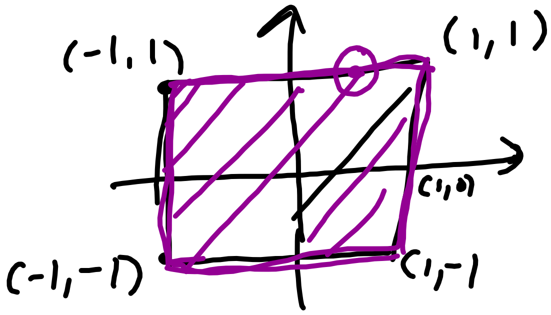
5.1

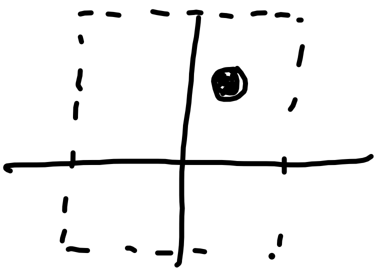
1)

a) $\{(x,y) \mid |x| \leq 1 \text{ og } |y| \leq 1\}$



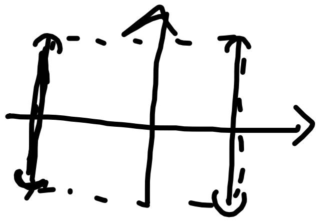
Randpunkten er med Mengden er lukket

b) $\{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$



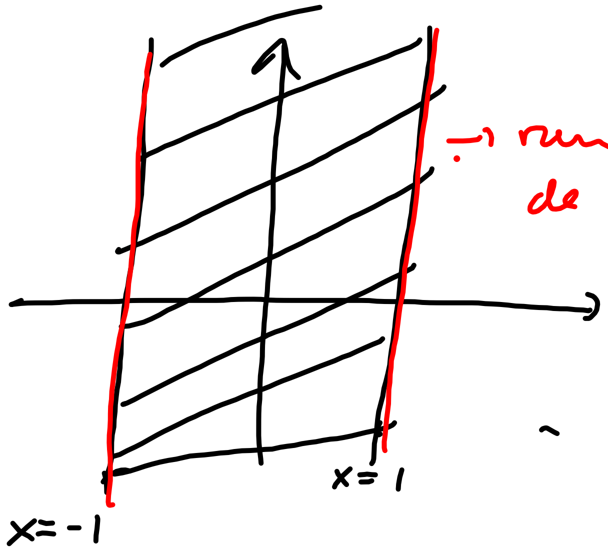
Alle punkten er indre punkten. Mengden er åpen.

c) $\{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| < 1\}$. Noen randpunkten er med andre ikke



Mengden er ingen av åpen eller lukket

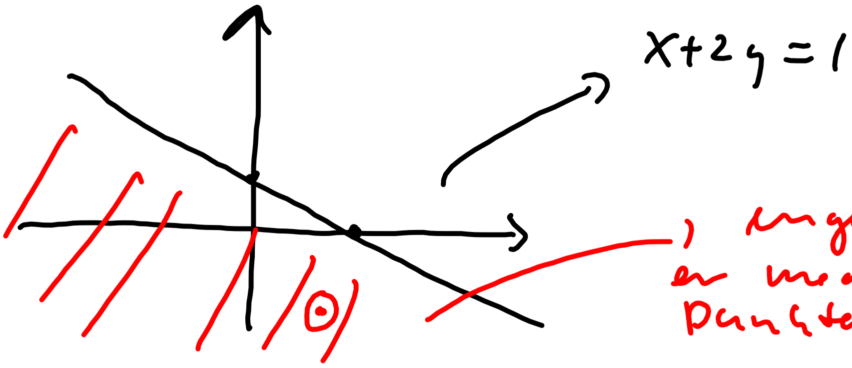
d) $\{(x,y) \mid |x| \le 1\}$



→ randpunkter de er med.

Mengden er lukket.

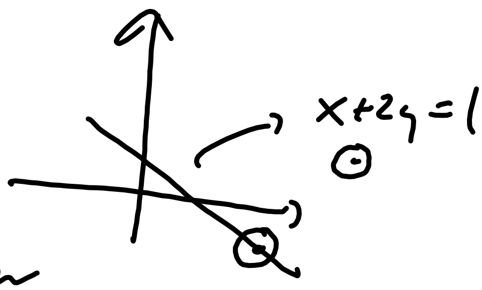
e) $\{(x,y) \mid x+2y<1\}$



→ Ingen randpunkter er med. Alle punkter er indre

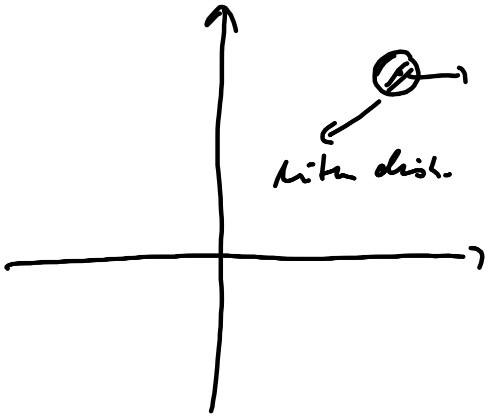
Mengden er åpen.

f) $\{(x,y) \mid x+2y=1\}$



Alle punkter i mengden er randpunkter. Det er ikke andre randpunkter. Mengden er lukket.

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ og } y \text{ er rasjonale}\}$



inneholder punkter (x,y) der både x og y er rasjonal

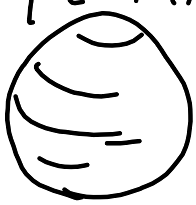
liten disk.

$\mathbb{R}^2$ og punkter (u,v) der hverken u eller v er rasjonal

Randpunktene til mengden er <u>hele</u> $\mathbb{R}^2$

Mengden er hverken åpen eller lukket.

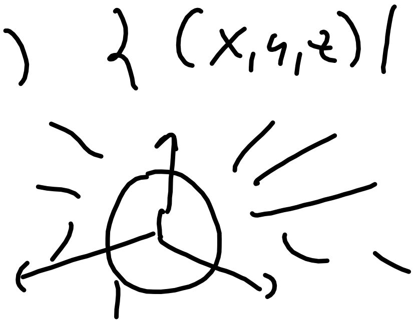
h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1\}$



Ball med sentrum $(0,0,0)$ og radius 1

Randpunkten $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ er ikke med. Derfor er mengden åpen.

i) $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$



Det som ligger utenfor kula i h)

Randpunkten $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ er med.

Mengden er lukket.

5.1. Har gitt:

4) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{b}$

Skal vise $\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

Hint: Vis først at

$$\left| |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \right| \leq |\vec{x}_n - \vec{b}|$$

$$|\vec{x}_n - \vec{a}| = |\vec{x}_n - \vec{b} + \vec{b} - \vec{a}|$$

$$\leq |\vec{x}_n - \vec{b}| + |\vec{b} - \vec{a}|$$

$$\Rightarrow |\vec{x}_n - \vec{b}| \geq |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \quad (1)$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| \leq |\vec{b} - \vec{x}_n| + |\vec{x}_n - \vec{a}|$$

$$\Rightarrow |\vec{x}_n - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{x}_n| \geq |\vec{b} - \vec{a}| - |\vec{x}_n - \vec{a}| \quad (2)$$

$$1 \,\&\, 2 \Rightarrow |\vec{x}_n - \vec{b}| \geq \left| |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \right|$$

La $\varepsilon > 0$ siden $\vec{x}_n \to \vec{b}$ fins N

s.a. $|\vec{x}_n - \vec{b}| < \varepsilon$ når $n \geq N$

Da får $\left| |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \right| < \varepsilon$ når

$n \geq N$. Dvs. $|\vec{x}_n - \vec{a}| \to |\vec{b} - \vec{a}|$

9) a) A $m \times n$ matrise

$\{\vec{x}_n\}$ følge i $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_n \to \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

skal vise $A\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{0}$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_m \end{pmatrix}$ der $A_1, A_2, \ldots, A_m$

er radene i A. $A\vec{x}_n =$

$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot \vec{x}_n \\ A_2 \cdot \vec{x}_n \\ \vdots \\ A_m \cdot \vec{x}_n \end{pmatrix}$

5.1.4 (iv) $\Rightarrow$ $A_1 \cdot \vec{x}_n \to A_1 \cdot \vec{0} = 0$

, $\vec{A}_2 \cdot \vec{x}_n \to \vec{A}_2 \cdot \vec{0} = 0$ osv.

5.1.5 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} A_1 \cdot \vec{x}_n \\ A_m \cdot \vec{x}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

b) Antar $B^{m \times m}$ er invertibel og $\{\vec{x}_n\}$ følg slik at $B\vec{x}_n \to \vec{0}$, da vil $\vec{x}_n \to \vec{0}$

Bevis Sett $\vec{y}_n = B\vec{x}_n$, vet at $\vec{y}_n \to \vec{0}$.

$$\vec{x}_n = B^{-1}\vec{y}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{0} \text{ fra punkt a)}$$

c) C ikke invertbar. Skal vise at det fins $\vec{x}_n$ s.a. $\vec{x}_n \not\to \vec{0}$. mens at $C\vec{x}_n \to \vec{0}$.

Vet at når C ikke er invertbar så fins løsningen av $C\vec{x} = \vec{0}$ der $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Kan da sette $\vec{x}_n = \vec{x}$ for alle n

$$\vec{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \neq \vec{0}.$$

5.2 1)

Setning 5.2.2

Hvis $\vec{x}_n \to \vec{x}$ og $\vec{x}_{n_k}$ er delfølge

så vil $\vec{x}_{n_k} \to \vec{x}$.

La $\varepsilon > 0$, fins $N > 0$ s.a.

$|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

Har $n_1 < n_2 < n_3 < \quad < n_k < n_{k+1} < \cdots$

må ha $n_k \geq k$. så når $k \geq N$

er $n_k \geq N$ og vi har $|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \varepsilon$

Dette viser at $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$.

5.2

3) Skal vise $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$

I_n lukket intervall med

$$I_n \supset I_{n+1} \text{ for alle } n.$$

og $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Da fins nøyaktig ett tall x s.a. $x \in I_n$ for alle n

dvs. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

$$I_n = [a_n, b_n] \;, \quad I_{n+1} \subset I_n$$

må ha $\quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

Dette gir $\quad a_1 \leq a_2 \leq \cdot \leq a_n \leq b_n \leq \quad \leq b_1$

$\{a_n\}$ er en voksende følge oppad begrenset av f.eks. b_1. Fra kalkulus vet vi at $\{a_n\}$ er konvergent.

Fins x s.a. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Det klart at $a_n \leq x$ for alle n.

Videre har vi at

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) = \overset{\nearrow x}{a_n} + \underset{\downarrow 0}{\ell(I_n)} \to x$$

Så b_n konvergerer mot x.

Videre er $\{b_n\}$ en avtagende følge

Da må $x \leq b_n$ for alle n.

Så vi har $a_n \leq x \leq b_n$ for alle n

så $x \in [a_n, b_n] = I_n$ for alle n.

Viser éndydighet av slik x

La $y \neq x$. Anta først $y < x$

siden $a_n \to x$ så må $y < a_n$

når n er stor, dvs. $y \in [a_n, b_n]$

når n er stor. ~~Ti~~ Tilfelle $y > x$

blir på samme måte ved å bruke

at $b_n \to x$

5.3

1) $f(x) = x^2$. Skal vise

at f ikke er uniformt kontinuerlig

Bevis

La $\varepsilon = 1$, la $\delta > 0$

$x = \frac{1}{\delta}$, $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, har da $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y||x+y| =$

$= \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2}\,\frac{4+\delta^2}{2\delta} = \frac{4+\delta^2}{4} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$

Betyr at for $\varepsilon = 1$ og for enhver δ

så fins x, y (avhengig av δ) slik at $|x-y| < \delta$

men $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Dvs. f ikke er

uniformt kontinuerlig.

3) $A \subset \mathbb{R}^m$

$f: A \to \mathbb{R}^m$. Anta det fins K slik at $|f(\vec{u})-f(\vec{v})| \le K|\vec{u}-\vec{v}|$

<u>Bevis</u>

La $\varepsilon > 0$, kan anta at $K > 0$.

velg $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, la $|\vec{u}-\vec{v}| < \delta$

da er $|f(\vec{u})-f(\vec{v})| \le K|\vec{u}-\vec{v}|$

$\le K\delta = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

5.4

3) x_n, y_n befolkning i to land i år n.

$$x_{n+1} = 1.1 x_n + 0.001 y_n - 0.5$$

$$y_{n+1} = 0.95 y_n + 0.0002 x_n + 0.2$$

$x_1 = 50, \ y_1 = 8$ skal skrive MATLAB program

5) x_n, y_n insekts populasjoner

$$x_{n+1} = 2.2 x_n (1 - x_n) + 0.01 x_n y_n$$

$$y_{n+1} = 3.1 y_n (1 - y_n) - 0.02 x_n y_n$$