Lemma 4.5.2

Anta A er $n \times n$, og at det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $AB = I_n$

Da har $A\vec{x} = \vec{c}$ en entydig løsning for alle høyresider $\vec{c}$

Videre er søylene $\vec{b}_j$ i B, gitt ved løsningen av $A\vec{x} = \vec{e}_j$

søyle j i B

Bevis: Siste lettest:

søyle j i AB er $A\vec{b}_j$

søyle j i I_n er e_j

$A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ hvis $AB = I_n$

1. Viser at $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning.

Anta $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n$, og la $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$

Da er $A\vec{x} = A(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n) = c_1 A\vec{b}_1 + \cdots + c_n A\vec{b}_n$

$= c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n = \vec{c} \Rightarrow$ har løsning $\vec{x}$.

2. Viser at $A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning

Reduser A til en trappematrise D

hvis løsn. for alle høyresider $\vec{c}$: setn. 4.4.3 sier da at

D har et pivotelement i hver rad.

Siden matrisen er kvadratisk, så har vi da også et pivotelement i hver søyle

setning 4.4.3 sier da at løsningen er entydig. ■

---

setning 4.5.3 Dersom $\underset{n \times n}{AB} = I_n$, så er både A og B inverterbare, og $A^{-1} = B$, og $B^{-1} = A$

Bevis: Nok å vise at $BA = I_n$

Lemma 4.5.1: Nok å vise at $BA\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x}$ for alle $\vec{x}$

derfor: med $\vec{y} = (BA)\vec{x}$, så er det nok å vise at $\vec{y} = \vec{x}$.

$A\vec{y} = A((BA)\vec{x}) = ((AB)A)\vec{x} = (I_n A)\vec{x} = A\vec{x} = \vec{c}$

Lemma 4.5.2: siden $A\vec{x} = A\vec{y}$, og A har entydige løsninger,

så er $\vec{x} = \vec{y}$

Setning 4.5.4 :

En $n \times n$ matrise A er inverterbar

$$\Updownarrow$$

$A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning for alle valg av $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

Bevis: $A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning for alle $\vec{c}$ $\Rightarrow AB = I_n$

$\Updownarrow$ setn 4.4.3

A radekvivalent med I_n der $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$

$\Rightarrow$ A invertbar. Lemma 4.5.2 sier da at vi alltid har en entydig løsning

$\Leftarrow$ Anta $A\vec{x} = \vec{c}$ alltid har entydig løsning:

La b_j være løsning $Ab_j = e_j$, da er $AB = I$,

setning 4.5.3 gir at A er inverterbar

Siden søylene til den inverse matrisen fås ved å løse $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$:

Vi kan finne hele den inverse ved radreduksjon:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

$$\vec{e}_1 \quad \cdots \quad \vec{e}_n \qquad\qquad \vec{b}_1 \quad \cdots \quad \vec{b}_n$$

Matrisen fra eksempel 4.5.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inversen:

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}}^{A} \; \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{I_3}\right) \overset{II + (-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + 2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{II \cdot (-1) \\ III \cdot (\frac{1}{3})}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II + 2III \\ I - III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I + II}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \; \underbrace{\begin{matrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$