4.6 Lineærkombinasjoner og basiser

Vektoren $\vec{b}$ kalles en lineærkombinasjon av vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ hvis det fins tall $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ slik at

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

eks. $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

fordi $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\square$

eks. Skriv $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Løsn. Må finne x, y og z slik

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

altså

$$\begin{cases} x + 0y + 7z = 8 \\ 2x + 8y + 0z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

(Stopper, for vi har redusert dette til et kjent problem)
(Løs likningssystemet)

Definisjon

Med spennet $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ menes mengden av alle vektorer $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ som er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

- Hvis $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$, må $n \geq m$.

Definisjon 4.6.5

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ kalles lineært uavhengige vektorer hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte. Ellers kalles de lineært avhengige.

Setning 4.6.6/4.6.7

Følgende er ekvivalent:

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige

(ii) En lineærkombinasjon $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ er lik $\vec{0}$ bare dersom alle koeffisientene x_i er lik 0.

(iii) Matrisen $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ med $\vec{a}_i$ som søyler er radekvivant med en trappematrise D der alle søylene er pivot-søyler

Bevis (i) $\Rightarrow$ (ii)

Vi har $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + \dots + 0\vec{a}_n$.

Ved unikhet (entydighet, def. 4.6.5) følger at hvis

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

så er $x_1 = \dots = x_n = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Fra (ii) følger at likningssystemet

$$\begin{pmatrix} \boxed{\vec{a}_1} & \cdots & \boxed{\vec{a}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

kun har løsninger $x_1 = \dots = x_n = 0$. Da må matrisen $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ være radekvivalent med en trappematrise der alle søyler er pivotsøyler.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Fra (iii) følger at

$$\begin{pmatrix} \boxed{\vec{a}_1} & \cdots & \boxed{\vec{a}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

har høyst én løsning for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

$\square$

Hvordan redusere en gitt samling $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ av vektorer til en samling lineært uavhengige vektorer?

→ Radreduser $\left(\boxed{\vec{a}_1} \cdots \boxed{\vec{a}_n} \right)$ og kast vektorene som ikke blir forvandlet til pivot-søyler. Se eks. 4.6.11. □

Definisjon 4.6.12

En basis for $\mathbb{R}^n$ er en lineært uavhengig samling av vektorer som utspenner hele $\mathbb{R}^n$, dvs. $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^n$.

Hvordan utvide en samling $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ av lineært uavhengige vektorer til en basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ for $\mathbb{R}^m$, der $m > n$.

→ Radreduser $\left(\boxed{\vec{a}_1} \cdots \boxed{\vec{a}_n} \right)$ til trappeform

Utvid så til en kvadratisk matrise ved å putte inn søyler slik at alle rader får et pivot-element.
Kjør så radoperasjonene du gjorde baklengs, og bruk de m søylevektorene du da ender opp med.

eks. La oss si at vi etter radreduksjon ender opp med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(da hadde vi 3 vektorer i $\mathbb{R}^4$)
$(n=3)$ $(m=4)$

Vi putter inn en søyle slik at alle rader får et pivot-element:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ny

Kjører så alle radoperasjonene baklengs.

(se eks. 4.6.16) □

4.8 Elementære matriser

... er matriser som fremkommer ved å gjøre <u>én</u> radoperasjon på identitetsmatrisen. Til hver radoperasjon hører altså en unik elementær matrise.

<u>eks.</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er den elementære matrisen til radoperasjonen

$$\mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I}$$

<u>Setning 4.8.2</u>

Å gjøre en radoperasjon på en kvadratisk matrise tilsvarer å gange matrisen fra venstre med den tilhørende elementære matrisen E.

<u>eks.</u>

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 3 & 5 & 19 \\ & & & 7 & 17 & 9 \\ & & & 11 & 13 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 19 \\ 2 & 1 & 0 & 13 & 27 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 13 & 5 \end{array}$$

($\mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I}$ radoperasjon her)

Alle elementære matriser er inverterbare, fordi alle radoperasjoner kan reverseres.

Setning 4.8.4

Enhver $(n \times n)$-matrise kan skrives som et produkt

$$A = \underbrace{E_1 E_2 \cdots E_k}_{\text{elementære}} B \quad , \text{ der } B \text{ er redusert trappeform til } A$$

Hvis A er inverterbar er B identitetsmatrisen. Da er

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$$

Bevis Du kan finne E-ene ved å reversere radoperasjonene som gjorde A om til B. Se eksempel. $\square$

eks.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{II} + (-2)\text{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{II} \cdot (-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{I} + \text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baklengse radoperasjoner på $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

I - II $\quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

II $\cdot (-2)$ $\quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

II + 2 $\cdot$ I $\quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

I $\leftrightarrow$ II $\quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sjekk:

		1	0
		0	1
1	-1	1	-1
0	1	0	1
1	0	1	-1
0	-2	0	-2
1	0	1	-1
2	1	2	-4
0	1	2	-4
1	0	1	-1

A

stemmer

null effekt

Så $$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. $$A = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4$$