Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 18/5-22/5

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

May 29, 2009

Oppgave 12.2.3a)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ til å fastslå at rekken divergerer.

Oppgave 12.2.3b)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer.

Oppgave 12.2.3c)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer (bruk at $\arctan n \to \pi/2$).

Oppgave 12.2.3 d)

Vi regner ut (sammenligner med $\frac{1}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+\sqrt{n})\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^{-1/2}} = 1.$$

Rekken vil derfor divergere, siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer.

Oppgave 12.2.3 e)

Vi sammenligner med $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Rekken vil derfor konvergere, siden $\frac{1}{n^2}$ konvergerer.

Oppgave 12.2.3f)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n^2)\cos(1/n)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = 1,$$

slik at rekken divergerer.

Oppgave 12.2.3g)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.3h)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed divergerer rekken.

Oppgave 12.2.3i)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}}{1/n^{3^2}} &= \lim_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2})(\sqrt{n^3+1}+n^{3/2})}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^3+1-n^3)}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.5a)

Forholdstesten gir en grenseverdi på $\frac{1}{3}$, og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.5b)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 3, og dermed divergerer rekken.

Oppgave 12.2.5 c)

Vi bruker rottesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} < 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

Oppgave 12.2.5d)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.5e)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.5 f)

Vi bruker forholdtesten:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

Oppgave 12.2.5 g)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^n}{(n+1)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\ &= \frac{4}{e} > 1.\end{aligned}$$

Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.7

a)

Rekken konvergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekker $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

b)

Rekken divergerer. Bruk grensesammenligningstestn med rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

c)

Rekken divergerer. Bruk sammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

d)

Rekken divergerer på grunn av divergenstesten, siden $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

e)

forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{n^2-(n+1)^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-2n-1}}{n} = 0,$$

slik at rekken konvergerer.

f)

Vi sammenligner med $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)(1+1/n)^n} = \frac{1}{e},$$

slik at rekken divergerer.

g)

Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

slik at rekken konvergerer.

Oppgave 12.2.13

a)

Anta $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} P(n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln P(n)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln P(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{P(x)}} = e^0 = 1,$$

Hvor vi har brukt at $P'(x)$ er et polynom av grad en mindre enn $P(x)$.

b)

På grunn av a) blir grenseverdien for $a_n^{1/n}$ lik $1/2$, og dermed konvergerer rekken på grunn av rottesten.

Oppgave 12.3.1 a), c), d)

Rekkene er alternerende, og $a_n \to 0$. Det er klart for alle rekkene at de er avtagendene, siden funksjonene n^2+1, $\sqrt{n}$ og $\ln(n)$ er voksende. derfor er alle tre rekkene konvergente (Kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt).

Oppgave 12.3.1 b)

Divergerer på grunn av divergenstesten (a_n går ikke mot 0).

Oppgave 12.3.1e)

På grunn av divergenstesten divergerer rekken, siden det n'te leddet ikke går mot 0.

Oppgave 12.3.3 a)

Det er fort gjort å sjekke at kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.05$. Dette svarer til $\frac{1}{(n+2)^2} < 0.05$, eller $(n+2)^2 > 20$. Det er klart at minste n der dette er oppfylt er $n = 3$. Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{-36 + 16 - 9}{144} = -\frac{29}{144}.$$

Oppgave 12.3.3b)

Vi må finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.25$. Dette er det samme som $\sqrt{n+1} > 4$, eller $n > 15$. legger vi sammen de første 16 leddene finner vi -0.4818.

Oppgave 12.3.3 c)

Rekken er alternerende. Videre er $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{ne}\right| < 1$ for alle n. Det er klart fra dette at kravene i testen for for alternerende rekke er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.1$. Dette svarer til $(n+1)e^{-(n+1)} < 0.1$. Det er fort gjort å sjekke at minste n hvor dette er oppfylt er $n = 3$ ($|a_3| = 0.1494$, $|a_4| = 0.0733$). Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 - \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} \approx -0.2466.$$

Oppgave 12.3.6

a)

Siden $n \geq \sqrt{n}$ er $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Dermed er $-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \leq 0$. For n odde er $a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, som dermed er negative. For n like er det klart at leddene er positive, og rekken er derfor alternerende. Det er klart at leddene i rekken går mot 0.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Den første av disse rekkene ser vi fort at oppfyller kravene i testen for en alternerende rekke. Den andre rekken vet vi at er divergent. Da følger det fra korollar 12.1.8 at $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ er divergent. Grunnen til at dette ikke strider mot testen for alternerende rekker må jo da bli at det siste kravet der (om avtagende ledd) ikke er oppfylt. Hvis leddene var avtagende ville vi for n odde ha at $(-a_n > a_{n+1})$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+1},$$

eller

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Dette kan du teste at ikke er tilfelle ved å sette inn et par verdier av n (for eksempel $n = 5$). Alternativt kan du begrunne dette ved at leddene $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ vil være mye større enn $\frac{1}{n}$, bare n er valgt stor nok.

Oppgave 12.4.1a)

Rekken er betinget konvergent, siden $\sum \frac{1}{n+1}$ divergerer, mens den alternerende rekken konvergerer etter testen for alternerende rekker.

Oppgave 12.4.1b)

Denne er absolutt konvergent: Sammenlign den positive rekken $\frac{1}{n^2+4}$ med $\frac{1}{n^2}$ (som jo konvergerer).

Oppgave 12.4.1c)

Betinget konvergent, siden $\sum \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergerer (sammenlign med den divergente $\sum \frac{1}{n}$), og $\sum (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergerer (alle kravene i testen for en alternerende rekke er oppfylt).

Oppgave 12.4.3 a)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a|$. Fra forholdstesten for generelle rekker følger det da at rekken divergerer hvis $|a| > 1$, konvergerer (absolutt)hvis $|a| < 1$. For $a = -1$ ser vi at rekken konvergerer. For $a = 1$ ser vi at den divergerer.

Oppgave 12.4.3d)

Når $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ vil $|1 - a^2| \leq 1$. Forholdstesten vil da gi at rekka konvergerer. Hvis $|a| > \sqrt{2}$ vil $|1 - a^2| > 1$, og samme testen gir at rekka divergerer. Når $a = \sqrt{2}, a = -\sqrt{2}, a = 0$ divergerer rekka på grunn av divergenstesten.

Oppgave 12.4.6

Vi bruker grensesammenligningstesten på de positive rekkene $|a_n|$ og $\frac{|a_n|}{|1+a_n|}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|/(|1+a_n|)}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+a_n|} = 1,$$

Hvor vi har brukt at $a_n \to 0$ på grunn av divergenstesten. Dermed konvergerer også $\frac{a_n}{1+a_n}$ absolutt.

Oppgave 12.6.1 a)

Forholdstesten gir at rekken konvergerer absolutt for $|x-2| < 1$, og divergerer hvis $|x-2| > 1$. Den divergerer hvis $|x-2| = 1$, slik at konvergensintervallet blir $(1,3)$.

Oppgave 12.6.1 b)

Forholdstesten igjen gir at rekken konvergerer for $|x| < 3$, divergerer for $|x| > 3$. For $|x| = 3$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $(-3,3)$.

Oppgave 12.6.1 c)

Forholdstesten gir konvergens for $|2x-1| < 1$, dvs. for $x \in (0,1)$. Det er fort gjort å sjekke at rekken divergerer i endepunktene av dette intervallet, slik at konvergensintervallet blir $(0,1)$.

Oppgave 12.6.1 d)

Forholdstesten gir konvergens for $|x+1| < 1$, dvs. for $x \in (-2,0)$. For $x = -2$ ser vi vi får en alternerende rekke, som oppfyller kravene i testen for konvergens av alternerende rekker. For $x = 0$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $[-2,0)$.

Oppgave 12.6.1e)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}|x-1|.$$

Rekka konvergerer derfor i $(-3,5)$. Ved sammenligning med rekka $\sum \frac{1}{n^2}$ ser vi at rekka også konvergerer i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-3,5]$.

Oppgave 12.6.1f)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/(n+1))}{\sin(1/n)}|x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}\cos(1/(n+1))}{-\frac{1}{n^2}\cos(1/n)} = |x|.$$

Vi ser derfor at rekke konvergerer for $|x| < 1$. Rekka konvergerer ikke for $x = 1$, som kan sees ved å sammenligne med rekken $\sum \frac{1}{n}$. Rekka konvergerer betinget for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. Konvergensområdet blir derfor $[-1,1)$.

Oppgave 12.6.1 g)

Forholdstesten gir

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2 x}{(2n+2)(2n+1)} \right| \to \left| \frac{x}{4} \right|.$$

Vi ser derfor at rekken konvergerer for $|x| < 4$, og divergerer for $|x| > 4$. Det er fort gjort å sjekke at $|a_n| > 1$ når $|x| = 4$, slik at rekken er divergent for $|x| = 4$. Konvergensintervallet blir derfor $(-4,4)$.

Oppgave 12.6.1h)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 7^{1/\sqrt{n}}|2x| = |2x|.$$

Rekka konvergerer derfor i intervallet $(-1/2, 1/2)$. Det er klart at rekka divergerer i endepunktene på grunn av divergenstesten, slik at hele konvergensintervallet også er $(-1/2, 1/2)$.