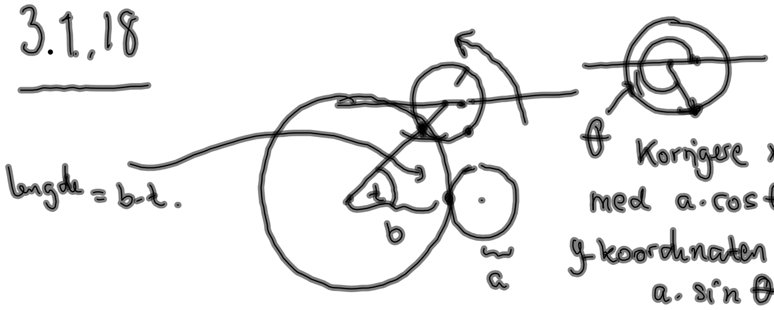
3.1,18



Korrigere x-komp. med $a \cdot \cos\theta$, og y-koordinaten med $a \cdot \sin\theta$.

Parametriser et punkt på sirkelen med radius a når den trilles rundt på utsiden av sirkelen med radius b.

1. Parametriserer senteret til den trillende sirkelen først:

$$\left((a+b)\cdot\cos t,\ (a+b)\cdot\sin t\right),\quad t\in[0,2\pi]$$

2 Korreksjon x-komponent:

$$a\cdot\cos\left(t+\pi+\frac{b\cdot t}{a}\right)$$

Siste ledd i summen i cos-parentesen blir vinkelen gitt når man har beveget seg en avstand $b\cdot t$ på en sirkel med radius a. Dvs. $\frac{b\cdot t}{a}$

y-komponent: $a\cdot\sin\left(t+\pi+\frac{b\cdot t}{a}\right)$

$$r(t) = \left((a+b)\cdot\cos t + a\cdot\cos\left(t+\pi+\frac{b\cdot t}{a}\right),\ (a+b)\sin t + a\cdot\sin\left(t+\pi+\frac{b\cdot t}{a}\right)\right).$$

a) Vis at $\frac{d}{dt}\left[r(t) \times v(t)\right] = 0$.

↑ kryssprodukt,

Ved setning 3.1.4 punkt (iv) har vi

$$\frac{d}{dt}\left[r(t) \times v(t)\right] = r'(t) \times v(t) + r(t) \times v'(t)$$

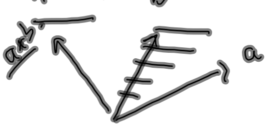
$$= v(t) \times v(t) + r(t) \times a(t)$$

$$= v(t) \times v(t) + r(t) \times k(t) \cdot r(t)$$

$$= v(t) \times v(t) + k(t) \cdot \left(r(t) \times r(t)\right).$$

$$= 0 + k(t) \cdot 0 = 0,$$

Husk:



a×b står normalt på planet utspent av a og b,

Kryssprodukt mellom

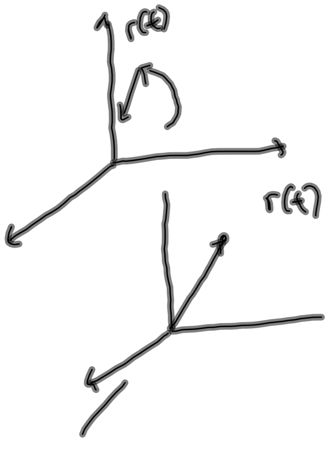
$a = (a_1, a_2, a_3)$

$b = (b_1, b_2, b_3)$

$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

21 r(t) beskriver en partikkel som beveger seg i rommet, og akselerasjonen peker alltid mot eller fra origo.

Dvs. $a(t) = k(t) \cdot r(t)$, der $k(t)$ er et skalarfelt.



(b) Forklar hvorfor

$r(t) \times v(t) = \vec{c}$ er en konstant vektor.

Det er fordi $(r(t) \times v(t))' = 0$.

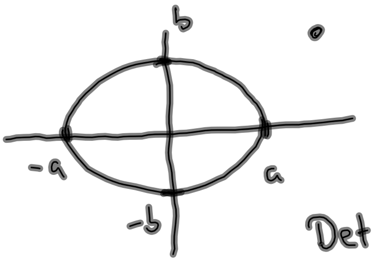
(c) Vis at partikkelen beveges seg i planet utspent av vektorene $r(0)$ og $v(0)$.

$r(t) \times v(t)$ står normalt på planet utspent av $r(0)$ og $v(0) =: P$.
Dersom $r(t)$ befinnes seg utenfor P så vil $r(t)$ og $v(t)$ spenne ut et annet plan.
Men da vil normalvektoren være forskjellig fra $r(0) \times v(0)$, så $\underline{r(t) \times v(t)}$ forandres seg

– MOTSIGELSE!!

3.1.7 $r(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Vis at r parametriseres ellipsen gitt ved $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.



- Observer: $\left(\frac{a\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\sin t}{b}\right)^2$

$$= (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

Det vil si at $r(t)$ alltid er inneholdt i ellipsen.

- Observer videre at $r : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ er injektiv, dvs: $(a\cos t_1, b\sin t_1)$

$$= (a\cos t_2, b\sin t_2)$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = t_2.$$

- og $r(0) = r(2\pi)$.

(b) Finn hastighet, fart og akselerasjon

$r(t) = (a\cos t, b\sin t)$.

$v(t) = r'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$.

$v(t) = |v(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$a(t) = v'(t) = (-a\cdot\cos t, -b\cdot\sin t)$.

$= -r(t)$.

(c) Vis at omkretsen til ellipsen er

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt.$$

Følger av utregning av $v(t)$ og def. 3.1.2.

skriv f = inline('sqrt(..)') for a=5, b=3. quad ..

(b) Anta at en parametrisering er gitt ved

$$r_1(t) = (t, \sin t),$$

Finn $r_2(t)$.

$$r_1'(t) = (1, \cos t).$$

$$v(t) = |r_1'(t)| = \sqrt{1+\cos^2 t}$$

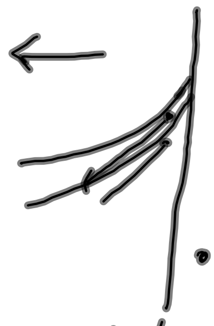
$$T_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \right)$$

Får $r_2(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \right).$

(c) Tegn med matlab.

(d) Hvilken vei triller sykkelen.

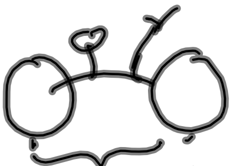
Ikke fra høyre til venstre:



En av kurvene beskriver bakhjulet.

- Ikke den nederste.
- Ikke den øverste heller p.g.a avstand.

3.1.17



1 meter.

(a) Anta at sporet bakhjulet etterlater seg ved tiden t er gitt $r_1(t)$.
Finn parametriseringen av forhjulet.
Dersom vi lar $T_1(t)$ være enhetstangentvektoren i $r_1(t)$ så finnes at forhjulet treffer bakken i punktet $r_1(t) + T_1(t)$.