Plenum 19/4

4.8: 2

4.9: 2b, 9, 11

4.10: 2b, 7, 9

4.8:

2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\widetilde{II} = I + II$ $\quad \widetilde{\widetilde{II}} = \frac{1}{3}\widetilde{II}$ $\quad \widetilde{I} = I - 2\widetilde{\widetilde{II}}$

Hold orden!

Elementære matriser:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gjør samme op. på I_2!

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Bevis Set. 4.8.4

4.9:

2b)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{(-1)}{\overset{I \leftrightarrow II}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B$$

$$\det(B) = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

$$\det(A) = -\det(B) = \underline{\underline{-9}}$$

9) Bruk Teorem 4.9.10 til å vise:

Radene til A er lin. avh.

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = 0$$

Bevis: La A være $n \times n$ matrise og anta at A har lin. avh. rader. Kall radene i A for $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Da fins det $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s.a.:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}, \quad (**)$$

men minst én $c_i \neq 0$ der $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Fra at $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er lin. avh.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} - \cdots - \\ - \cdots - \\ \vdots \\ - \cdots - \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \\ \vec{a}_n \end{array} \end{array}$$

Set. 4.6.6:

Lin. uavh:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

Så: Lin. avh. betyr at det fins $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s.a. $c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ men minst én $c_i \neq 0$

Del på c_i:

$$(*) \quad \frac{c_1}{c_i}\vec{a}_1 + \frac{c_2}{c_i}\vec{a}_2 + \ldots + \frac{c_{i-1}}{c_i}\vec{a}_{i-1} + \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{rad } i \text{ fra } A} + \frac{c_{i+1}}{c_i}\vec{a}_{i+1} + \ldots + \frac{c_n}{c_i}\vec{a}_n = \vec{0}$$

Radop. på A: Legg $\frac{c_1}{c_i} \cdot$ rad 1 til rad i. Legg så $\frac{c_2}{c_i} \cdot$ rad 2 til rad i, ..., til slutt: $\frac{c_n}{c_i} \cdot$ rad n til rad i. Fra (*) er da rad i lik $\vec{0}$. Fra Lemma 4.9.2 betyr det at $\det(A) = 0$.

Vis dette fra Thm. 4.9.12 og Kor. 4.9.18:

La $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Fra Kor. 4.9.18, så er $\det(A) = \det(A^T)$

$= \det\left([\vec{a}_1^{\,T} \ \vec{a}_2^{\,T} \ \dots \ \vec{a}_n^{\,T}] \right)$. Da har matriseligningen

$$A^T \vec{x} = \vec{0}$$

dvs.

$$[\vec{a}_1^{\,T} \ \vec{a}_2^{\,T} \ \dots \ \vec{a}_n^{\,T}] \ \vec{x} = \vec{0}$$

$$x_1 \vec{a}_1^{\,T} + x_2 \vec{a}_2^{\,T} + \dots + x_n \vec{a}_n^{\,T} = \vec{0}$$

en $\underbrace{\text{løsning}}_{x_1, \dots, x_n}$ der minst $x_i \neq 0$ fra (☆)

$\Downarrow$ Fra Thm. 4.9.12 (iv) og (i)

$\det(A^T) = 0$, men da

$\det(A) = 0$. $\blacksquare$

(i) $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

(iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsning $\vec{x} = 0$

Dvs: ~~(i)~~ $\det(A) = 0$

$\Updownarrow$

~~(iv)~~ Det fins løsning av $A\vec{x} = \vec{0}$ som ikke er $\vec{0}$.

11.) a) $I_i(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & x_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

søyle i

VIS: $\det(I_i(\vec{x})) = x_i$

$I_i^T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & & x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

rad i

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hvordan kan I transformeres til $I_i^T(\vec{x})$ vha. radoperasjoner?
Gang rad i med x_i og legg til multippel ($x_j \cdot$ rad j, for alle $j \neq i$) til rad i. Kun første operasjon endrer determinanten med x_i (faktor).

$\Downarrow$

$$\det(I_i(\vec{x})) = \det(I_i^T(\vec{x})) = x_i \det(I) = x_i \cdot 1 = \underline{\underline{x_i}}$$

Kor. 4.9.18

b) VIS: $A I_i(\vec{x}) = A_i(\vec{b})$ der $A\vec{x} = \vec{b}$

Viser v/ å vise at hver søyle i $AI_i(\vec{x})$ er lik tilsv. søyle i $A_i(\vec{b})$. 2 muligheter:

i) Søyle j, der $j \neq i$: Søyle j i $AI_i(\vec{x})$ er A ganget med j'te søyle i $I_i(\vec{x})$ (def. matrisemultiplikasjon).
j'te søyle i $I_i(\vec{x})$ er $\vec{e}_j$, så $AI_i(\vec{x}) = A\vec{e}_j$ = j'te søyle i A

j'te søyle i $A_i(\vec{b})$ er jo bare j'te søyle i A.

$\Downarrow$

De to søylene er like!

ii) Søyle i: Søyle i fra $AI_i(\vec{x})$ er A ganget med søyle i fra $I_i(\vec{x})$. i'te søyle i $I_i(\vec{x})$ er $\vec{x}$ $\Rightarrow$

Søyle i fra $AI_i(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{b}$

Søyle i fra $A_i(\vec{b})$ er $\vec{b}$ per def.

$\Downarrow$

De to søylene er like!

$\Rightarrow$ Alle søylene i matrisene er like. $\Rightarrow$ Matrisene er like.

c) $\det(A_i(\vec{b})) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det(A)\det(I_i(\vec{x}))$

b): like

Set 4.9.16

$= \det(A)\, x_i$

a)

$\Downarrow$ (Deler på $\det(A)$; A inverterbar, så $\det(A) \neq 0$)

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det(A)}$$

4.10:

2b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Egenverdier: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 3(-2\lambda + 4 + 1) - 2 - \lambda$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12$

Gjett: $\lambda = 2$ er en rot $(2^3 - 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 12 = 0)$

Polynomdividerer: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 : \lambda - 2 = \underline{\lambda^2 - \lambda - 6}$

abc-formelen: $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ er egenverdiene

$\boxed{A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1}$

$\vec{v}_1$: $(-2I - A)\vec{v}_1 = \vec{0}$

$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow z = 0,\ x = -y \Rightarrow y = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2$: $(2I - A)\vec{v}_2 = \vec{0}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $y = \frac{1}{4}z$, $x = -\frac{1}{4}z$, z fri

$z = 4 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$