Setning 5.9.2 Anta $f: A \to \mathbb{R}$ har lokalt maks/min i et indre punkt $\vec{a}$

Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, så er $\underbrace{\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}}_{\text{stasjonært punkt.}}$

Teorem 5.9.6 Annenderiverttesten
$\vec{a}$ stasjonært, kont. andreordens part. der.
(kan da regne ut Hessematrisen $Hf(\vec{a})$)

a) Egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er >0 : Lokalt min
b) ———— // ———— <0 : Lokalt maks
c) Finnes egenverdier både >0 og <0 : Sadelpunkt

Korollar 5.9.9 La $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} = AD - B^2$ være determinanten til Hessematrisen.
(funk. i to variable)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & D<0 : \text{Sadelpunkt} \\ \text{(ii)} & D>0,\ A>0 : \text{Lokalt min} \\ \text{(iii)} & D>0,\ A<0 : \text{Lokalt maks} \end{array}}$$

Oppg 1 2015 $f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 4xy + 2y \\ 2x^2 + 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Likning 1: $2y(2x+1) = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$

$y=0$: Likning 2 sier da $2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $x = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{(0,0), (-1,0)}}$ er stasjonære

$x = -\frac{1}{2}$: Likning 2 sier da $2 \cdot \frac{1}{4} + 2(-\frac{1}{2}) + 2y = 0$

$2y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})}}$ er også stasjonært (Totalt 3 stasjonære)

b) $Hf = \begin{pmatrix} 4y & 4x+2 \\ 4x+2 & 2 \end{pmatrix}$ $D = 8y - (4x+2)^2$, $A = 4y$

1/ $(0,0)$: $D = -4$, sadelpunkt.
2/ $(-1,0)$: $D = -(-2)^2 = -4$, sadelpunkt.
3/ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ $D = 8 \cdot \frac{1}{4} - (-2+2)^2 = 2 > 0$ $A = 4y = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\text{minimum}}}$

Oppg 4 2014 $f(x,y) = x^2y + yx + y^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy + y \\ x^2 + x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2x+1) \\ x^2 + x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)

Likning 1: $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$

Likning 2: $x^2 + x = 0$

$x = 0$ eller $x = -1$

Likning 2: $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2y = 0$

$2y = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{8}$

Stasjonære: $(0,0), (-1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$

b) $Hf = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 2 \end{pmatrix}$ $D = 4y - (2x+1)^2$ $A = 2y$

1) $(0,0)$: $D = -1$, sadelpkt.

2) $(-1,0)$: $D = -1$, sadelpkt.

3) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$: $D = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Lokalt min

Lagrange:

Teorem 5.10.2 (med en betingelse)

Anta $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, kont. part. der., Våpen.

Anta at $\vec{x}$ er lokalt min eller maks. for f på

$$A = \{ x \in U \mid g(\vec{x}) = \vec{b} \}$$

Da er enten

1. $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$
2. Finnes en λ s.a. $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x})$

Oppg 2 2014 $\quad f(x,y,z) = xz - y^2$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} z \\ -2y \\ x \end{pmatrix}, \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

1. $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$: Ser da at $2x = 2y = 2z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$, men da er ikke betingelsen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppfylt, så vi har ingen kandidater fra $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$

2. $\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} z \\ -2y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Likning 2: $-2y = \lambda \cdot 2y$: Vi har enten $y = 0$, eller $\underline{y \neq 0 \text{ og } \lambda = -1}$

a) $y = 0$ Likning 1 og 3: $\begin{matrix} z = 2\lambda x \\ x = 2\lambda z \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} xz = 2\lambda x^2 \\ xz = 2\lambda z^2 \end{matrix} \Rightarrow x^2 = z^2$

$x^2 + z^2 = 1$ og $x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 kandidater: $(x,y,z) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\underline{y \neq 0 \text{ og } \lambda = -1}$ første og tredje likning: $\begin{matrix} z = -2x \\ x = -2z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = z = 0$$

Siden $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, så må $y = \pm 1$. $\quad f(x,y,z) = xz - y^2$

$f(0,1,0) = f(0,-1,0) = -1$

$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ min: $\underline{f(0,1,0) = f(0,-1,0) = -1}$

maks: $\underline{\underline{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}}}$

Oppg 3. 2013

min. avstand til $(\frac{1}{2}, 0, 0)$

min $f(x,y,z) = (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2$ (kvadratet av avstanden til $(\frac{1}{2}, 0, 0)$)

$g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\nabla g = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0$, men $(0,0,0)$ oppfyller ikke betingelsen $g(x,y,z) = 1$, så ingen kandidater for $\nabla g = \vec{0}$.

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} 2(x-\frac{1}{2}) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 2z \end{pmatrix}$

hvis både y og z $\neq 0$: Likning 2: $2 = 8\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$; Likning 3: $2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ } umulig

1. $y = z = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ for at $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \underline{(\pm 1, 0, 0)}$

$2(x-\frac{1}{2}) = \lambda 2x$: Kan da finne λ fra denne.

2. $y = 0, z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Likning 1: $2(x-\frac{1}{2}) = 2x \Rightarrow 2x - 1 = 2x \Leftrightarrow -1 = 0$

umulig.

3. $y \neq 0, z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

Likning 1: $2(x-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot 2x \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$

$x = \frac{2}{3}, z = 0$: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

$\frac{4}{9} + 4y^2 = 1 \Rightarrow 4y^2 = \frac{5}{9}$ $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{6}$

$\Rightarrow \underline{\underline{(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{6}, 0)}}$

Sammenligner kandidatene:

$f(-1,0,0) = (-1-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \rightarrow$ maks.

$f(1,0,0) = (1-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$f(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{6}, 0) = (\frac{2}{3}-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{36} + 0^2 = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{6} \rightarrow$ min

Oppg 4 2015

V avgrenset av $z = x^2+2x+y^2-4y$ } par. 1

$z = 6-x^2-2x-y^2-4y$ } par 2.

a) Skjæring: $x^2+2x+y^2\cancel{-4y} = 6-x^2-2x-y^2\cancel{-4y}$

$$2x^2+2y^2+4x = 6$$

$$x^2+y^2+2x = 3$$

$$x^2+2x+1+y^2 = 4$$

$$(x+1)^2+y^2 = 2^2$$

Skjæringen er en sirkel med radius 2 og sentrum $(-1,0)$

Hvilken av par. 1 og par. 2 ligger øverst. $(-1,0)$ er sentrum i avgr. område.

par 1: $1-2=-1$ $\Rightarrow$ par. 2 ligger øverst.

par 2: $6-1+2=7$

Hvis D er området $(x+1)^2+y^2 \le 2^2$ så blir volumet

$$\iint_D (\text{par.}2-\text{par.}1)\,dx\,dy = \iint_D \left((6-x^2-2x-y^2-4y)-(x^2+2x+y^2-4y)\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D (6-2x^2-2y^2-4x)\,dx\,dx = 2\iint_D (3-x^2-y^2-2x)\,dx\,dy$$

b) Vi setter $x = -1+r\cos\theta$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$y = r\sin\theta$ $\quad 0\le r\le 2$

$$(x,y) = \vec{T}(r,\theta) \qquad \left|\vec{T}'(r,\theta)\right| = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r$$

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (3-x^2-y^2-2x)\,r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3-(-1+r\cos\theta)^2-r^2\sin^2\theta-2(-1+r\cos\theta)\right)r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3-1-r^2\cos^2\theta\cancel{+2r\cos\theta}-r^2\sin^2\theta+2\cancel{-2r\cos\theta}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r-r^3)\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(8-4)\,d\theta = 8\cdot 2\pi = \underline{\underline{16\pi}}$$