# Eksamen 14. 06. 2017

## Oppgave 1

a) $\vec{r}(t) = (t\cos t,\ t\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

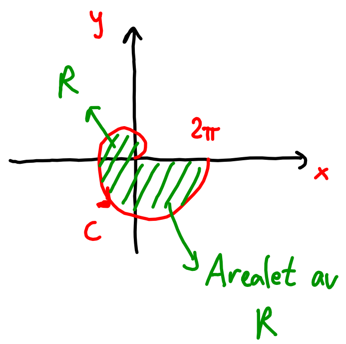
$$= \int_0^{2\pi} (-t\sin t,\ t\cos t)\cdot(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t + \cancel{t\cos t\sin t} + t^2\cos^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(2\pi)^3 = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi^3}}$$

b)




Kurven i polarkoordinater:

$r = \theta = t$

$t \in [0, 2\pi]$

Beskrivelse av $R$ i polarkoordinater:

$\theta \in [0, 2\pi]$

$r \in [0, \theta]$

$$A = \iint_R 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} 1\cdot \overset{J}{r}\,dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\theta^2\,d\theta = \left[\frac{1}{6}\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi^3}}$$

$\left(\text{Enklere: Greens korollar: } A = \frac{1}{2}\underbrace{\oint -y\,dx + x\,dy}_{a)}\right)$

## Oppgave 2

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gir

$$\begin{cases} x + 2y = b_1 & \text{I} \\ 2x + y = b_2 & \text{II} \\ x = b_3 & \text{III} \end{cases}$$

III innsatt i II gir $2b_3 + y = b_2$, dvs. $y = b_2 - 2b_3$

III og II innsatt i I gir da

$$b_3 + 2(b_2 - 2b_3) = b_1$$
$$b_3 + 2b_2 - 4b_3 = b_1$$
$$\underline{\underline{b_1 = 2b_2 - 3b_3}}$$

Er dette oppfylt, har vi entydig løsning.

Alternativt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix}$

entydig løsn. hvis denne er 0, ingen løsn. ellers

b) $f(x,y) = \left| A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \\ x - 1 \end{pmatrix} \right|^2 = (x + 2y)^2 + (2x + y)^2 + (x-1)^2$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1$$
$$= 6x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 12x + 8y - 2 = 0 & \text{I} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 10y = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II gir $x = -\frac{5}{4}y$

I gir da $-\frac{12 \cdot 5}{4}y + 8y - 2 = 0$

$$-15y + 8y = 2, \quad y = -\frac{2}{7}$$

Så $x = -\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

$f$ har et entydig globalt minimum fordi den måler avstanden kvadrert fra punktet $(0,0,1)$ til punkter på planet utspent av vektorene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$

Altså er $f(x,y)$ minimal for $\underline{\underline{x = \frac{5}{14}}}$, $\underline{\underline{y = -\frac{2}{7}}}$

## Oppgave 3

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n}$ Konv ?

Rekken er alternerende, og

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

Må også sjekke $|a_{n+1}| < |a_n|$ for $n$ stor nok.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ gir $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Har $f'(x) < 0$ for $x \geq 3$

Så $|a_{n+1}| < |a_n|$ for $n \geq 3$

Altså konvergens ved alt. rekke-testen

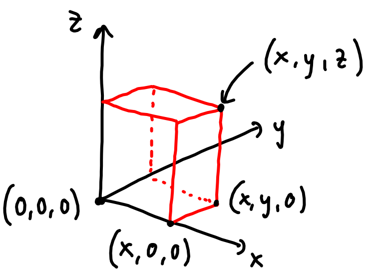
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}}$ kan oppfattes som

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \text{med } x = \frac{\pi}{4} \text{ innsatt.}$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\left( x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots \right)}_{-\ln(1-x) \quad \text{(formelsamling)}}$$

Summen blir dermed $\underline{\underline{-\frac{1}{\pi}\cdot \ln\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$

## Oppgave 4




$x, y, z > 0$

Maksimalisere $f(x,y,z) = xyz$ under bibetingelsen

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

Omtrent likt eksempel på forelesning 26.04.2018 (Lagrange)

Maksverdi: $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$

## Oppgave 5

a) Eksempel: Hvis $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

så velg $S = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix}$. Da er $S \cdot S = D$.

Generelt: Hvis $D$ har elementer $d_{ii}$ på diagonalen, velg $S$ med $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ lang diagonalen og nuller ellers.

b) Siden $A$ har en basis av egenvektorer, kan $A$ diagonaliseres: Det fins en $(n \times n)$-matrise $M$ slik at

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$$

der $D$ er diagonal med egenverdier for $A$ langs diagonalen. Siden alle egenverdiene er ikke-negative, fins ved a) en matrise $S$ slik at $S \cdot S = D$. Innsatt fås

$$\begin{aligned} A &= M \cdot S \cdot S \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot S \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot S \cdot M^{-1} \\ &= (M \cdot S \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot S \cdot M^{-1}) = B^2 \end{aligned}$$

med $B = M \cdot S \cdot M^{-1}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Utregning:

Egenvektor $\begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$

— " — $\begin{pmatrix} B \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$ — " — $\lambda_2 = 4$

— " — $\begin{pmatrix} C \\ 2C \\ 2C \end{pmatrix}$ — " — $\lambda_3 = 9$

Lar $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (egenvektorer som søyler)

$D = S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, dvs. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Så : $B = M \cdot S \cdot M^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

regn

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$