The road to wisdom?
Well it's plain &
simple to express

Err and err and err again,
But less and less and less

LH 5:

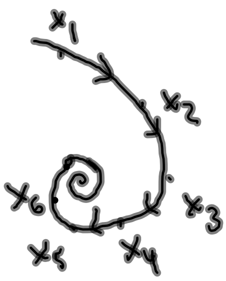
Iterasjon og
Optimering

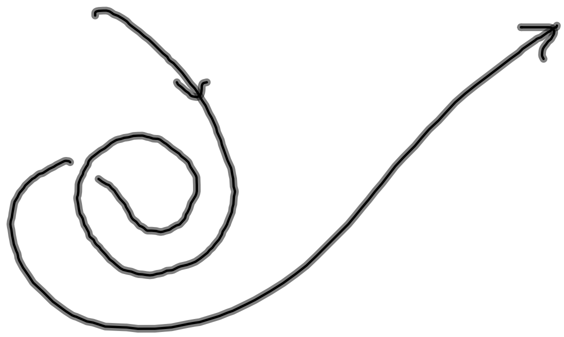
Aksiom: $\mathbb{R}$ er <u>komplett</u>:

Enhver oppad begrenset voksende følge

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le M$$

<u>konvergerer</u> mot en grense.





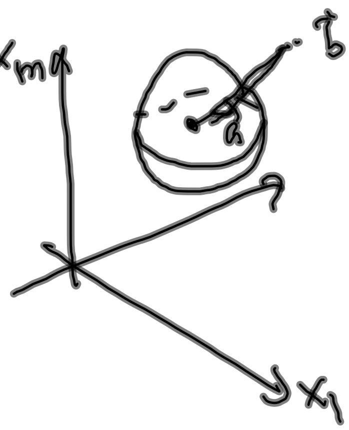
LH 5.1 Litt topologi i $\mathbb{R}^m$

$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in$

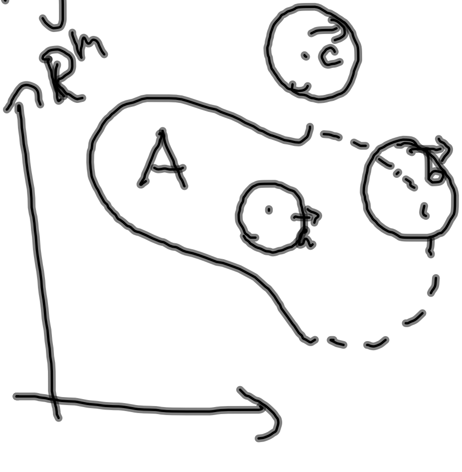
$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_m-a_m)^2}$

$r > 0$



$B(\vec{a}, r) = \underline{\text{åpen ball}}$
$\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid |\vec{b} - \vec{a}| < r\}$

$\overline{B}(\vec{a}, r) = \underline{\text{lukket ball}}$
$\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid |\vec{b} - \vec{a}| \leq r\}$



$\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ er et <u>indre punkt</u> i $A \subseteq \mathbb{R}^m$

hvis $\exists r > 0 \quad B(\vec{a}, r) \subseteq A$.

$\vec{c}$ er et <u>ytre punkt</u> for A

hvis $\exists r > 0 \quad B(\vec{c}, r) \cap A = \emptyset$.

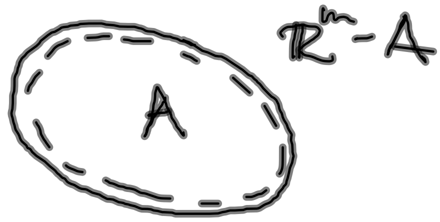
$\vec{b}$ er et <u>randpunkt</u> for A hvis

$\forall r > 0$ inneholder $B(\vec{b}, r)$ punkter i A og punkter utenfor A.

<u>Def</u> $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er <u>åpen</u> hvis alle punkter i A er indre punkter.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ er <u>lukket</u> hvis alle randpunktene til A ligger i A.

<u>Lemma</u> A er åpen $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^m \setminus A$ er lukket



<u>Følger og konvergens</u>:

En <u>følge</u> i $\mathbb{R}^m$ er en uendelig sekvens

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^m$, der $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

<u>Def</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>konvergerer</u> mot $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ hvis $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ slik at for $n \geq N$ er $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \varepsilon$.

Skriver $\vec{a} = \lim\limits_{n \to \infty} \vec{x}_n$ for grensen.

eller $\vec{x}_n \to \vec{a}$ når $n \to \infty$.

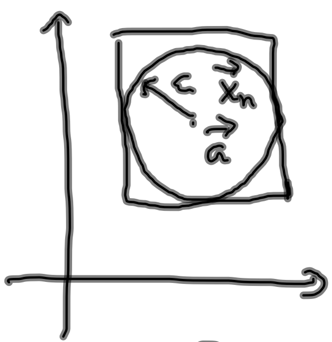
Setning 5.1.5 La $\vec{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) \in \mathbb{R}^m$
og $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m) \in$

$\vec{x}_n \to \vec{a}$ når $n \to \infty$

$\Updownarrow$

for $1 \le i \le m$ vil $x_{n,i} \to a_i$ når $n \to \infty$

$m = 2$



$|x_{n,i} - a_i|$
$\le |\vec{x}_n - \vec{a}|$

Hvis $|x_{n,i} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ for $1 \le i \le m$

vil $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$

Setning 5.1.4

$\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x}$ og $\vec{y}_n \longrightarrow \vec{y}$ i $\mathbb{R}^m$ når $n \to \infty$

$c \in \mathbb{R}$

(a) $c\vec{x}_n \longrightarrow c\vec{x}$

(b) $\vec{x}_n + \vec{y}_n \longrightarrow \vec{x} + \vec{y}$

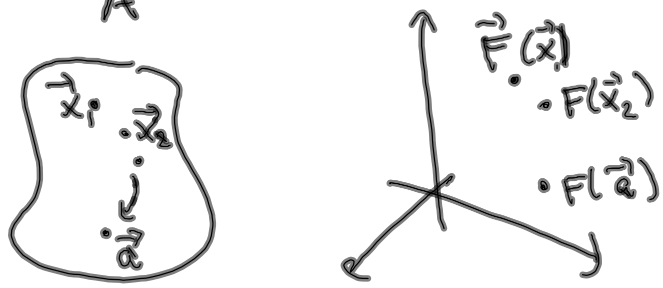
(c) $\vec{x}_n - \vec{y}_n \longrightarrow \vec{x} - \vec{y}$

(d) $\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n \longrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y}$

når $n \to \infty$

skalarproduktet

$$\mathbb{R}^k \supset A \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^m$$



<u>Setning 5.1.7</u> $\vec{a} \in A$

$\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$

$$\Updownarrow$$

for enhver følge $\{\vec{x}_n\}$ fra A med $\vec{x}_n \to \vec{a}$ når $n \to \infty$

vil $\vec{F}(\vec{x}_n) \longrightarrow \vec{F}(\vec{a})$ når $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \vec{F}(\vec{x}_n) = \vec{F}\left(\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n\right).$$

<u>Bevis</u> ($\Downarrow$) At $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ slik at for $\vec{x} \in A$ med $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ vil $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$

Anta $\vec{x}_n \longrightarrow \vec{a}$ når $n \to \infty$.

Vil vise at $\vec{F}(\vec{x}_n) \longrightarrow \vec{F}(\vec{a})$ når $n \to \infty$.

La $\varepsilon > 0$. Velg $\delta > 0$ som ovenfor.

Siden $\vec{x}_n \longrightarrow \vec{a}$ når $n \to \infty$ finnes N slik at $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \delta$ når $n \geq N$.

Ved kontinuitet er da

$$|\vec{F}(\vec{x}_n) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Eks</u> $f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$

$$\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

kontinuerlig

$$(\vec{x},\vec{y}) \qquad f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

når $n\to\infty$

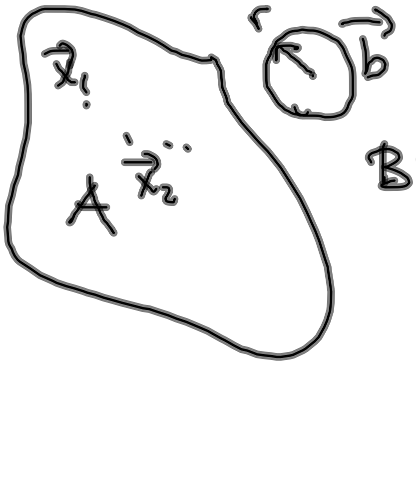
$$(\vec{x}_n,\vec{y}_n) \qquad f(\vec{x}_n,\vec{y}_n) = \vec{x}_n\cdot\vec{y}_n$$

<u>Setning 5.1.6</u>

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\{x_n\}_n$ en følge fra A,

$\vec{x}_n \to \vec{b}$ når $n\to\infty$.

Hvis A er <u>lukket</u> må $\vec{b} \in A$.



$B(\vec{b},r)\cap A = \emptyset$

LH 5.2 Komplethet av $\mathbb{R}^m$

La $\{\vec{x}_n\}_n$ være en følge i $\mathbb{R}^m$.

La
$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$
være en strengt voksende følge av naturlige tall.

Da er
$$\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \dots, \vec{x}_{n_k}, \dots$$
en delfølge av $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lemma En delfølge av en konvergent følge er konvergent.

$$n_k \longrightarrow \infty \text{ når } k \to \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \vec{x}_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$$

Teorem 5.2.3 (Bolzano–Weierstraß)

Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

$m=1$

$m \geq 2$

$\{\vec{x}_n\}$ en begrenset følge i $\mathbb{R}^m$

$\{x_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ begrenset følge i $\mathbb{R}$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad \in \mathbb{N}$

$\{x_{n_k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerer.

$\{x_{n_k,2}\}_{k=1}^{\infty}$ begrenset følge i $\mathbb{R}$

$k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots \quad \in \mathbb{N}$

$\{x_{n_{k_j},2}\}_{j=1}^{\infty}$ konvergerer.

$\{x_{n_{k_j},1}\}_{j=1}^{\infty}$ —"—.

$\vdots$

$\{x_{n_{\dots_{i}},1}\}_{i=1}^{\infty}$

$\vdots$ konvergerer

$\{x_{n_{\dots_{i}},m}\}_{i=1}^{\infty}$

$\Longrightarrow \{\vec{x}_{n_{\dots_{i}}}\}_{i}$ er en konvergent delfølge av $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Def $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge

hvis $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ slik at

for $k, n \geq N$ er $|\vec{x}_k - \vec{x}_n| < \varepsilon$.

Lemma En konvergent følge er en Cauchy-følge.

$\vec{x}_n \longrightarrow \vec{a}$ når $n \longrightarrow \infty$