Løsningsforslag til eksamen i MAT1110, 12/6-09

Oppgave 1: De partiellderiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 10y + 4$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi ligningssystemet

$$2x + 2y = 0 \quad \text{og} \quad 2x + 10y + 4 = 0$$

Fra den første ligningen får vi $x = -y$ som innsatt i den andre ligningen gir $-2y + 10y + 4 = 0$, dvs. $y = -\frac{1}{2}$. Siden $x = -y$, har vi også $x = \frac{1}{2}$. Det eneste stajonære punktet er altså $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Vi skal bruke annenderivertesten til å bestemme hva slags punkt dette er. Vi ser at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 10$$

Dermed blir Hesse-determinanten

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 16$$

Siden $D > 0$ og $A > 0$, forteller annenderiverttesten oss at $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ er et lokalt minimumspunkt.

Oppgave 2: Legg merke til at $\mathcal{C}$ er en lukket kurve (en sirkel). Greens teorem forteller oss at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R (2xy - 2xy)\, dxdy = 0$$

Like lett er det å observere at $\mathbf{F}$ er en gradient: $\mathbf{F}(x,y) = \nabla \phi(x,y)$ der $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$. Det er også greit å regne ut linjeintegralet på vanlig måte.

Oppgave 3: Bruker først forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n+2}} |x-2| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} |x-2| = |x-2|$$

Dette gir konvergens for $|x-2|<1$ (dvs. for $1<x<3$) og divergens for $|x-2|>2$. Vi må sjekke endepunktene $x=1$ og $x=3$ separat:

Endepunktet $x=1$: Rekken blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ som konvergerer (alternerende rekke der absoluttverdien til leddene avtar mot 0).

Endepunktet $x=3$: Rekken blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ som divergerer ved sammenligning med den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 > 0$$

Konvergensintervallet er dermed $[1,3)$.

Oppgave 4: a) Vi har skjæring mellom flatene når

$$4 - x^2 - y^2 = 2x - 4y$$

Samler vi alle leddene på samme side og fullfører kvadratene, får vi de ekvivalente ligningene

$$x^2+2x+y^2-4y = 4 \iff x^2+2x+1+y^2-4y+4 = 4+1+4 \iff (x+1)^2+(y-2)^2 = 3^2$$

som fremstiller en sirkel med sentrum i $(-1,2)$ og radius 3. Området vårt ligger over den tilsvarende sirkelskiven A og er avgrenset ovenfra av paraboloiden $z = 4-x^2-y^2$ og nedenfra av planet $z = 2x-4y$ (lag en tegning). Volumet er dermed gitt ved

$$V = \iiint_S 1 \, dxdydz = \iint_A \left[\int_{2x-4y}^{4-x^2-y^2} 1 \, dz \right] dxdy =$$

$$= \iint_A \left(4 - x^2 - y^2 - 2x + 4y\right) \, dxdy = \iint_A \left(4 - x^2 - 2x - y^2 + 4y\right) \, dxdy$$

der A altså er sirkelskiven med sentrum i $(-1,2)$ og radius 3.

b) Fullfører vi kvadratene inni integranden, får vi

$$V = \iint_A \left(9 - (x+1)^2 - (y-2)^2\right) \, dxdy$$

(dette er ikke nødvendig, men gir lettere regninger videre). Innfører vi nå polarkoordinater med sentrum i $(-1,2)$, får vi

$$x = -1 + r\cos\theta \qquad y = 2 + r\sin\theta$$

og Jacobi-determinant r. Dermed er

$$V = \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} (9 - r^2) r \, d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^3 (9r - r^3) \, dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) = \frac{81\pi}{2}$$

Oppgave 5:
a) Vi radreduserer den utvidede matrisen til ligningssystemet:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{I \Leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{II+(-3)I \\ III+4I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & -18 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{18}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z kan velges fritt, mens x og y er pivotvariable som må beregnes. Setter vi inn variablene igjen (og neglisjerer den trivielle, nederste ligningen), får vi ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + 4y - 5z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen får vi $y = z$ som innsatt i den øverste gir $x = z$. Den generelle løsningen er altså $x = y = z$, der z er et fritt valgt tall i $\mathbb{R}$.

b) Det er nok å vise at det finnes en egenvektor med egenverdi 1, dvs. at det finnes en ikke-null løsning $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ av ligningssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Setter vi inn, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0.6x + 0.2y + 0.2z &= x \\ 0.3x + 0.4y + 0.3z &= y \\ 0.1x + 0.4y + 0.5z &= z \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet er ekvivalent med det vi hadde i punkt a) og har derfor løsningene $x = y = z$. Velger vi $z = 1$, har vi funnet egenvektoren

$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Fra MATLAB-kjøringen ser vi at $\begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 0.4 og at $\begin{pmatrix} 0 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 0.1. Vi kan reskalere disse egenvektorene til $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

For å skrive $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av basisvektorene, må vi finne tall x, y, z slik at

$$\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$$

dvs. slik at

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette er et lineært ligningssystem med løsninger $x = 40$, $y = 80$ og $z = 40$. Altså er

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 80 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 40 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Dersom x_n, y_n, z_n er antall tilhengere i hver by etter n uker, er ifølge oppgaveteksten

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.6x_n + 0.2y_n + 0.2z_n \\ y_{n+1} &= 0.3x_n + 0.4y_n + 0.3z_n \\ z_{n+1} &= 0.1x_n + 0.4y_n + 0.5z_n \end{aligned}$$

Setter vi $\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, kan denne ligningen skrives

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n$$

Dermed er $\mathbf{u}_n = A^n\mathbf{u}_0$, der $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (husk at alle tilhengerne startet i X). Bruker vi lineærkombinasjonen fra forrige punkt, får vi dermed

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 40A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 80A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 40A^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 40 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 80 \cdot 0.4^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 40 \cdot 0.1^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som gir antall tilhengere i de forskjellige byene etter n uker. Når $n \to \infty$, vil $0.4^n \to 0$ og $0.1^n \to 0$, så

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Fordelingen nærmer seg altså en likevektstilstand der det er like mange tilhengere i hver by.

Oppgave 6: Definer $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Da er $h(x, y) = f(\mathbf{G}(x, y))$, og ifølge kjerneregelen er

$$h'(x, y) = f'(\mathbf{G}(x, y))\mathbf{G}'(x, y)$$

Siden $h'(x, y) = \nabla h(x, y)$, $f'(x, y) = \nabla f(x, y)$ og $\mathbf{G}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, får vi formelen

$$\nabla h(x, y) = \nabla f(u(x, y), v(x, y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Anta at u og v er funksjonelt avhengige, dvs. at $f(u(x, y), v(x, y)) = 0$ der $\nabla f(u, v) \neq \mathbf{0}$ for alle u, v. Dermed er $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ konstant lik null, og formelen ovenfor blir til

$$\mathbf{0} = \nabla f(u(x, y), v(x, y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Dersom matrisen $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ er inverterbar, kan vi gange ligningen ovenfor fra høyre med $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}^{-1}$ og få

$$\mathbf{0} = \nabla f(u(x,y), v(x,y))$$

Dette er umulig siden $\nabla f(u,v) \neq \mathbf{0}$ per antagelse. Følgelig må $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ være singulær (ikke-inverterbar), og det betyr at determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}$$

er lik null.