5.2.1

Setning 5.2.2: hvis $\vec{x}_n \to \vec{x}$, alle delfølger av $\vec{x}_n$ konvergerer også mot $\vec{x}$

La $\vec{y}_n$ være en delfølge. Da er $\vec{y}_k = \vec{x}_{n_k}$

$\vec{x}_n \to \vec{x}$: for gitt $\varepsilon$ finnes en $N$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}| \le \varepsilon$ for $n \geq N$.

$$|\vec{y}_k - \vec{x}| = |\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| \le \varepsilon$$

$$(k \geq N \Rightarrow n_k \geq N)$$

5.2.3 $I_{n+1} \subset I_n$ , lengden til $I_n \to 0$

Skal vise: Finnes kun ett tall i alle intervallene.

1. Viser først at det høyst finnes ett tall

Anta for motsigelse at det finnes to tall: $a, b$

Da er $[a, b]$ også innenfor alle intervallene,

men da er $l(I_n) \geq (b-a)$, som strider mot $I_n \to 0$.

2. Sett $I_n = [a_n, b_n]$. Siden $I_{n+1} \subset I_n$ så er

$a_n$ voksende, $b_n$ avtagende

$a_n$ oppad begrenset, $b_n$ nedad begrenset.

$a_n$ konvergent, $b_n$ konvergent.

$\downarrow$ $a$, $\downarrow$ $b$

Det er klart at både $a$ og $b$ ligger i alle $I_n$, slik at $a = b$.

$\Rightarrow a = b$ er det unike punktet inni alle delintervallene.

5.3.2 $f: (0,1) \to \mathbb{R}$  $f(x) = \frac{1}{x}$

f er kont i $a \in (0,1)$:

for $\varepsilon > 0$, finn $\delta$ s.a. $|x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{a-x}{xa}\right| < \varepsilon \Rightarrow |a-x| < \varepsilon |x| a$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{|a-x|}_{\delta} < \varepsilon x a \Leftarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta < \varepsilon x a$$

$\Rightarrow$ f kont. i a siden vi kan velge $\delta$ slik at den er mindre enn $\varepsilon x a > \varepsilon \frac{a}{2} a$

$\underline{\delta < \min\left(\frac{a}{2}, \varepsilon \frac{a^2}{2}\right)}$

hvis a er liten må vi velge $\delta$ veldig liten og når $a \to 0$, ser vi at det ikke kan finnes en felles $\delta > 0$

5.4.2 $x_{n+1} = 0.9\,x_n + 0.01\,y_n - 10$

$y_{n+1} = -1.01\,x_n + y_n + 300$

Likevekt i $(x, y)$:

$x = 0.9x + 0.01y - 10$

$y = -1.01x + y + 300$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 \\ -1.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Likevekt: $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = y_n$

$0.1x - 0.01y = -10$

$1.01x = 300$

$x = \frac{300}{1.01} \approx 297$

$y = \frac{10 + 0.1\frac{300}{1.01}}{0.01} \approx 4000$

5.4.5

$$x_{n+1} = 2.2\, x_n (1 - x_n) + 0.01\, x_n y_n$$
$$y_{n+1} = 3.1\, y_n (1 - y_n) - 0.02\, x_n y_n$$

likevekt $(x,y)$:

$$\underline{x} = 2.2\,\underline{x}(1-x) + 0.01\,\underline{x}y$$
$$\underline{y} = 3.1\,\underline{y}(1-\underline{y}) - 0.02\,x\underline{y}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2.2(1-x) + 0.01y \\ 1 &= 3.1(1-y) - 0.02x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &\approx 0.5485 \\ y &\approx 0.6739 \end{aligned}$$