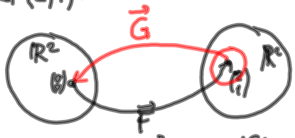
Invers funksjonsteorem

Eksempel

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y + x - 2y + 2 \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Vis at $\vec{F}$ har en invers funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $\binom{2}{1}$ så $\vec{G}(2,1) = \binom{0}{0}$ og finn $\vec{G}'(2,1)$.



Sjekker at $\vec{F}(0,0) = \binom{2}{1}$:

$$\vec{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0+2 \\ e^{0-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi må også sjekke at $F'(0,0)$ er inverterbar:

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy+1 & x^2-2 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Så

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Denne er inverterbar fordi determinanten er ulik 0.

I følge invers funksjonsteorem har $\vec{F}$ en lokal invers $\vec{G}$ definert i en omegn om $\vec{F}(0,0) = \binom{2}{1}$ med $\vec{G}'(2,1) = \vec{F}'(0,0)^{-1}$. Finner inversen på vanlig måte

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Altså er $\vec{G}'(2,1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

apr 30-08:13

Implisitt funksjonsteorem

Eksempel

$$e^{xyz} - z = 0$$

Ønsker å "løse" denne for z mhp x, y dvs. vi vil finne en funksjon $z = g(x,y)$

s.a. $e^{xy\,g(x,y)} - g(x,y) = 0.$

Bruker implisitt funksjonsteorem med

$$f(\underbrace{x,y}_{\vec{x}},\underbrace{z}_{\vec{y}}) = e^{xyz} - z$$

$$\left(f(x,y,g(x,y)) = 0 \right)$$

Ser at $(0,0,1)$ er en løsning, $e^{0\cdot 0\cdot 1} - 1 = 0$

Ser på $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xyz}xy - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -1$$

Det betyr at ligningen $e^{xyz} - z = 0$ har en løsning $z = g(x,y)$ i en omegn rundt $(0,0)$ med $g(0,0) = 1$

Vi vet også at

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - - -$$

Eksempel

I mange anvendelser (fysikk, kjemi etc.) arbeider man med generelle sammenhenger

$$f(x_1, x_2 \dots x_m, y) = 0$$

V = volum

T = temperatur

p = trykk

$$f(p, V, T) = 0$$

Ideell gass

$$pV = kT$$

k: konst.

$$f(p, V, T) = pV - kT$$

Vi vil ofte finne en av størrelsene som en funksjon av de to andre

$$p(V,T): \; f(p(V,T), V, T) = 0$$

Derivasjon mhp V:

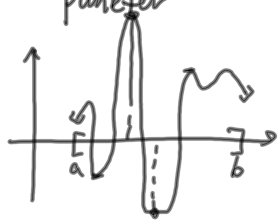
$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

Ekstremalverdisetningen (5.8)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig

$\Rightarrow$ f har maks og min-punkter



Ekstremalverdisetningen for funksjoner av flere variable

Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset og at

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

er kontinuerlig. Da har f maks og min-verdier på A. dvs. det finnes punkter $a, b \in A$ s.a.

$$f(b) \le f(x) \le f(a)$$

for alle $x \in A$

Bevis (for makspunkt)

La $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A\}$ (α kan tenkes å være ∞)

La $\{x_n\}$ være en følge i A s.a. $f(x_n) \longrightarrow \alpha$

Siden $\{x_n\}$ er begrenset (den er inneholdt i A), så har den ved Bolzano-Weierstrass en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}$ med grensepunkt $a \in A$. (Husk at A er lukket)

Da er

$$f(a) \overset{f \text{ kont.}}{=} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k})$$

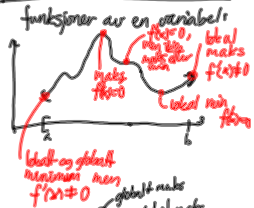
valg av $\{x_n\}$

$$= \alpha$$

Siden ingen funksjonsverdi er større enn α må a være et maksimumspunkt.

Maks og min for funksjoner av flere variable (5.9)

funksjoner av en variabel:



__Def__: La $A \subset \mathbb{R}^m$ $f: A \to \mathbb{R}$. Et punkt $a \in A$ kalles et __lokalt maksimum__ for f dersom det finnes en kule $B(a,r)$ om a s.a. $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in B(a,r) \cap A$

__Setning__: Anta $f: A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maks eller min i et indre punkt $a \in A$. Dersom de partiellderiverte til f eksisterer i a så er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ for alle i, mao. $\nabla f(a) = 0$

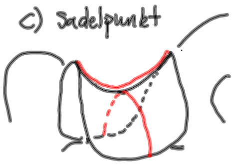
__Def__: $a \in A$ er __stasjonært punkt__ for f dersom $\nabla f(a) = 0$.

Eksempler på stasjonære punkter

a) Lokalt maks

b) Lokalt min

c) Sadelpunkt



Ønske: En test som avgjør hva slags stasjonært punkt vi har

Funksjoner av 1 variabel:
__Annenderivertstesten__

Anta $f'(a) = 0$

(i) $f''(a) > 0$ konveks – lokalt min

(ii) $f''(a) < 0$ konkav – lokalt maks

(iii) $f''(a) = 0$ ingen konklusjon.

Skal utvide testen til flere variable

__Hesse-matrisen__ for $f(x_1, \dots, x_m)$

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a) \end{bmatrix}$$

$Hf(a)$ er en symmetrisk matrise og har en ortonormal basis av egenvektorer $v_1, \dots, v_m$

(dvs. $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$

La $y \in \mathbb{R}^m$

$$(Hf(a)y)\cdot y = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)y_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} y_m \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a)y_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} y_m \end{bmatrix} \cdot y$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, y_i y_j$$

---

a stasjonært punkt

$r(t) = a + ty$, $t \in [0,1]$

$g(t) = f(r(t))$

Deriverer $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

$= \nabla f(r(t)) \cdot y$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(r(t))y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(r(t))y_m$

$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(r(t))y_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(r(t))y_2 y_1 + \dots$

$= (Hf(r(t))y) \cdot y$

<u>Husk fra MATINF 1100</u>

Taylorpolynom

$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(c)x^2$

$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(c)$

For vår g

$f(a+y) = f(r(1)) = g(1)$

$= \underbrace{g(0)}_{f(r(0)) = f(a)} + \underbrace{\nabla f(\underbrace{r(0)}_{a}) \cdot y}_{0} + \frac{1}{2}(Hf(r(c))y) \cdot y$

$f(a+y) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}(Hf(r(c))y) \cdot y}_{\frac{1}{2}(Hf(a)y)\cdot y \, + \text{ "liten feil"}}$

Filosofi:

(i) Hvis $(Hf(a)y)\cdot y > 0$ for alle y så er a lokalt min

(ii) —— " —— < 0 —" —— " —— lokalt maks

(iii) Hvis $(Hf(a)y)y$ er positiv for noen y og negativ for andre så er a et sadelpunkt.

La $v_1 \dots v_m$ være den ortonormale basisen av egenvektorer for $Hf(a)$ m. tilhørende egenverdier $\lambda_1 \dots \lambda_m$

Vi har $y = \underline{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m}$

$(Hf(a)y)\cdot y$

$= (c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m) \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_m v_m)$

$= c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_m^2 \lambda_m$

Dette er alltid $\begin{matrix}\text{pos}\\\text{neg}\end{matrix}$ for alle valg av $c_1 \dots c_m$ (alle valg av y) hvis og bare hvis alle egenverdiene $\lambda_1 \dots \lambda_m$ er $\begin{matrix}\text{pos}\\\text{neg}\end{matrix}$

<u>Annengradstesten</u> Anta f har kontinuerlige annenderiverte og at a er et stasjonært punkt for f. Da gjelder:

(i) Dersom alle egenverdiene til Hesse-matrisen $Hf(a)$ er positive så er a et lokalt minimumspunkt

(ii) —— " —— negative —— " —— maksimumspunkt

(iii) Hvis det finnes egenverdier av begge fortegn så er a et sadelpunkt

apr 30-09:36

(iv) Hvis noen egenverdier er 0 og resten er enten alle positive eller alle negative så gir testen ingen konklusjon.