Plenum 23/2-16

3.6: 11, 12

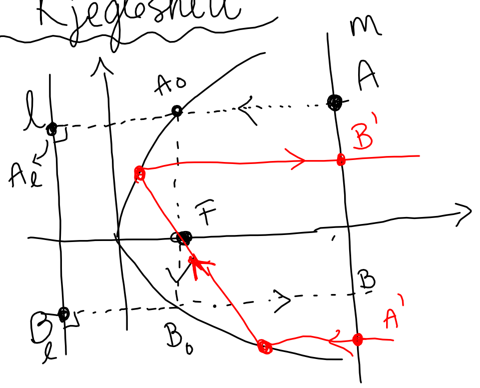
3.7: 1 b d

3.9: 6

A5: 2

3.6: Kjeglesnitt

11)



Kortest tid fra A til B eller A' til B'?

Lengden lyset går fra A til B $= |AA_0| + |A_0F| + |FB_0| + |B_0B|$

$= \underbrace{|AA_0| + |A_0A_\ell|}_{} + \underbrace{|B_0B_\ell| + |B_0B|}_{}$

Fordi lyset kommer inn parallelt m/ parabelens akse

$= |AA_\ell| + |BB_\ell|$

$= 2|\ell m|$

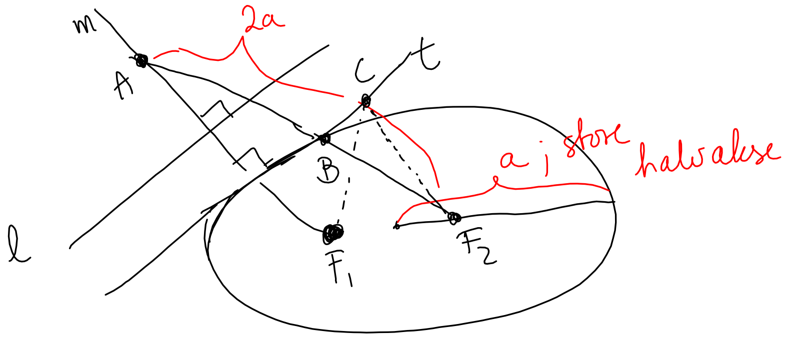
Helt tilsvarende å vise at:

Lengden lys går fra A' til B' $= |A'A_0'| + |A_0'F| + |FB_0'| + |B_0'B'|$

$= \dots = 2|\ell m|$

Så lengden, og dermed tiden, lyset bruker fra A til B er lik den tiden som brukes fra A' til B'.

12)



a) Vis: $|AB| = |BF_1|$

(I) $|BF_1| + |BF_2| = 2a$ (B er på ellipsen; def. ellipse)

(II) $|AB| + |BF_2| = 2a$ (def. av A)

(I)-(II); flytt over $\Rightarrow$ $|AB| = |BF_1|$ ■

b) t er alle pkt. Q som er like langt fra A og F_1, dvs. $|AQ| = |QF_1|$. Fra a), er B et slikt punkt.

B er på t. ■

c) $C \neq B$, på t. Vis: $|F_2C| + |CF_1| = |F_2C| + |CA| > 2a$.

Siden $C \neq B$, er: Siden C er på t; $|CF_1| = |CA|$ def. midtnormal

$$|F_2C| + |CF_1| = |F_2C| + |CA| > |F_2A| = 2a$$

Korteste vei fra F_2 til A er en rett linje

def. A ■

d) Vet: $\Rightarrow$ B er på ellipsen (per def.)

$\rightarrow$ B er på t (fra b))

$\rightarrow$ Alle andre punkter på t er utenfor ellipsen (fra c))

Per def. av tangent vil da t tangere ellipsen i B.

3.7: Grafisk framstilling av skalarfelt

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$

Nivåkurver: $N_c := \{ (x,y) \mid f(x,y) = c \}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2} = c$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{c}$$

$$cx^2 - cy^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{c}} - \frac{y^2}{\frac{1}{c}} = 1$$

$\frac{1}{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$

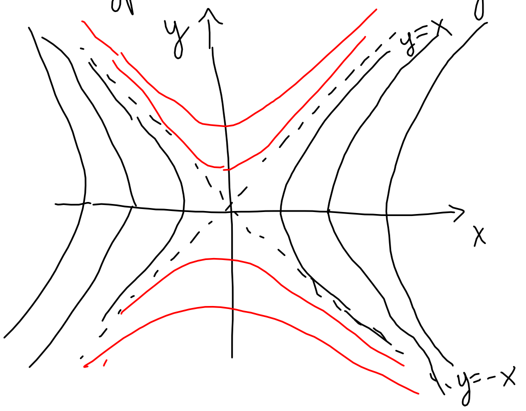
$\Rightarrow$ Hyperbel sentrum origo,

$c = 0$; ikke mulig

$c > 0$; høyre/venstre hyp: $\frac{1}{\sqrt{c}}$ halvakse

$c < 0$; opp/ned hyp.; $\frac{1}{\sqrt{-c}}$ halvakse

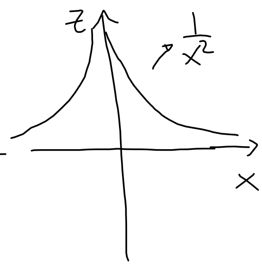
$-\frac{1}{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\right)^2$



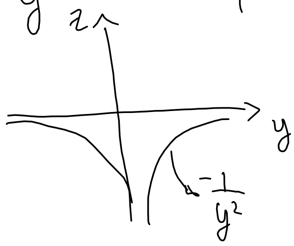
Asymptoter (Set. 3.6.9):

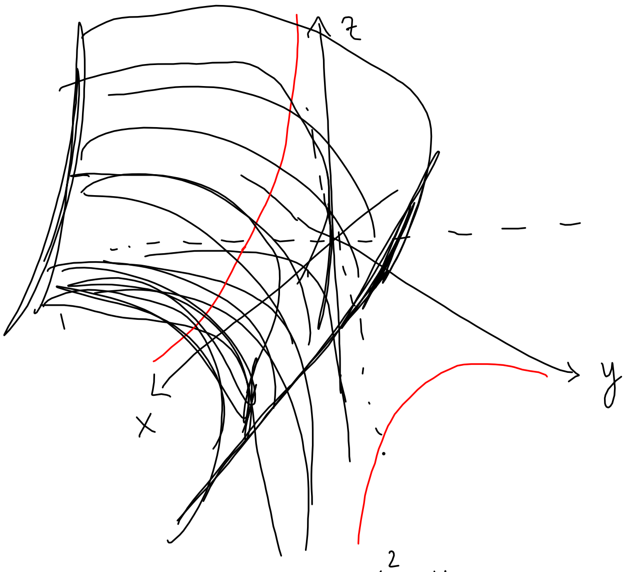
$y = \pm 1(x - 0) = \pm x$

Skjæring med xz-planet: $y = 0 \Rightarrow z = f(x, \overset{0}{y}) = \frac{1}{x^2}$



Skjæring med yz-planet: $x = 0 \Rightarrow z = f(\underset{0}{x}, y) = \frac{-1}{y^2}$





1)d) $f(x,y) = e^{x^2-y}$

$N_c = \{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$

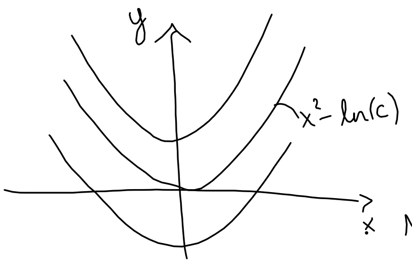
$f(x,y) = e^{x^2-y} = c$

$c \leq 0$ umulig ($e^x > 0$ alltid)

$x^2 - y = \ln(c)$

c stor $\Rightarrow \ln(c)$ stor $\Rightarrow -\ln(c)$ veldig neg.

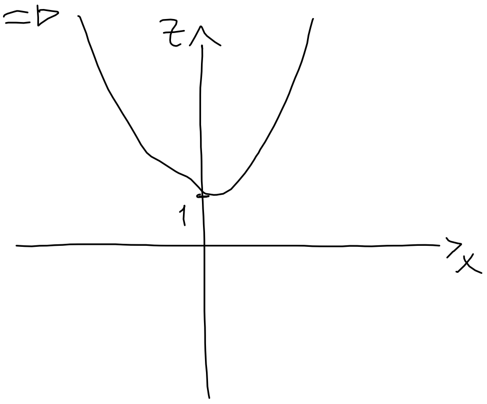
$y = x^2 - \underbrace{\ln(c)}_{\text{en konstant.}}$



Nivåkurver i xy-plan

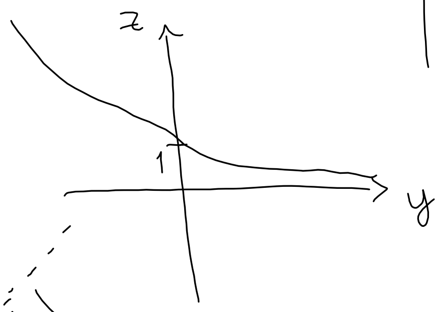
Skjæring xz-plan: $y = 0 \Rightarrow$

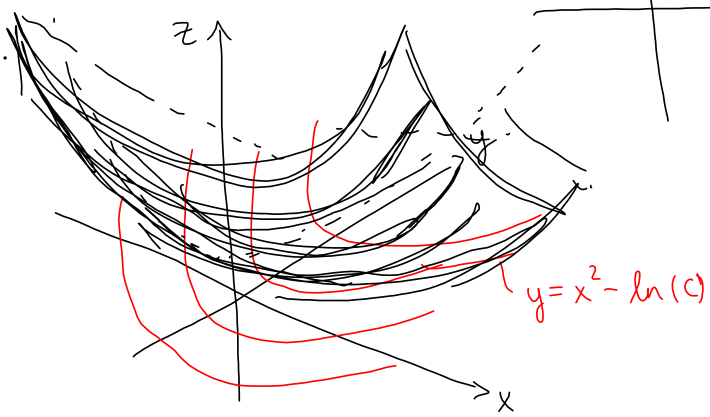
$$z = f(x, \underbrace{y}_{0}) = e^{x^2}$$



Skjæring yz-plan: $x = 0$

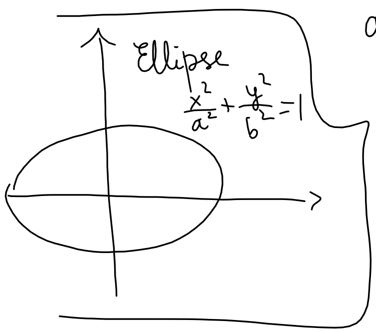
$$z = f(\underbrace{x}_{0}, y) = e^{-y}$$

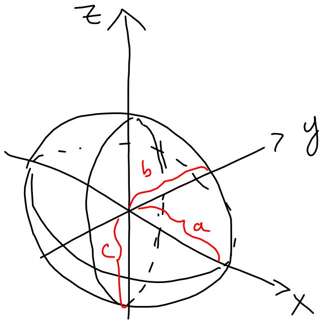




3.9: Parametrisering flater

6.) Ellipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$





Kan omskrive: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 = 1^2 =: R^2$, $\boxed{R=1}$

Definerer: $\frac{x}{a} := \tilde{x}$, $\frac{y}{b} := \tilde{y}$, $\frac{z}{c} := \tilde{z}$

$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1^2$; en kule med sentrum origo, radius 1.

<u>Kulekoordinater</u>: $\tilde{x} = R\sin\phi\cos\theta$
$\tilde{y} = R\sin\phi\sin\theta$
$\tilde{z} = R\cos\phi$, $\phi \in [0, \pi]$
$\theta \in [0, 2\pi]$

<u>Der</u>: $\tilde{x} = \frac{x}{a} = \sin\phi\cos\theta$

$\boxed{R=1}$ $\frac{y}{b} = \tilde{y} = \sin\phi\sin\theta$

$\frac{z}{c} = \tilde{z} = \cos\phi$

$\Rightarrow$ $x = a\sin\phi\cos\theta$
$y = b\sin\phi\sin\theta$
$z = c\cos\phi$

Parametriseringen er: $\vec{r}(\phi, \theta) = (a\sin\phi\cos\theta,\ b\sin\phi\sin\theta,\ c\cos\phi)$,
$\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.