Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 10/5-14/5

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

May 13, 2010

Oppgave 5.10.3

Vi skal minimere $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under de to bibetingelsene

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 = 1 \\ g_2(x, y, z) &= x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \end{aligned}$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f &= (2x, 2y, 2z) \\ \bigtriangledown g_1 &= (2x, 2y, 0) \\ \bigtriangledown g_2 &= (2x - y, -x + 2y, -2z). \end{aligned}$$

For å bruke Teorem 5.9.2 finner vi først ut når $\bigtriangledown g_1$ og $\bigtriangledown g_2$ er lineært avhengige. Dette kan vi finne ut av ved å bringe matrisen

$$\begin{pmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \\ 0 & -2z \end{pmatrix}$$

på trappeform. Vi splitter opp i følgende muligheter:

- Når $x = y = 0$ er søylene lineært avhengige siden første søyle er 0, men da er ikke den første bibetingelsen oppfylt.

- Hvis nøyaktig en av x, y er lik 0 er det fort å sjekke at begge søylene er pivotsøyler, så vi får ingen kandidater med lineært uavhengige gradienter her heller.

- Hvis både $x, y \neq 0$ kan vi skrive

  $$\begin{pmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \\ 0 & -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2xy & 2xy - y^2 \\ 2xy & 2xy - x^2 \\ 0 & -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2xy & 2xy - y^2 \\ 0 & y^2 - x^2 \\ 0 & -2z \end{pmatrix}.$$

  Det er klart at andre søyle ikke er en pivotsøyle kun når $y = \pm x, z = 0$. $y = \pm x$ kombinert med første bibetingelse gir at $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Det er fort gjort å sjekke at dette sammen med $z = 0$ ikke passer sammen med andre bibetingelse.

Med andre ord, lineært avhengige $\bigtriangledown g_1$, $\bigtriangledown g_2$ gir oss ingen kandidater. Det gjenstår nå å løse likningen

$$\bigtriangledown f = \lambda_1 \bigtriangledown g_1 + \lambda_2 \bigtriangledown g_2.$$

På komponentform er denne

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - \lambda_2 y &= 2x \\
2\lambda_1 y - \lambda_2 x + 2\lambda_2 y &= 2y \\
-2z\lambda_2 &= 2z,
\end{aligned}$$

Den tredje likningen sier at $z = 0$ eller $\lambda_2 = -1$.

- Anta først at $x = 0$ (så $y = \pm 1$ fra den første bibetingelsen). Da sier de to første likningene at

  $$\begin{aligned}
  -\lambda_2 y &= 0 \\
  2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y &= 2y.
  \end{aligned}$$

  Da blir $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 1$. Den tredje likningen er da oppfylt kun når $z = 0$. Det er klart at $(0, \pm 1, 0)$ oppfyller begge bibetingelsene.

- Helt tilsvarende får ved å anta at $y = 0$ at $(\pm 1, 0, 0)$ oppfyller begge bibetingelsene også.

- Anta til slutt $x, y \neq 0$. Vi ser $z = 0$ sammen med dette ikke er forenlig med de to bibetingelsene. Den tredje likningen sier derfor at $\lambda_2 = -1$. Vi skriver om de tre likningene til

  $$\begin{aligned}
  2\lambda_1 xy + 2\lambda_2 xy - \lambda_2 y^2 &= 2xy \\
  2\lambda_1 xy - \lambda_2 x^2 + 2\lambda_2 xy &= 2xy \\
  -2z\lambda_2 &= 2z.
  \end{aligned}$$

  Trekker vi den første likningen fra den andre får vi at $\lambda_2 y^2 = \lambda_2 x^2$, slik at $x = \pm y$ siden $\lambda_2 \neq 0$. Vi fort at det er kun der x og y har motsatt fortegn at andre bibetingelse kan være oppfylt. Ved å sette inn i andre bibetingelse ser vi at følgende punkter er kandidater i tillegg til de vi allerede har:

  $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De siste fire punktene gir verdi $\frac{3}{2}$ for f, mens punktene $(0, \pm 1, 0)$,$(\pm 1, 0, 0)$ gir 1, som dermed blir punktene som minimerer avstanden til origo.

Oppgave 5.10.8

a)

De partielle deriverte til funksjonen $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + y^2$ er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} + 2y.
\end{aligned}$$

Setter vi disse lik 0 må $\frac{2x}{x^2+y^2+1} = x$ og $\frac{2y}{x^2+y^2+1} = -2y$.

- Vi ser umiddelbart at $x = y = 0$ er en løsning.

- Hvis $x = 0$ er den første likningen oppfylt. Hvis $y \neq 0$ gir den andre da at $x^2 + 1 = -1$, som er umulig.

- Hvis $y = 0$ er den andre likningen oppfylt. Den første likningen gir da at $x^2 + 1 = 2$, som er oppfylt for $x = 1$ og $x = -1$.
- Hvis både x og y er $\neq 0$ så kan vi dele med x og y i begge likningene, og får at $\frac{2}{x^2+y^2+1} = 1$ og $\frac{2}{x^2+y^2+1} = -2$, og det er umulig å ha begge disse likningene oppfylt samtidig.

De stasjonære punktene blir altså $(0,0)$, $(1,0)$, og $(-1,0)$. De andreordens deriverte er

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+y^2+1)-4x^2}{(x^2+y^2+1)^2} - 1\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2+y^2+1)-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} + 2\end{aligned}$$

Vi regner ut at

$$\begin{aligned}Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\\ Hf(1,0) = Hf(-1,0) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Derfor er $(0,0)$ et minimumspunkt, mens $(\pm 1, 0)$ er sadelpunkter.

b)

I polarkoordinater kan f skrives $f(r,\theta) = \ln(r^2+1) + r^2\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$. Vi begrenser oss til randen $r = 1$ og har da $f(\theta) = \ln 2 - \frac{1}{2}\cos^2\theta + \sin^2\theta$, og

$$f'(\theta) = \cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 3\cos\theta\sin\theta = \frac{3}{2}\sin(2\theta).$$

Dette er 0 kun når $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Dette gir oss punktene $(1,0)$ og $(-1,0)$ som vi fant i a), samt punktene $(0,\pm 1)$. Siden

$$\begin{aligned}f(\pm 1, 0) &= \ln 2 - \frac{1}{2} > 0\\ f(0,\pm 1) &= \ln 2 + 1\\ f(0,0) &= 0,\end{aligned}$$

så er det klart at $(0,\pm 1)$ maksimumspunkter, $(0,0)$ er minimum.

Oppgave 5.10.10

a)

Vi fullfører kvadratene og får

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y &= 11\\ 9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 11 + 9 + 16 = 36\\ \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} &= 1.\end{aligned}$$

Kjeglesnittet er derfor en ellipse med sentrum i $(1,-2)$, og med store halvakse 3, lille halvakse 2. Brennvidden er $c = \sqrt{3^2 - 4^2} = \sqrt{5}$. Brennpunktene er $(1, -2-\sqrt{5})$ og $(1, -2+\sqrt{5})$.

b)

Vi skal maksimere/minimere funksjonen $f(x,y) = 2x + y$, under bibetingelsen $g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$. Siden bibetingelsen beskriver et lukket, begrenset område og f er kontinuerlig, så vet vi at f antar både maksimum og minimum. Likningen for gradientene blir

$$\bigtriangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 18x - 18 \\ 8y + 16 \end{pmatrix} = \lambda \bigtriangledown g(x,y).$$

Sammenligner vi komponentene ser vi at $18x - 18 = 2(8y + 16)$, som gir at $18x = 16y + 50$, eller $9x = 8y + 25$. Setter vi dette inn i bibetingelsen får vi at

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 50 &= 11 \\ 81x^2 + 36y^2 &= 549 \\ (8y + 25)^2 + 36y^2 &= 549 \\ 100y^2 + 400y + 76 &= 0 \\ 25y^2 + 100y + 19 &= 0. \end{aligned}$$

Bruker vi formelen for andregradslikningen får vi $y = -\frac{19}{5}$, eller $y = -\frac{1}{5}$. Løsningene våre blir dermed $(x, y, f(x,y)) = (-\frac{3}{5}, -\frac{19}{5}, -5)$ og $(x, y, f(x,y)) = (\frac{13}{5}, -\frac{1}{5}, 5)$, der den første er et minimum, den andre er et maksimum.

$\bigtriangledown g(x,y) = 0$ hvis og bare $x = 1, y = -2$, men der er lett å se at dette punktet ikke tilfredsstiller bibetingelsen.

Oppgave 5.10.13

La y være den horisontale lengden på siden av renna, og z være den vertikale lengden. Arealet av tverrsnittet er da gitt ved

$$A = f(x,y,z) = (x + y)z = xz + yz,$$

og bibetingelsen er

$$g(x,y,z) = x + 2\sqrt{y^2 + z^2} = b.$$

Likningen vi skal løse tar dermed formen

$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ x + y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \frac{2z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix}.$$

Vi ser at de to første komponentene på høyresiden må være like, som gir at $4y^2 = y^2 + z^2$, og dermed $3y^2 = z^2$. Dermed er $\frac{z}{y} = \sqrt{3}$, som gir at $u = \frac{\pi}{3}$. Siden $\lambda_1 = z$ gir den tredje likningen dermed at

$$x + y = \frac{2z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{6y^2}{2y} = 3y,$$

og dermed $x = 2y$. Siden lengden av siderenna er $\sqrt{y^2 + z^2} = 2y$, må alle sidene i renna være lik $\frac{b}{3}$.

Oppgave 5.10.14

Arealet er gitt ved $A(x,y,z) = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, der $s = \frac{x+y+z}{2}$. Vi skal maksimere dette under bibetingelsen $g(x,y,z) = x + y + z = O$, der O er en gitt omkrets. Gradienten til g er $(1,1,1)$, som aldri er null. Siden A er litt kronglete å derivere kan vi i stedet maksimere funksjonen $f(x,y,z)=\ln A(x,y,z)$. Vi får da

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln s+\frac{1}{2}\ln(s-x)+\frac{1}{2}\ln(s-y)+\frac{1}{2}\ln(s-z).$$

Siden $s-x=\frac{-x+y+z}{2}$, $s-y=\frac{x-y+z}{2}$, $s-z=\frac{x+y-z}{2}$ så ser vi ved bruk av kjerneregelen (for eksempel er $\frac{\partial(s-x)}{\partial x}=-\frac{1}{2}$):

$$\bigtriangledown f=\begin{pmatrix} \frac{1}{4s}-\frac{1}{4(s-x)}+\frac{1}{4(s-y)}+\frac{1}{4(s-z)} \\ \frac{1}{4s}+\frac{1}{4(s-x)}-\frac{1}{4(s-y)}+\frac{1}{4(s-z)} \\ \frac{1}{4s}+\frac{1}{4(s-x)}+\frac{1}{4(s-y)}-\frac{1}{4(s-z)} \end{pmatrix}.$$

For at $\bigtriangledown f=\lambda\bigtriangledown g$ ser vi at første og andre komponent i $\bigtriangledown f$ må være like. Dette gir at

$$\frac{1}{4s}-\frac{1}{4(s-x)}+\frac{1}{4(s-y)}+\frac{1}{4(s-z)}=\frac{1}{4s}+\frac{1}{4(s-x)}-\frac{1}{4(s-y)}+\frac{1}{4(s-z)},$$

som gir at

$$\frac{1}{2(s-y)}=\frac{1}{2(s-x)},$$

og fra dette ser vi fort at $x=y$. At $y=z$ viser vi på samme måte ved å sammenligne andre og tredje komponent i $\bigtriangledown f$. Vi har dermed vist at $x=y=z$, og trekanten er derfor likesidet når vi har maksimum areal.

Oppgave 5.10.15

a)

Setter vi $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ og bruker implisitt funksjonsteorem til å regne ut de partielle deriverte til en funksjon g som tilfredsstiller $f(x,y,g(x,y))=1$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) &= -\frac{\frac{2x_0}{a^2}}{\frac{2z_0}{c^2}}=-\frac{x_0c^2}{z_0a^2}\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) &= -\frac{\frac{2y_0}{a^2}}{\frac{2z_0}{c^2}}=-\frac{y_0c^2}{z_0b^2}.\end{aligned}$$

Likningen for tangentplanet blir dermed

$$z-z_0=-\frac{x_0c^2}{z_0a^2}(x-x_0)+-\frac{y_0c^2}{z_0b^2}(y-y_0),$$

eller $\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=-\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+-\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$, som gir $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$.

b)

Her kan du godt sette opp volumet som et trippelintegral, og regne ut. Det er forsåvidt uproblematisk å sette opp grensene for integralet, men det tar litt tid å sette opp og regne ut. En raskere måte å gjøre dette på er som følger:

- skjæring mellom tangentplanet og x-aksen ser vi fort at blir $x=\frac{a^2}{x_0}$,
- skjæring mellom tangentplanet og y-aksen blir $y=\frac{b^2}{y_0}$,

- skjæring mellom tangentplanet og z-aksen blir $z = \frac{c^2}{z_0}$.

Området vårt har en grunnflate i xy-planet med hjørner $(0,0), (\frac{a^2}{x_0}, 0), (0, \frac{b^2}{y_0})$. Grunnflaten har areal $\frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\frac{b^2}{y_0}$. Høyden på pyramiden er $\frac{c^2}{z_0}$, slik at volumet blir (en tredjedel av grunnflate ganger høyde):

$$V = \frac{1}{3}\frac{c^2}{z_0}\frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\frac{b^2}{y_0} = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

c)

Vi skal maksimere funksjonen $f(x,y,z) = xyz$ under bibetingelsen $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Vi regner ut $\bigtriangledown f = (yz, xz, xy)$, og $\bigtriangledown g = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$. Vi ser først at $\bigtriangledown g = 0$ ikke er kompatibelt med bibetingelsen. $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ betyr at

$$xyz = \lambda\frac{2x^2}{a^2} = \lambda\frac{2y^2}{b^2} = \lambda\frac{2z^2}{c^2}.$$

$\lambda = 0$ gir at minst to av $x, y, z = 0$, som gir kandidatene $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, men her er produktet xyz lik 0. Hvis $\lambda \neq 0$ så må $\lambda\frac{x^2}{a^2} = \lambda\frac{y^2}{b^2} = \lambda\frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$, slik at $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$ må gi maksimum verdi for xyz.

d)

Fra b) ser vi at vi vil finne minimum volum ved å finne minimum på funksjonen $f(x,y,z) = \frac{1}{xyz}$. Bibetingelsen er den samme som i c). $\bigtriangledown f = \left(-\frac{1}{x^2yz}, -\frac{1}{xy^2z}, -\frac{1}{xyz^2}\right)$. $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ betyr nå at

$$-\frac{1}{xyz} = \lambda\frac{2x^2}{a^2} = \lambda\frac{2y^2}{b^2} = \lambda\frac{2z^2}{c^2}.$$

Dette gir samme løsning som i c), slik at det minste mulige volumet blir

$$V = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0} = \frac{3\sqrt{3}a^2b^2c^2}{6abc} = \frac{1}{2}\sqrt{3}abc.$$

Oppgave 5.10.17

Nyttefunksjonen $U(x,y) = a\ln x + b\ln y$ har gradient

$$\bigtriangledown U(x,y) = \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}\right).$$

For bibetingelsen $g(x,y) = px + qy = S$ har vi $\bigtriangledown g(x,y) = (p,q)$. Vi må altså løse likningen

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{x} \\ \frac{b}{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

For å eliminere λ deler jeg komponentene på høyre og venstre side på hverandre, og får da at $\frac{ay}{bx} = \frac{p}{q}$, som også kan skrives

$$bpx = aqy.$$

Gang så opp med b i bibetingelselikningen:

$$bS = bpx + bqy = aqy + bqy = (a+b)qy,$$

eller $y = \frac{bS}{(a+b)q}$. På helt samme måte får vi at $x = \frac{aS}{(a+b)p}$.