A $n \times n$ matrise.

$A \sim B$ B trappe, $n \times n$. A inverterbar alle rader i B har pivotelement

dvs. Alle søyler i B er pivot

B triangulær (øvre) 1 ere på diagonalen hvis A inverterbar, ellers noen 0 er.

$$\det(B) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } A \text{ inverterbar} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 B$$

$$\det(A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \cdot \det(B) = \begin{cases} \neq 0 & \text{hvis } A \text{ inverterbar} \\ = 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Determinanter.

E elementær matrise

① Legge s ganger en rad til en annen.
② Gange en rad med $s \neq 0$
③ Bytte to rader.

$C = EB$

Observér: $\det(C) = \begin{cases} \det(B) & \text{hvis ①} \\ s\det(B) & \text{hvis ②} \\ -\det(B) & \text{hvis ③} \end{cases} = \det(E)\cdot\det(B)$

Lemma:

Hvis A ikke er inverterbar, så er ikke AB inverterbar. A, B $n\times n$ matr.

Bevis

A ikke inverterbar, fins $b \in \mathbb{R}^n$, s.a. $Ax = b$ ikke har løsning.

Sett $b = (AB)y = A(By)$, kan ikke finne By så $ABy = b$ ikke har løsn.

Teorem

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis

A ikke inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ $\quad \det(A)\det(B) = 0$

$\Downarrow$

AB ikke invertbar $\Leftrightarrow \det(AB) = 0$ //

A inverterbar.

$A \sim I, \quad A = E_k \overbrace{E_{k-1}\cdots E_1 I}$

$\det(A) = \det(E_k)\det(E_{k-1}E_{k-2}\cdots E_1) = \det(E_k)\det(E_{k-1})\cdot \quad \cdot \det(E_1)$

$AB = E_k E_{k-1}\cdots E_1 B$

$\det(AB) = \underbrace{\det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)}_{\det(A)}\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).$

A inverterbar.

$A^{-1}A = I \Rightarrow \det(I) = 1 = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\cdot\det(A)$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$A^T \leftarrow A$ med byttet rad/søyle.

$A \sim B$ trappe.

$A = E_k \cdots E_1 B$

$A^T = (E_k E_{k-1}\cdots E_1 B)^T = B^T E_1^T \cdot E_2^T \cdots E_k^T$

$\det(A^T) = \det(B^T)\det(E_1^T)\cdots\det(E_k^T)$

$= \det(B)\cdot\det(E_1)\cdots\det(E_k)$

$= \det(A).$

Dette hjelper oss til å regne ut determinanter.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & & & & \\ - & \vdots & & & & \\ & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+1}\det(A_{ij})$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ → jte søyle.

fjerne j te søyle i te rad.

i te rad

Eks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utvikle langs 3dje søyle.

$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

3 rad. $\qquad$ 1 rad.

$= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$

$-3\left(2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \end{vmatrix}\right)$

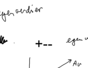
$= 3 - 2\cdot(-6) - 3(2\cdot 3 - 3(-6)) = 3 + 12 - 18 - 54 = \underline{\underline{-24}}$

Egenvektorer og egenverdier

A $n\times n$ matrise

$v \neq 0$ $v \in \mathbb{R}^n$ kalles egenvektor hvis $Av = \lambda v$

λ kalles egenverdi.



Løse $\underline{Av = \lambda v}$ ukjente $v \leftarrow n$ ukjente λ ukjent $n+1$ ukjente

Bare n ligninger.

$Av - \lambda v = 0$

$0 = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v = 0$ ønsker løsning $\neq 0$.

Kan finne løsning $v \neq 0$ bare hvis $(A - \lambda I)$ ikke er inverterbar.

$(A - \lambda I)$ er ikke inverterbar $\Leftrightarrow \underline{\det(A - \lambda I) = 0}.$

polynom i λ

Eks

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 5$

For å finne λ, løser vi $\det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+12}) = \frac{1}{2}(2 \pm 4) = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Må finne egenvektorene: Dvs løse $(A - \lambda I)v = 0$ for hver λ, ukjent $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix}$ $\boxed{\lambda = 3}$ gir

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ utvidet matrise $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{II-5I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y fri, $x = y$ $\quad v = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ velger $y = \underline{1}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 3$ gir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor.

$\boxed{\lambda = -1}$

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad y$ fri $x = y/5$ $\quad v = \begin{pmatrix} y/5 \\ y \end{pmatrix}$

velger $y = 5$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ karakteristisk polynom til A.

n te gradspolynom.

Teorem

A $n\times n$ matrise $v_1, \dots, v_k$ egenvektorer med forskjellig egenverdi

Da er $v_1, \dots, v_k$ l.u.

Bevis

Opplagt for $k=1$.

anta sant for $k-1$

Hvis $v_1, \dots, v_k$ ikke var l.u.

da er (*) $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots c_kv_k = 0$ for $c_1, \dots c_k$ ikke alle null.

venstremultipliserer med A

$Ac_1v_1 + Ac_2v_2 + \dots + Ac_kv_k = 0$

$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \dots + c_k\lambda_kv_k = 0$ $\quad$ (*)$\cdot\lambda_1$ gir

$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_1v_2 + \quad + c_k\lambda_1v_k = 0$ $\quad$ Subtraherer

$0 + c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots c_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$

$\Rightarrow \{v_2, \dots, v_k\}$ ikke l.u.

Eksempel:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda) + 1$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0.$

$\underline{\underline{\lambda = 1}}$

Finne egenvektoren(e):

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $(A - \lambda I)v = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad y$ fri $x = y$.

$v = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ velge $y = 1$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

,,,,

$A = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} +5/3-\lambda & 1/3 & -1/3 \\ -0 & +1-\lambda & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 4/3-\lambda \end{pmatrix} \leftarrow$

$\det(A - \lambda I) = 0\begin{vmatrix} \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5/3-\lambda & -1/3 \\ -2/3 & 4/3-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda\right) - \frac{2}{9}\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{9}{3}\lambda + \frac{18}{9}\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$\lambda = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9-8}) = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$\underline{\lambda = 1}$ Utvidet matrise

$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{III+I \\ I/(2/3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad z$ fri, y fri $\quad x = -\frac{1}{2}y + 1/2 z$

$v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ velg $z = 0$ gir v_1, velg $y = 0$ gir v_2 $\Big\}$ l.u.

l.u.