Stoppet sist:

Setn. 4.6.15 Anta $n < m$, og at $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ lin. uavh.
Disse kan utvides til en basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m\}$ for $\mathbb{R}^m$.

Eksempel: utvid $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ til en basis for $\mathbb{R}^3$

1. radreduser

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Legg til søyle slik at har pivot i hver rad/søyle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. "Radreduser tilbake"

de jeg startet med

kan legges til i basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en utvidelse til en basis for $\mathbb{R}^3$.

4.6.3 Basiser og lineærarbildninger (T lineær $\Leftrightarrow$ $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$, $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$.

setn. 4.6.17 Anta at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og la $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ være vektorer i $\mathbb{R}^m$. Finnes da nøyaktig en lineær avbildning T slik at $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ for alle i.

Bevis: Enhver $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives unikt som $c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$

Hvis $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ så blir da $T(\vec{x}) = T(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n)$

$$= c_1 T(\vec{v}_1) + \dots + c_n T(\vec{v}_n) = c_1\vec{w}_1 + \dots + c_n\vec{w}_n$$

Derfor kan det bare finnes en slik T.

Vi ser så at T er lineær når $T(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n) = c_1\vec{w}_1 + \dots + c_n\vec{w}_n$

Vi viser at T er lineær.

anta $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$
$\vec{y} = y_1\vec{v}_1 + \dots + y_n\vec{v}_n$ $\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1)\vec{v}_1 + \dots + (x_n+y_n)\vec{v}_n$

$T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
$= (x_1\vec{w}_1 + \dots + x_n\vec{w}_n)$
$+ (y_1\vec{w}_1 + \dots + y_n\vec{w}_n)$

$T(\vec{x}+\vec{y})$
$= (x_1+y_1)\vec{w}_1 + \dots + (x_n+y_n)\vec{w}_n$
$= x_1\vec{w}_1 + \dots + x_n\vec{w}_n + y_1\vec{w}_1 + \dots + y_n\vec{w}_n$

ser at summen blir like, slik at $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$.

På samme måte viser man at $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$.

Sek. 4.8

Def. 4.8.1 En $m \times m$ elementær matrise er det som fremkommer når vi gjør en radoperasjon på I_m

(i) matrise for å bytte om to rader eks: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(II \leftrightarrow III)$

(ii) multiplisere en rad med konstant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(3 \cdot II)$

(iii) legger til et multiplum av en rad til en annen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(III + 3II)$

---

setn. 4.8.2 Anta at E er en elementær matrise, og A en annen matrise. Matrisen A' som man får ved å gjøre samme radoperasjon på A kan skrives som EA.

---

setn 4.8.3 Enhver elementær matrise er inverterbar, og den inverse er også en elementær matrise

---

setn 4.8.4 Enhver $m \times n$-matrise A kan skrives som $A = E_1 E_2 \cdots E_k B$, der E_i er elementære matriser, og B er den reduserte trappeformen til A

(dersom A er inverterbar så er $A = E_1 \cdots E_k$)

Bevis Vi gjør radoperasjon $F_1, F_2, F_3, \dots$ på A, og får den på redusert trappeform: $B = F_k \cdots F_2 F_1 A \Rightarrow A = \underbrace{F_1^{-1}}_{E_1} F_2^{-1} \cdots \underbrace{F_k^{-1}}_{E_k} B$

setn. 4.8.5 Hvis A er elementær, så er også A^T elementær

for operasjoner av type I og II: $E = E^T$

for type iii: transponerte av $[(i) + s(j)]$ blir $[(j) + s(i)]$.

setn 4.8.6 Anta at $A = E_1 E_2 \cdots E_k B$

Da er $A^T = B^T E_k^T \cdots E_2^T E_1^T$, som gir A^T som et produkt av en matrise på redusert trappeform, og elementære matriser.

Seksjon 4.9 Determinanter.

defineres slik for en $n \times n$-matrise:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matrisen vi får ved å sløyfe rad 1, søyle 1 } ((n-1)\times(n-1))} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{sløyfer rad 1, søyle 2}} + \cdots$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}}_{\text{sløyfet rad 1, søyle n.}}$$

La A_{ij} være determinanten til matrisen vi får ved å sløyfe rad i og søyle j i A. Da defineres determinanten ved

$$\det(A) = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} A_{1j} \longleftarrow \text{kalles for "minorer".}$$

Vi skal vise 1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, alle A, B

2) A invertibel $\iff \det(A) \neq 0$

enkelt eksempel på utregning:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} - 0 \cdot A_{14}$$

$$= -A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left(-2(8-1) + 4(6-3)\right) = -(-14+12) = \underline{\underline{2}}$$

Lemma 4.9.2 Anta at A har en rad <u>eller</u> søyle med bare nuller. Da er $\det(A) = 0$

<u>Bevis</u> Anta at en søyle er null. Bruker induksjon på n.
Anta at A er $(n+1)\times(n+1)$, og at vi har bevist lemmaet for alle $1\times1, 2\times2, \dots, n\times n$ matriser.
Anta at søyle j i A er null.
anta at vi sløyfer søyle k, og $k \neq j$.
matrisen som gir minoren A_{1k} inneholder da en nullsøyle,
og da er A_{1k} lik 0 (induksjonsantagelsen) $\Rightarrow$ $\underline{a_{1k}A_{1k} = 0}$
anta at vi sløyfer søyle j. Da er $a_{1j} = 0$ $\Rightarrow$ $a_{1j}A_{1j} = 0$
Derfor blir $\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \underbrace{a_{1j}A_{1j}}_{\text{alle } 0} = 0$

Øvretriangulær matrise: matrise der alle elementer under hoveddiagonalen er 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to 6$$

nedretriangulær: alt <u>over</u> hoveddiagonalen er 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to 0$$

Lemma 4.9.3 Determinanten til en øvre/nedre ~~triangulær~~ triangulær matrise er lik produktet av diagonalelementene i matrisen

<u>Bevis</u>: Hvis du sløyfer rad 1, søyle $j \geq 1$ i A, og A er øvretriang. så vil første søyle være en nullsøyle. $\Rightarrow$ bare rad 1, søyle 1 som bidrar

4.9.1 Determinanter og radoperasjoner

Lemma 4.9.4: Anta at B fåes fra A ved å gange rad i med s. Da er $\det B = s \cdot \det(A)$

Lemma 4.9.5 Anta at B fåes fra A ved å bytte om to rader. Da er $\det(B) = -\det(A)$.

Lemma 4.9.9 Anta at B fåes fra A ved legge til et multiplum av en rad til en annen. Da er $\det B = \det A$