MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-07

Innleveringsfrist: *Fredag 20. april, 2006, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk å skrive navn på besvarelsen!** *Se forøvrig*

http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er grafisk fremstilling i to og tre dimensjoner, numerisk integrasjon og enkel programmering inkludert behandling av m-filer.*

Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringer. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Oppgave 1: I denne oppgaven er

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2} \qquad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Finn de stasjonære punktene til f (Adams kaller dette "critical points").

b) Bruk annenderiverttesten til å avgjøre om punktene i a) er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

c) Forklar at de lokale minimums- og maksimumspunktene du nå har funnet, er globale maksimums- og minimumspunkter for f.

d) Bruk MATLAB til å tegne et rimelig utvalg av nivåkurver for f. La også MATLAB tegne grafen til f.

e) Bruk MATLAB-kommandoen `quiver` til å tegne gradienten ∇f. Forklar sammenhengen mellom denne figuren og maksimums- og minimumspunktet til f.

f) Regn ut $\iint_R f(x,y)\ dA$ der R er området i første kvadrant mellom x-aksen og linjen $y = x$. Du kan få bruk for at $\int_0^\infty e^{-r^2}\ dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Se seksjon 14.4 hos Adams.)

g) Bruk MATLAB til å regne ut (en tilnærmet verdi for) integralet

$$\iint_{R_0} f(x,y)\ dA$$

der R_0 er den delen av R som ligger inni sirkelen med sentrum i origo og radius 1.

Oppgave 2: Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon. Vi sier at $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ er et *fikspunkt* for F dersom $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. I mange sammenhenger er det viktig å bestemme fikspunktene til en funksjon, men de er ikke alltid så lette å finne ved regning. I denne oppgaven skal vi se på en teknikk som under visse betingelser kan brukes til å finne fikspunkter numerisk.

Ideen med metoden er å velge et startpunkt $\mathbf{u}_1$, og så regne ut punktene $\mathbf{u}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{u}_4 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_3), \ldots$. Dersom denne følgen konvergerer mot et punkt $\mathbf{u}$, vil $\mathbf{u}$ være et fikspunkt for $\mathbf{F}$ (dette skal du vise i punkt d) nedenfor).

Dersom ikke annet er sagt, vil vi i denne oppgaven bruke funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\cos(x-y)\right) \tag{1}$$

a) Lag en m-fil for for følgende prosedyre: Med inn-parametre v, w og N, skal filen som out-put gi to N-tupler $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, x_2 \ldots, y_N)$. Disse N-tuplene er gitt ved at $(x_k, y_k) = \mathbf{u}_k$, der $\{\mathbf{u}_k\}$ er følgen:

$$\mathbf{u}_1 = (v,w), \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{u}_N = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{N-1})$$

b) Kjør programmet ditt med startpunkt $(x,y) = (1,-1)$ og en passende verdi for N. La MATLAB tegne følgen $\{\mathbf{u}_n\}$.

c) Kjør programmet 6 ganger til. I hvert tilfelle lar du MATLAB velge et tilfeldig startpunkt (v,w) med $-2.5 \le v \le 2.5$, $-2.5 \le w \le 2.5$. Tegn opp sekvensene i hvert sitt subplot, og sett aksene slik at resultatene er lette å sammenligne.

d) Vi lar nå $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en generell kontinuerlig funksjon. Vis at dersom det finnes en følge $\{\mathbf{u}_n\}$ der $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ som konvergerer mot $\mathbf{u}$, så er $\mathbf{u}$ et fikspunkt for $\mathbf{F}$.

LYKKE TIL!