4.1 Gauss-eliminasjon

Vi vil løse ligninger som

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+z &= 1 \\ 4x+y+2z &= 2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ -z &= 1 \\ -3y-2z &= 2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ -3y-2z &= 2 \\ -z &= 1 \end{aligned}$$

Det er enklere å løse et system som

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ -3y-2z &= 2 \\ -z &= 1 \end{aligned}$$

$z=-1$, $-3y+2=2$, $x+0-1=0$
$y=0$ $x=1$,

Kan manipulere ved å:

- Legge et multiplum av en linje til en annen
- Bytte om to linjer.
- Multiplisere en linje med et tall forskjellig fra 0.

Eks:

① $$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 3 \quad \text{II}-2\cdot\text{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$ Ingen løsninger

② $$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 2 \quad \text{II}-2\cdot\text{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ Vendelig mange løsninger.

Er i virkeligheten bare en ligning.

$y=\frac{1}{2}(1-x)$

Ser videre på:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+z &= 1 \\ 4x+y+2z &= 2 \end{aligned}$$

Matriseform for venstresiden: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Den utvidete matrisen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Kan gå andre veien: Dersom $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ er en utvidet matrise,

er ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x+y &= 7 \\ x+5y &= 1 \\ x+2y &= 3. \end{aligned}$$

Elementære radoperasjoner på matriser:

- Multiplisere en rad med et tall $\neq 0$,
- Legge et multiplum (forskjellig fra 0) av en rad til en annen, og
- Bytte om på to rader.

<u>DEF:</u> Vi sier at to matriser A, B er <u>radekvivalente</u> dersom A kan omformes til B ved et endelig antall radoperasjoner. I så fall skriver vi $A \sim B$.

Eksempel:

$$x+y+z=0$$
$$2x+2y+z=1$$
$$4x+y+2z=2\ ,\quad A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&2&1&1\\4&1&2&2\end{bmatrix}\ \text{II}-2\cdot\text{I}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\4&1&2&2\end{bmatrix}\ \text{III}-4\cdot\text{I}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-3&-2&2\end{bmatrix}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-3&-2&2\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \cdot\,-1/3\\ \cdot\,-1\end{array}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&2/3&-2/3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

DEF: En matrise er på trappeform dersom

(i) Enhver rad som ikke består bare av nuller begynner med et ettall, og

(ii) enhver rad som ikke består bare av nuller begynner med minst en null mer enn raden over.

Eks:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

DEF:
- Det første tallet som ikke er null i en rad kalles et pivotelement,
- En søyle som inneholder et pivotelement kalles en pivot-søyle.

Setning: Enhver matrise er ekvivalent med en matrise på trappeform.

"Bevis" Eks.:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ II - I \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \updownarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1/5 \\ \cdot 1/4 \\ \cdot 1/2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\blacksquare$

Setning: Anta at den utvidete matrisen til et ligningssyste kan radreduseres til en trappematrise C. Da gjelder

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle så har systemet ingen løsninger,

Hvis ikke,

(ii) Dersom alle de andre søylene er pivot-søyler så har systemet en entydig løsning,

(iii) Dersom en annen søyle ikke er en pivot-søyle har systemet vendelig mange løsninger.

"Bevis" **Eks:**

(i)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 \\ y + 2z &= 2 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 \\ y + 2z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$y + 2 = 2$, $y = 0$

$x + 5 = 3$, $x = -2$.

(iii)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 \\ y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$y = 2 - 2z = 2(1-z)$

$x + 6(1-z) + 5z = 3$

vendelig mange løsn.