Løsningsforslag til eksamen i MAT1110, 13/6-08

Oppgave 1: a) Vi finner den inverse matrisen til A ved å bruke radoperasjoner på den utvidede matrisen $[A|I_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$[A|I_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \overset{I-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = [I_3|A^{-1}]$$

Dette viser at $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Jacobi-matrisen er

$$\mathbf{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x & y & 1 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Legg merke til at $\mathbf{F}'(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Dette er matrisen A i punkt a), og følgelig er $\mathbf{F}'(1,1,-1)$ inverterbar. Ifølge omvendt funksjonsteorem har da $\mathbf{F}$ en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om punktet $\mathbf{F}(1,1,-1) = (0, \frac{1}{2}, 2)$. Jacobi-matrisen til denne funksjonen er gitt ved

$$\mathbf{G}'(0, \frac{1}{2}, 2) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Oppgave 2: Mengden $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ (en sirkel) er lukket og begrenset, og funksjonen f er kontinuerlig. Ifølge ekstremalverdisetningen har dermed f minimal- og maksimalpunkter på S.

For å finne disse ekstremalverdiene benytter vi Lagranges multiplikatormetode på $f(x,y) = 2x + 4y$ med bibetingelsen $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Gradientene til f og g er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = 2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x,y) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

Vi ser at $\nabla g(x,y)$ bare er null når $(x,y) = (0,0)$. Dette punktet ligger ikke på S, og vi vet dermed at minimal- og maksimalpunktene finnes blant punktene der $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Dette gir ligningene

$$2 = 2\lambda x \qquad \text{og} \qquad 4 = 2\lambda y$$

i tillegg til randbetingelsene $x^2 + y^2 = 4$. Siden λ og y må være forskjellig fra 0, kan vi dele den andre ligningen på den første og få $2 = \frac{y}{x}$. Følgelig er $y = 2x$, og setter vi dette inn i bibetingelsen, får vi $x^2 + (2x)^2 = 4$, dvs. $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Dermed er $y = 2x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. Vi har dermed to kandidater til maks.- og min.-punkter: $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ og $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$. Setter vi inn det første punktet i f, får vi en positiv verdi, mens vi får en negativ verdi når vi setter inn det andre punktet. Siden vi vet at funksjonen har et maksimumspunkt og et minimumspunkt på S, betyr dette at $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ må være maksimumspunktet, mens $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$ må være minimumspunktet.

Oppgave 3: Vi finner først egenverdiene. Siden

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1.1 & 0.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9$$

er egenverdiene gitt av annengradsligningen $\lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9 = 0$. Løsningene av denne ligningen er

$$\lambda = \frac{-(-1.9) \pm \sqrt{(-1.9)^2 - 4\cdot 1\cdot 0.9}}{2} = \frac{1.9 \pm \sqrt{0.01}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \\ 0.9 \end{cases}$$

så egenverdiene blir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.9$.

For å finne en egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$, ser vi på ligningssystemet $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut og rydder opp, får vi kravet $0.1x - 0.2y = 0$, dvs. $x = 2y$. Velger vi $y = 1$, får vi dermed egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

For å finne en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_2 = 0.9$, ser vi på ligningssystemet $A\mathbf{v}_2 = 0.9\mathbf{v}_2$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut og rydder opp, får vi kravet $0.2x - 0.2y = 0$, dvs. $x = y$. Velger vi $y = 1$, får vi dermed egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Oppsummering:</u> Vi har egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$ og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenverdien $\lambda_2 = 0.9$.

b) Dersom vi lar $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, ser vi at $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$ som ved iterasjon leder til $\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0$. Hvis $\mathbf{r}_0$ kan skrives som en lineærkombinasjon $\mathbf{r}_0 = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$, får vi dermed at

$$\mathbf{r}_n = A^n(c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2) = \lambda_1^n c\mathbf{v}_1 + \lambda_2^n d\mathbf{v}_2 = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.9^n d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For å finne c og d må vi løse ligningssystemet $\mathbf{r}_0 = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$ for c og d. Dette systemet kan skrives

$$\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og har løsningene $c = 2000$, $d = -1000$. Dermed har vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}_n = 2000\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.9^n \cdot 1000\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som gir

$$x_n = 4000 - 1000 \cdot 0.9^n$$

$$y_n = 2000 - 1000 \cdot 0.9^n$$

Vi ser at bestandene nærmer seg henholdsvis 4000 og 2000 dyr når $n \to \infty$.

Oppgave 4: a) Bruker først forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{n+2}}{\frac{x^{2n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}x^2 = x^2$$

Siden x^2 er mindre enn 1 når $|x| < 1$, og større enn 1 når $|x| > 1$, vet vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$ og divergerer når $|x| > 1$. Endepunktene $x = \pm 1$ må vi sjekke separat:

<u>Endepunktet x=1</u>. Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ som divergerer (harmonisk rekke).

<u>Endepunktet x=-1</u>. Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}$. Bortsett fra fortegnet er dette den samme rekken som ovenfor, og vi får divergens.

Konklusjon: Konvergensintervallet er $(-1, 1)$.

b) La $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1}$ for $|x| < 1$. Ganger vi denne likheten med x, ser vi at $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$. Derivasjon gir

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+1} = \frac{2x}{1-x^2}$$

der vi i siste overgang har brukt at $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+1}$ er en geometrisk rekke med startledd $2x$ og kvotient x^2. Integrerer vi denne ligningen, får vi at

$$xS(x) = \int \frac{2x}{1-x^2}\, dx = -\ln(1-x^2) + C$$

for en passende konstant C. Setter vi inn $x = 0$ på begge sider, ser vi at $C = 0$. Dermed er

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x^2)}{x} & \text{for } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 5: Denne oppgaven kan løses både ved hjelp av sylinderkoordinater/polarkoordinater og kulekoordinater. Kulekoordinater gir de enkleste regningene, men vi tar for ordens skyld med begge metodene:

Kulekoordinater: I kulekoordinater er området beskrevet ved $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Siden $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi$, blir integralet dermed:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta d\phi d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin^3\phi \, d\theta d\phi d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^4 \sin^3\phi \, d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \sin^3\phi \, d\phi = \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi \, d\phi$$

Skrive vi $\sin^3\phi = (1 - \cos^2\phi)\sin\phi$, og innfører en ny variabel $u = \cos\phi$, $du = -\sin\phi \, d\phi$, ser vi at integralet kan skrives:

$$I = \frac{64\pi}{5} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-u^2)(-du) = \frac{64\pi}{5} \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{128\pi}{15} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$$

Sylinderkoordinater: De to flatene skjærer hverandre når $x^2+y^2 = 4-x^2-y^2$, dvs. når $x^2 + y^2 = 2$. Projeksjonen av området ned i xy-planet er derfor en sirkel med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$. Bytter vi til sylinderkoordinater, får vi dermed integralet

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r^2 \cdot r \; dz d\theta dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r^3 \; dz d\theta dr$$

Integrerer vi først mhp. z og så mhp. θ, får vi

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left[r^3 z\right]_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}} \; d\theta dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (r^3\sqrt{4-r^2} - r^4) \; d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^3\sqrt{4-r^2} - r^4) \; dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{4-r^2} \; dr - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \; dr$$

Det siste integralet er lett å integrere og gir svaret $\frac{8\pi\sqrt{2}}{5}$. I det første integralet skifter vi variabel til $u = 4 - r^2$, $du = -2r \; dr$. Da er $r^2 = 4 - u$, og vi får

$$I_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{4-r^2} \; dr = -\pi \int_4^2 (4-u)\sqrt{u} \; du = \pi \int_2^4 \left(4\sqrt{u} - u^{\frac{3}{2}}\right) \; du =$$

$$= \pi \left[\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_2^4 = \pi\left(\frac{128}{15} - \frac{56\sqrt{2}}{15}\right)$$

Totalt har vi dermed

$$I = \pi\left(\frac{128}{15} - \frac{56\sqrt{2}}{15}\right) - \frac{8\pi\sqrt{2}}{5} = \frac{128\pi}{15} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$$

Oppgave 6: Kurven har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \, \mathbf{i} + e^{-t} \sin t \, \mathbf{j}, \qquad t \in [0, \pi]$$

Den er lukket og har negativ omløpsretning. Ifølge Greens teorem er arealet gitt ved (for eksempel)

$$A = -\int_{\mathcal{C}} x \; dy$$

(minuset skyldes at kurven er orientert "gal vei"). Siden

$$y'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$$

får vi

$$A = -\int_{\mathcal{C}} x \; dy = -\int_0^{\pi} e^t \sin t(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t) \; dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 t - \sin t \cos t) \; dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t - \frac{1}{2}\sin^2 t +\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

der vi har brukt formelsamlingen til å finne $\int \sin^2 t \; dt$.

Oppgave 7: Det er mange måter å gjøre det første punktet på. Her er tre:

(i) Funksjonen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er lineær og følgelig kontinuerlig. Siden $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$, har vi dermed

$$\lim_{n\to\infty} A\mathbf{x}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{F}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n) = \mathbf{F}(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

(ii) Siden $|A\mathbf{x}| \leq |A||\mathbf{x}|$, der $|A|$ er operatornormen til A, har vi

$$|A\mathbf{x}_n - \mathbf{0}| = |A\mathbf{x}_n| \leq |A||\mathbf{x}_n| \to 0$$

siden $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$.

(iii) Dersom $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix}$, vet vi at $x_n^{(1)} \to 0$, $x_n^{(2)} \to 0, \ldots, x_n^{(m)} \to 0$ når $n \to \infty$. Dermed vil

$$A\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + \cdots a_{1m}x_n^{(m)} \\ a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + \cdots a_{2m}x_n^{(m)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_n^{(1)} + a_{m2}x_n^{(2)} + \cdots a_{mm}x_n^{(m)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Den andre delen av oppgaven følger fra den første: Anta at B er en invertibel matrise, og at vi vet at følgen $\mathbf{y}_n = B\mathbf{x_n}$ konvergerer mot $\mathbf{0}$. Ganger vi med $A = B^{-1}$ fra venstre, får vi $A\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n$, og ifølge det vi allerede har vist, må $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ siden $\mathbf{y}_n \to \mathbf{0}$.

Den tredje delen av oppgaven kan løses slik: Siden C ikke er inverterbar, finnes det en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ slik at $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Setter vi $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ for alle n, vil $C\mathbf{x}_n$ konvergere mot $\mathbf{0}$, mens $\mathbf{x}_n$ ikke gjør det.