4.10/11 : Egenvektorer og egenverdier

eks. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \end{pmatrix}$ stygt behandlet

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for matrisen $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$ med tilhorende egenverdi 10. $\square$

Definisjon

En vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ i $\mathbb{R}^n$ kalles en egenvektor for $(n \times n)$-matrisen A hvis det finnes et tall $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Tallet λ kalles egenverdien tilhørende $\vec{x}$.

Hvordan finne egenverdier og egenvektorer til en gitt matrise A

- Sett opp $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, og skriv om til et homogent likningssystem (kun nuller på høyre side). Dette har løsninger $\vec{x} \neq \vec{0}$ hvis determinanten er 0. Slik finnes egenverdiene λ.
- Finn egenvektorer til hver λ ved å sette opp $A\vec{x} = \lambda x$ igjen.

eks. 1 Finne egenverdier og egenvektorer til $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Egenverdier

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} 8x + 3y = \lambda x \\ 0x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8-\lambda)x + 3y = 0 \\ 0x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \text{(homogent)}$$

Vi får løsninger $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kun hvis

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dvs.} \quad (8-\lambda)(2-\lambda) - 0 = 0, \quad \text{dvs.} \quad \lambda = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 8x + 3y = 2x \\ 0x + 2y = 2y \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} 6x + 3y = 0 & \text{I} \\ 0 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

I sier $y = -2x$

II sier ikke noe

Løsn. $\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix}$ $\quad a \neq 0$

Test: $a = 5$ $\quad \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ ok

Egenvektorer til $\lambda_2 = 8$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 8x + 3y = 8x \\ 0x + 2y = 8y \end{cases}$$

dvs. $\begin{cases} 3y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$ (Begge sier $y = 0$) Løsn. $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b \neq 0$

eks. 2 Finne egenverdier og egenvektorer til $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Egenverdier

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} 0x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \lambda x \\ x = \lambda y \\ 0x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \lambda z \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} -\lambda x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x - \lambda y + 0z = 0 \\ 0x + \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{gir} \quad -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\lambda + \cancel{\frac{1}{4}} = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Så $\lambda = 0$ eller $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$, dvs. $\lambda = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Egenverdier: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

Egenvektorer til $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ (eksempel)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}x & \text{I} \\ x = -\frac{1}{2}y & \text{II} \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z & \text{III} \end{cases}$$

III sier $y = -2z$

II sier $x = -\frac{1}{2}y$, så totalt $x = z$

I er da automatisk oppfylt

Løsn. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}}}$ $z \neq 0$

Matlab: $[u, v] = \text{eig}(A)$, $A = \text{sym}([0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2};\ 1\ 0\ 0;\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}])$

Praktiske anvendelser (4.11)

eks. Ma1110, 300 studenter

x_n: Antall som leser på dag n

y_n: — " — sover — " —

$n = 0, 1, 2, \ldots$

- Hvis en student leser i dag, sover vedkommende i morgen
- — " — sover i dag, er sannsynligheten 50 % for at vedkommende sover i morgen også, og 50% for at vedkommende da leser.

a) Sett opp overgangsmatrisen A slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Løsning

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{leser på dag } n+1) = \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = (\text{sover} \ -\text{"}-\ ) = x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}$$

Så: $\begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}$ dvs. $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$

b) Finn egenverdier og egenvektorer for A

Løsning (vi dropper)

$\lambda_1 = 1$ med egenvektorer $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ — " — $\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$

c) Første dag $(n=0)$ sover alle. Finn tilstandsvektoren $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ved tid $t=n$.

Løsning

Skriver startvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for A:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

gir $\begin{cases} a + b = 0 & \text{I} \\ 2a - b = 300 & \text{II} \end{cases}$ I sier $b = -a$

II sier da $2a + a = 300$, $a = 100$

Så $b = -100$. Konklusjon:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix}$$ (Stemmer!)

Da fås:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix} \right]$$

$$= A^n \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + A^n \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

egenvektorer

$$= 1^n \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 200 + 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}}$$

Ymse teori for egenvektorer (4.10)

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

kalles det karakteristiske polynomet til $(n \times n)$-matrisen A.
Røttene til $P_A(\lambda)$ er egenverdiene til A.

Setning 4.10.4

Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er egenvektorer for en $(n \times n)$-matrise med forskjellige egenverdier, så er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lineært uavhengige

Teorem 4.10.10 (Spektralteoremet)

Hvis A er en symmetrisk $(n \times n)$-matrise (dvs. $A = A^T$), så er alle egenverdiene til A reelle, og det fins en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A. (Dvs. en basis bestående av egenvektorer med lengde 1 som står normalt på hverandre (skalarprodukt 0)).

Diagonalisering av matriser (setning 4.10.12/14)

Anta at A er en $(n \times n)$-matrise med en basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ av egenvektorer, med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\vec{v}_1} & \cdots & \boxed{\vec{v}_n} \end{pmatrix}$$

Da er

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = D, \quad \text{der } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Videre: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Spesialtilfelle (korollar 4.10.13)

Hvis A er symmetrisk og basisen av egenvektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er ortonormal, så er $M^{-1} = M^T$.

eks. (Mat 1110-historien)

Har $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

La $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (søylene er en basis av egenvektorer)

Finner M^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{II} - 2\cdot\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{II}\cdot(-\frac{1}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{I} - \text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad \text{Så } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Så

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Vi har $\det(A) = -\frac{1}{2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ Stemmer!

$\square$