Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT1110, våren 2012

Oppgave 1: Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Legg merke til at A er den utvidede matrisen til ligningssystemet. Vi ser at søyle 3 og 4 i den reduserte trappeformen *ikke* er pivotsøyler, og de tilhørende variablene (z og u) i ligningssystemet kan derfor velges fritt. Setter vi inn variablene, ser vi at det opprinnelige ligningssystemet er ekvivalent med

$$\begin{aligned} x + z + 2u &= 0 \\ y - z - 3u &= 1 \\ v &= 2 \end{aligned}$$

Løser vi dette, får vi at $x = -z - 2u$, $y = 1 + z + 3u$, $z = z$, $u = u$ og $v = 2$, der u og z kan velges fritt.

b) Linje 1, 2 og 5 i den reduserte trappeformen er pivotsøyler, og de tilhørende søylene i A er dermed lineært uavhengige (se side 240 i læreboken). Siden det er tre av dem, danner de en basis for $\mathbb{R}^3$. Basisen blir dermed

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(**Bemerkning:** Det er flere andre muligheter, men dette er det enkleste å begrunne ut ifra det vi allerede har gjort.)

Oppgave 2: Vi finner først de partiellderiverte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 10x - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y - 6x \end{aligned}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x^2 + 10x - 6y &= 0 \\ 6y - 6x &= 0 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen ser vi $y = x$, og setter vi dette inn i den øverste, får vi

$$3x^2 + 4x = 0$$

som har løsningene $x = 0$ og $x = -\frac{4}{3}$. De stasjonære punktene er dermed $(0,0)$ og $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

For å finne hva slags type disse punktene er, bruker vi annenderivert-testen. De annenderiverte er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6x + 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 6$$

Punktet $(0,0)$: Her er $D = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 24$. Siden $D > 0$ og $A = 10 > 0$, er dette et lokalt minimum.

Punktet $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$: Her er $D = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -24$. Siden $D < 0$, er dette et sadelpunkt.

Oppgave 3: a) Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)+1}}{(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} x^2 = x^2$$

Dette gir konvergens når $x^2 < 1$, dvs. for $-1 < x < 1$, og divergens for $|x| > 1$. Endepunktene $x = \pm 1$ må undersøkes separat.

$x = 1$: Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Dette er en alternerede rekke der absolutt-verdien av leddene avtar mot null, og vi har dermed konvergens ifølge testen for alternerende rekker.

$x = -1$: Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Dette er er samme rekke som i forrige punkt, og vi får konvergens også i dette endepunktet.

Konklusjon: Konvergensintervallet er $I = [-1, 1]$.

b) Vi setter $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ for $x \in [-1, 1]$. Planen er å bruke derivasjon til å kvitte seg med nevneren $2n + 1$, men først må vi justere eksponentene ved å gange uttrykket med x slik at vi får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Hvis vi nå deriverer og deretter summerer en geometrisk rekke, får vi

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{når } |x| < 1$$

Integrerer vi på begge sider, ser vi at

$$xS(x) = \arctan x + C$$

for en eller annen konstant C. Setter vi inn for $x = 0$, ser vi at denne konstanten må være 0, dvs.

$$xS(x) = \arctan x$$

Siden rekken åpenbart har summen 1 når $x = 0$, får vi

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{for } x \in [-1, 1], x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Regningene ovenfor gjelder bare når $|x| < 1$, men Abels teorem (*Kalkulus* 12.6.9) sikrer at vi også har likhet i endepunktene.

Oppgave 4: Siden ligningen $z = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ er ekvivalent med $\ln(x^2 + y^2 + z^2) - z = 0$, kan vi bruke implisitt funksjonsteorem med $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) - z$. Legg merke til $x = 1, y = 0, z = 0$ er en løsning av ligningen $f(x, y, z) = 0$. Betingelsen for at det skal finnes en løsningsfunksjon $z = g(x, y)$ definert i en omegn om $(1, 0)$ og med $g(1, 0) = 0$ er at $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) \neq 0$. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} - 1$$

som gir $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = -1 \neq 0$. Dette viser at funksjonen g eksisterer.

De partiellderiverte av g er gitt ved

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

der vi har brukt at $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$

Oppgave 5: Egenverdiene er gitt ved

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Løser vi denne annengradsligningen, får vi

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} =$$

$$= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Vi vet at dersom matrisen har to ulike egenverdier, så finnes det en basis av egenvektorer, og vi må derfor lete etter en matrise med sammenfallende egenverdier, dvs. en der

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

Vi kan ikke sette alle verdiene a, b, c, d lik 0 (for da er alle vektorer egenvektorer med egenverdi 0), så la oss velge $a = 2, d = 0, b = -1, c = 1$ for å få pene tall. Ifølge formelen ovenfor har matrisen da bare den ene egenverdien $\lambda = 1$. En egenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ må tilfredsstille ligningen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{aligned} 2x - y &= x \\ x &= y \end{aligned}$$

Disse ligningene er oppfylt hvis og bare hvis $x = y$. Det betyr at alle egenvektorer er på formen $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Disse er alle lineært avhengige, og det er ikke mulig å finne en basis av egenvektorer.

Oppgave 6: For å finne skjæringen mellom de to flatene, setter vi z-verdiene lik hverandre:

$$-x^2 - 2y^2 = 2x^2 + y^2 + 6x \iff 3x^2 + 6x + 3y^2 = 0$$

$$\iff 3(x^2 + 2x + 1) + 3y^2 = 3 \iff (x+1)^2 + y^2 = 1$$

Dette betyr at projeksjonen av området vi er interessert i på xy-planet er en sirkelskive S om punktet $(-1, 0)$ med radius 1. For å se hvilken av flatene som ligger øverst i dette området, setter vi inn $x = -1, y = 0$, og får henholdsvis $z = -(-1)^2 - 2 \cdot 0^2 = -1$ og $z = 2(-1)^2 + 0^2 + 6 \cdot (-1) = -4$. Dette forteller oss at flaten $z = -x^2 - 2y^2$ ligger øverst, og volumet er dermed gitt ved

$$V = \iint_S \left[\int_{2x^2+y^2+6x}^{-x^2-2y^2} 1 \, dz \right] dxdy = \iint_S -\left(3x^2 + 3y^2 + 6x\right) dxdy$$

Fullfører vi kvadratet i integranden (dette er ikke nødvendig, men gir kanskje litt kortere regninger), får vi

$$V = \iint_S 3\left(1 - (x+1)^2 - y^2\right) dxdy$$

Vi bytter til polarkoordinater med sentrum i $(-1, 0)$, dvs. vi setter $x = -1 + r\cos\theta$, $y = \sin\theta$, og får (husk Jacobi-faktoren r):

$$V = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} 3(1-r^2)r\, d\theta\right] dr = 6\pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 6\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

Oppgave 7: a) Vi ser at $\mathbf{N}(t)$ står normalt på tangentvektoren $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ siden

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{N}(t) = x'(t)(y'(t)) + y'(t)(-x'(t)) = 0$$

Det er derfor naturlig å kalle $\mathbf{N}(t)$ en normalvektor til kurven. En normalvektor kan enten være rettet inn i området A som $\mathcal{C}$ omslutter eller ut av det. Siden $\mathcal{C}$ er positivt orientert, er det lett å overbevise seg om at $\mathbf{N}(t)$ peker ut av området (lag en tegning!).

b) Hvis vi kaller komponentene til $\mathbf{F}$ for P og Q, har vi

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

og

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{N} = \int_a^b (P(\mathbf{r}(t))\mathbf{i} + Q(\mathbf{r}(t))\mathbf{j}) \cdot (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j})dt =$$

$$= \int_a^b \left(P(\mathbf{r}(t))y'(t) - Q(\mathbf{r}(t))x'(t)\right) dt = \int_{\mathcal{C}} -Q\, dx + P\, dy$$

Ved Greens teorem er

$$\int_{\mathcal{C}} -Q\, dx + P\, dy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right) dxdy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$$

og dermed har vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{N} = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$$

Hvis $\mathbf{F} = \nabla f$, er $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ og $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, og vi får

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{N} = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] dxdy = \iint_A \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$$

Er f harmonisk, er det siste integralet åpenbart 0, og vi er ferdig.

Ekstraoppgave 1: (i) Vi ser at

$$\frac{n+2\sqrt{n}}{n^3+2n+3} = \frac{n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)},$$

som viser at leddene oppfører seg omtrent som leddene i den konvergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, og det er derfor naturlig å sammenligne med denne. Vi har

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2\sqrt{n}}{n^3+2n+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} = 1$$

og ifølge grensesammenligningstesten konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2\sqrt{n}}{n^3+2n+3}$.

(ii) Siden arctan er en voksende, kontinuerlig funksjon med en graf som går gjennom origo, avtar tallverdien av leddene mot 0. Siden rekken i tillegg alternerer, konvergerer den ifølge testen for alternerende rekker.

(iii) Når leddene er potenser med eksponenter som vokser med n, er det ofte lurt å bruke rottesten. Vi får

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln\cos\frac{1}{n}}$$

Vi bruker L'Hôpitals regel på eksponenten:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\ln\cos\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{n}}{n^{-2}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}(-\sin\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})}{-2n^{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos(\frac{1}{n})}\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Det betyr at

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$$

som viser at rekken konvergerer.

Ekstraoppgave 2: Kvadratet av avstanden fra punktet (x,y,z) til origo er

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

og det holder å finne mimimum til denne funksjonen under bibetingelsen $g(x,y,z)=0$, der

$$g(x,y,z) = xy-2z+2$$

Vi har

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

og

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -2 \end{pmatrix}$$

Siden $\nabla g \neq \mathbf{0}$, vet vi at minimumspunktet må befinne seg i et punkt der $\nabla f = \lambda \nabla g$ for en konstant λ. Dette gir ligningene

$$2x = \lambda y \tag{1}$$
$$2y = \lambda x \tag{2}$$
$$2z = -2\lambda \tag{3}$$

i tillegg til bibetingelsen

$$xy - 2z + 2 = 0 \tag{4}$$

Fra (3) ser vi at $\lambda = -z$, og setter vi dette inn i (1) og (2), sitter vi igjen med tre ligninger med tre ukjente:

$$2x = -zy \tag{5}$$
$$2y = -zx \tag{6}$$
$$xy - 2z + 2 = 0 \tag{7}$$

Fra (6) ser vi at $y = -\frac{z}{2}x$, og setter vi dette inn i (5), får vi

$$2x = \frac{z^2}{2}x \tag{8}$$

I den siste ligningen må vi enten ha $x = 0$ eller $\frac{z^2}{2} = 2$, dvs. $z = \pm 2$. Vi ser på tilfellene hver for seg:

<u>Tilfellet $x = 0$:</u> Fra (6) ser vi at vi også må ha $y = 0$, og setter vi dette inn i (7), får vi $z = 1$. Vi har dermed funnet et potensielt minimumspunkt $(0, 0, 1)$.

<u>Tilfellet $z = 2$:</u> Fra (5) ser vi at $x = -y$, og setter vi dette inn i (7), får vi ligningen

$$-x^2 - 4 + 2 = 0$$

som åpenbart ikke har en (reell) løsning. Det betyr at vi ikke har noen løsning av ligningssystemet for $z = 2$.

<u>Tilfellet $z = -2$:</u> Fra (5) ser vi at $x = y$, og setter vi dette inn i (7), får vi ligningen

$$x^2 + 4 + 2 = 0$$

som åpenbart ikke har en (reell) løsning. Det betyr at vi ikke har noen løsning av ligningssystemet for $z = 2$.

Eneste kandidat til løsning er derfor $(0, 0, 1)$, og siden det av geometriske grunner må finnes et punkt på kurven $xy - 2z + 2 = 0$ som ligger nærmest origo (tenk igjennom hva dette innebærer!), må $(0, 0, 1)$ være dette punktet.