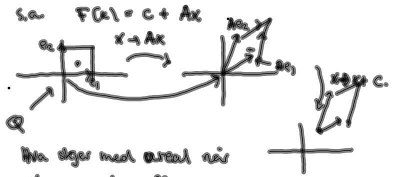
Determinanter som forstørrelsesfaktor

Affin avbilding $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Da fins (2×2)-matrise A og $c \in \mathbb{R}^2$
s.a. $F(x) = c + Ax$



Hva skjer med areal når vi anvender affin avbildinger

$\longrightarrow$ Arealet til $A(Q)$?

Arealet til F(Q

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \qquad A(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Setning 1.8.1 $\Rightarrow$ Areal $= |a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}|$
$= |\det(A)|$ (resp. R

Setning 1.10.3: Dersom $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en affinavbilding, forstørrer F

Linearisering

Derivasjon i en variabel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f er deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ dersom det fins $c \in \mathbb{R}$ s.a.

$$(1) \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c = 0$$

skriv $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - c = \psi(x) \qquad \psi(x) \to 0, \ x \to a.$

$$(2) \quad f(x) - f(a) - c(x-a) = \psi(x)(x-a) = \sigma(x). \qquad \frac{\sigma(x)}{x-a} \to 0, \ x \to a.$$

$$(3) \quad f(x) - \underbrace{\big(f(a) + c \cdot (x-a)\big)}_{\text{Lineariseringen til } f \text{ i } a, \text{ betegnet } T_a f(x)} = \sigma(x) \qquad \frac{\sigma(x)}{x-a} \to 0, \ x \to a.$$

DEF: En avb. $F: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, er deriverbar i et punkt $a \in A$ dersom det fins en lineær avb. $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a.

$$(4) \qquad \sigma(r) = F(a+r) - F(a) - C \cdot r$$

tilfredsstiller
$$\frac{\sigma(r)}{|r|} \to 0, \quad |r| \to 0$$

I så fall vet vi at de partiellderiverte til F eksisterer i a, og $C = J_a F$.

Omskriv (4):
$$\sigma(x) = F(x) - \underbrace{\big(F(a) + C \cdot (x-a)\big)}_{\text{lineariseringen til } F \text{ i } a.}$$
tilfredsstiller $\dfrac{\sigma(x)}{|x-a|} \to 0$ når $x \to a$.

DEF 2.8.2 Anta at $F: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, er deriverbar i $a \in A$. Affinavbildingen $T_a F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definert ved $T_a F(x) = F(a) + F'(a)(x-a)$ kalles lineariseringen til F i a.

Teorem Anta at $F: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, er deriverbar i $a \in A$. Da har vi
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|r|}\big(F(a+r) - T_a F(a+r)\big) \to 0.$$
Det fins ingen andre affinavb. $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a. $\lim_{r \to 0} \frac{1}{|r|}\big(F(a+r) - G(a+r)\big) \to 0$.

Kjerneregelen i flere variable

Se på komposisjoner:

$$A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{G} B \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k.$$

Anta at G er deriverbar i $a \in A$, og at F er deriverbar i $b = G(a)$. Hva da med komposisjonen $H = F \circ G$?

- Dersom $n = m = k$: Da er H deriverbar i a, og $H'(a) = F'(G(a)) \cdot G'(a)$.

Teorem 2.7.1: Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og to avbildinger $F: B \to \mathbb{R}^k$, $G: A \to B$. Dersom G er deriverbar i $a \in A$, og F er deriverbar i $b = G(a)$, så er $H = F \circ G$ deriverbar i a, og $H'(a) = F'(G(a)) \cdot G'(a)$.

$$\boxed{(F \circ G)(a) = F(G(a))}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[G]{} \mathbb{R}^m \xrightarrow[F]{} \mathbb{R}^k$$

La $x = (x_1, \dots, x_n)$ være koordinater på $\mathbb{R}^n$.
$u = (u_1, \dots, u_m)$ — " — $\mathbb{R}^m$

Har:
- $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$
- $F(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u))$
- $H(x) = F(G(x)) = (f_1(G(x)), \dots, f_k(G(x)))$.

Får:
$$G'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$F'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_m}(u) \end{pmatrix}$$

$$H'(a) = F'(b) \cdot G'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$b = G(a)$

$H(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$.

Det følger at

$$(*) \qquad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_l}(b) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(a).$$

Teorem 2.7.2. Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og to avbildinger $G: A \to B$, $F: B \to \mathbb{R}^k$. Dersom G er deriverbar i $a \in A$ og F er deriverbar i $b = G(a)$, så er $H = F \circ G$ deriverbar i a, og de partiellderiverte til H i a er gitt ved (*).

Mål: Bevis T.2.7.1 og T.2.7.2.

Eks: $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

$f(u_1, u_2) = 2u_1 \cdot u_2^2$

$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin x_3$

$g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3$

Skriver ut: $f(G(x)) = 2 \cdot (x_1 x_2 \sin x_3)(3x_1^2 x_2 \cdot x_3)^2$
$= 18 x_1^5 x_2^3 x_3 \cdot \sin x$.

Bruker kjerneregelen til å regne ut $\frac{\partial H}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(G(x)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(G(x)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x)$$

$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) = 2u_2^2 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = x_2 \cdot \sin x_3$

$\frac{\partial f}{\partial u_2}(u) = 4u_1 u_2 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) = 6x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x) = 2 \cdot (3x_1^2 x_2 x_3)^2 \cdot x_2 \cdot \sin x_3 + 4(x_1 x_2 \sin x_3)(3x_1^2 x_2 \cdot x_3) \cdot 6x_1 x_2 x_3$$
$$\vdots$$
$$= 90 \cdot x_1^4 x_2^3 x_3^2 \sin x_3.$$

Eks: Gass oppbevares i en beholder.

Trykket P avhenger av temperaturen T og volumet V,

$P = f(T, V)$.

Anta at T og V avhenger av tid.

$P(t) = f(T(t), V(t))$.

Finner ved kjerneregel:

$P'(t) = \frac{\partial f}{\partial T} \cdot T'(t) + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot V'(t)$.

Anta f.eks. at $P = K \cdot \frac{T}{V}$

$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{K}{V}$, $\frac{\partial f}{\partial V} = -K \cdot \frac{T}{V^2}$

$P'(t) = \frac{K}{V} \cdot T'(t) - K \frac{T}{V^2} \cdot V'(t)$.