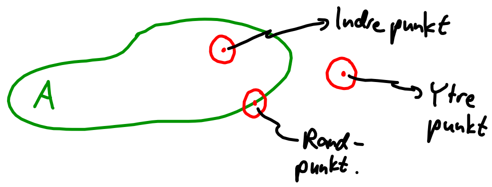
5.1 Topologi i $\mathbb{R}^m$

$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ åpen kule om $\vec{a}$, $r > 0$

$\overline{B}(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x} - \vec{a}| \leq r\}$ lukket — " — , $r > 0$

Def La $A \subset \mathbb{R}^m$. Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ kalles et

- indre punkt for A hvis det fins en kule $B(\vec{a}, r) \subseteq A$
- randpunkt for A hvis enhver kule $B(\vec{a}, r)$ inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er med i A.
- ytre punkt for A hvis det fins en kule $B(\vec{a}, r)$ som ikke inneholder punkter fra A.



Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ kalles lukket hvis den inneholder alle sine randpunkter, og åpen hvis den ikke inneholder noen randpunkter.
Mengdene $\emptyset$ (den tomme mengden) og $\mathbb{R}^n$ regnes som både åpne og lukkede.

Def Følgen $\{\vec{x}_n\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer mot $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

Vi skriver da $\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$.

Setning 5.1.5

Hvis $\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ og $\lim_{n \to \infty} \vec{y}_n = \vec{y}$, så gjelder

(i) $\lim_{n \to \infty} (c\,\vec{x}_n) = c \cdot \vec{x}$ for alle reelle tall c

(ii) $\lim_{n \to \infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) = \lim_{n \to \infty} \vec{x}_n + \lim_{n \to \infty} \vec{y}_n = \vec{x} + \vec{y}$

(iii) $\lim_{n \to \infty} (\vec{x}_n - \vec{y}_n) = \vec{x} - \vec{y}$

(iv) $\lim_{n \to \infty} (\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ (skalarprodukt)

Bevis (ii) (skisse):

$$\left|(\vec{x}_n + \vec{y}_n) - (\vec{x} + \vec{y})\right| = \left|(\vec{x}_n - \vec{x}) + (\vec{y}_n - y)\right|$$

Trekantulikheten (setning 1.2.5) $\leq |\vec{x}_n - \vec{x}| + |\vec{y}_n - \vec{y}| \quad (*)$

Gitt $\varepsilon > 0$, kan vi velge N_1 slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N_1$

og N_2 — " — $|\vec{y}_n - \vec{y}| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N_2$

Hvis da N er større enn både N_1 og N_2, er $(*) < \varepsilon$. $\square$

Setning 5.1.6

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \iff \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_i^{(n)}}^{\text{komponent } i \text{ fra } \vec{x}_n} = x_i \text{ for alle } i$$

Setning 5.1.8

Anta at A er lukket, og at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge av punkter i A som konvergerer mot $\vec{x}$. Da er $\vec{x} \in A$.

Bevis

Anta at $\vec{x} \notin A$. Siden A er lukket, fins da en kule $B(\vec{x}, r)$ som ikke inneholder punkter fra A. Da må $\vec{x}_n \notin B(\vec{x}, r)$ for alle n, noe som strider mot at $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$. $\square$

Setning 5.1.9

Anta at $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^k$. La $\vec{a} \in A$.
Da er $\vec{F}$ kontinuerlig i $\vec{a}$ hviss $\vec{F}(\vec{x}_n) \to \vec{F}(\vec{a})$ for alle følger $\{\vec{x}_n\}$ fra A slik at $\vec{x}_n \to \vec{a}$.

Bevis Se bok.

5.2 Kompletthet av $\mathbb{R}^m$

Hvis $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$ og

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ er naturlige tall,

så kalles følgen $\{\vec{x}_{n_k}\} = \{\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \dots\}$

for en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$.

eks. $\{3, 7, 11, 13, \dots\}$ (odde primtall)

er en delfølge av $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ (oddetallene)

Setning 5.2.2

Hvis $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{x}$, så konvergerer også alle delfølger av $\{\vec{x}_n\}$ mot $\vec{x}$.

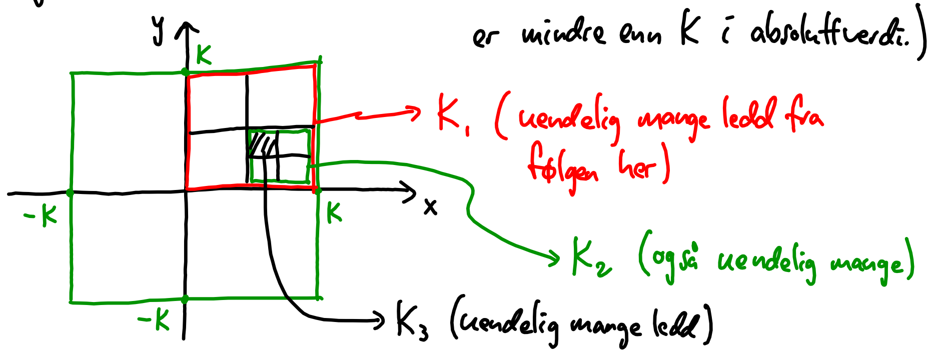
Bevis: Ukeoppgave.

Teorem 5.2.3 (Bolzano - Weierstrass)

Alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Bevis (Fange løve i ørkenen). Gitt en følge $\{\vec{x}_n\}$.

Velger K slik at $|x_i^{(n)}| < K$ for alle $\vec{n}$. (Alle komponentene er mindre enn K i absolutt verdi.)



Plukker ut delfølge $\{\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \dots\}$ ved å la $\vec{x}_{n_k}$ være første ledd i følgen som ligger i K_k.

La (a_k, b_k) være nedre, venstre hjørne i kvadratet K_k.
Da er $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ voksende og begrensede følger av reelle tall, så de konvergerer ved kompletthetsprinsippet (Kalkulus 4.3.9).
Så

$$\vec{z}_k = (a_k, b_k) \text{ konvergerer mot } \vec{z} = (a,b) \text{ når } k \to \infty.$$

Siden både $\vec{z}_k$ og $\vec{x}_{n_k}$ ligger mot K_k, og størrelsen av K_k går mot 0 når $k \to \infty$, får vi at

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_{n_k} = \vec{z}. \quad \square$$

Definisjon

$\{\vec{x}_n\}$ er en <u>Cauchy-følge</u> hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon \quad \text{for alle } n, k \geq N.$$

Teorem (5.2.5 og 5.2.6)

$$\{\vec{x}_n\} \text{ er Cauchy} \iff \{\vec{x}_n\} \text{ er konvergent.}$$

<u>Bevis</u> $\Leftarrow$ Anta at $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{x}$.
Gitt $\varepsilon > 0$. Velg $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N$. Hvis da $n, k \geq N$, har vi

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| = |(\vec{x}_n - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x}_k)|$$
$$\leq |\vec{x}_n - \vec{x}| + |\vec{x}_k - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Altså er $\{\vec{x}_n\}$ Cauchy.

$\Rightarrow$ Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er Cauchy.
Da er $\{\vec{x}_n\}$ begrenset, fordi det fins N slik at

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_N| < 1 \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Gitt $\varepsilon > 0$, velg N slik at

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{når } n, k \geq N.$$

Ved Bolzano-Weierstrass, velg delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$ som konvergerer mot $\vec{x}$.
Velg så $n_k \geq N$ slik at $|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Hvis $n \geq N$, er da

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| = |(\vec{x}_n - \vec{x}_{n_k}) + (\vec{x}_{n_k} - \vec{x})|$$
$$\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n_k}| + |\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Altså konvergerer $\{\vec{x}_n\}$ mot $\vec{x}$. $\square$