LH 4.2 Trappeform

$m \times n$ matrise A $\qquad A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{b} \in \mathbb{R}^m \qquad [A \mid b]$ utvidede matrisen

koeffisientm.

→ <u>radoperasjoner</u>

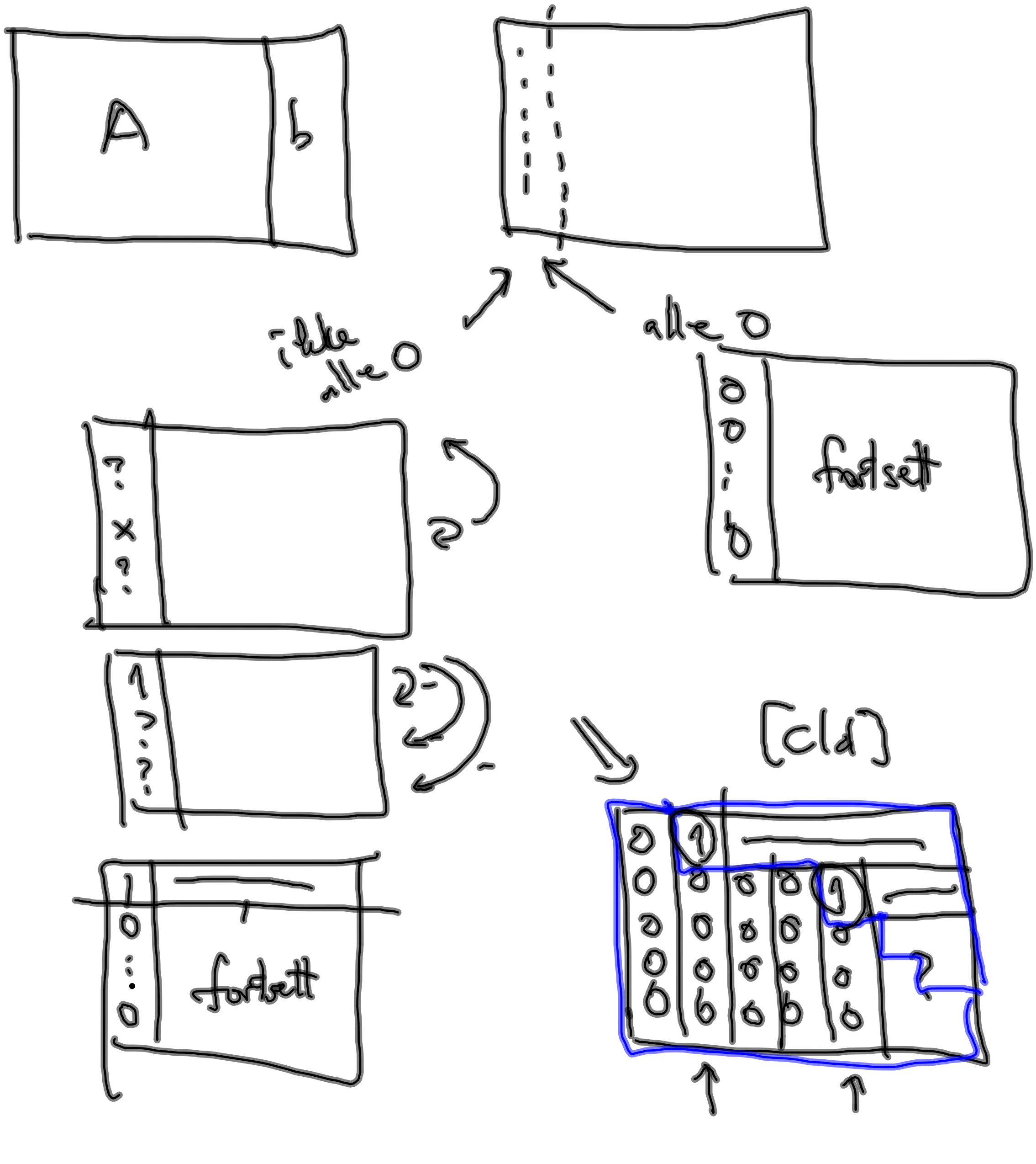
Hvis $[A \mid b]$ er radekvivalent med $[C \mid d]$ så har $A\vec{x} = \vec{b}$ de samme løsningene $\vec{x}$ som $C\vec{x} = \vec{d}$

Gitt $[A \mid b]$ finnes en radekvivalent $[C \mid d]$ på <u>trappeform</u>

* hver rad er enten $[0 \cdots 0]$ eller har en ledende 1'er $[0 \cdots 0\ 1\ ? \cdots ?]$

og

* antall 0'er før de ledende 1'erne er strengt voksende, til vi kommer til 0-radene.


A
b
ikke alle 0
alle 0
fortsett
fortsett
[c|d]

<u>Setning 4.2.4</u> Ser på $C\vec{x} = \vec{d}$ der

$[C|d]$ er på trappeform.

(i) Hvis den siste søylen (d) er en pivotsøyle, så har likningssystemet ingen løsninger.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & C & & d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \uparrow \end{array}$$

<u>Ellers</u>:

(ii) Dersom alle søylene i C er pivotsøyler, så har likningssystemet en entydig løsning.

$$\uparrow\uparrow\cdots\uparrow$$

(iii) Ellers, dvs. hvis ikke alle søylene i C er pivotsøyler, så har systemet ∞ mange løsninger.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & ? & & & & ? \\ 0 & 1 & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}$$

Likningssystemer med samme koeffisientmatrise / venstreside

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$t_i = a + i\frac{b-a}{n}$ h

$x_i = f(t_i)$

$0 \le i \le n$

$\vec{x} = (x_i)_{i=0}^{n}$

$f''(t_i) \approx \frac{1}{h^2} A\vec{x}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad f''(t) = g(t)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{T}} \mathbb{R}^m \ni \vec{b}$$

$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

Gitt A (og $\vec{T}$)

At $Ax = b$ har en eller flere løsninger for hver $b \in \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$\vec{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er surjektiv/på.

<u>Setning 4.2.6</u> La $[A|\cancel{x}]$ være radekvivalent med $[C|\cancel{x}]$ der $[C|\cancel{x}]$ er på trappeform.

Likningen $Ax = b$ har løsninger for alle $b \in \mathbb{R}^m$

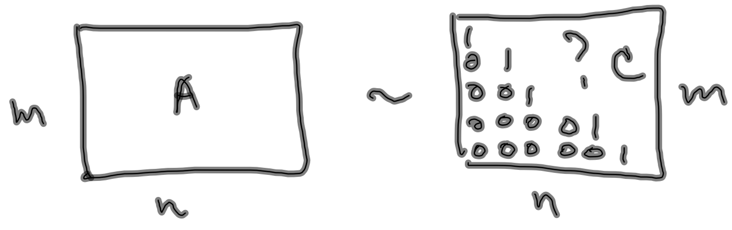
$\Updownarrow$

$Cx = d$ har løsninger for alle $d \in \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

C har et pivotelement i hver rad

$\Downarrow$



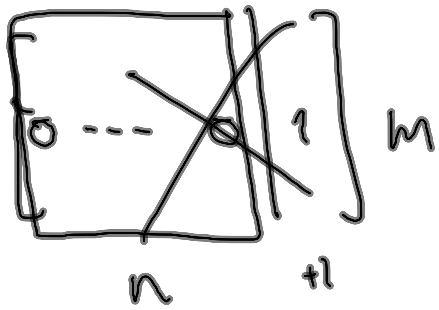
$n \ge m$

Når har $Ax = b$ en entydig løsning for hver $b \in \mathbb{R}^m$?

$A \sim C$ trappeform

<u>Eksistens</u>: må ha ett pivotelement i hver rad i C

<u>Entydighet</u>: må ha ett pivotelement i hver søyle i C



$\Longrightarrow$ $m = n$ A og C er kvadratiske matriser

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & ? \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for hver $b \in \mathbb{R}^m$

hvis og bare hvis

$m = n$ og den radreduserte formen C til A er en øvretriangulær matrise med alle pivotelementene på diagonalen.