5.8

2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$

og f er kontinuerlig

(se trykkfeilslista). f har da et maks. La $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0) > 0$

siden $f(x) \to 0$ når $|x| \to \infty$

så fins K slik at når $|x| > K$

så $f(x) < f(x_0)$. $A = \{x \mid |x| \leq K\}$

Da er A lukket og begrenset

så det fins $a \in A$ slik at

$f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in A$

(ekstremverdisetn.) Må ha $x_0 \in A$

Så hvis $x \notin A$ så er

$f(x) < f(x_0) \leq f(a)$ og om $x \in A$

så altså $f(x) \leq f(a)$. Dvs.

for alle x er $f(x) \leq f(a)$ så a er

et maks.pkt.

5.9

3) Finne stasjonære punkt.
Avgjøre om de er lok. maks. min.
eller sadelpunkter.

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + 2y - 2 = 0 \qquad \text{I}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y + 6 = 0 \qquad \text{II}$$

$\text{I} - 3\,\text{II}$ $\quad 2y - 2 - 12y - 18 = 0$

$-10y = 20, \; y = -2.$

$\text{I} \quad 6x = -2y + 2 = 6, \; x = 1$

$(1,-2)$ stasjonært pkt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$ er $(1,-2)$
et lok. min pkt.

4) $f(x,y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$

Stasjonære punkt:

I $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 10x - 6y = 0$

II $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6x = 0$

II $\Rightarrow$ $x = y$, I $3x^2 + 10x - 6x = 0$

$3x^2 + 4x = 0$

$x = 0, \quad x = -\frac{4}{3}$

Stasjonære punkt.

$(0,0), \quad \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

5.9.4 forts.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+10x-6y\right)$$

$$= 6x+10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(3x^2+10x-6y\right) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6y-6x\right) = 6$$

I $(0,0)$ $D = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 60-36 = 24 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 > 0 \Rightarrow (0,0)$

er lok. minpkt.

I $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ har vi:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 12-36 = -24 < 0$$

$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ blir et

sadelpunkt.

8

a) $f(x,y) = 2x^2y + 4xy - y^2$

stasjonære punkter:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y = 0$ I

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4\cancel{x} - 2y = 0$ II

I $\Rightarrow$ $y = 0$ eller $x = -1$

II & $y = 0$ $\Rightarrow$ $2x(x+2) = 0$, $x = 0$ eller $x = -2$. Så $(0,0)$, $(-2,0)$ er stasjonære punkter. II & $x = -1$, $\Rightarrow -2 - 2y = 0$

$\Rightarrow y = -1$, $(-1,-1)$ er ~~sta~~ også stasjonært punkt.

5.9.8 forts.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy+4y) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(4xy+4y) = 4x+4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2+4x-2y) = -2$$

I $(0,0)$ får vi $D = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$

$(0,0)$ er sadelpunkt.

I $(-2,0)$ får vi $D = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$

så $(-2,0)$ er sadel pkt.

I $(-1,-1)$ $D = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A = -4 < 0$ så $(-1,-1)$ er lok. maks. pkt.

5.9.17

Bedrift. produserer

standard modell utgift 400kr. (per enhet)

luksus —"— 600kr (—"—)

X utsalgspris på s. modell

y —"— l. —"—.

Salg av s. modell $500(y-x)$

—"— l. modell $450\,000+500(x-2y)$

Fortjenesten blir:

$$F(x,y) = 500(y-x)(x-400) +$$

$$+ (450\,000+500(x-2y))(y-600)$$

$$= 10^3(xy - 0.5x^2 - y^2 - 100x + 850y - 27000) =$$

$$= 10^3(-0.5((x-y)^2+y^2) - 100x + 850y - 27000)$$

$(x-y)^2+y^2$ Hvis $|x| > 2|y|$

$$|x-y| \geq ||x|-|y|| \geq \frac{|x|}{2}$$

$$(x-y)^2+y^2 \geq \frac{x^2}{4}+y^2 \geq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

Hvis $|x| \leq 2|y|$

$$y^2 = \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2 \geq \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{8}x^2 \geq \frac{1}{8}(x^2+y^2)$$

Uansett er $(x-y)^2+y^2 \geq \frac{1}{8}(x^2+y^2)$

Betyr at leddet

$10^3 \cdot 0.5(-(x-y)^2-y^2)$ vil dominere de andre leddene i uttrykket for $F(x,y)$

dvs. $\lim\limits_{|(x,y)| \to \infty} F(x,y) = -\infty$. Betyr F må ha et maks der $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$F(x,y) = 10^3(xy - 0.5x^2 - y^2 - 100x + 850y - 27000)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 10^3(y - x - 100) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 10^3(x - 2y + 850) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Løser og får $x = 650,\ y = 750.$

Vi må forut salget ikke skal bli negativ- at $y \geq x$ og $450000 + 500(x-2y) \geq 0$

$(650, 750)$ er maks pkt for $F(x,y)$ når $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, men oppfyller disse ulikhetene, så maks fortjeneste blir da når $\underline{\underline{x = 650,\ y = 750}}$

5.9.10

1 b) $f(x,y) = xy$ när $\underbrace{9x^2+y^2}_{g(x,y)}=18$

Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$

I $\quad y = \lambda 18x$
II $\quad x = \lambda 2y$
III $\quad 9x^2+y^2=18$

I & II
$2y^2\lambda = 18x^2\lambda$
$\lambda \neq 0$, $y^2=9x^2$
$y = \pm 3x$

III $\quad 9x^2+9x^2=18$, $x^2=1$

$\pm(1,3)$, $\pm(-1,3)$

$f(\pm(1,3)) = 3$, $f(\pm(-1,3)) = -3$

max i $\pm(1,3)$ min i $\pm(-1,3)$
3 $\quad$ -3.

5.10.1

c) Mats. min av

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

når $\cancel{2}g(x,y) = 2x-3y+2z = 17$

Kan skiss bi noe mats

Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$

$\underline{I}$ $2x = 2\lambda$ $\quad$ I & $\underline{III} \Rightarrow x = z = \lambda$

$\underline{II}$ $2y = -3\lambda$ $\quad$ II $2y = -3z$

$\underline{III}$ $2z = 2\lambda$ $\quad$ $y = -\frac{3}{2}z = -\frac{3}{2}x$

$\underline{IV}$ $2x-3y+2z = 17$

$2x + \frac{9}{2}x + 2x = \frac{17}{2}x = 17$, $\underline{x = 2}$

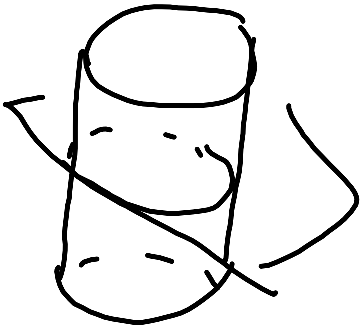
$y = -3$, $z = 2$ $\quad$ $(2,-3,2)$

$f(2,-3,2) = 4+9+4 = \underline{17}$ min.

d) $f(x,y,z) = x+y+z$

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y,z) = x^2+y^2=1 \\ h(x,y,z) = 2x+z=1 \end{array}\right\}$$ ellipse

Skjæring mellom sylinder og et plan.



Lagrange

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla h$$

I $\quad 1 = \lambda_1 2x + \lambda_2 2$

II $\quad 1 = \lambda_1 2y$

III $\quad 1 = \lambda_2$

$$\left|\begin{array}{l} 1 = 2x\lambda_1 + 2 \\ 2\lambda_1 x = -1 \\ 2\lambda_1 y = 1 \end{array}\right.$$

$y = -x, \ \lambda_1 \neq 0$

IV $\quad x^2+y^2=1 \qquad 2x^2=1, \ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

V $\quad 2x+z=1 \qquad y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$z = 1-2x = 1 \mp \sqrt{2}$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right) = 1-\sqrt{2}$ min.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$ max.

2) Skal finne

min av $x^2+y^2+z^2 = f(x,y)$

når $z^2 = 1 - xy$

$g(x,y) = z^2 + xy, \quad g(x,y) = 1$

Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 2x = \lambda y \\ \text{II} & 2y = \lambda x \\ \text{III} & 2z = 2\lambda z \\ \text{IV} & z^2 + xy = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lambda \neq 0$

I & II $2x^2\cancel{\lambda} = 2y^2\lambda$

$x^2 = y^2$

$x = \pm y$

III $\Rightarrow z = 0$ eller $\lambda = 1$

Hvis $\lambda = 1$, gir $2x = y$, $x = \pm y \Rightarrow x = y = 0$

IV $z^2 = 1$, $z = \pm 1$, $(0,0,\pm 1)$

$z = 0 \qquad xy = 1, \ \pm x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ og $y = x$

eller $x = -1, y = -1$

$(1,1,0)$, $(-1,-1,0)$

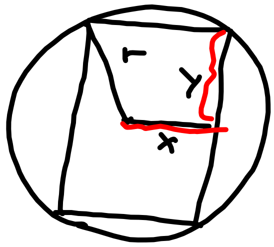
$f(\pm(1,1,0)) = 2, \qquad f(0,0,\pm 1) = 1$

maks 2 i $\pm(1,1,0)$

min 1 i $(0,0,\pm 1)$

12) Skal skjære ut en bjelke

av sylindrisk stokk



tverrsnitt

Bæreevne til bjelke

$$f(x,y) = kxy^2.$$

Skal finne max. Skal ha maks av

f når $x^2+y^2=r^2$ Lagrange

I $\quad ky^2 = 2x\lambda$ $\qquad \lambda=0$ er umulig.

II $\quad 2kxy = 2y\lambda$ $\qquad$ I & II

III $\quad x^2+y^2=r^2$ $\qquad 2ky^3\lambda = 4kx^2\lambda y$

$$y^2 = 2x^2$$

$$y = \sqrt{2}x$$

$$x^2+2x^2=r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{3}, \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{\frac{2}{3}}r$, Maks. bæreevne

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}r\right) = k\frac{2}{3\sqrt{3}}r^3$$