MAT1110: Obligatorisk oppgave 1, V-2015

Innlevering: Innleveringsfristen er torsdag 19. februar 2015, kl.14.30, og innleveringsstedet er 7. etasje i Niels Nenrik Abels hus. Oppgaven skal leveres med en offisiell forside som du finner her:

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/obligforside.pdf

Se for øvrig

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart – besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%.

Alle delspørsmål (punktene 1a), 1b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Er det et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatet derfra i resten av besvarelsen. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har vist at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Alle svar skal begrunnes. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du forklare hvilke kommandoer og rutiner du har brukt. Det er anledning til å bruke Python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende Python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med Python-spørsmål.

Oppgave 1: I denne oppgaven er $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksjonen

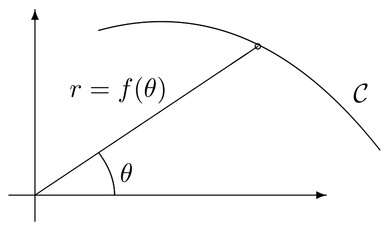
$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

a) Finn lineariseringen $T_{\mathbf{a}}$ til f i punktet $\mathbf{a} = (1, 1)$. Hva slags geometrisk objekt er grafen til $T_{\mathbf{a}}$?

b) Bruk MATLAB til å tegne f og $T_{\mathbf{a}}$ på samme figur. Bruk vinduet $(x, y) \in [-1, 3] \times [-1, 3]$. Vri på figuren slik at du ser grafene best mulig.

c) Gjenta plottingen med mindre vinduer slik at man kan se hvordan $T_{\mathbf{a}}$ tilnærmer f nær $\mathbf{a}$.

Oppgave 2: I denne oppgaven skal vi se på kurver beskrevet med polarkoordinater. Figuren viser grunnideen: Starter vi origo og går i retningen som danner en vinkel θ med den positive x-aksen, kommer vi til kurven etter å ha gått en avstand $r = f(\theta)$, der $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon.



a) Forklar at kurven har parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\,\mathbf{i} + f(\theta)\sin\theta\,\mathbf{j}, \qquad \theta \in [a, b]$$

b) Anta at f er deriverbar og finn uttrykk for $\mathbf{v}(\theta)$ og $v(\theta)$.

I resten av oppgaven ser vi på kurven $\mathcal{C}$ der $f(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

c) Bruk MATLAB til å lage en tegning av $\mathcal{C}$. Bruk samme enhet på begge akser.

d) Regn ut $\mathbf{v}(\theta)$ og $v(\theta)$.

e) Bruk MATLAB til å plotte $\mathbf{v}(\theta)$ og $v(\theta)$. Bruk samme enhet på begge akser. På plottet til $\mathbf{v}$ skal du skrive på noen θ-verdier og noen piler som viser at du skjønner hvordan kurven gjennomløpes.

f) Vis at lengden til $\mathcal{C}$ kan uttrykkes som

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \cos\theta}}\,d\theta$$

g) Regn ut L.

LYKKE TIL!