UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Prøveeksamen
Eksamensdag:	5. juni 2010.
Tid for eksamen:	10.00 – 13.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, vedlagt formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La A være en $m \times m$ matrise.

1a

Sett $S_n = I_m + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$. Vis at

$$(I - A)S_n = I - A^{n+1}.$$

1b

Anta heretter at A har m lineært uavhengige ortogonale egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Anta at alle egenverdiene tilfredsstiller ulikheten $|\lambda_i| \leq L$. Vis at for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ så gjelder at

$$|A^n \mathbf{b}| \leq L^n |\mathbf{b}|.$$

1c

Anta nå at $L < 1$, definér en følge $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 0}$ ved $\mathbf{x}_n = S_n \mathbf{b}$. Vis at $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ når $n \to \infty$, der $\mathbf{x}$ løser ligningen

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Er $I - A$ invertibel? (Begrunn svaret.)

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Definér funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

2a

Finn

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

der disse er definert.

2b

Vis at f er kontinuerlig langs linjestykkene $(0,y)$, $y \neq 0$. Er f kontinuerlig i $(0,0)$? (Hint: betrakt f langs parablene $x = ay^2$.)

2c

Finn et globalt maksimum og et globalt minimum for f (Hint: Bruk parablene fra forrige punkt).

2d

La $\mathcal{C}$ være den lukkede kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds.$$

Oppgave 3

Finn globale maksima og minima for funksjonen $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ på mengden $A = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Oppgave 4

La u og v være kontinuerlig deriverbare funksjoner $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, og la D være mengden $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Definér

$$\mathbf{F}(x,y) = (v(x,y), u(x,y)) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

(Fortsettes på side 3.)

Anta at på randen til D, som vi kaller $\mathcal{C}$, vet vi at $u = 1$ og $v = y$. Finn

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \, dxdy.$$

Oppgave 5

La

$$f(x) = (1-x)^{-1/2}.$$

5a

Vis at

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\dots\frac{2n-1}{2}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

5b

Vis at Taylorrekka til f om $x = 0$ blir

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n} x^n.$$

5c

Finn konvergensområdet til rekka $g(x)$. (Hint: du kan få bruk for ulikheten

$$\frac{y}{y+1} \leq e^{-1/(y+1)}.)$$

5d

For x i det indre av konvergensintervallet til g, sett

$$F(x) = \int_0^x g\left(y^2\right)\, dy.$$

Forklar hvorfor $F(x) = \sin^{-1}(x)$.

5e

Hva blir

$$s = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} ?$$