3.4 Linjeintegraler for vektorfelt

Definisjon 3.4.1

La $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ være en stykkevis glatt parametrisering av en orientert kurve i $\mathbb{R}^n$, og la $\vec{F}(x_1,\dots,x_n)$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^n$ definert langs C. Da er linjeintegralet av vektorfeltet $\vec{F}$ langs C definert ved

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{r}\,'(t)}\,dt$$

Dette kalles også arbeidet utført av $\vec{F}$ langs C.

eks. 1 Finne arbeidet utført av vektorfeltet

$$\vec{F}(x,y,z) = (0,0,-gm) = -gm\,\vec{k}$$

langs kurven $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ for $t\in[0,2\pi]$, der $g>0$ og $m>0$ er reelle tall.

Løsn. Se figur eks. 2 mandag 5/2.

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0,0,-gm)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-gm)\,dt = \Big[-gmt\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-mg\cdot 2\pi}}$$

$(= -mg\cdot \text{høydediff})$

eks. 2 $\vec{F}(x,y,z) = (zx, yx, x) = zx\,\vec{i} + yx\,\vec{j} + x\,\vec{k}$

$C: \quad \vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3) \quad , \quad t \in [0,1].$

Dette gir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 \cdot t^2, 2t \cdot t^2, t^2) \cdot (2t, 2, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t^6 + 4t^3 + 3t^4)\,dt = \frac{2}{7} + \frac{4}{4} + \frac{3}{5}$$

$= \text{etc.}$

3.5 Gradienter og konservative vektorfelt

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ skalarfelt av n variable

$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)$ blir da et vektorfelt.

Dette vektorfeltet kalles gradienten til ϕ.

Definisjon 3.5.3

Hvis $\vec{F} = \nabla\phi$ for alle $x \in A$, sier vi at ϕ er en potensialfunksjon for $\vec{F}$ i A.

$\vec{F}$ kalles da et konservativt vektorfelt i området A.

Teorem 3.5.7

Man kan vise at hvis $\vec{F}$ har kontinuerlige partiellderiverte og A er et åpent og enkeltsammende område (dvs. alle lukkede, kontinuerlige kurver kan snurpes til et punkt i A uten å forlate A), så gjelder

$\vec{F}$ konservativt i A $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ for alle i og j og alle $x \in A$.

Setning 3.5.1

Anta at $\phi : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable med kontinuerlig gradient. Hvis $\vec{r} : [a,b] \to A$ parametriserer en stykkevis glatt kurve C i A, så er

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

Bevis Vi kan anta at C er glatt (sett sammen biten).

$$[\phi(\vec{r}(t))]' = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \cdot x_n'(t)$$

$$= \nabla\phi \cdot \vec{r}\,'(t) \qquad (*)$$

Får derfor

$$\int_C \nabla\phi \, d\vec{r} = \int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b [\phi(\vec{r}(t))]'\,dt$$

$$= \Big[\phi(\vec{r}(t))\Big]_a^b = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)). \quad \square$$

eks. 1 $\phi(x,y,z) = xyz$ gir $\nabla\phi = (yz, xz, xy) \underset{\overset{\uparrow}{\text{def}}}{=} \vec{F}$

Kurven C parametrisert ved

$$\vec{r}(t) = (t^2, \sin t, \cos t) \quad \text{for } t \in [0,\pi]$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

$$= \phi(\vec{r}(\pi)) - \phi(\vec{r}(0))$$

$$= \phi(\pi^2, 0, -1) - \phi(0,0,1)$$

$$= \pi^2 \cdot 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}} \qquad \square$$

eks. 2 Vis at $\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ er konservativt (vi glemmer forrige eksempel)

Løsn. $\vec{F}$ er definert i et enkeltsammenhengende område, nemlig hele $\mathbb{R}^3$. Og vi har

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = y$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = x$$

alt stemmer (teorem 3.5.7)

Dvs. $\vec{F}$ er kons.

eks. 3 Finn en potensialfunksjon for

$$\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k} = (yz, xz, xy)$$

Løsn. Vi glemmer igjen eks. 1 og 2.

Potensialfunksjon: $\phi(x,y,z)$. Krav:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = yz & \Rightarrow \phi(x,y,z) = yz\cdot x + C(y,z) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = xz & \Rightarrow \phi(x,y,z) = xz\cdot y + C(x,z) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = xy & \Rightarrow \phi(x,y,z) = xy\cdot z + C(x,y) \end{cases}$$

Kan ta alle C-ene lik 0. Så

$$\phi(x,y,z) = xyz$$