**Løsningsforslag til eksamen Mat1110. 13/8-04**

**Oppgave 1**
Vi har gitt likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \;\; - x_3 \qquad &= 1 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - \;\; x_3 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

Vi setter opp den utvidete matrisen til systemet og rekkereduserer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 \qquad &= 2 \\ x_2 - \;\; x_3 \qquad &= 1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Vi ser her at $x_3$ er fri variabel, og vi får løsning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x_3 \\ 1 + \;\; x_3 \\ x_3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fra rekkereduseringen over innser vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

er den rekkereduserte til $A$ (spørsmålene om basiser faller utenfor årets pensum).

b) Hele dette delpunktet faller utenfor årets pensum.

c) Vi har gitt likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \;\; x_3 &= 0 \\ bx_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Vi rekkereduserer den utvidete matrisen til dette systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 1 \\ 0 & 0 & b+2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden vi aldri har siste kolonne som pivotkolonne så vil vi alltid ha løsninger. Når $b \neq -2$ vil de tre første kolonnene være pivotkolonner, vi har ingen fri variable og derfor én løsning. Når $b = -2$, vil kun 1. og 2. kolonne være pivotkolonne, $x_3$ er derfor fri variabel og vi har uendelig mange løsninger.

**Oppgave 2**
a) Vi bruker sylinderkoordinater. Volumet er da gitt ved utrykket

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r - r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{7}{4}\,d\theta = \underline{\underline{\frac{7\pi}{2}}}.$$

b)Sett $R = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$. Arealet er da lik

$$\iint_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy = \iint_R \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy \overset{\text{polarkoordinater}}{=}$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Big|_0^1 \frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\,d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}}.$$

**Oppgave 3**
a) Vi har

$$(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^{\frac{1}{2}} = ((\frac{1}{t^2})^2 + 2 + (t^2)^2)^{\frac{1}{2}} = ((\frac{1}{t^2} + t^2)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t^2} + t^2.$$

Dette gir buelengden

$$l(C) = \int_1^2 \frac{1}{t^2} + t^2\,dt = \Big|_1^2 -\frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}.$$

b) Forholdskriteriet gir oss:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{n+2}|/|\frac{n}{2^n}x^{n+1}| = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Rekka må derfor konvergere når $|x| < 2$. Når $|x| = 2$, har vi $|(-1)^n \frac{n}{2^n}x^{n+1}| = 2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \neq 0$. Rekka må derfor divergere når $|x| = 2$ dvs, konvergere hvis og bare hvis $\underline{\underline{x \in (-2,2)}}$.

c) For $|x| < 2$ setter vi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n}x^{n+1}$. Sett $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Vi har $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n}x^{n-1}$, $\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}x^n = -\frac{x}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2+x}$. Dette gir $g(x) = (-\frac{x}{2+x})' = -\frac{2}{(2+x)^2}$, og $f(x) = x^2 g(x) = \underline{\underline{-\frac{2x^2}{(2+x)^2}}}$.

**Oppgave 4**

a) Vi har $C = C_1 \cup C_2$, der $C_1$ er gitt ved $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i}$, $t \in [-1, 1]$ og $C_2$ er gitt ved $\mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}$, $t \in [-1, 1]$. På $C_1$ er $y(t) = 0$, så $-ydx = -y(t)x'(t)dt = 0$ og likeledes $dy = y'(t)\, dt = 0$. Tilsammen får vi $\int_{C_1} -y\, dx + x^2\, dy = 0$. Vi har så

$$\int_{C_2} -y\, dx + x^2\, dy = \int_{-1}^{1} ((t^2 - 1)(-1) + t^2(-2t)^2)\, dt =$$
$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2 - 2t^3)\, dt = \Big|_{-1}^{1}\, t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} = \frac{4}{3},$$

så vi har $I = \int_{C_1} -y\, dx + x^2\, dy + \int_{C_2} -y\, dx + x^2\, dy = 0 + \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$.

b) Greens teorem gir oss.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dA = \iint_D (2x + 1)\, dA = \iint_D dA =$$
$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} dy\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \Big|_{-1}^{1}\, x - \frac{x^3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

(Vi har her brukt at $D$ er symmetrisk om $y$-aksen så $\iint_D 2x\, dA = 0$.)