Oppgave 12.1.1

b)

Vi ser at $a_0 = 14$, $r = \frac{1}{7}$. Dermed er summen $\frac{a_0}{1-r} = \frac{14}{1-\frac{1}{7}} = \frac{14\times 7}{6} = \frac{49}{3}$.

c)

Den geometriske rekken fåes ved å gange hvert ledd med $-\frac{1}{6} < 1$ for å få det neste leddet. Summen blir derfor $\frac{4}{1-(-\frac{1}{6})} = \frac{24}{7}$.

Oppgave 12.1.4

a)

Følger av at $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ når $n \to \infty$.

b)

Følger av at $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ når $n \to \infty$.

c)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{1-\sin x}} \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Det følger dermed fra divergenstesten at rekken divergerer.

d)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n+3}^2}{-\frac{1}{n^2}\frac{n-2}{n+3}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} -5\frac{n^2}{(n+3)(n-2)}} \\
&= e^{-5} \neq 0.
\end{aligned}$$

e)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(2^{1/n} - 1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^{-2}2^{1/n}\ln 2}{-n^{-2}} \\
&= \ln 2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.1.5

a)

Setter vi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

ser vi umiddelbart at $A = -B$ og at $A = 1$, slik at $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b)

Bruker vi det vi viste i a) vil alle ledd i summen kansellere bortsett fra det positive leddet (1) for $k = 1$, og det negative leddet (-$\frac{1}{n+1}$) for $k = n$. Resultatet følger.

c)

Det er klart fra b) at summen konvergerer mot 1.

Oppgave 12.2.2

Vi sammenligner med

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p}.$$

Hvis $p \neq 1$ vet vi at dette er

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} u^{1-p}\right]_{\ln 2}^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}(n^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}).$$

Det er klart at dette konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

For $p = 1$ vil rekken divergere. Integralet ovenfor vil da i stedet bli en logaritmefunksjon, og integralet vil divergere siden $\ln n \to \infty$ når $n \to \infty$.

Oppgave 12.2.3

a)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ til å fastslå at rekken divergerer.

b)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer.

c)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer (bruk at $\arctan n \to \pi/2$).

d)

Vi regner ut (sammenligner med $\frac{1}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+\sqrt{n})\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + n^{-1/2}} = 1.$$

Rekken vil derfor divergere, siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer.

e)

Vi sammenligner med $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Rekken vil derfor konvergere, siden $\frac{1}{n^2}$ konvergerer.

f)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n^2)\cos(1/n)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = 1,$$

slik at rekken divergerer.

g)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

og dermed konvergerer rekken.

h)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed divergerer rekken.

i)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}}{1/n^{3/2}} &= \lim_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2})(\sqrt{n^3+1}+n^{3/2})}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^3+1-n^3)}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.5

a)

Forholdstesten gir en grenseverdi på $\frac{1}{3}$, og dermed konvergerer rekken.

b)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 3, og dermed divergerer rekken.

c)

Vi bruker rottesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

d)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

e)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

f)

Vi bruker forholdtesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

g)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{4}{e} > 1.
\end{aligned}$$

Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.7

a)

Rekken konvergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b)

Rekken divergerer. Bruk grensesammenligningstestn med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c)

Rekken divergerer. Bruk sammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

d)

Rekken divergerer på grunn av divergenstesten, siden $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

e)

forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{n^2-(n+1)^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-2n-1}}{n} = 0,$$

slik at rekken konvergerer.

f)

Vi sammenligner med $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)(1+1/n)^n} = \frac{1}{e},$$

slik at rekken divergerer.

g)

Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

slik at rekken konvergerer.

Oppgave 12.2.9

Siden summen av de n første tallene er $\frac{n(n+1)}{2}$ så blir summen lik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$. Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)2^{n+1}}{n(n+1)2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2},$$

og rekka konvergerer derfor.

Oppgave 12.2.13

a)

Anta $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} P(n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln P(n)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln P(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{P(x)}} = e^0 = 1,$$

hvor vi har brukt at $P'(x)$ er et polynom av grad en mindre enn $P(x)$.

b)

På grunn av a) blir grenseverdien for $a_n^{1/n}$ lik 1/2, og dermed konvergerer rekken på grunn av rottesten.

Oppgave 12.3.1

a), c), d)

Rekkene er alternerende, og $a_n \to 0$. Det er klart for alle rekkene at de er avtagendene, siden funksjonene n^2+1, $\sqrt{n}$ og $\ln(n)$ er voksende. derfor er alle tre rekkene konvergente (kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt).

b)

Divergerer på grunn av divergenstesten (a_n går ikke mot 0).

e)

På grunn av divergenstesten divergerer rekken, siden det n'te leddet ikke går mot 0.

Oppgave 12.3.3

a)

Det er fort gjort å sjekke at kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.05$. Dette svarer til $\frac{1}{(n+2)^2} < 0.05$, eller $(n+2)^2 > 20$. Det er klart at minste n der dette er oppfylt er $n=3$. Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{-36+16-9}{144} = -\frac{29}{144}.$$

b)

Vi må finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.25$. Dette er det samme som $\sqrt{n+1} > 4$, eller $n > 15$. legger vi sammen de første 16 leddene finner vi -0.4818.

c)

Rekken er alternerende. Videre er $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{ne}\right| < 1$ for alle n. Det er klart fra dette at kravene i testen for for alternerende rekke er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.1$. Dette svarer til $(n+1)e^{-(n+1)} < 0.1$. Det er fort gjort å sjekke at minste n hvor dette er oppfylt er $n = 3$ ($|a_3| = 0.1494, |a_4| = 0.0733$). Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 - \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} \approx -0.2466.$$

Oppgave 12.3.4

a)

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ er en geometrisk rekke der vi ganger med $-x$ for å få det neste leddet i rekka, og der det første leddet er 1. Summeformelen for en geometrisk rekke gir at summen blir $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k\right| = \left|(-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\right| \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}
\end{aligned}$$

for $x \geq 0$ (siden da er $1 + x > 1$).

c)

Med $f(x) = \ln(1+x)$ er $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Spesielt er $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Så lenge $x \geq 0$ er det klart at restleddet i Taylorrekka går mot 0, slik at Taylorrekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

om 0 konvergerer mot $\ln(1+x)$, det vil si at

$$\left|\ln(1+x) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}\right)\right| = \left|\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \to 0.$$

Rekken her er alternerende, slik at avviket er fra summen er begrenset ved $|a_{n+1}| = \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

d)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ i formelen fra c). Skal vi finne $\ln(3/2)$ med en nøyaktighet bedre enn 0.01 må derfor $\frac{(1/2)^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}(n+2)} < 0.01$. Prøver vi oss frem finner vi at $n = 3$, som gir tilnærmingen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1/2)^{k+1}}{k+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\times 2} + \frac{1}{8\times 3} - \frac{1}{16\times 4} \\
&= \frac{96 - 24 + 8 - 3}{192} = \frac{77}{192} \approx 0.4010.
\end{aligned}$$