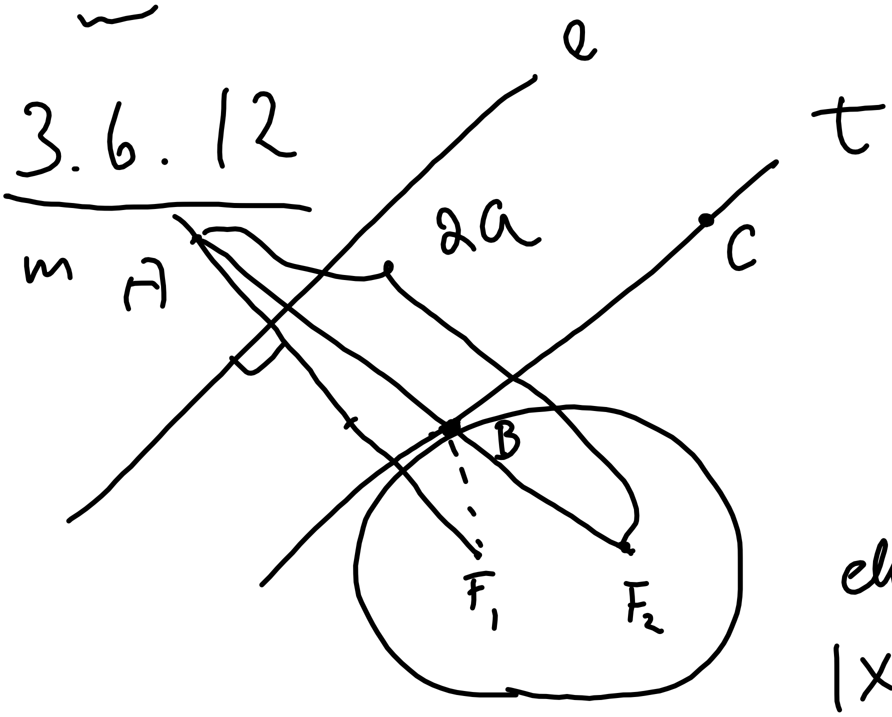
## 3.6.12




ellipse med $|XF_1| + |XF_2| = 2a$

t skal halveringslinjen til

$AF_1$

B er skjæring mellom ellipsen E og linja $AF_2$

Har da $|F_1B| + |F_2B| = 2a$

(fordi B ligger på ellipsen)

$|AF_2| = 2a \quad |BF_1| = 2a - |F_2B|$

$= |AF_2| - |BF_2| = |AB|$

Altså er trekanten $F_1BA$ en like~~sidet~~ beint trekant.

Vi får altså at normalen fra B på $AF_1$ halverer $AF_1$ og er derfor lik $t$.
Så spesielt er $B \in t$
og det er klart at $t$ er parallell med $\ell$

La $C$ være et annet punkt på $t$. Siden $t$ er halveringslinja fra $B$ til $AF_1$ vil $F_1CA$ også være en like~~sidet~~ beint trekant.

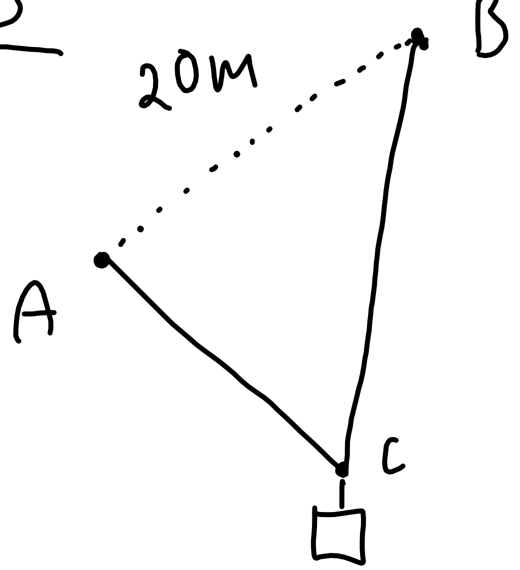
Dvs. $|CF_1| = |CA|$

$$|F_2C| + |CF_1| = |F_2C| + |CA|$$

$$> |AF_2| = 2a$$

linja $t$ har egenskapen at hvis $C \in t$, $C \neq B$ så er $|F_2C| + |CF_1| > 2a$ og da må jo $t$ tangere $E$ i $B$.

13




tau = 34 m

lodd festet i c.

$|AC| + |BC| = 34$

Siden $|AC| + |BC| = 34$

definerer en ellipse med brennpunkt

A og B så vil loddet alltid

være på denne ellipsen.

Har da $c = 10$m

Så den ~~lille halv~~ store halvaksen

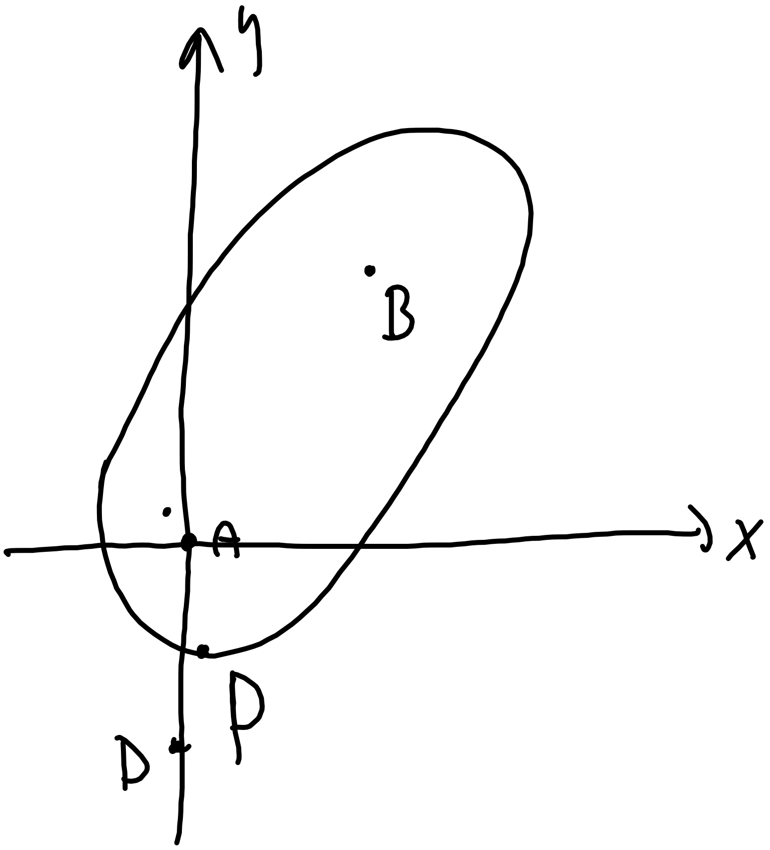
$a = \frac{34}{2} = 17$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} =$

$\sqrt{(17)^2 - (10)^2} = 3\sqrt{21}$

b) $A = (0,0)$, $B = (16,12)$

$\left( (16^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} = 20 \right)$

Anta nå at loddet kan gli langs tauet. Loddet glir da ned til laveste punkt på ellipsen.




Observasjon. P der loddet er
må være et punkt hvor tangenten
til ellipsen er parallell med x-aksen.

La D ligge på den negative del av y-aksen 34m = 2a fra B. D = ?

$D = (0, y)$, $|BD| = 34$

$$|BD| = \sqrt{16^2 + (12-y)^2} = 34$$

$$(12-y)^2 = (34)^2 - (16)^2 = 900$$

$12 - y = 30$, $y = 12 - 30 = \underline{-18}$

La L være halveringslinjen av AD (parallelt med x-aksen) (Dette er det samme som linja m i forrige oppgave)

Vet også da at skjæringspunktet mellom DB og ellipsen blir punktet P vi søker

$P = ?$

P ligger altså på halveringslinjen mellom $A = (0,0)$ og $D = (0,-18)$.

dvs $P = (x,-9)$

Vet også at P ligger på linja mellom $B = (16,12)$ og $D = (0,-18)$.

$(0,-18) + t\left((16,12) - (0,-18)\right)$

$= (0,-18) + t(16,30) = (16t, -18+30t)$

$-18+30t = -9, \quad t = \frac{3}{10}$ setter inn først

$P = \left(\frac{24}{5}, -9\right)$

# 3.7

1) a) $f(x,y) = 4x^2+3y^2$

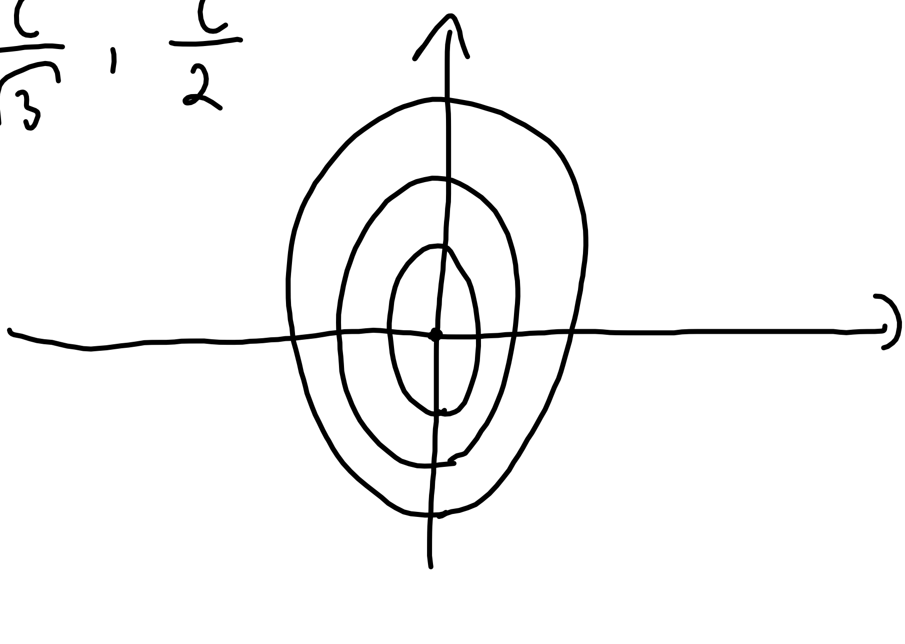
$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$

Nivåkurver $4x^2+3y^2 = c^2,\ c \geq 0$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

Ellipser med halvaksen

$\frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{c}{2}$



b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$

$f(x,y) = 1, \quad \dfrac{1}{x^2-y^2} = 1$

$x^2 - y^2 = 1$ (hyperbel)

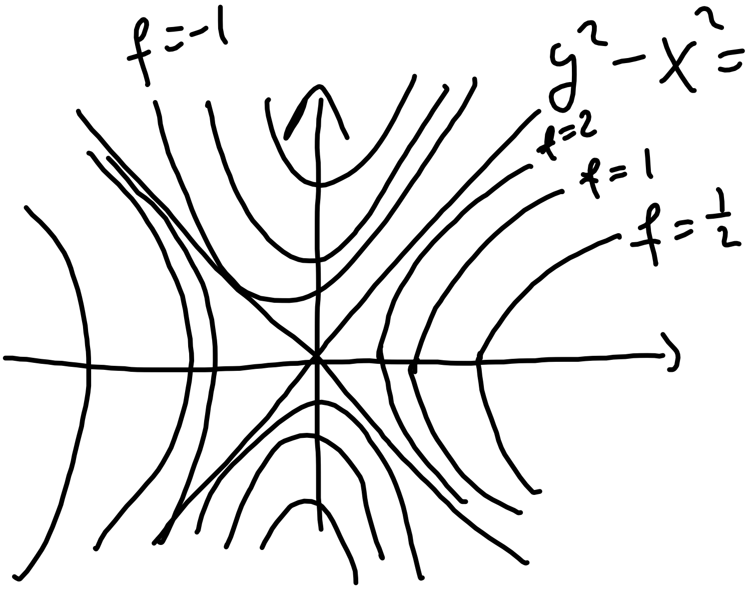
$f(x,y) = 2, \quad x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ (hyperbel)

$f(x,y) = -1, \quad \dfrac{1}{x^2-y^2} = -1$

$y^2 - x^2 = 1$

$f(x,y) = -\frac{1}{2} \quad \dfrac{1}{x^2-y^2} = -\frac{1}{2}$

$y^2 - x^2 = 2$



e) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$f(x,y) = 0 \iff x = 0$

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = 1, \quad x^2+y^2-x=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

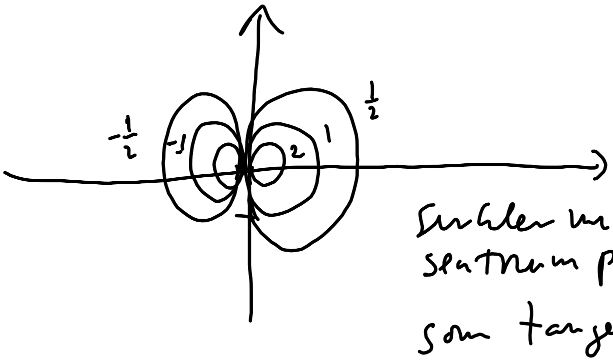
sirkel med sentrum $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = 2 \quad 2(x^2+y^2) - x = 0$

$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}$

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = -1, \quad x^2+y^2+x=1$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

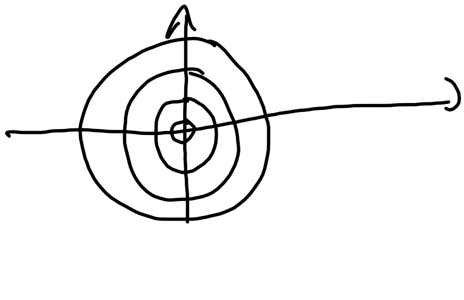



Sirkler med sentrum på x-aksen som tangen y-aksen i (0,0).

<u>3.7.2</u> c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

$f(x,y) = d, \ \sin(x^2+y^2) = d$

må ha $x^2+y^2 = C + 2n\pi$



## 3.7.3

b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Polar koordinater $\quad x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$f(r,\theta) = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$

—

Sylinder koordinater

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

Kule koordinater

$x = \rho\cos\theta\sin\phi$
$y = \rho\sin\theta\sin\phi$
$z = \rho\cos\phi$

# 3.7

a) $f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^{-z^2}$

$f(r,\theta,z) = r^2 e^{-z^2}$ ✓

$f(\rho,\phi,\theta) = \rho^2 \sin^2\phi \, e^{-\rho^2\cos^2\phi}$

$x^2+y^2 = (\rho\cos\theta\sin\phi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\phi)^2$

$= \rho^2\sin^2\phi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}) = \rho^2\sin^2\phi$

e) $f(x,y,z) = z\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(r,\theta,z) = z\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = z\arctan(\tan\theta)$

$= z\theta \qquad \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$f(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi\arctan\left(\frac{\cancel{\rho}\sin\theta\cancel{\sin\phi}}{\cancel{\rho}\cos\theta\cancel{\sin\phi}}\right)$

$= (\rho\cos\phi)\theta$

3.5 Finn tangentplan i det oppgitte punkt.

c) $f(x,y) = x^2y - xy^2$, $(2,-2) = (x_0, y_0)$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(2,-2) = -8-8 = -16$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,-2) = -8-4 = -12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2) = 4+8 = 12$$

$$z = -16 - 12(x-2) + 12(y+2)$$

$$z = -16 - 12x + 24 + 12y + 24$$

$$\underline{\underline{12x - 12y + z = 32}}$$