

Løsningsforslag for flervariabel analyse med lineær algebra

Øyvind Ryan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

18. februar 2015

Innhold

Forord	v
Kapittel 3	1
Seksjon 3.1	1
Seksjon 3.2	6
Seksjon 3.3	8
Seksjon 3.4	12
Seksjon 3.5	17
Seksjon 3.6	23
Seksjon 3.7	27
Seksjon 3.8	35
Seksjon 3.9	37
Kapittel 6	41
Seksjon 6.1	41
Seksjon 6.2	47
Seksjon 6.3	52
Seksjon 6.4	56
Seksjon 6.5	61
Seksjon 6.6	66
Seksjon 6.7	67
Seksjon 6.8	73
Seksjon 6.9	75
Seksjon 6.10	79
Seksjon 6.11	84
Seksjon 6.12	87
Seksjon 6.13	92
Seksjon 6.14	93
Seksjon 6.15	97

Forord

Dette heftet inneholder løsningsforslag til utvalgte oppgaver i boka “Flervariabel analyse med lineær algebra”, og skal dekke alle seksjoner i denne. Det er ment som en følgebok til læreboka, ikke som en egen pensumbok. Heftet har utviklet seg over de årene jeg har hatt plenumsregningene i kurset MAT1110 ved Universitetet i Oslo. Det meste av læreboka er pensum i MAT1110, mens første del av boka er pensum i kurset MAT1100. Oppgavevalgene gjenspeiler de som er blitt gitt i MAT1100 og MAT1110 de siste årene.

De nevnte kursene ved Universitetet i Oslo er ganske regnekrevende. Bakgrunnen for heftet er tilbakemeldinger fra studenter som mener løsningsforslag er veldig nyttige å ha ved siden av pensum, som en guide i oppgaveløsning. Selvfølgelig er det viktig at studenter prøver å løse oppgavene på egenhånd og, men et presist og enklest mulig løsningsforslag kan være gull verdt, både når man står fast på oppgaver, og når man skal kryssjekke det man har gjort.

I dette heftet finnes også stoff relatert til oppgavene, som læreboka ikke går så dypt inn på da teorien har mest fokus der. Heftet går for eksempel enda mer i detaljer enn læreboka når det gjelder å sette opp uoppstilte problemer på en slik måte at de lar seg løse. Heftet forklarer også gjennom mange oppgaver hvordan man skal komme i gang på de fleste typer oppgaver, og hvordan man skal formulere seg. Det er også fokus på regneknep som ikke alltid kommer så godt frem i læreboka. Flere av oppgavene kan løses på mer enn en måte, og i flere tilfeller blir mer enn en fremgangsmåte vist. De vanlige regnefeilene blir også gått gjennom. Noen deler av læreboka har erfaringsmessig vist seg vanskeligere enn andre, og mye plass er derfor dedikert til disse delene. Dette gjelder blant annet regnetrening og geometrisk forståelse knyttet til integrasjon i flere variable. Kapitlene og seksjonene er nummerert på samme måte som i læreboka. Oppgaveteksten gjentas kun der dette er praktisk, og det er derfor lurt å ha læreboka foran seg når man bruker heftet i forbindelse med en oppgave.

Læreboka er bygget opp med en del kodeeksempler blandet inn i stoffet der dette er relevant. Dette gjøres også i dette heftet, og det er flere oppgaver som inneholder programmering. Alle kodeeksemplene er i Matlab. Mye av regningen kan også bekreftes ved hjelp av en symbolsk verktøypakke i Matlab, og dette blir demonstrert flere steder. Alle figurene i heftet er også generert med Matlab. Ved Universitetet i Oslo er det også en strategisk satsing på Python som et gjennomgående språk i begynnerkursene. Matlabkoden er derfor også oversatt til Python, og kan finnes på heftets webside. Den strategiske satsingen på Python er en del av “Computers in Science Education”-prosjektet (CSE) ved Universitetet i Oslo, et prosjekt der beregninger søkes integrert tverrfaglig i undervisningen helt fra første semester av på universitetet. Beregninger er her ment i en vid forstand, som omfatter både programmering, forskjellige språk, algoritmeforståelse, og numeriske metoder. Vi kommer tilbake til flere av disse senere i heftet.

På heftets webside kan du også finne all Matlab-kode som er listet opp i heftet, sammen

med all kode som er brukt til å generere figurene.

Bruk av boken i undervisning

Med dette heftet har studentene en guide til hvordan alle typer oppgaver i læreboka kan løses, og det kan jo være en god støtte når man står fast på enkelte oppgaver. Heftet egner seg definitivt best som en oppslagsbok - bruk den parallelt med at du løser konkrete oppgaver, og slå opp etterhvert som du står fast. Ikke les boka fra perm til perm, det er ikke det som er meningen! Og jobb med en oppgave i læreboka parallelt med at du bruker heftet, med læreboka oppe! Studenter bør også være klar over at man lærer mest av å prøve hardt på oppgavene på egen hånd først, før man rådfører seg med løsningsforslagene. Så, studenter, prøv alltid å regne gjennom først! Det kan være lurt at man hver uke også gir noen oppgaver som ikke blir løst i heftet. Dette vil hindre at studentene blir passive i den forstand at de bare rådfører seg med heftet.

Som enhver annen bok inneholder nok også denne enkelte trykkfeil, som skal bli rettet opp i neste utgave. Vi tar imot all hjelp vi kan få til å finne feil, eller å finne oppgaver der forklaringer og utregninger er litt mangelfulle. Hvis du finner en trykkfeil foreslår vi at du først sjekker om denne allerede er ført opp på den oppdaterte trykkfeillista på heftets webside. Hvis den ikke er der bør du sende en email til adressen oppgitt på heftets webside.

Takk

Flere personer har bidratt i forbindelse med utformingen av innholdet i dette heftet. Studentene i MAT1110 har blant annet gitt tilbakemeldinger på første versjon av løsningsforslagene. Spesielt har dette bidratt til å detaljere en del oppgaver videre der første versjon var for kortfattet, og tilbakemeldinger fra studenter kommer helt sikkert til å fortsette de neste årene og, slik at neste utgave kan bli enda bedre. Magnus Bugge og Magnus Pedersen Lohne har oversatt mye av koden som finnes i dette heftet til Python. En stor takk også til Tom Lindstrøm for å ha gitt innspill til utformingen av dette heftet, samt utvalget av oppgaver. Jeg retter også en takk til arbeidskollegene mine på CSE-prosjektet, som har inspirert meg til å jobbe med utviklingen av nytt kursmateriell.

Blindern, 18. september 2014

Øyvind Ryan

Kapittel 3

Seksjon 3.1

Oppgave 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &= (\cos t, t \sin t) \\
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \sin t + t \cos t) \\
 v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t} \\
 &= \sqrt{2 \sin^2 t + t \sin(2t) + t^2 \cos^2 t} \\
 \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, 2 \cos t - t \sin t) \\
 a(t) &= v'(t) = \frac{4 \sin t \cos t + 2t \cos(2t) + \sin(2t) + 2t \cos^2 t - 2t^2 \sin t \cos t}{2\sqrt{2 \sin^2 t + t \sin(2t) + t^2 \cos^2 t}} \\
 &= \frac{2 \sin(2t) + 2t \cos(2t) + \sin(2t) + 2t \cos^2 t - t^2 \sin(2t)}{2\sqrt{2 \sin^2 t + t \sin(2t) + t^2 \cos^2 t}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(3 - t^2) \sin(2t) + t(\cos(2t) + \cos^2 t)}{\sqrt{2 \sin^2 t + t \sin(2t) + t^2 \cos^2 t}}.
 \end{aligned}$$

Oppgave 3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &= (t, e^{-t}, \sin t) \\
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (1, -e^{-t}, \cos t) \\
 \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (0, e^{-t}, -\sin t).
 \end{aligned}$$

Oppgave 5. Koden blir

```

% Oppgave 3.1.5 a)
t=linspace(0,6*pi,100);
plot(t.*cos(t),t.*sin(t));

% Oppgave 3.1.5 b)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot(5*cos(t),3*sin(t));
    
```

```
% Oppgave 3.1.5 c)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot(sin(2*t).*cos(t),sin(2*t).*sin(t));
```

```
% Oppgave 3.1.5 d)
t=linspace(0,6*pi,100);
plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),t);
```

```
% Oppgave 3.1.5 e)
t=linspace(-20,20,400);
plot3(t,sin(t),cos(t));
```

Opgave 6.

```
% Oppgave 3.1.6
t=linspace(0,200,1000);
m=1;
g=9.8;
k=0.5;
u1=0.2;
u2=0.4;
f1=(m*u1/k)*(1-exp(-k*t/m));
f2=(-m*g*t/k)+(m*u2/k + m*m*g/(k*k))*(1-exp(-k*t/m))
plot(f1,f2);
```

Opgave 8. Vi har $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, der $t \in [0, 10]$. Vi har at

$$\begin{aligned} L(0, 10) &= \int_0^{10} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{10} \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^{10} t\sqrt{9t^2 + 4} dt. \end{aligned}$$

Gjør vi her substitusjonen $u = 9t^2 + 4$, som gir $du = 18t dt$, så får vi

$$\begin{aligned} \int_0^{10} t\sqrt{9t^2 + 4} dt &= \frac{1}{18} \int_0^{10} 18t\sqrt{9t^2 + 4} dt = \frac{1}{18} \int_4^{904} \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{904} = \frac{1}{27} \left[u^{3/2} \right]_4^{904} = \frac{904^{3/2} - 8}{27}. \end{aligned}$$

Opgave 10.

a). Vi regner ut

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) \\ v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t} = 2 \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (-2 \cos t, -\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \sin t) \end{aligned}$$

SEKSJON 3.1

3

b).

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} v(t) dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

c). En kule med sentrum i origo er beskrevet ved at $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, der r er kuleradien. Vi har at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cos^2 t + 2 \sin 2t + 2 \sin^2 t = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4 = 2^2,$$

og derfor ligger kurven på en kule om origo med radius 2.

d). Vi har at

$$y - z = \sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \sin t = 0,$$

og derfor ligger kurven i det gitte planet.

e). Kurven beskriver en sirkel med radius 2, på grunn av c), d), og det faktum at skjæringen mellom en kule med senter i origo og et plan gjennom origo er en sirkel med samme radius som kula.

```
% Oppgave 3.1.10e)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot3(2*cos(t),sqrt(2)*sin(t),sqrt(2)*sin(t));
```

Oppgave 11. Koden blir

```
% Oppgave 3.1.11 b)
quad(@(x)sqrt(2+t.^2),0,2*pi)
```

Oppgave 12.

a). Fra Eksempel 8 har vi at

$$\mathbf{r}(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t).$$

Derfor får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (r - r \cos t, r \sin t) \\ v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{r^2 - 2r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \\ &= r\sqrt{2\sqrt{1 - \cos t}} \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (r \sin t, r \cos t) \\ a(t) &= v'(t) = \frac{r\sqrt{2} \sin t}{2\sqrt{1 - \cos t}}. \end{aligned}$$

b). Buelengden ved en omdreining av hjulet er

$$\begin{aligned} s(2\pi) &= \int_0^{2\pi} v(t) dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2\sqrt{1 - \cos t}} dt \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt. \end{aligned}$$

c). Vi har at

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \cos t} &= \sqrt{\frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{1 + \cos t}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos t}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 t}{1 + \cos t}} = \frac{|\sin t|}{1 + \cos t}.\end{aligned}$$

d). Siden $\sin t < 0$ for $\pi < t < 2\pi$, blir integralet fra b) nå

$$\begin{aligned}r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin t|}{1 + \cos t} dt \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt - r\sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt.\end{aligned}$$

Bruker vi substitusjonen $u = 1 + \cos t$ får vi $du = -\sin t dt$, og vi får dermed

$$\begin{aligned}r\sqrt{2} \left(- \int_2^0 \frac{du}{\sqrt{u}} + \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \right) \\ = 2r\sqrt{2} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2r\sqrt{2} [2\sqrt{u}]_0^2 = 2r\sqrt{2} 2\sqrt{2} = 8r.\end{aligned}$$

Oppgave 14. La oss først regne ut hvor lang tid vi bruker på en omdreining rundt sirkelen med fart v når vi starter i $(r, 0)$. Siden omkretsen til sirkelen er $2\pi r$ må vi løse likningen $s = vt = 2\pi r$, som gir at $t = \frac{2\pi r}{v}$. Vi vet også at kurven kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = (r \cos(kt), r \sin(kt))$ for en k , og k kan vi finne ved å observere at argumentet kt skal være 2π når $t = \frac{2\pi r}{v}$. Løser vi $k \frac{2\pi r}{v} = 2\pi$ finner vi at $k = \frac{v}{r}$, slik at vi kan skrive $\mathbf{r}(t) = (r \cos(\frac{v}{r}t), r \sin(\frac{v}{r}t))$. Deriverer vi to ganger får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) &= \frac{v}{r} \left(-r \sin\left(\frac{v}{r}t\right), r \cos\left(\frac{v}{r}t\right) \right) \\ \mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}(t) &= \left(\frac{v}{r}\right)^2 \left(-r \cos\left(\frac{v}{r}t\right), -r \sin\left(\frac{v}{r}t\right) \right) = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \mathbf{r}(t).\end{aligned}$$

Oppgave 17.

a). Siden fartsretningen til bakhjulet alltid er retningen mot forhjulet, så vil $\mathbf{v}_1(t)$ ha samme retning som $\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$. Fra oppgaveteksten har vi at $\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ har lengde 1, så denne er dermed en enhetsvektor i fartsretningen, som også er definisjonen på $\mathbf{T}_1(t)$. Altså er $\mathbf{T}_1(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$, slik at $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t)$.

b). Vi antar at $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$, og får da at

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(t) &= (1, \cos t) \\ v(t) &= \sqrt{1 + \cos^2 t} \\ \mathbf{T}_1(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \right) \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \right).\end{aligned}$$

c). Koden blir

```
% Oppgave 3.1.17c)
t = 0:0.05:10;
plot(t,sin(t),'k-',...
      t + 1./sqrt(1+cos(t).^2),sin(t) + cos(t)./sqrt(1+cos(t).^2),'k+');
legend('bakhjul','forhjul');
axis('equal');
```

d). Sykkelen kjører fra venstre mot høyre, siden plottet faller sammen med det vi tegnet i c).

Oppgave 18. Med origo midt i sirkelen og med startpunkt $(b, 0)$, får vi: $x(t) = (a + b) \cos t - a \cos(\frac{a+b}{a}t)$, $y(t) = (a + b) \sin t - a \sin(\frac{a+b}{a}t)$

Oppgave 21.

a). Ved å bruke setning 3.1.4 får vi at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) &= \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}'(t) \\ &= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) \\ &= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times (k(t)\mathbf{r}(t)) \\ &= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + k(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Her har vi brukt regnereglene for vektorproduktet fra setning ??, samt at vektorproduktet av to parallelle vektorer alltid er $\mathbf{0}$.

b). På grunn av a) så må den deriverte av hver komponent i $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ også være 0. Men da er hver komponent i $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ en konstant. Men da er også $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ konstant.

c). Planet som inneholder $\mathbf{0}$, $\mathbf{r}(0)$, og $\mathbf{v}(0)$ er unikt identifisert ved at det har normalvektor $\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$, og går gjennom $\mathbf{0}$. Å vise at $\mathbf{r}(t)$ ligger i dette planet blir da det samme som å vise at $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)) = 0$ (siden planet består av alle punkter som står normalt på normalvektoren). Dette er tilfellet siden

$$\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)) = \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = 0,$$

hvor vi har brukt det vi viste i b), samt at vektorproduktet $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ står normalt på $\mathbf{r}(t)$.

Oppgave 24. Koden blir

```
% Oppgave 5.2
t=linspace(0,50,1000);
x1=t;
y1=t.^2;
z1=sin(t);
x2=sin(t).^2;
y2=cos(t).^2;
z2=exp(-t);
```

```
plot3(x1,y1,z1)
figure(2)
plot3(x2,y2,z2)
```

Seksjon 3.2

Oppgave 1. Vi har funksjonen $f(x, y) = x^2y^3$, og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 3t).$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (2t, 3) \\ \nabla f &= (2xy^3, 3x^2y^2) \\ \nabla f(\mathbf{r}(t)) &= (54t^5, 27t^6).\end{aligned}$$

Vi ser da at

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (54t^5, 27t^6) \cdot (2t, 3) = 108t^6 + 81t^6 = 189t^6.$$

Oppgave 3. Vi har funksjonen $f(x, y, z) = x^2z - y \sin(yz)$, og

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, t, \cos(t^2)).$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (e^t, 1, -2t \sin(t^2)) \\ \nabla f &= (2xz, -\sin(yz) - yz \cos(yz), x^2 - y^2 \cos(yz)) \\ \nabla f(\mathbf{r}(t)) &= (2e^t \cos(t^2), -\sin(t \cos(t^2)) - t \cos(t^2) \cos(t \cos(t^2)), e^{2t} - t^2 \cos(t \cos(t^2))).\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned}g'(t) &= \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (2e^t \cos(t^2), -\sin(t \cos(t^2)) - t \cos(t^2) \cos(t \cos(t^2)), e^{2t} - t^2 \cos(t \cos(t^2))) \\ &\quad \cdot (e^t, 1, -2t \sin(t^2)) \\ &= 2e^{2t} \cos(t^2) - \sin(t \cos(t^2)) - t \cos(t^2) \cos(t \cos(t^2)) \\ &\quad - 2t \sin(t^2) e^{2t} + 2t^3 \cos(t \cos(t^2)) \sin(t^2),\end{aligned}$$

og vi kan ikke forenkle dette uttrykket videre.

Oppgave 4. Vi har funksjonen $f(x, y, t) = ty^2 \ln(x^2 + 1)$, og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^3, 3t + 1).$$

Hvis vi lager oss den nye parametriseringen

$$\mathbf{s}(t) = (\mathbf{r}(t), t) = (t^3, 3t + 1, t),$$

SEKSJON 3.2

7

så ser vi at $g(t) = f(\mathbf{s}(t))$, som er en form der vi kan bruke kjerneregelen. Vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{s}'(t) &= (3t^2, 3, 1) \\ \nabla f &= \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}, 2ty \ln(x^2+1), y^2 \ln(x^2+1) \right) \\ \nabla f(\mathbf{s}(t)) &= \left(\frac{2t^4(3t+1)^2}{t^6+1}, 2t(3t+1) \ln(t^6+1), (3t+1)^2 \ln(t^6+1) \right).\end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\begin{aligned}g'(t) &= \nabla f(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) \\ &= \frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1} + 6t(3t+1) \ln(t^6+1) + (3t+1)^2 \ln(t^6+1) \\ &= \frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1} + (3t+1)(9t+1) \ln(t^6+1).\end{aligned}$$

Oppgave 5. Vi har

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy + x \end{pmatrix}.$$

Vi ser at

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y+1 \end{pmatrix}, \text{ og } \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}.$$

Når $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$ blir $\mathbf{r}'(t) = (\cos t, -\sin t)$. Hvis $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ blir dermed

$$\begin{aligned}\mathbf{G}'(t) &= \cos t \begin{pmatrix} 2xy \\ y+1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} \\ &= \cos t \begin{pmatrix} 2 \sin t \cos t \\ \cos t + 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t \\ \cos^2 t + \cos t - \sin^2 t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Oppgave 7. Vi har temperaturfunksjonen $f(x, y, t) = 20 + 2t - x^2 + y^2$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (3t - \frac{t^2}{4}, 2t + \frac{t^2}{8}, t)$. Vi får at

$$\begin{aligned}\nabla f &= (-2x, 2y, 2) \\ \nabla f(\mathbf{r}(t)) &= (-6t + \frac{t^2}{2}, 4t + \frac{t^2}{4}, 2) \\ \nabla f(\mathbf{r}(1)) &= (-11/2, 17/4, 2) \\ \mathbf{r}'(t) &= (3 - \frac{t}{2}, 2 + \frac{t}{4}, 1) \\ \mathbf{r}'(1) &= (5/2, 9/4, 1)\end{aligned}$$

Hvis $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ får vi dermed

$$\begin{aligned}g'(1) &= \nabla f(\mathbf{r}(1)) \cdot \mathbf{r}'(1) = (-11/2, 17/4, 2) \cdot (5/2, 9/4, 1) \\ &= -55/4 + 153/16 + 2 = \frac{-220 + 153 + 32}{16} = -\frac{35}{16}.\end{aligned}$$

Siden dette er mindre enn null, så er temperaturen avtagende langs kurven nær 1.

Oppgave 8. For å regne ut $g''(t)$ med $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$, bruker vi først kjerneregelen for å regne ut $g'(t)$ og får

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y'(t).$$

For å derivere denne en gang til må vi igjen bruke kjerneregelen for å derivere $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))$, og deretter bruke regelen for å derivere et produkt. Vi får først (vi dropper å skrive opp at vi beregner de partielle deriverte i $\mathbf{r}(t)$, for å unngå for mye skriving. Vi tar med de disse bare på slutten.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y'(t) \\ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}y'(t).\end{aligned}$$

Innsetting gir nå

$$\begin{aligned}g''(t) &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial t}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}x''(t) + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial t}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y''(t) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y'(t) \right) x'(t) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}y'(t) \right) y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y''(t) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))x'(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t))x'(t)y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))y'(t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y''(t),\end{aligned}$$

der vi til slutt satt inn at vi beregnet $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i $\mathbf{r}(t)$.

Seksjon 3.3

Oppgave 1. Vi har $f(x, y) = x$ og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

Vi har

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}(t)) &= \sin t \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (\cos t, -\sin t) \\ v(t) &= 1 \\ f(\mathbf{r}(t))v(t) &= \sin t.\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))v(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.$$

SEKSJON 3.3

9

Oppgave 2. Vi har $f(x, y) = xy$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (3t, 4t)$ med $0 \leq t \leq 2$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (3, 4) \\ v(t) &= 5 \\ f(\mathbf{r}(t)) &= 3t \times 4t = 12t^2.\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\int_C f ds = \int_0^2 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^2 60t^2 dt = [20t^3]_0^2 = 160.$$

Oppgave 3. Vi har $f(x, y, z) = z \cos(xy)$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (3t, 4t, 5t)$ med $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$. Vi ser fort at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (3, 4, 5) \\ v(t) &= 5\sqrt{2} \\ f(\mathbf{r}(t)) &= 5t \cos(12t^2).\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^{\sqrt{\pi}} f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} 25\sqrt{2}t \cos(12t^2)dt \\ &= \left[25\sqrt{2}/24 \sin(12t^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} = 0.\end{aligned}$$

Oppgave 4. Vi har $f(x, y, z) = xz$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t)$ med $0 \leq t \leq 1$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (6t^2, 6\sqrt{2}t, 6) \\ v(t) &= \sqrt{36t^4 + 72t^2 + 36} = 6(t^2 + 1) \\ f(\mathbf{r}(t)) &= 12t^4\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^1 12t^4 6(t^2 + 1)dt \\ &= \int_0^1 (72t^6 + 72t^4)dt = \left[\frac{72}{7}t^7 + \frac{72}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{72}{7} + \frac{72}{5} = \frac{864}{35}\end{aligned}$$

Oppgave 6. Vi har funksjonen $f(x, y, z) = xyz$ og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}t), 0 \leq t \leq 1.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}) \\ v(t) &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t} \\ f(\mathbf{r}(t)) &= -\sqrt{2}t.\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^1 -\sqrt{2}t(e^t + e^{-t})dt \\ &= \left[\sqrt{2}t(-e^t + e^{-t}) \right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2}(e^t - e^{-t})dt \\ &= \sqrt{2}(-e + e^{-1}) + \left[\sqrt{2}(e^t + e^{-t}) \right]_0^1 \\ &= \sqrt{2}(-e + e^{-1}) + \sqrt{2}(e + e^{-1}) - 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}(e^{-1} - 1).\end{aligned}$$

hvor vi har brukt delvis integrasjon.

Oppgave 9. At de to parametriseringene $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ har motsatt orientering betyr at $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(d)$, og $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(c)$. Med ϕ slik at $\mathbf{r}_2(\phi(t)) = \mathbf{r}_1(t)$ har vi at $\phi(a) = d$ og $\phi(b) = c$, slik at ϕ er en avtagende funksjon, og dermed $\phi'(t) \leq 0$. La oss følge beviset for Setning 3.3.5 i resten av oppgaven: regner vi ut linjeintegralet med parametriseringen \mathbf{r}_1 får vi

$$I_1 = \int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}_2(\phi(t)))v_1(t)dt,$$

og som i beviset for Setning 3.3.5 har vi at $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(\phi(t))\phi'(t)$ og $v_1(t) = v_2(\phi(t))|\phi'(t)|$, men siden $\phi'(t) \leq 0$ her så blir $v_1(t) = -v_2(\phi(t))\phi'(t)$. Gjør vi variabelskiftet $u = \phi(t)$ som i beviset får vi nå

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_a^b f(\mathbf{r}_2(\phi(t)))v_1(t)dt = - \int_a^b f(\mathbf{r}_2(\phi(t)))v_2(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= - \int_d^c f(\mathbf{r}_2(u))v_2(u)du = \int_c^d f(\mathbf{r}_2(u))v_2(u)du,\end{aligned}$$

slik at verdiene vi får når vi bruker parametriseringer med motsatte orienteringer også blir de samme.

Oppgave 10. Vi har den parametriserte kurven \mathcal{C} gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(2t - t^2, \frac{8}{3}t^{3/2} \right), 0 \leq t \leq 1$$

Funksjonen som beskriver utbyggingskostnadene er gitt ved

$$p(x, y) = K(10 + y),$$

der K er en gitt konstant. Vi har nå at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (2 - 2t, 4t^{1/2}) \\ v(t) &= \sqrt{(2 - 2t)^2 + 16t} = \sqrt{4 - 8t + 4t^2 + 16t} \\ &= \sqrt{4 + 8t + 4t^2} = 2 + 2t \\ p(\mathbf{r}(t)) &= K \left(10 + \frac{8}{3}t^{3/2} \right).\end{aligned}$$

SEKSJON 3.3

11

De totale utbyggingskostnadene blir

$$\begin{aligned}\int_C p ds &= \int_0^1 p(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^1 K \left(10 + \frac{8}{3}t^{3/2}\right) (2 + 2t)dt \\ &= K \int_0^1 \left(20 + 20t + \frac{16}{3}t^{3/2} + \frac{16}{3}t^{5/2}\right) dt \\ &= K \left[20t + 10t^2 + \frac{32}{15}t^{5/2} + \frac{32}{21}t^{7/2}\right]_0^1 \\ &= K \left(20 + 10 + \frac{32}{15} + \frac{32}{21}\right) \\ &= K \frac{3150 + 224 + 160}{105} = \frac{3534}{105}K \approx 33.7K.\end{aligned}$$

Oppgave 11. Vi har den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{9}t^{3/2}, \frac{t}{9}\right), 1 \leq t \leq 7.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \left(t, \frac{\sqrt{2}}{3}t^{1/2}, \frac{1}{9}\right) \\ v(t) &= \sqrt{t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{1}{81}} = \left|t + \frac{1}{9}\right| = t + \frac{1}{9},\end{aligned}$$

hvor vi kunne fjerne absoluttverditegnet siden $1 \leq t \leq 7$. Bensinforbruket f til en bil er gitt ved $\frac{1}{15} + \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}$. Dette er en litt spesiell form: Her vil vi jo helst uttrykke $\frac{dz}{ds}$ som funksjon av t . Det viser seg faktisk at vi kan klare dette, uten at vi finner uttrykket for z som funksjon av s ! Setter vi nemlig inn $v(t) = \frac{ds}{dt} = t + \frac{1}{9}$ og $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{9}$ i uttrykket

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt}$$

som vi har fra kjerneregelen, får vi at $\frac{1}{9} = \frac{dz}{ds} \left(t + \frac{1}{9}\right)$, altså er

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{9t + 1}.$$

Vi får da

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_1^7 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{2} \frac{1}{9t + 1}\right) \left(t + \frac{1}{9}\right) dt \\ &= \int_1^7 \left(\frac{1}{15}t + \frac{1}{135} + \frac{1}{18}\right) dt = \left[\frac{1}{30}t^2 + \left(\frac{1}{135} + \frac{1}{18}\right)t\right]_1^7 \\ &= \frac{1}{30} \times 48 \left(\frac{1}{135} + \frac{1}{18}\right) \times 6 = \frac{8}{5} + \frac{2}{45} + \frac{1}{3} = \frac{72 + 2 + 15}{45} = \frac{89}{45}.\end{aligned}$$

Seksjon 3.4

Oppgave 1. Vi har $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t, -3t), 1 \leq t \leq 3.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (-3t, 2t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (2, -3),\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_1^3 (-3t, 2t) \cdot (2, -3) dt \\ &= \int_1^3 -12t dt = [-6t^2]_1^3 = -48.\end{aligned}$$

Oppgave 2. Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (\cos^2 t, -\sin t \cos t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t, \cos t),\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t, -\sin t \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos^2 t + \sin t \cos^2 t) dt = 0.\end{aligned}$$

Oppgave 3. Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy, x^2, xz)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3), 0 \leq t \leq 2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (t^5, t^2, t^4) \\ \mathbf{r}'(t) &= (1, 2t, 3t^2),\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^2 (t^5, t^2, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^2 (t^5 + 2t^3 + 3t^6) dt = \left[\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{7}t^7 \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{6} + 8 + \frac{384}{7} = \frac{224 + 168 + 1152}{21} = \frac{1544}{21}.\end{aligned}$$

Oppgave 4. Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{z}{x}, y, x)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, \ln t, \sin t), 1 \leq t \leq 2.$$

Vi får at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (e^{-t} \sin t, \ln t, e^t) \\ \mathbf{r}'(t) &= \left(e^t, \frac{1}{t}, \cos t\right),\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_1^2 (e^{-t} \sin t, \ln t, e^t) \cdot (e^t, \frac{1}{t}, \cos t) dt \\ &= \int_1^2 \left(\sin t + \frac{\ln t}{t} + e^t \cos t \right) dt \\ &= [-\cos t]_1^2 + \int_1^2 \frac{\ln t}{t} dt + \int_1^2 e^t \cos t dt \\ &= \cos 1 - \cos 2 + \int_1^2 \frac{\ln t}{t} dt + \int_1^2 e^t \cos t dt.\end{aligned}$$

Det første av de gjenværendene integralene kan vi finne ved hjelp av substitusjonen $u = \ln t$, som gir $du = \frac{dt}{t}$. Det første integralet blir derfor

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} (\ln 2)^2.$$

det andre integralet finner vi ved to ganger delvis integrasjon:

$$\int e^t \cos t dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t dt = e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \cos t dt.$$

Samler vi integralene her finner vi at $\int e^t \cos t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t)$, som gjør at det tredje integralet blir

$$\int_1^2 e^t \cos t dt = \left[\frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^2 (\sin 2 + \cos 2) - \frac{1}{2} e (\sin 1 + \cos 1).$$

Summen av det hele blir derfor

$$\cos 1 - \cos 2 + \frac{1}{2} (\ln 2)^2 + \frac{1}{2} e^2 (\sin 2 + \cos 2) - \frac{1}{2} e (\sin 1 + \cos 1).$$

Oppgave 6. Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y)$, og kurven \mathcal{C} kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t, 5 \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (5 \cos t, 5 \sin t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (-5 \sin t, 5 \cos t),\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (5 \cos t, 5 \sin t) \cdot (-5 \sin t, 5 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -25 \sin t \cos t + 25 \sin t \cos t = 0.\end{aligned}$$

Oppgave 7. Vi har $\mathbf{F}(x, y) = x^2 y \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= t^4 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} \\ \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{i} + 2t \mathbf{j},\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-2}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{-2}^2 (t^4 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t \mathbf{j}) dt \\ &= \int_{-2}^2 3t^4 dt = \left[\frac{3}{5} t^5 \right]_{-2}^2 = 2 \times \frac{96}{5} = \frac{192}{5}.\end{aligned}$$

Oppgave 8. Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos x \sin y, x)$, og kurven \mathcal{C} kan parametriseres ved hjelp av tre kurver $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, hvor hver av disse igjen er parametrisert ved

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= (t, 0), \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \mathbf{r}_2(t) &= (\pi, t), \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \mathbf{r}_3(t) &= (\pi - t, \pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi.\end{aligned}$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) &= (0, t) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) &= (-\sin t, \pi) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) &= (\cos(\pi - t) \sin(\pi - t), \pi - t) \\ &= (-\cos t \sin t, \pi - t) \\ \mathbf{r}'_1(t) &= (1, 0) \\ \mathbf{r}'_2(t) &= (0, 1) \\ \mathbf{r}'_3(t) &= (-1, -1)\end{aligned}$$

SEKSJON 3.4

15

og får derfor

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt + \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \mathbf{r}'_3(t) dt \\
 &= \int_0^\pi (\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \mathbf{r}'_3(t)) dt \\
 &= \int_0^\pi (0 + \pi + \cos t \sin t - \pi + t) dt \\
 &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin(2t) + t\right) dt = \left[-\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} t^2\right]_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Oppgave 12. La $\mathbf{r}_1(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}_2(t) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ være to parametriseringer av den lukkede kurven \mathcal{C} . La videre de to parametriseringene ha forskjellige start/stoppested, \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 , slik at $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_1(b) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}_2(c) = \mathbf{r}_2(d) = \mathbf{x}_1$. Det finnes da en $a < t_0 < b$ slik at $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{x}_1$, og en $c < t_1 < d$ slik at $\mathbf{r}_2(t_1) = \mathbf{x}_0$.

Regner vi ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ som startsteder, respektive (d.v.s. vi bruker parametriseringene $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, respektive), får vi

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt &= \int_a^{t_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_{t_0}^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt \\
 \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt &= \int_c^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt + \int_{t_1}^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt,
 \end{aligned}$$

der vi også har splittet opp integralet. Splitter vi opp \mathcal{C} i de to kurvene $\mathcal{C}_1 = \mathbf{r}_1([a, t_0])$ (fra \mathbf{x}_0 til \mathbf{x}_1), og $\mathcal{C}_2 = \mathbf{r}_1([t_0, b])$ (fra \mathbf{x}_1 til \mathbf{x}_0), ser vi at $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt$ over ble splittet opp i $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, mens $\int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt$ ble splittet opp i $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (siden $\mathbf{r}_2([c, t_1]) = \mathcal{C}_2$, $\mathbf{r}_2([t_1, d]) = \mathcal{C}_1$, der vi har byttet ut med $\int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ siden vi vet at kurveintegralet er uavhengig av parametriseringen. Resultatet følger nå fra at

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

siden rekkefølgen under addisjon ikke spiller noen rolle.

Oppgave 13. Vi skal bruke følgende observasjon til å forklare det som står i oppgaven: Når vi endrer orienteringen på en kurve, endrer enhetstangentvektoren retning. Dette høres jo opplagt ut, men la oss for ordens skyld vise det: Hvis $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er to ekvivalente parametriseringer med motsatt orientering har vi som i Oppgave 3.3.9 at $\mathbf{r}_2(\phi(t)) = \mathbf{r}_1(t)$, der $\phi'(t) \leq 0$. Som i Oppgave 3.3.9 har vi også at $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(\phi(t))\phi'(t)$. $\mathbf{v}_1(t)$ og $\mathbf{v}_2(t)$ peker altså i motsatte retninger, og da må vi ha at $\mathbf{T}_1(t) = -\mathbf{T}_2(r)$.

Som nevnt i oppgaven, $\int_{\mathcal{C}} f ds$ avhenger ikke av orienteringen til \mathcal{C} . Men $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ vil likevel avhenge av orienteringen, siden \mathbf{T} endrer seg ved skifte av orientering. Integranden $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ endrer fortegn ved skifte av orientering, siden $\mathbf{T}_1(t) = -\mathbf{T}_2(r)$ fra utregningen over.

Dermed skifter hele kurveintegralet også fortegn. Dette er kompatibelt med Setning 3.4.4, som jo sier at $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ også skifter fortegn når vi skifter orientering.

Oppgave 14.

a). Retningen til trekkraften er $(20 - t, 5)$. Enhetsvektoren i denne retningen er

$$\left(\frac{20 - t}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}}, \frac{5}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}} \right).$$

Siden trekkraften er konstant lik K , så blir kraftvektoren lik

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{K(20 - t)}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}}, \frac{5K}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}} \right),$$

der strekningen båten dras er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 20$. Arbeidet som kraften utfører blir da

$$\begin{aligned} \int_0^{20} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt &= \int_0^{20} \frac{K(20 - t)}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}} dt \\ &= K \int_0^{20} \frac{20 - t}{\sqrt{(20 - t)^2 + 25}} dt. \end{aligned}$$

b). Vi substituerer $u = (20 - t)^2 + 25$, og får $du = -2(20 - t)dt$, slik at integralet blir

$$\begin{aligned} K \int_{425}^{25} -\frac{1}{2\sqrt{u}} du &= K \int_{25}^{425} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = K [\sqrt{u}]_{25}^{425} \\ &= K(\sqrt{425} - 5) = 5K(\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

Oppgave 15.

a). Trekkraften som virker på lasten har retning fra lasten mot taljen. Denne vektoren er $(1, 1) - (t, t^2) = (1 - t, 1 - t^2)$. Lengden til denne vektoren er

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 - t)^2 + (1 - t^2)^2} &= \sqrt{(1 - t)^2 + (1 - t)^2(1 + t)^2} \\ &= (1 - t)\sqrt{1 + (1 + t)^2} \\ &= (1 - t)\sqrt{2 + 2t + t^2} \end{aligned}$$

Enhetsvektoren i trekkretningen er derfor

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - t)\sqrt{2 + 2t + t^2}}(1 - t, 1 - t^2) &= \frac{1 - t}{(1 - t)\sqrt{2 + 2t + t^2}}(1, 1 + t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2t + t^2}}(1, 1 + t) \end{aligned}$$

Siden trekkraften er konstant lik K i trekkretningen er derfor trekkraften lik

$$\mathbf{K}(t) = \frac{K}{\sqrt{2 + 2t + t^2}}(1, 1 + t).$$

b). Siden $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ blir $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Arbeidet blir

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{K}{\sqrt{2+2t+t^2}} (1, 1+t) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{K}{\sqrt{2+2t+t^2}} + \frac{2Kt(1+t)}{\sqrt{2+2t+t^2}} \right) dt \\ &= K \int_0^1 \frac{1+2t+2t^2}{\sqrt{2+2t+t^2}} dt. \end{aligned}$$

c). Vi har at

$$\begin{aligned} \left((t-1)\sqrt{t^2+2t+2} \right)' &= \sqrt{t^2+2t+2} + \frac{(t-1)(2t+2)}{2\sqrt{t^2+2t+2}} \\ &= \frac{t^2+2t+2 + (t-1)(t+1)}{\sqrt{t^2+2t+2}} \\ &= \frac{2t^2+2t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}. \end{aligned}$$

Det siste kjenner vi igjen fra integranden i b).

d). Vi ser nå at

$$W = K \left[(t-1)\sqrt{t^2+2t+2} \right]_0^1 = K\sqrt{2}.$$

Seksjon 3.5

Oppgave 1. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + 2x, x^2)$ er definert på et enkeltsammenhengende område, og siden $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ følger det fra teorem 3.5.4 at \mathbf{F} har en potensialfunksjon. Vi kan finne denne ved å løse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y) = 2xy + 2x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y) = x^2. \end{aligned}$$

Disse to likningene gir

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= x^2y + x^2 + C(y) \\ \phi(x, y) &= x^2y + D(x). \end{aligned}$$

det er da klart at $\phi(x, y) = x^2y + x^2$ er en potensialfunksjon.

Oppgave 2. Vi ser på $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y, x^2e^y + x)$, og regner ut at

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2xe^y + 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2xe^y.\end{aligned}$$

Siden disse er forskjellige er ikke vektorfeltet konservativt, og F har da ingen potensialfunksjon.

Oppgave 4. Vi ser på $F(x, y, z) = (y^2z + z, 2xyz - 2, xy^2 + x)$, og regner ut

- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2yz, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz,$
- $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2xy, \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2xy,$
- $\frac{\partial F_1}{\partial z} = y^2 + 1, \frac{\partial F_3}{\partial x} = y^2 + 1.$

Feltet er derfor konservativt, og vi må løse likningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y) = y^2z + z \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y) = 2xyz - 2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x, y) = xy^2 + x.\end{aligned}$$

for å finne en potensialfunksjon. Løser vi disse tre finner vi at

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= y^2zx + zx + C(y, z) \\ &= xy^2z - 2y + D(x, z) \\ &= xy^2z + xz + E(x, y).\end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\phi(x, y, z) = xy^2z - 2y + xz.$$

er en potensialfunksjon.

Oppgave 5. Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sin z + 2z, x \sin z + 3, xy \cos z + 2x)$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \sin z \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \sin z \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= y \cos z + 2 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= y \cos z + 2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= x \cos z \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= x \cos z.\end{aligned}$$

SEKSJON 3.5

19

Feltet er derfor konservativt, og vi må løse likningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y) = y \sin z + 2z \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y) = x \sin z + 3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x, y) = xy \cos z + 2x.\end{aligned}$$

for å finne en potensialfunksjon. Løser vi disse tre finner vi at

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= xy \sin z + 2xz + C(y, z) \\ &= xy \sin z + 3y + D(x, z) \\ &= xy \sin z + 2xz + E(x, y).\end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\phi(x, y, z) = xy \sin z + 2xz + 3y$$

er en potensialfunksjon.

Oppgave 7. Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t \cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Det er tungvint å regne ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ direkte. I stedet forsøker vi å finne en potensialfunksjon. Vi regner ut

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x.$$

Felter er derfor konservativt, og har en potensialfunksjon. Vi må løse likningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y) = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y) = x^2.\end{aligned}$$

Integrasjon gir oss at

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= x^2 y + C(y) \\ \phi(x, y) &= x^2 y + D(x).\end{aligned}$$

$\phi(x, y) = x^2 y$ er derfor en potensialfunksjon for \mathbf{F} . Vi har derfor

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla \phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(0, 1) - \phi(0, 0) = 0,$$

hvor vi har brukt setning 3.5.1.

Oppgave 8. Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (\cos(xy) - xy \sin(xy), -x^2 \sin(xy))$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-t \cos t, \sin t - \cos t), 0 \leq t \leq \pi.$$

Vi regner ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -x \sin(xy) - x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) \\ &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy),\end{aligned}$$

som viser at feltet er konservativt. For å finne en potensialfunksjon må vi løse

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y) = -x^2 \sin(xy).\end{aligned}$$

Den siste er enklest, og gir oss at $\phi(x, y) = x \cos(xy) + C(x)$. Den første løser vi slik:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{1}{y} \sin(xy) - y \int x \sin(xy) dx \\ &= \frac{1}{y} \sin(xy) + x \cos(xy) - \int \cos(xy) dx \\ &= \frac{1}{y} \sin(xy) + x \cos(xy) - \frac{1}{y} \sin(xy) + C(y) \\ &= x \cos(xy) + C(y).\end{aligned}$$

Vi ser derfor at $\phi(x, y) = x \cos(xy)$ er en potensialfunksjon. Vi har derfor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(\pi, 1) - \phi(0, -1) = -\pi.$$

Oppgave 10. Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z + 2xy, 2xyz + x^2, xy^2 + 1)$, og kurven \mathcal{C} parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Vi regner ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2yz + 2x \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2yz + 2x \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= y^2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= y^2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 2xy \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 2xy,\end{aligned}$$

SEKSJON 3.5

21

som viser at feltet er konservativt. For å finne en potensialfunksjon må vi løse

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y, z) = y^2 z + 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y, z) = 2xyz + x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x, y, z) = xy^2 + 1.\end{aligned}$$

Disse tre gir

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= y^2 z x + x^2 y + C(y, z) \\ \phi(x, y, z) &= xy^2 z + x^2 y + C(x, z) \\ \phi(x, y, z) &= xy^2 z + z + C(x, y).\end{aligned}$$

Vi ser derfor at $\phi(x, y, z) = xy^2 z + x^2 y + z$ er en potensialfunksjon. Vi har derfor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = 3.$$

Oppgave 11. Vi setter $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^{xz+y}, e^{xz+y} + 2z, xe^{xz+y} + 2y)$, og lar C være skjæringskurven mellom kulen $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ og planet $x - 2y + 3z = 1$, der kurven blir gitt positiv orientering sett ovenfra. Vi regner ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= ze^{xz+y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= ze^{xz+y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= e^{xz+y} + zxe^{xz+y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= e^{xz+y} + xze^{xz+y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= xe^{xz+y} + 2 \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= xe^{xz+y} + 2,\end{aligned}$$

som viser at feltet er konservativt. For å finne en potensialfunksjon må vi løse

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y, z) = ze^{xz+y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y, z) = e^{xz+y} + 2z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x, y, z) = xe^{xz+y} + 2y.\end{aligned}$$

Disse tre gir

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= e^{xz+y} + C(y, z) \\ \phi(x, y, z) &= e^{xz+y} + 2yz + C(x, z) \\ \phi(x, y, z) &= e^{xz+y} + 2zy + C(x, y).\end{aligned}$$

Vi ser derfor at $\phi(x, y, z) = e^{xz+y} + 2yz$ er en potensialfunksjon. Vi har derfor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}),$$

der \mathbf{a} og \mathbf{b} er start- og sluttpunkt på kurven, respektive. Siden kurven er lukket kan vi sette $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, og svaret vårt blir dermed $\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = 0$.

Oppgave 12.

a). Med $\phi_1(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ får vi

$$\nabla \phi_1(x, y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \mathbf{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \mathbf{j} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y).$$

b). Siden \mathbf{F} har potensialfunksjonen ϕ_1 , og denne er definert til høyre for y -aksen, så har vi at

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \phi_1(3, 3) - \phi_1(1, -1) = \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

c). Med $\phi_2(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + C$ får vi

$$\nabla \phi_2(x, y) = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \mathbf{i} + -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \mathbf{j} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y).$$

Koden blir

e). Funksjonene ϕ_1 og ϕ_2 er begge kontinuerlige når $x, y \neq 0$. Spesielt er de kontinuerlige i hver kvadrant, og siden de har de samme partielle deriverte, så skiller de seg fra hverandre med en konstant i hver kvadrant. Men som vi skal se, konstanten er forskjellig fra kvadrant til kvadrant:

I likningen $\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y) + C$ setter vi inn punktet $(1, 1)$ fra første kvadrant, og får $\arctan(1) = -\arctan(1) + C$, som gir $C = \frac{\pi}{2}$. Setter vi inn punktet $(-1, -1)$ fra tredje kvadrant får vi samme verdi for C .

Setter vi så inn punktet $(-1, 1)$ fra andre kvadrant får vi at $\arctan(-1) = -\arctan(-1) + C$, som gir $C = -\frac{\pi}{2}$. Setter vi inn punktet $(1, -1)$ fra fjerde kvadrant får vi samme verdi for C .

Setter vi inn for ϕ_1 og ϕ_2 får vi dermed at

$$\begin{aligned} \arctan \frac{y}{x} &= -\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} \text{ i første og tredje kvadrant, eller når } xy > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} &= -\arctan \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} \text{ i andre og fjerde kvadrant, eller når } xy < 0. \end{aligned}$$

f). Vi vet at $\phi_1(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ er en potensialfunksjon for $x \neq 0$, uansett verdi av C . For $y > 0$ har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi_1(x, y) &= \frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi_1(x, y) &= -\frac{\pi}{2} + C. \end{aligned}$$

Velger vi derfor potensialfunksjonen $\psi_1(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ for $x > 0$ og potensialfunksjonen $\psi_2(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C + \pi$ for $x < 0$ får vi at, for $y > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_1(x, y) &= \frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \psi_2(x, y) &= -\frac{\pi}{2} + C + \pi = \frac{\pi}{2} + C,\end{aligned}$$

slik at vi har en potensialfunksjon for \mathbf{F} , ψ , definert ved

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} + C \text{ for } x > 0, \\ \psi(x, y) &= \frac{\pi}{2} + C \text{ for } x = 0, y > 0, \\ \psi(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} + C + \pi \text{ for } x < 0,\end{aligned}$$

som er kontinuerlig utenom den negative y -aksen. Gitt en verdi for C , så er det klart at dette er den eneste måten å kontinuerlig utvide ϕ_1 til planet utenom den negative y -aksen. For å se at det er umulig å utvide ϕ_1 til den negative y -aksen, regner vi ut, for $y < 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{y}{x} + C = -\frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \psi(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{y}{x} + C + \pi = \frac{\pi}{2} + C + \pi = \frac{3\pi}{2} + C.\end{aligned}$$

Derfor blir ikke utvidelsen vi har gjort kontinuerlig også på den negative y -aksen, slik at det er umulig å lage en kontinuerlig utvidelse til hele \mathbb{R}^2 .

Seksjon 3.6

Oppgave 1. Vi ser på likningen

$$4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$$

Vi fullfører kvadratene:

$$\begin{aligned}4(x^2 + 8x + 16) - 64 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 37 &= 0 \\ 4(x + 4)^2 + 9(y - 1)^2 &= 36 \\ \frac{(x + 4)^2}{3^2} + \frac{(y - 1)^2}{2^2} &= 1.\end{aligned}$$

Ser fra Setning 3.6.3 at dette er en ellipse med sentrum i $(-4, 1)$ og halvakser $a = 3$ og $b = 2$. Siden $a > b$ har vi at brennvidden er gitt ved

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

Brennpunktene blir da $(-4, 1) \pm (\sqrt{5}, 0)$, som blir $(-4 - \sqrt{5}, 1)$ og $(-4 + \sqrt{5}, 1)$.

Oppgave 2. Vi ser på likningen

$$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0.$$

Vi fullfører det ene kvadratet:

$$(y - 1)^2 - 4x - 8 = 0,$$

som også kan skrives $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$. Fra setning 3.6.1 har vi at dette er en parabel med toppunkt $(-2, 1)$, og med brennvidde 1. Brennpunktet er $(-1, 1)$.

Oppgave 3. Vi fullfører kvadratene i likningen:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 &= x^2 - 2x + 1 - y^2 + 4y - 4 - 1 + 4 - 7 \\ &= (x - 1)^2 - (y - 2)^2 - 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Derfor har vi at $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$. På grunn av setning 3.6.5 fremstiller derfor likningen en hyperbel med halvakse 2, og med åpning mot venstre/høyre. Brennvidden blir

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Sentrum i hyperbelen er $(1, 2)$. Brennpunkter blir $(1, 2) \pm (2\sqrt{2}, 0)$, som blir $(1 - 2\sqrt{2}, 2)$ og $(1 + 2\sqrt{2}, 2)$. Asymptotene er $y = \pm(x - 1) + 2$.

Oppgave 4. Vi fullfører kvadratene i likningen:

$$\begin{aligned} 16y^2 - 9x^2 + 32y + 54x - 209 &= 16y^2 + 32y + 16 - 9x^2 + 54x - 81 - 16 + 81 - 209 \\ &= 16(y + 1)^2 - 9(x - 3)^2 - 144 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Derfor har vi at $\frac{16}{144}(y + 1)^2 - \frac{9}{144}(x - 3)^2 = \frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{4^2} = 1$. På grunn av setning 3.6.5 fremstiller derfor likningen en hyperbel med halvakse $b = 3$, og med åpning opp/ned. Sentrum i hyperbelen blir $(3, -1)$. Brennvidden blir

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Brennpunkter blir $(3, -1) \pm (0, 5)$, som blir $(3, 4)$ og $(3, -6)$. Asymptotene blir $y = \pm\frac{3}{4}(x - 3) - 1$.

Oppgave 5. Vi ser på likningen

$$3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0.$$

Vi fullfører kvadratene og får

$$\begin{aligned} 3(x^2 + 2x + 1) - 3 + 5(y^2 - 4y + 4) - 20 + 8 &= 0 \\ 3(x + 1)^2 + 5(y - 2)^2 &= 15 \\ \frac{(x + 1)^2}{5} + \frac{(y - 2)^2}{3} &= 1. \end{aligned}$$

Ser fra setning 3.6.3 at dette er en ellipse med sentrum i $(-1, 2)$ og halvakser $a = \sqrt{5}$ og $b = \sqrt{3}$. Siden $a > b$ har vi at $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$, så brennpunktene er $(-1 - \sqrt{2}, 2)$ og $(-1 + \sqrt{2}, 2)$.

Oppgave 8. Vi skal se på likningen til tangenten i (x_0, y_0) på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Deriverer vi begge sider med hensyn på x i punktet x_0 får vi at

$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0 y'(x_0)}{b^2} = 0.$$

Vi ser da at $y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$. Likningen for tangenten blir da

$$\begin{aligned} y &= y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ &= -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) + y_0 \\ &= -\frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0} + y_0 \\ &= -\frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} + \frac{b^2}{y_0} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) \\ &= -\frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} + \frac{b^2}{y_0}. \end{aligned}$$

Flytter vi over på venstre side og ganger opp får vi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

som var det vi skulle vise.

Oppgave 9. $y^2 = 4ax$ betyr at $y = \pm\sqrt{4ax}$. Anta først at $y_0 > 0$ og $a > 0$. Da er $y_0 = \sqrt{4ax_0}$. Tangentlinjen i (x_0, y_0) er da gitt ved

$$y = \frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}(x - x_0) + \sqrt{4ax_0}.$$

Skjæringspunktet med x -aksen finner vi ved å løse

$$\frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}(x - x_0) + \sqrt{4ax_0} = 0,$$

som først gir $x - x_0 = -\frac{4ax_0}{2a} = -2x_0$, slik at $x = x_0 - 2x_0 = -x_0$. Skjæringspunktet med x -aksen blir dermed $(-x_0, 0)$. De andre tilfellene ($a < 0$ og/eller $y_0 < 0$) kan vises på samme måte, eller ved at man argumenterer ved hjelp av symmetri.

Oppgave 10. Den korteste veien fra et punkt P , via parabelen, til brennpunktet F , finner du ved å trekke en linje fra punktet til l , vinkelrett på l . For å se dette, la veien fra P til F gå via punktet Q på parabelen. Da er den totale veien gitt ved $|PQ| + |QF|$. Dette er mindre enn eller lik avstanden fra P til styrelinjen l , med likhet kun når P og Q ligger på en linje parallell med parabelens akse (siden korteste vei mellom et punkt og en linje går via en linje vinkelrett på den første linjen). Korteste veien inntreffer altså når vi beveger oss fra P parallelt med parabelens akse.

Oppgave 11. Lyset bruker like lang tid fra A til B som fra A' til B' . For å se dette, skriv lengden lyset tilbakelegger fra A til B som

$$|AA_0| + |A_0F| + |FB_0| + |B_0B|,$$

der A_0 er første refleksjonspunkt på parabelen, B_0 er andre refleksjonspunkt på parabelen. Men dette kan også skrives

$$|AA_0| + |A_0A_l| + |B_0B_l| + |B_0B| = |AA_l| + |BB_l|,$$

der vi har brukt at avstanden fra et punkt på parabelen til brennpunktet er lik avstanden fra punktet til styrelinjen l , og der A_l og B_l er punktene på linjen l nærmest A og B . Det er klart at $|AA_l| + |BB_l|$ er lik det dobbelte av avstanden fra linjen m til linjen l , uansett hvilket punkt A vi starter i, slik at lyset bruker like lang tid fra A til B som fra A' til B' .

Oppgave 12.

a). Vi har at

$$\begin{aligned} |BF_1| + |BF_2| &= 2a \text{ (siden } B \text{ er definert til å ligge på parabelen)} \\ |AB| + |BF_2| &= 2a \text{ (ved definisjonen av } A\text{).} \end{aligned}$$

$|AB| = |BF_1|$, som er det vi skal vise, følger umiddelbart ved å trekke disse likningene fra hverandre.

b). t består av alle punkter Q like langt fra A og F_1 , det vil si at $|AQ| = |QF_1|$. Fra a) er B et slikt punkt, slik at B ligger på t .

c). Hvis C ligger på t har vi at $|CF_1| = |CA|$. Hvis $C \neq B$ får vi

$$\begin{aligned} |F_2C| + |CF_1| &= |F_2C| + |CA| \\ &> |F_2A| \\ &= 2a, \end{aligned}$$

der $|F_2A| = 2a$ kommer fra definisjonen av A , og der $|F_2C| + |CA| > |F_2A|$ følger av at den korteste vei fra F_2 til A er en rett linje, og at C ikke ligger på den rette linjen mellom A og F_2 når $C \neq B$.

d). Vi vet at

- B ligger på ellipsen per definisjon,
- fra b) at B ligger på t ,
- fra c) at alle andre punkter på t ligger utenfor ellipsen.

Fra disse opplysningene er det klart at t tangerer ellipsen i B .

Oppgave 13.

a). En ellipse med store halvakse a og brennpunkter F_1 og F_2 består av alle punkter P der $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. Vi ser derfor at A og B er brennpunkter, og at $2a = 34$ slik at $a = 17$. Brennvidda c er gitt ved halvparten av avstanden mellom A og B , og er altså 10. Vi har da fra setning 3.6.3 at

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}.$$

b). Vi har $D = (0, -d)$. Avstanden til B er $\sqrt{16^2 + (12 + d)^2} = 34$, slik at vi får

$$\begin{aligned} 16^2 + (12 + d)^2 &= 34^2 \\ 12 + d = \sqrt{34^2 - 16^2} &= 30 \\ d &= 18. \end{aligned}$$

Koordinatene til D er derfor $(0, -18)$.

c). Vi har at $|AP| + |PB| = |DP| + |PB| = |DB| = 34 = 2a$. Fra definisjonen av en ellipse følger det derfor at P ligger på ellipsen.

d). Fra punkt 2 på side 47 har vi at P er det punktet på L som gjør at avstanden fra A til B via L blir minst. For alle andre punkter P' på L har vi derfor at $|AP'| + |P'B|$ blir større enn 34, og ligger derfor ikke på ellipsen. Hvis P ikke var det laveste punktet på ellipsen så ville vi kunne finne en tilsvarende linje L_2 nedenfor L med samme egenskaper. La oss kalle punktet på ellipsen på L_2 for P_2 . Da ville punktet rett ovenfor P_2 på L gi mindre avstand mellom A og B , som er en selvmotigelse. Derfor må P være det laveste punktet på ellipsen.

e). Det er klart at y -koordinaten til P er -9 . Linjen gjennom D og B er gitt ved $y = \frac{15}{8}x - 18$. Vi må derfor løse $-9 = \frac{15}{8}x - 18$, som gir $x = \frac{9 \times 8}{15} = \frac{24}{5}$. Derfor er $P = (\frac{24}{5}, -9)$.

Seksjon 3.7

Oppgave 1.

a). La oss først finne nivåkurvene. $4x^2 + 3y^2 = c$ betyr at $\frac{x^2}{\frac{c}{4}} + \frac{y^2}{\frac{c}{3}} = 1$. Dette er en ellipse med store halvakse $\sqrt{\frac{c}{3}}$, lille halvakse $\frac{1}{2}\sqrt{c}$. Vi ser derfor at

- For $c > 0$ er nivåkurvene ellipser, som blir større etterhvert som c øker. Alle ellipsene er formlike, det vil si at de har samme forhold mellom store og lille halvakse.
- Nivåkurvene for $c < 0$ inneholder ingen punkter.
- For $c = 0$ er nivåkurven bare ett punkt, nemlig origo.

La oss også se litt på konturkurvene til grafen:

- xz -planet: Setter vi $y = 0$ får vi $z = 4x^2$. De elliptiske ringene vokser altså slik at de passer med denne parabolen.
- yz -planet: Setter vi $x = 0$ får vi $z = 3y^2$.
- Alle andre konturkurver enn disse er også parabelkurver, som er forskyvede versjoner av de vi fant i punktene over.

Oppgave 2.

a). Vi setter $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. For nivåkurvene og konturkurvene har vi

- $2x^2 + y^2 = c$ gir en ellipse med store halvakse \sqrt{c} , lille halvakse $\sqrt{\frac{c}{2}}$. For $c < 0$ inneholder ikke nivåkurvene noen punkter, og for $c = 0$ består nivåkurven kun av origo.

- Skjæring med xz -planet er kurven $z = 2x^2$, og skjæring med yz -planet er kurven $z = y^2$. Alle andre konturkurver er også parabler, som er forskyvde versjoner av disse.

```
% Oppgave 3.7.2 a)
r=-2:0.05:2;
s=-2:0.05:2;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=2*x.^2+y.^2;
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.2a')
```

b). $y^2 - x = c$ gir en nivåkurve som er en “liggende parabel” med åpning mot høyre. Toppunktet blir i $(c, 0)$. Dette gjør det lett å tegne eller se for oss flaten, siden alle parabelene er forskyvde varianter av hverandre.

Konturkurvene for flater parallelle med xz -planet ser vi at blir linjer (sett inn y like en konstant verdi i $z = y^2 - x$), mens konturkurver for flater parallelle med yz -planet ser vi at blir parabler (sett inn x lik en konstant verdi i $z = y^2 - x$).

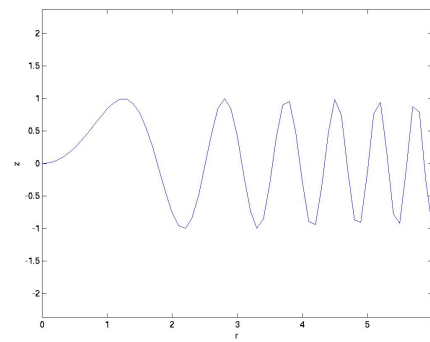
```
% Oppgave 3.7.2 b)
z=y.^2-x;
figure(2)
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.2b')
```

c). Vi setter $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Nivåkurvene finner vi først ved å løse $\sin(x^2 + y^2) = c$. Det er klart at denne har løsninger bare for $-1 \leq c \leq 1$, slik det ikke finnes nivåkurver utenfor dette intervallet. Videre er det mange løsninger for $x^2 + y^2$ for slike c : Først får vi at $x^2 + y^2 = \arcsin c$ er en løsning, men da er også $x^2 + y^2 = \arcsin c + 2k\pi$ løsninger. Dette gir sirkler med radius $\sqrt{\arcsin c + 2k\pi}$ for $k \geq 0$ eller $k \geq 1$, avhengig av om $c > 0$ eller $c < 0$. Videre er $x^2 + y^2 = \pi - \arcsin c + 2k\pi$ også løsninger, siden $\sin(\pi - x) = \sin x$ for alle x . Dette gir sirkler med radius $\sqrt{\pi - \arcsin c + 2k\pi}$. Det er klart at disse radiusverdiene kommer tettere og tettere etter som radiene vokser.

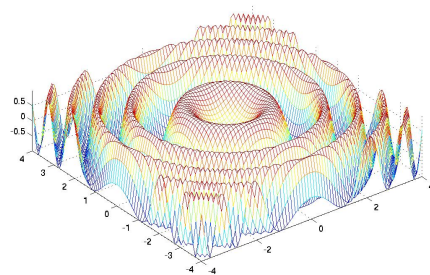
Hver nivåkurve består altså av mange sirkler. For $c = 1$ eller $c = -1$ faller halvpartene av disse sirklene sammen, siden vinklene $\arcsin c$ og $\pi - \arcsin c$ da faller sammen ($\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$).

Det er kanskje lettest å tegne grafen ved å skrive den som $z = \sin r^2$ i polarkoordinater. Flaten er altså et omdreiningslegeme som fremgår ved å dreie $y = \sin x^2$, vist i Figur 1 om y -aksen. Figuren som fremkommer er vist i Figur 2. Konturkurver forteller kanskje ikke så mye her.

```
% Oppgave 3.7.2 c)
r=-4:0.1:4;
s=-4:0.1:4;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=sin(x.^2+y.^2);
figure(3)
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.2c')
```

Figur 1: Grafen $y = \sin x^2$



Figur 2: Grafen $z = \sin(x^2 + y^2)$

d). Kodan blir

```
% Oppgave 3.7.2 d)
r=-5:0.05:5;
s=-5:0.05:5;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=x.^2 - 4*y.^2;
figure(4);
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.2d');
```

e). Hvis du forsøker å plote $\ln(xy)$ i et intervall rundt null vil MATLAB rapportere problemer her, siden \ln kun er definert for positive verdier. Funksjonen er derfor bare definert i første og tredje kvadrant. Det er kanskje enklest å tegne grafen ved hjelp av to plott, et for første kvadrant og et for tredje kvadrant, siden vi kan enkelt lage et grid for hver kvadrant:

```
% Oppgave 3.7.2 e)
r=0.1:0.05:5;
s=0.1:0.05:5;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=log(x.*y);
mesh(x,y,z);

hold on
r=-5:0.05:-0.1;
s=-5:0.05:-0.1;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=log(x.*y);
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.2e');
```

Oppgave 3.

a).

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

```
% Oppgave 3.7.3 a)
u=-0.5:0.03:0.5;
v=-0.5:0.03:0.5;
[x,y]=meshgrid(u,v);
z=1./sqrt(x.^2 + y.^2);
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.3a')
```

b). Vi kan skrive

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta.$$

- Holder vi θ konstant, ser vi at vi får hyperbelen $z = \frac{\cos \theta}{r}$. Dette hjelper oss til å kunne tegne opp flaten.

SEKSJON 3.7

31

- Nivåkurvene er her sirkler: Setter vi $c = \frac{x}{x^2+y^2}$ får vi at $x^2 + y^2 = \frac{x}{c}$. Det er her greit at vi fullfører kvadratet i x for å se at vi får sirkler som er nivåkurver.

```
% Oppgave 3.7.3 b)
u=-0.5:0.03:0.5;
v=-0.5:0.03:0.5;
[x,y]=meshgrid(u,v);
z=x./(x.^2 + y.^2)
figure(2)
mesh(x,y,z)
title('Oppgave 3.7.3b')
```

c). Koden blir

```
% Oppgave 3.7.3 c)
u=-0.5:0.03:0.5;
v=-0.5:0.03:0.5;
[x,y]=meshgrid(u,v);
z=y./x;
figure(3)
mesh(x,y,z)
title('Oppgave 3.7.3c')
```

d).

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4y^2 = r^2 \cos^2 \theta - 4r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta) = r^2 (1 - 5 \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right). \end{aligned}$$

- Holder vi θ konstant, ser vi at vi får parabellen $z = r^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right)$.
- Nivåkurvene er her hyperbler.

```
% Oppgave 3.7.3 d)
u=-1:0.05:1;
v=-1:0.05:1;
[x,y]=meshgrid(u,v);
figure(4)
z=x.^2-4*y.^2
mesh(x,y,z)
title('Oppgave 3.7.3d')
```

e). Koden blir

```
% Oppgave 3.7.3 e)
u=-1:0.05:1;
v=-1:0.05:1;
[x,y]=meshgrid(u,v);
figure(5)
z=exp(x.*y);
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.3e')
```

Oppgave 4.

a). Sylinderkoordinater:

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)e^{-z^2} = r^2 e^{-z^2}.$$

Kulekoordinater:

$$f(x, y, z) = (\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi)e^{-\rho^2 \cos^2 \phi} = \rho^2 \sin^2 \phi e^{-\rho^2 \cos^2 \phi}.$$

Begge typene koordinater er like informativt her, siden poenget er at funksjonen ikke avhenger av θ , som er en av koordinatene som brukes i både kulekoordinater og sylinderkoordinater.

b). Sylinderkoordinater:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2 + z^2}.$$

Kulekoordinater:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\rho^2}.$$

Kulekoordinater er mest informativt her, siden ϕ og θ ikke inngår i uttrykket for f .

c). Sylinderkoordinater:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{r^2}{z^2}.$$

Kulekoordinater:

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\rho^2 \cos^2 \phi} = \frac{\rho^2 \sin^2 \phi}{\rho^2 \cos^2 \phi} = \tan^2 \phi.$$

Kulekoordinater er mest informativt her, siden ρ og θ ikke inngår i uttrykket for f .

Oppgave 5.

a). Vi har $f(x, y) = x^2 y$, og skal finne tangentplanet i $(1, -2)$. Vi har at

- $f(1, -2) = -2$,
- $\nabla f(1, -2) = (-4, 1)$.

Likningen for tangentplanet blir dermed

$$\begin{aligned} z &= f(1, -2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2)(y + 2) \\ &= -2 - 4(x - 1) + (y + 2) \\ &= -4x + y + 4. \end{aligned}$$

b). Vi har $f(x, y) = x e^{-xy}$, og skal finne tangentplanet i $(1, 0)$. Vi har at

- $f(1, 0) = 1$,
- $\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - xy)e^{-xy}$, og $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}$,

SEKSJON 3.7

33

- $\nabla f(1, 0) = (1, -1)$.

Likningen for tangentplanet blir dermed $z = x - y + c$. c finner vi ved å sette inn punktet $(1, 0, 1)$: $1 = 1 + c$, slik at $c = 0$.

Likningen for tangentplanet blir dermed $z = x - y$, som også kan skrives $-x + y + z = 0$.

Oppgave 6. Koden blir

```
% Oppgave 3.7.6
r=-2:0.02:2;
s=-2:0.02:2;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=x.^2.*y./(x.^4+y.^2);
figure(6)
mesh(x,y,z)
hold on
t=linspace(0,2,100);
plot3(t,t.^2,0.5*ones(1,length(t)))
title('Oppgave 3.7.6')
hold off
figure(7)
contour(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.6')
contour(x,y,z,[0.5 0.5]);
title('Oppgave 3.7.6')
```

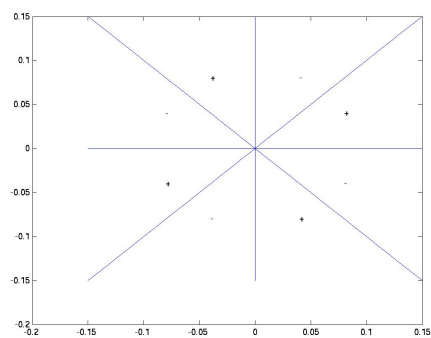
Oppgave 7. For å forklare hvordan vi kan forstå fra figuren hvorfor $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ er negativ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ er positiv, skriv først de partielle deriverte som grenseverdiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0), \end{aligned}$$

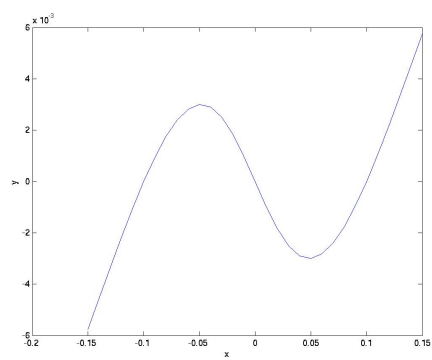
der vi har brukt at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, som ble vist i Oppgave 2.5.4. Fra funksjonsoppskriften er det klart at f skifter fortegn på koordinataksene, og på linjene $y = x$ og $y = -x$. Fortegnsskjemaet for f er vist i Figur 3.

La oss først se på $\frac{\partial f}{\partial x}(0, h)$ for små, positive verdier av h . Det er klart ved å studere flaten og fortegnsskjemaet at $f(x, h)$ går fra å være positiv til negativ ved $x = 0$, og vi har illustrert dette ved plott av $f(x, 0.1)$ i Figur 4a). Dermed blir $\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \leq 0$, slik at $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \leq 0$. At vi faktisk her har ekte ulikhet er ikke så lett å se fra grafen. For små, negative verdier av h er det på samme måte klart at $f(x, h)$ går fra å være negativ til positiv ved $x = 0$, som illustrert ved plott av $f(x, -0.1)$ i Figur 4b). Dermed blir $\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \geq 0$, slik at $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \leq 0$. derfor må vi ha at $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) \leq 0$, slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \leq 0$.

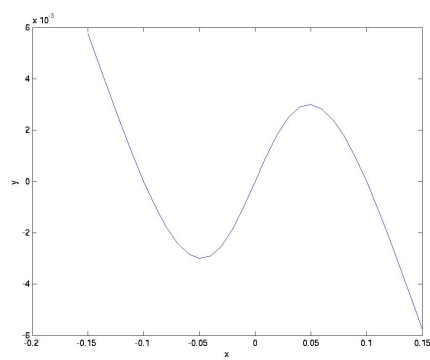
La oss deretter se på $\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0)$ for små, positive verdier av h . $f(h, y)$ ser vi nå går fra å være negativ til positiv ved $y = 0$, slik at $\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) \geq 0$, slik at $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) \leq 0$. For små, negative verdier av h er det på samme måte klart at $f(h, y)$ går fra å være positiv til



Figur 3: Fortegnsskjema for f



(a) Plott av $f(x, 0.1)$



(b) Plott av $f(x, -0.1)$

Figur 4: Plott av $f(x, h)$ for positiv og negativ h

SEKSJON 3.8

35

negativ ved $y = 0$, slik at $\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) \leq 0$, slik at $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) \geq 0$. derfor må vi ha at $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) \geq 0$, slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \geq 0$.

```
% Oppgave 3.7.7
r=-5:0.01:5;
s=-5:0.01:5;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=((x.^3).*y-x.*(y.^3))./(x.^2 + y.^2);
mesh(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.7')
figure(2)
contour(x,y,z);
title('Oppgave 3.7.7')
```

Oppgave 8. Kodene blir

```
% Oppgave 5.1
r=linspace(-2,2,100);
s=linspace(-2,2,100);
[x,y]=meshgrid(r,s);
f=(x.^2) .* (y.^2);
g=sin(x)./(y.^2)+x.^2;
h=sin(exp(x+y));

mesh(x,y,f);
figure(2)
mesh(x,y,g);
figure(3)
mesh(x,y,h);
```

Seksjon 3.8

Oppgave 1. Kodene blir

```
% Oppgave 3.8.1 a)
r=linspace(0,2*pi,30);
s=linspace(0,2*pi,30);
[x,y]=meshgrid(r,s);
u=cos(x);
v=sin(x);
figure(8)
quiver(x,y,u,v);
title('Oppgave 3.8.1a');
figure(9)
streamline(x,y,u,v,0,1);
hold on
streamline(x,y,u,v,0,0.5);
title('Oppgave 3.8.1a');
```

```
hold off

% Oppgave 3.8.1 b)
r=linspace(-0.3,0.3,30);
s=linspace(-0.3,0.3,30);
[x,y]=meshgrid(r,s);
u=-x./(x.^2+y.^2).^(3/2);
v=-y./(x.^2+y.^2).^(3/2);
figure(10)
quiver(x,y,u,v)
title('Oppgave 3.8.1b');
figure(11)
streamline(x,y,u,v,-0.3,0.3);
hold on
streamline(x,y,u,v,0.3,0.3);
title('Oppgave 3.8.1b');
hold off

% Oppgave 3.8.1 c)
r=linspace(-2,2,30);
s=linspace(-1,1,30);
[x,y]=meshgrid(r,s);
u=(1-x)./((x-1).^2+y.^2) + (1+x)./((x+1).^2+y.^2);
v=-y./((x-1).^2+y.^2) + y./((x+1).^2 + y.^2);
figure(12)
quiver(x,y,u,v)
title('Oppgave 3.8.1c');
figure(13)
streamline(x,y,u,v,1.5,1);
hold on
streamline(x,y,u,v,0.5,1);
title('Oppgave 3.8.1c');
hold off
```

Oppgave 2. Kodene blir

```
% Oppgave 3.8.2 ac)
r=-5:0.5:5;
s=-5:0.5:5;
[x,y]=meshgrid(r,s);
u=-y./(x.^2 + y.^2);
v=x./(x.^2 + y.^2);
quiver(x,y,u,v);
title('Oppgave 3.8.2ac')
hold on
streamline(x,y,u,v,1,0);
```

Oppgave 3. Kodene blir

```
% Oppgave 3.8.3 a)
```



```
r=-2:0.25:2; %lager oppdeling av x-aksen
s=-2:0.25:2; %lager oppdeling av y-aksen
[x,y]=meshgrid(r,s);
u=3.*x-y;
v=x+2.*y;
figure(14)
plot(u,v,u',v')
title('Oppgave 3.8.3a');
```

```
% Oppgave 3.8.3 b)
r=0:0.25:5;
s=0:0.25:(2*pi);
[x,y]=meshgrid(r,s);
u = x.*cos(y);
v = x.*sin(y);
figure(15)
plot(u,v,u',v');
title('Oppgave 3.8.3b');
```

```
% Oppgave 3.8.3 c)
u=sqrt(x./y);
v=sqrt(x.*y);
figure(16)
plot(u,v,u',v');
title('Oppgave 3.8.3c');
```

Seksjon 3.9

Oppgave 1. Vi ser på paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Parametrisering med vanlige koordinater er

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

for $x, y \in \mathbb{R}$. Siden $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, og $x^2 + y^2 = r^2$, så blir en parametrisering med polarkoordinater

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(r, \theta) &= r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \mathbf{k} \\ &= r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + r^2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

med $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r \geq 0$.

Oppgave 2. Området i første oktant som ligger på kuleflaten kan beskrives i kulekoordinater ved $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho = 2$. En parametrisering ved kulekoordinater blir derfor

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 3. Vi ser på den delen av sylinderflaten $z = x^2 + y^2$ med $0 \leq z \leq 1$. Siden $x = r \cos \theta = \cos \theta$, $y = r \sin \theta = \sin \theta$, så blir en parametrisering

$$\mathbf{r}(\theta, z) = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

der $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$.

Oppgave 5. Vi kan skrive

$$\mathbf{r}(y, z) = (\sqrt{y^2 + z^2}, y, z).$$

Oppgave 8. Skjæringen mellom kjeglen og kulen kan vi finne ved å løse

$$z^2 = 3(x^2 + y^2) = 3(4 - z^2),$$

som gir at $4z^2 = 12$, og at $z = \pm\sqrt{3}$. Siden vi er interessert i en del over xy -planet må vi ha at $z = \sqrt{3}$. Vinkelen ϕ for skjæringen mellom kula og kjeglen er derfor vinkel i en rettvinklet trekant der hypotenus er 2, og hosliggende katet er $\sqrt{3}$. Men da er $\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, slik at $\phi = \frac{\pi}{6}$. Det er dermed klart at følgende er en parametrisering av området i kulekoordinater:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Oppgave 9. Koden blir

```
% Oppgave 3.9.9
u=linspace(0,pi*0.5,100);
v=linspace(0,pi*0.5,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=2*sin(V).*cos(U);
y=2*sin(V).*sin(U);
z=2*cos(V);
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.9')
```

Oppgave 10. Koden blir

```
% Oppgave 3.9.10
u=linspace(0,2,100);
v=linspace(0,2*pi,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=U;
y=2*cos(V);
z=2*sin(V);
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.10')
```

Oppgave 11. Koden blir

```
% Oppgave 3.9.11
r=-1:0.05:1;
s=0:0.05:3;
[u,v]=meshgrid(r,s);
```

SEKSJON 3.9

39

```
figure(17)
mesh(u.*v.^2,u,sin(u.*v))
title('Oppgave 3.9.11');
```

Oppgave 12. Kodens blir

```
% Oppgave 3.9.12
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,2,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=3*cos(U);
y=3*sin(U);
z=V;
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.12')
```

Oppgave 13. Kodens blir

```
a=1;
b=0.5;
c=0.1;
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,pi,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=sin(V).*cos(U)*a;
y=sin(V).*sin(U)*b;
z=cos(V)*c;
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.13')
```

Oppgave 14. Kodens blir

```
r=3;
R=5;
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,2*pi,100);
[theta,phi]=meshgrid(u,v);
x=(5+3*cos(phi))*cos(theta);
y=(5+3*cos(phi))*sin(theta);
z=3*sin(phi);
surf(x,y,z)
title('Oppgave 3.9.14')
```

