Obligatorisk oppgave 2
MAT110 VÅREN 2009
Løsningsforslag

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

3. april 2009

Oppgave 1

a)

Koden blir som følger

```
x=zeros(1,500);
y=zeros(1,500);

x(1)=600;
y(1)=300;
for n=1:400
  x(n+1)=1.01*x(n)-0.05*y(n)+1600;
  y(n+1)=0.04*x(n)+0.97*y(n)+400;
end
plot(x,y)
```

Det ser ut som populasjonene nærmer seg en grenseverdi i dette tilfellet.

b)

Koden blir som følger, der bare et ledd fra koden i a) er forandret, siden bare fruktbarheten til byttedyret er forandret:

```
x=zeros(1,500);
y=zeros(1,500);

x(1)=600;
y(1)=300;
for n=1:400
  x(n+1)=1.03*x(n)-0.05*y(n)+1600;
  y(n+1)=0.04*x(n)+0.97*y(n)+400;
end
plot(x,y)
```

I dette tilfellet ser det ut som om populasjonene varierer syklisk.

Oppgave 2

a)

For å finne egenverdiene til A løser vi den karakteristiske likningen

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.\end{aligned}$$

Løsningen på denne er

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \\ &= \frac{a + d \pm \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad - 4(ad - bc)}}{2} \\ &= \frac{a + d \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2} \\ &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.\end{aligned}$$

b)

Vi ser at systemene (1)-(2) kan skrives på matriseform

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 & -0.05 \\ 0.04 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Setter vi derfor

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1.01 & -0.05 \\ 0.04 & 0.97 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \end{pmatrix},$$

ser vi at systemet kan skrives på formen $\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n + \mathbf{b}$.

c)

Vi får

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc)}}{2} \\ &= \frac{1.01 + 0.97 \pm \sqrt{(1.01 - 0.97)^2 - 4 \times 0.05 \times 0.04)}}{2} \\ &= \frac{1.98 \pm \sqrt{0.0016 - 0.008}}{2} \\ &= \frac{1.98 \pm 0.08i}{2} \\ &= 0.99 \pm 0.04i.\end{aligned}$$

De to egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 0.99 + 0.04i$ og $\lambda_2 = 0.99 - 0.04i$.

Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = 0.99 + 0.04i$ finner vi ved å løse $(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Koeffisientmatrisen for dette systemet er

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0.99 + 0.04i - 1.01 & 0.05 \\ -0.04 & 0.99 + 0.04i - 0.97 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.02 + 0.04i & 0.05 \\ -0.04 & 0.02 + 0.04i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 + 4i & 5 \\ -4 & 2 + 4i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - i \\ -2 + 4i & 5 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - i \\ 0 & (2 - 4i)(-\frac{1}{2} - i) + 5 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser fra dette at en egenvektor er $\mathbf{v}_1 = (1 + 2i, 2)$. Fra Setning 4.10.4 følger da at $\mathbf{v}_2 = (1 - 2i, 2)$ er en egenvektor for λ_2.

d)

Vi skal løse likningssystemet

$$x \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

, og

$$x \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

De utvidede matrisene for disse systemene er

$$\begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i & 1600 \\ 2 & 2 & 400 \end{pmatrix}, \text{ og } \begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i & 600 \\ 2 & 2 & 300 \end{pmatrix}.$$

Radreduserer vi den første finner vi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i & 1600 \\ 2 & 2 & 400 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 400 \\ 1 + 2i & 1 - 2i & 1600 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 + 2i & 1 - 2i & 1600 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 0 & -4i & 1400 - 400i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 100 + 350i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 100 - 350i \\ 0 & 1 & 100 + 350i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

og vi ser derfor at

$$\mathbf{b} = (100 - 350i)\mathbf{v}_1 + (100 + 350i)\mathbf{v}_2.$$

Radreduserer vi den andre finner vi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i & 600 \\ 2 & 2 & 300 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 300 \\ 1+2i & 1-2i & 600 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1+2i & 1-2i & 600 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 0 & -4i & 450-300i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 75+112.5i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 75-112.5i \\ 0 & 1 & 75+112.5i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

og vi ser derfor at

$$\mathbf{u}_0 = (75-112.5i)\mathbf{v}_1 + (75+112.5i)\mathbf{v}_2.$$

Oppgave 3

a)

Vi viser dette ved induksjon. For $n=0$ sier utsagnet at

$$z_0 = \left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right)c^0 + \frac{d}{1-c} = z_0 - \frac{d}{1-c} + \frac{d}{1-c} = z_0,$$

som opplagt er riktig. Anta derfor at vi har vist at $z_n = \left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right)c^n + \frac{d}{1-c}$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= cz_n + d \\
&= c\left(\left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right)c^n + \frac{d}{1-c}\right) + d \\
&= \left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right)c^{n+1} + \frac{dc}{1-c} + \frac{d(1-c)}{1-c} \\
&= \left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right)c^{n+1} + \frac{d}{1-c},
\end{aligned}$$

som er det vi trengte å vise.

b) og c)

Vi har vist i oppgave 2c) at $\mathbf{u}_0$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, altså at det finnes c_0, d_0 slik at $\mathbf{u}_0 = c_0\mathbf{v}_1 + d_0\mathbf{v}_2$. Hvis vi har vist at $\mathbf{u}_n = c_n\mathbf{v}_1 + d_n\mathbf{v}_2$, så har vi da at

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n+1} &= A\mathbf{u}_n + \mathbf{b} \\
&= A(c_n\mathbf{v}_1 + d_n\mathbf{v}_2) + \mathbf{b} \\
&= c_n\lambda_1\mathbf{v}_1 + d_n\lambda_2\mathbf{v}_2 + a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \\
&= (c_n\lambda_1 + a_1)\mathbf{v}_1 + (d_n\lambda_2 + a_2)\mathbf{v}_2.
\end{aligned}$$

Dette viser at

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \lambda_1 c_n + a_1 \\ d_{n+1} &= \lambda_2 d_n + a_2, \end{aligned}$$

som løser b) og første del av c). Vi ser nå at c_n og d_n er tallfølger av typen vi støtte på i a). Vi har derfor at

$$\begin{aligned} c_n &= \left(c_0 - \frac{a_1}{1-\lambda_1}\right)\lambda_1^n + \frac{a_1}{1-\lambda_1} \\ d_n &= \left(c_0 - \frac{a_2}{1-\lambda_2}\right)\lambda_2^n + \frac{a_2}{1-\lambda_2}. \end{aligned}$$

Vi har nå at

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= c_n\mathbf{v}_1 + d_n\mathbf{v}_2 \\ &= \left(\left(c_0 - \frac{a_1}{1-\lambda_1}\right)\lambda_1^n + \frac{a_1}{1-\lambda_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\left(d_0 - \frac{a_2}{1-\lambda_2}\right)\lambda_2^n + \frac{a_2}{1-\lambda_2}\right)\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Fra utregningen i 2d) har vi at

$$\begin{aligned} a_1 &= 100 - 350i \\ a_2 &= 100 + 350i \\ c_0 &= 75 - 112.5i \\ d_0 &= 75 + 112.5i. \end{aligned}$$

Setter vi inn dette, samt verdiene for $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ fra oppgave 2, får vi at

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= \left(\left(75 - 112.5i - \frac{100-350i}{1-(0.99+0.04i)}\right)(0.99+0.04i)^n + \frac{100-350i}{1-(0.99+0.04i)}\right)\mathbf{v}_1 \\ &\quad + \left(\left(75 + 112.5i - \frac{100+350i}{1-(0.99-0.04i)}\right)(0.99-0.04i)^n - \frac{100+350i}{1-(0.99-0.04i)}\right)\mathbf{v}_2 \\ &= \left(\left(75 - 112.5i - \frac{100-350i}{0.01-0.04i}\right)(0.99+0.04i)^n + \frac{100-350i}{0.01-0.04i}\right)\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(\left(75 + 112.5i - \frac{100+350i}{0.01+0.04i}\right)(0.99-0.04i)^n - \frac{100+350i}{0.01+0.04i}\right)\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\left(-\frac{148725}{17} - \frac{13825}{34}i\right)(0.99+0.04i)^n + \frac{5}{17}10^3(30+i)\right)\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(\left(-\frac{148725}{17} + \frac{13825}{34}i\right)(0.99-0.04i)^n + \frac{5}{17}10^3(30-i)\right)\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som gir oss uttrykk for x_n og y_n (det er ikke så vanskelig å vise at imaginærdelene faktisk vil kansellere hverandre, slik at uttrykket er reelt. Vi skriver det imidlertid ikke ut slik her). Det er fort gjort å sjekke at $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$. Derfor vil noen av leddene i uttrykket over gå mot 0 når $n \to \infty$, og grenseverdien vil bli

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} x_n \\ \lim_{n\to\infty} y_n \end{pmatrix} &= \frac{5}{17}10^3(30+i)\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix} \frac{5}{17}10^3(30-i)\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{5}{17}10^3 \begin{pmatrix} (30+i)(1+2i)+(30-i)(1-2i) \\ 2(30+i)+2(30-i) \end{pmatrix} \\
& \frac{5}{17}10^3 \begin{pmatrix} 56 \\ 120 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{28}{17}10^4 \\ \frac{60}{17}10^4 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 1.65 \\ 3.53 \end{pmatrix} \times 10^4.
\end{aligned}
$$

Denne grenseverdien stemmer godt med plottet i oppgave 1.