.a. korrespondansen mellom utførsel av radoperasjoner og multiplikasjon med elementærmatrise fra venstre, samt regler for hvordan determinanter forandres ved radoperasjoner.

$$\det(AB) = \det(E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_m \circ B)$$
$$= \det(E_1) \cdot \underbrace{\det(E_2 \circ \cdots \circ E_m \circ B)}$$
$$= \det(E_2) \cdot \det(E_3 \circ \cdots \circ E_m \circ B)$$
$$\vdots$$
$$= \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdot \ldots \cdot \det(E_m) \cdot \det(B).$$

Videre

$$A = E_1 \circ \cdots \circ E_m$$
$$\det(A) = \det(E_1 \circ \cdots \circ E_m)$$
$$= \det(E_1) \cdot \det(E_2 \circ \cdots \circ E_m)$$
$$\vdots$$
$$= \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_m)$$

Korollar: Dersom A er invertibel så er
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.$$

Bevis: $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1})$
$$= \det(A) \cdot \det(A^{-1}). \quad \blacksquare$$

Setning: For alle $(n \times n)$-matriser A så er
$$\det(A^T) = \det(A).$$

Utvikling av determinanter langs rader og søyler:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & & & \\ + & - & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ + & - & + & - & + & & + \end{vmatrix}$$

$$-a_{21} \cdot \det(A_1) + a_{22} \det(A_2) - \cdots -$$

$$= -a_{12} \cdot \det(\tilde{A}_1) + a_{22} \det(\tilde{A}_2) - \cdots -$$
