4.9 Determinanter

I denne boken er determinanter definert induktivt ved oppløsning etter 1. rad.

eks.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2(10-8) - 5(8-0) - (32) = 4 - 40 - 32 = \underline{\underline{-68}}$$

Teorem 4.9.10

Anta at A er en kvadratisk matrise.

(i) Er A øvre eller nedre triangulær (dvs. kun nuller over eller under diagonalen), er $\det(A)$ = produktet av diagonalelementene

(ii) Bytter vi to rader i A, skifter $\det(A)$ fortegn

(iii) Ganger vi en rad i A med et tall s, ganges $\det(A)$ med s.

(iv) Adderer vi et tall ganger en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.

eks.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{II + I \\ III + (-2)I}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{III + 2\cdot II}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{III\cdot\frac{1}{3}}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 1 = \underline{\underline{-3}}$$

Merk (*)

Determinanten til en elementær matrise er (-1) hvis den representerer bytting, k hvis den representerer multiplikasjon av en rad med k, og 1 ellers.

Så hvis E er elementær og B er vilkårlig, gjelder

$$\det(E\cdot B) = \det(E)\cdot\det(B)$$

Teorem 4.9.12

For $(n\times n)$-matriser A er følgende ekvivalent:

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) A er inverterbar

(iii) Matriselikningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning $\vec{x}$ for alle gitte $\vec{b}$

(iv) Matriselikningen $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$.

(v) Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$

(vi) A er radekvivalent med I_n

Setning 4.9.16 (Produktregelen for determinanter)

For alle $(n\times n)$-matriser A og B er

$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$$

Bevis Hvis A ikke er inverterbar, er heller ikke AB det. Da er begge sider 0.

Hvis A er inverterbar, kan vi skrive

$$A = E_1 \cdots E_m \qquad \text{(elementære)}$$

Da fås, ved (*):

$$\det(A) = \det(E_1)\cdot\det(E_2)\cdots\det(E_m)$$

$$\det(AB) = \underbrace{\det(E_1)\cdot\det(E_2)\cdots\det(E_m)}_{\det(A)}\cdot\det(B). \qquad \square$$

Korollarer (4.9.17 og 4.9.18)

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \text{og} \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

eks.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Vi kan også regne ut determinanter ved å løse opp etter en hvilken som helst rad eller søyle

eks.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

løser opp etter 3. rad

$$= 0 - 3(8-0) + 5(-4-5)$$

$$= \text{etc.}$$

eks.

løser opp etter 2. søyle

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \text{etc.}$$