$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ AFFINLINEÆR.

$F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$,

A er en $(m \times n)$-matrise, og $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$.

<u>Linearisering</u> (av deriverbare avbildninger).

$y = f(x)$.

f er deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ dersom

funksjonen $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

er en <u>veldig</u> god tilnærming

til f i nærheten av punktet a.

Hva betyr "veldig"?

formelt: f er deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ dersom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ eksisterer},$$

og i så fall betegner vi grensen

med $f'(a)$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

Så hvis vi definerer

$$\tau(x-a) := \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$$

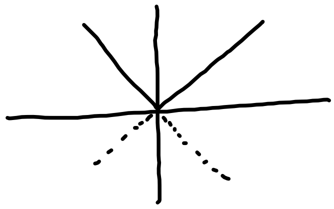
så er τ en kontinuelig funksjon med egenskapen at $\lim_{x\to a} \tau(x-a) = 0$.

Vi får: $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) = \tau(x-a)\cdot(x-a)$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \underbrace{f(a)+f'(a)\cdot(x-a)}_{\text{lineariseringen til } f \text{ i punktet } a.} + \underbrace{\tau(x-a)}_{\downarrow\, x\to a,\ 0}\cdot(x-a)$$

jan 20-10:26

<u>Eks:</u> $f(x) = |x| \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases}$



Hvordan gjør vi det i flere variable?

En avbilding $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er deriverbar i et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ dersom det fins en affin lineær avbilding som er en <u>veldig</u> god tilnærming til F nær $\vec{a}$.

<u>Formelt:</u> F er deriverbar i $\vec{a}$ dersom det fins en $(m \times n)$-matrise A og en kontinuerlig avbilding $\tau(\vec{x}-\vec{a})$

s.a.

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + A \cdot (\vec{x}-\vec{a}) + \tau(\vec{x}-\vec{a})\|\vec{x}-\vec{a}\|$$

og $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \tau(\vec{x}-\vec{a}) = 0$.

- Vi kaller A den deriverte i punktet $\vec{a}$, og vi skriver $F'(a) = A$.
- Vi kaller $F(\vec{a}) + A(\vec{x}-\vec{a})$ for <u>lineariseringen</u> til F i $\vec{a}$, og vi betegner denne med $T_{\vec{a}}F(\vec{x})$.

jan 20-10:41

La nå $F : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}^m$ være en avbilding.

$A \subset \mathbb{R}^n$ og anta at F e deriverbar i et punkt $\vec{a} \in A$.

Skriv: $F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

Da e

$$F'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Jacobi-matrisa til F i $\vec{a}$.

$$F(x) = F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) + \tau(\vec{x}-\vec{a})\|\vec{x}-\vec{a}\|.$$

Eks: La $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avb, definert ved

$$F(x,y) = (\underbrace{x^2y + y^3}_{f_1},\ \underbrace{xy^2+5}_{f_2}).$$

Finn lineariseringen til F i punktet (1,1).

(i) Finner konstantleddet $F(1,1) = (2,6)$.

(ii) Må finne $F'((1,1)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^2$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2xy$

Så Jacobimatrisa til F i (1,1) blir

$$F'((1,1)) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Lineariseringen blir:

$$T_{(1,1)}F(\vec{x}) = F(1,1) + F'((1,1)) \cdot [\underbrace{(x,y) - (1,1)}_{\vec{x} - \vec{a}}]$$

$$= (2,6) + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (x-1) \\ (y-1) \end{pmatrix}$$

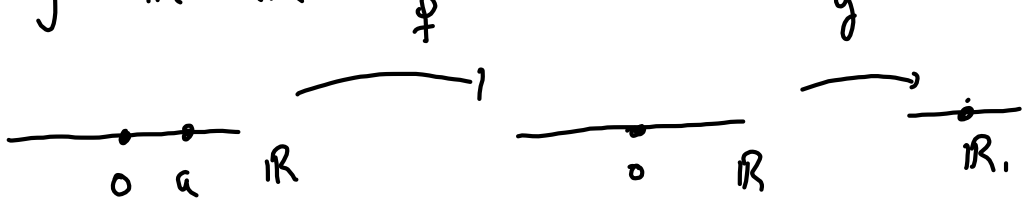
$$= (2,6) + (2\cdot(x-1) + 4(y-1),\ (x-1) + 2(y-1))$$

$$= \ldots$$

Kjerneregelen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Se på komposisjonen $h(x) = g(f(x))$

Notasjon: $h = g \circ f$.

For $a \in \mathbb{R}$, hva e $h'(a)$?

$$\boxed{h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).}$$

Teorem 2.7.1: Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og avbildinger $G : A \to B$ og $F : B \to \mathbb{R}^k$. Dersom G e deriverbar i $\vec{a} \in A$ og F e deriverbar i $G(\vec{a}) = \vec{b} \in B$, så er $H = F \circ G$ e deriverbar i $\vec{a}$, og

$$H'(\vec{a}) = F'(G(\vec{a})) \cdot G'(\vec{a}).$$

Dersom $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ er avbildinger lar vi $F \circ G$ betegne avbildingen $\vec{x} \longmapsto F(G(x))$

La F, G, A og B være som i teoremet over.

Sett $H = F \circ G$.

$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $F(\vec{y}) = (f_1(\vec{y}), \dots, f_k(\vec{y}))$.

La $\vec{a} \in A$.

Teorem: Dersom G er deriverbar i $\vec{a}$ og F er deriverbar i $\vec{b} = G(\vec{a})$, da er H deriverbar i $\vec{a}$, og jacobimatrisa til H er gitt ved

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_s}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial g_s}{\partial x_j}(\vec{a}).$$

jan 20-11:38

Hvorfor stemme det?

$$H'(\vec{a}) = F'(\underbrace{G(\vec{a})}_{\vec{b}}) \cdot G'(\vec{a}).$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{b}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(\vec{b}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(\vec{b}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$