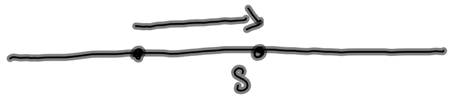
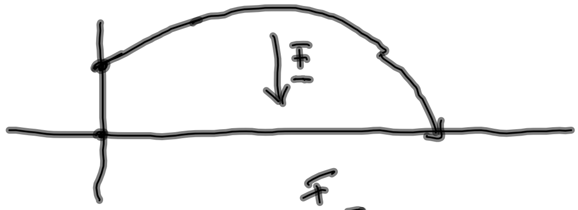
L.I.F.V.F. $(F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

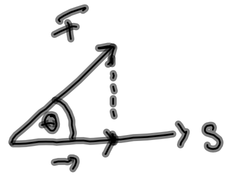
Motivasjon:



Arbeid gjort av kraften F på objektet:

$W = F \cdot s$,

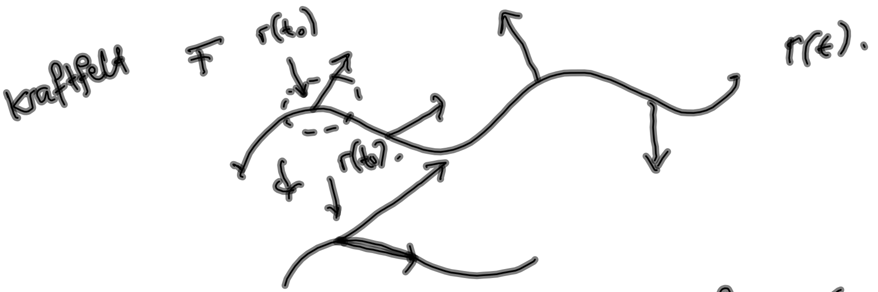




$W = |F| \cdot |s| \cdot \cos\theta = F \cdot s$,

prikkprodukt.

Generelt: Tenker at $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametriserer et objekt som beveger seg



Når objektet har beveget seg fra $r(t_0)$ til $r(t_0+\Delta t)$

Arbeid utført $\approx F(t_0) \cdot (r(t_0+\Delta t) - r(t_0))$

$$= F(t_0) \cdot \left(\frac{r(t_0+\Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t .$$

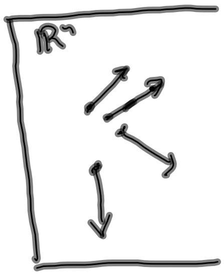
antar at r er glatt $\approx F(t_0) \cdot r'(t_0) \cdot \Delta t$.

feb 5-08:06

La $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_N=b$ være en partisjon av $[a,b]$. Da burde det totale arbeidet gjort på objektet av kraften F være

$$\approx \sum_{j=1}^{N} \left[F(r(t_{j-1}))\cdot r'(t_{j-1})\right]\cdot(t_j-t_{j-1}).$$

prikkprodukt,

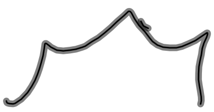


Gjenkjenner dette som en Riemann-sum for integralet

$$\int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt,$$

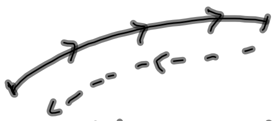
DEF: Anta at $\underline{F}: A\to\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon av n variable (et vektorfelt), og at $r:[a,b]\to A$ er en en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C.
Da er linje-integralet orientert $\int_C F\cdot dr$ definert ved

$$\int_C F\cdot dr := \int_a^b \underline{F(r(t))\cdot r'(t)}\,dt,$$



dersom integralet til høyre eksisterer.

orientert:



Obs: Fortegnet til integralet avhenger av orienter, dvs. "hvilken vei vi integrerer".

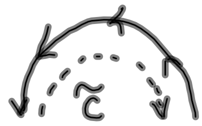
Eks! La $F(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$

$r(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0,1]$.

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 (t^2, t^3, 1)\cdot(1, 2t, 0)\,dt = \int_0^1 t^2 + 2t^4\,dt = \frac{11}{15}.$$

Eks: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$

$F(x,y) = (-y, x)$



C

$$\int_C F\,dr = \int_0^\pi (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = \int_0^\pi \sin^2 t + \cos^2 t\,dt = \pi,$$

Gå andre veien; La $\tilde{r}(t) = (-\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$

$$\int_{\tilde{C}} F\cdot dr = \int_0^\pi (-\sin t, -\cos t)\cdot(\sin t, \cos t)\,dt = \int_0^\pi -(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\pi.$$

Setning 3.4.2: Anta at r er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C, og at F, G er to kontinuerlige vektorfelter s.a. $\int_C F\cdot dr$ og $\int_C G\cdot dr$ begge eksisterer.

Da er;

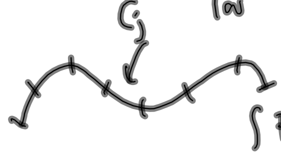
(i) $\int_C (F+G)\cdot dr = \int_C F\cdot dr + \int_C G\cdot dr$,

(ii) $\int_C (F-G)\cdot dr = \int_C F\,dr - \int_C G\cdot dr$, og

(iii) $\int_C (aF)\cdot dr = a\cdot \int_C F\cdot dr$, for alle $a \in \mathbb{R}$.

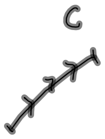
Setning 3.4.3: Anta at r er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C, og at F er et kontinuerlig vektorfelt s.a. $\int_C F\cdot dr$ eksisterer.

Dersom $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ er en partisjonering av $[a,b]$ og vi lar C_j betegne kurven $r([t_{j-1}, t_j])$, da er



$$\int_C F\cdot dr = \sum_{j=1}^{N} \int_{C_j} F\cdot dr .$$

Setning 3.4.4: Anta at $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ og $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er to ekvivalente parametriseringer av en kurve C og anta at de har samme orientering. La F være et kontinuerlig vektorfelt s.a. $\int_C F\cdot dr$ eksisterer.



stykkvis glatt kurve.

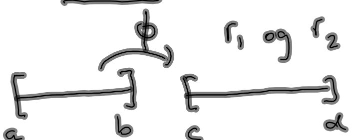
Da er

$$\int_a^b F(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt = \int_c^d F(\vec{r}_2(t))\cdot \vec{r}_2{}'(t)\,dt ,$$

dvs. at $\int_C F\cdot dr$ er uavhengig av valg av parametrisering.

Bevis: Anta først at C er glatt kurve.

r_1 og r_2 ekvivalent: $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$,



$\phi : [a,b] \to [c,d]$ glatt.

r_1 og r_2 samme orientering: $\phi' > 0$.

$$\int_a^b F(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt = \int_a^b F(\vec{r}_2(\phi(t)))\cdot \left[\vec{r}_2(\phi(t))\right]'\,dt$$

$$\overset{\text{Kjerneregel}}{=} \int_a^b F(\vec{r}_2(\phi(t)))\cdot \vec{r}_2{}'(\phi(t))\, \phi'(t)\,dt$$

prikkprodukt

Vanlig mult

$$\overset{\text{Skifte av variable}}{=} \int_c^d F(\vec{r}_2(t))\cdot \vec{r}_2{}'(t)\,dt . \quad \blacksquare$$

Eksempel:

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$.

La vektorfeltet F være tyngdekraften.

Hva er det totale arbeidet gjort av F?

$$F(x,y) = (0, -m \cdot g).$$

$$W = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (0, -m \cdot g) \cdot (x'(t), y'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b -m \cdot g \cdot y'(t)\,dt$$

Analysens fundalteorem

$$= -m \cdot g \cdot [y(b) - y(a)].$$

Eksempel: Se på en partikkel med masse m som påvirkes av en total kraft F. Partikkelen beveger seg i en bane C

$r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

Kinetisk energi: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$

Skal vise:

$$W = \int_C F \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v(b)^2 - v(a)^2\right).$$

feb 5-09:29

Bevis: Newton : $F = m \cdot a$.

$$W = \int_C F \cdot dr = m \cdot \int_a^b \vec{a}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_a^b \left(\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,'(t)\right)' dt$$

$$\left(\text{husk: } \left(\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,'(t)\right)' = \vec{r}\,''(t) \cdot \vec{r}\,'(t) + \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t) \right)$$

$$= 2\, \vec{a}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

$$= \frac{1}{2} m \int_a^b \left(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2 \right)' dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \left(v(b)^2 - v(a)^2 \right). \quad \blacksquare$$

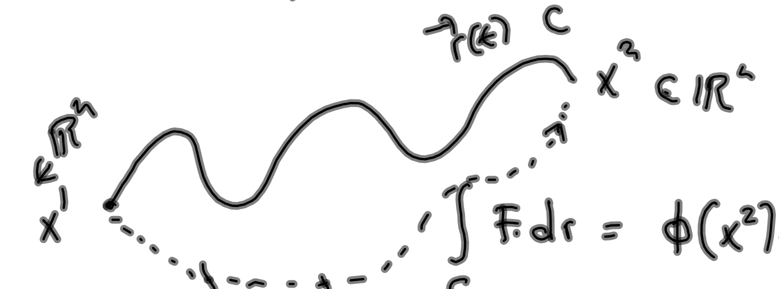
Gradienter og konservative vektorfelter.

Husk : $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$.

Skal vise tilsvarende : Dersom vektorfeltet F er en gradient, dvs.

$$F = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

da :



$$\int_C F \cdot dr = \phi(x^2) - \phi(x^1).$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Setning 3.5.1: Anta at $\phi: A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable med $\nabla\phi$ kontinuerlig. Dersom $r:[a,b] \to A$ er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C som begynnes i punktet x^1 og sluttes i punktet x^2. Da er

$$\int_C \nabla\phi \cdot dr = \phi(x^2) - \phi(x^1).$$

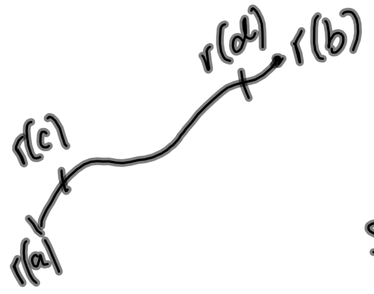
Bevis: Anta at C er glatt.

La $a < c < d < b$, og integrer først over $[c,d]$.

La $C_{c,d} = r([c,d])$

$$\int_{C_{c,d}} \nabla\phi \cdot dr = \int_c^d \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt.$$

$$\overset{\text{Kjerneregel}}{=} \int_c^d [\phi(r(t))]'\, dt$$



$$= \phi(r(d)) - \phi(r(c)).$$

Ser nå at når $c \to a$ og $d \to b$ så får vi

$$\int_a^b \phi(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \phi(r(b)) - \phi(r(a)).$$

∎