eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot\sqrt{n} + \ln n}{n^2+n+\sin n}$ Konv ?

Går som $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ (konv. p-rekke)

GS-testen, sml med med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\sqrt{n}+\ln n}{n^2+n+\sin n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + n^{3/2}\ln n}{n^2+n+\sin n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin n}{n^2}} = 3$$

$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ (l'Hop), $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{\sin n}{n^2} \to 0$

Ergo konv.

Forholdstesten Gitt rekke $\sum a_n$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \begin{cases} L < 1 \Rightarrow \text{Konv} \\ L > 1 \Rightarrow \text{Div.} \end{cases}$$

Bevis Anta $L < 1$

Velg r slik at $L < r < 1$.

Da fins N slik at for alle $n \geq N$ er

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r, \quad \text{dvs.} \quad |a_{n+1}| < |a_n|\cdot r$$

Altså:

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots$$

$$< |a_N| + |a_N|\cdot r + |a_N|\cdot r^2 + \dots$$

geometrisk $r<1$

$$= \frac{|a_N|}{1-r}$$

Altså konv. ved sml-testen.

Anta $L > 1$

For store nok n har vi da

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1, \quad \text{dvs.} \quad |a_{n+1}| > |a_n|$$

Altså $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ umulig. Så divergens ved div.testen. □

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ Konv? Forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n}$$

$$\boxed{\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1000}{n+1} \to 0, \text{ dvs. konv.} \quad \square$$

Mer generelt: For alle faste tall x har vi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konv., og dermed også $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Rot-testen Gitt rekke $\sum a_n$

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \qquad \begin{cases} L < 1 \Rightarrow \text{Konv} \\ L > 1 \Rightarrow \text{Div} \end{cases}$$

Bevis Anta $L < 1$

Velg r slik at $L < r < 1$.

Da fins N slik at for alle $n \geq N$ er

$$|a_n|^{1/n} < r, \text{ dvs. } |a_n| < r^n$$

Rekken $\sum r^n$ er geometrisk med $r < 1$, så konv.

Dermed konvergerer vår rekke ved sml-testen.

Anta $L > 1$

For store nok n har vi da $|a_n|^{1/n} > 1$, dvs. $|a_n| > 1$.

Dvs. divergens. $\square$

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^n}$ Konv? Rot-testen:

$$|a_n|^{1/n} = \frac{1}{4n+1} \to 0, \text{ dvs. konv.} \quad \square$$

12.3 Alternerende rekker

Alternerende rekke: Annethvert ledd pos. og neg. Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \ldots$$

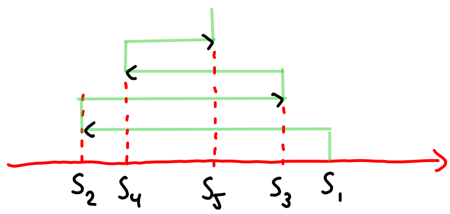
Alternerende rekke-testen Gitt en alt. rekke $\sum a_n$

Hvis $|a_n| > |a_{n+1}| > 0$ for alle n, og

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

konvergerer rekken. Videre: Hvis vi tilnærmer summen av hele rekken med delsummen S_N opp til a_N, er feilen mindre enn $|a_{N+1}|$.

Bevis



S_N: Sum av N første ledd i rekken

(Her er $a_2 < 0$)

Se figur. Bruker kompletthet. □

eks. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ Konv?

Rekken er: $\dfrac{(-1)^0}{0+1} + \dfrac{(-1)^1}{1+1} + \dfrac{(-1)^2}{2+1} + \ldots$

dvs. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

Alt. rekke-testen: Rekken er alternerende, og

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Videre: Med $f(x) = \frac{1}{x+1}$ har vi $f(n) = |a_n|$

Siden f er avtakende på $[0,\infty)$, har vi

$$|a_n| > |a_{n+1}| \quad \text{for alle } n.$$

Altså konv. □

eks. forts. Finn N slik at delsummen opp til ledd N tilnærmer summen av rekken med feil høyst 0,01.

Løsn. $|a_{N+1}| = 0,01$ gir

$$\frac{1}{N+2} = 0,01 \quad \text{dvs.} \quad N = 98 \quad \text{holder}$$

(Summen av rekken er faktisk $\ln 2$. Se senere.)

12.4 Absolutt og betinget konvergens

$\sum a_n$ kalles absolutt konvergent hvis rekken

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots \quad \text{konvergerer}$$

Hvis $\sum a_n$ konvergerer, men ikke er absolutt konvergent, kalles den betinget konvergent

Absolutt konvergens - testen

$$\sum |a_n| \text{ konv } \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.}$$

Bevis Se bok. □

eks. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3} \sin^2 n \cos n}{n^2} \qquad \text{Konv ?}$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+3} \sin^2 n \cdot \cos n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$$

Og $\sum \frac{1}{n^2}$ er en konvergent p-rekke.

Altså konvergerer rekken vår absolutt ved sml-testen.

Ergo konvergerer rekken vår ved abs. konv.-testen. □