UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag: Fredag 27. mars 2015
Tid for eksamen: 15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 7 sider.
Vedlegg: Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag

Oppgave 1. (3 poeng) En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j}$. Akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ er lik:

A) $-\sin t\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j}$
B) $-t^4\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$
C) $\sqrt{\cos^2 t + 144t^4}$
D) $-\cos t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j}$
E) $-\cos t\,\mathbf{i} + \frac{t^6}{30}\,\mathbf{j}$

Riktig svar: D) $-\cos t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j}$
Begrunnelse: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\sin t\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j})' = -\cos t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j}$

Oppgave 2. (3 poeng) En parametrisert kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hvis $f(x, y) = x^2 y$, så er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ lik:

A) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t + 4t^2}\,dt$

B) $x^2 y \int_0^{2\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$

C) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\sin^2 t + t^4}\,dt$

D) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,(\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$

E) $x^2 y \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + t^4}\,dt$

Riktig svar: A) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t + 4t^2}\,dt$
Begrunnelse: Vi regner først ut $\mathbf{v}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$ og $v(t) = \sqrt{\cos^2 t + 4t^2}$. Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 y\,ds = \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 t^2\,v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t + 4t^2}\,dt$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) $\mathcal{C}$ er sirkelen parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hva er $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ når $\phi(x, y) = e^{\sin xy}$?

A) π
B) 0
C) $\frac{1}{2}$
D) 2π
E) $\frac{\pi}{2}$

Riktig svar: B) 0
Begrunnelse: Integralet av en gradient rundt en lukket kurve er alltid null (fordi $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$ det $\mathbf{a}$ er startpunktet, $\mathbf{b}$ er sluttpunktet, og de to er like siden kurven er lukket).

Oppgave 4. (3 poeng) Hvilket kjeglesnitt fremstiller ligningen $-4x^2 + y^2 + 16x + 2y = 19$?

A) Ellipsen med sentrum i $(1, -2)$ og halvakser $a = 2$, $b = 3$.
B) Hyperbelen med sentrum i $(2, 1)$ og asymptoter $y - 1 = \pm 4(x - 2)$.
C) Hyperbelen med sentrum i $(1, -2)$ og asymptoter $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x - 1)$.
D) Hyperbelen med sentrum i $(2, -1)$ og asymptoter $y + 1 = \pm 2(x - 2)$.
E) Ellipsen med sentrum i $(2, 2)$ og halvakser $a = 1$, $b = 2$

Riktig svar: D) Hyperbelen med sentrum i $(2, -1)$ og asymptoter $y + 1 = \pm 2(x - 2)$.
Begrunnelse: Vi må fullføre kvadratene:

$$-4x^2 + y^2 + 16x + 2y = 19 \iff -4(x^2 - 4x) + y^2 + 2y = 19$$

$$\iff -4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 19 - 16 + 1 \iff -4(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\iff \frac{(y+1)^2}{4} - (x-2)^2 = 1$$

som er formelen for en hyperbel med sentrum i $(2, -1)$ og asymptoter $y + 1 = \pm 2(x - 2)$.

Oppgave 5. (3 poeng) Hvilken av matrisene er *ikke* på redusert trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E

(Fortsettes på side 3.)

Riktig svar: C) C
Begrunnelse: Andre søyle er en pivotsøyle, men har flere enn ett ikke-null element.

Oppgave 6. (3 poeng) Hvis $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er lineæravbildningen slik at $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, så er matrisen til $\mathbf{T}$ lik:

A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riktig svar: C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
Begrunnelse: Vi har

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som blir den første søylen i matrisen og

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som blir den andre søylen i matrisen.

Oppgave 7. (3 poeng) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er deriverbare funksjoner slik at $\mathbf{G}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{F}'(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hvis $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$, så er $\mathbf{H}'(\mathbf{a})$ lik:

A) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -7 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 7 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 4.)

Riktig svar: C) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 7 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
Begrunnelse: Ifølge kjerneregelen er

$$\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{b})\mathbf{G}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 7 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8. (3 poeng) Den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hva er den generelle løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 2 \\ x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

A) z kan velges fritt, men da er $y = z$ og $x = -z$
B) $x = -1, y = 1, z = 1$
C) y og z kan velges fritt, $x = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z$
D) $x = 2, y = -1, z = -1$
E) Systemet har ingen løsning.

Riktig svar: E) Systemet har ingen løsning.
Begrunnelse: Siste søyle er en pivotsøyle.

Oppgave 9. (3 poeng) A er området i første kvadrant avgrenset av sirklene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 = 4$. Da er $\iint_A (x + y^2)\, dxdy$ lik:

A) $\int_1^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
B) $\int_1^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
C) $\int_0^2 \left[\int_0^{\pi} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
D) $\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
E) $\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$

Riktig svar: D) $\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
Begrunnelse: Vi har $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ der r løper fra 1 til 2 og θ fra 0 til $\frac{\pi}{2}$. Jacobideterminanten er r, så

$$I = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\cos\theta + r2\sin^2\theta\right) r\, d\theta\right]\, dr = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$$

Oppgave 10. (3 poeng) Når vi skifter integrasjonsrekkefølge i integralet

$$\int_0^1 \left[\int_{2x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\right] dx\,,$$

(Fortsettes på side 5.)

får vi:

A) $\int_0^2 \left[\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\right] dy$

B) $\int_0^1 \left[\int_{2y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right] dy$

C) $\int_0^1 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)\,dx\right] dy$

D) $\int_0^2 \left[\int_{2y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right] dy$

E) $\int_0^1 \left[\int_0^2 f(x,y)\,dx\right] dy$

Riktig svar: A) $\int_0^2 \left[\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\right] dy$
Begrunnelse: Løser vi ligningene $y = 2x$ og $y = 2\sqrt{x}$ for x, får vi $x = \frac{y}{2}$ og $x = \frac{y^2}{4}$. Når $x = 1$, er $y = 2$, og siden linjen $x = \frac{y}{2}$ ligger til venstre for parabelen $x = \frac{y^2}{4}$, får vi $\int_0^2 \left[\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\right] dy$.

Oppgave 11. (4 poeng) Hvis $R = [0,1] \times [0,2]$, så er $\iint_R x^2y\,dxdy$ lik:

A) $\frac{3}{4}$

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Riktig svar: D) $\frac{2}{3}$
Begrunnelse: Dette er en rett frem integrasjon:

$$\iint_R x^2y\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^2 x^2y\;dy\right] = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\;dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Oppgave 12. (4 poeng) Hvis $\mathcal{C}$ er den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$, og $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\,\mathbf{i} + (x^3+y^2)\,\mathbf{j}$, så er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ lik:

A) $\frac{8}{9}$

B) 1

C) $\frac{11}{9}$

D) $\frac{7}{8}$

(Fortsettes på side 6.)

E) $\frac{5}{6}$

Riktig svar: A) $\frac{8}{9}$
Begrunnelse: Siden $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$, får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 ((t^2)^2 t^3\,\mathbf{i} + ((t^2)^3 + (t^3)^2)\,\mathbf{j}) \cdot (2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j})\,dt = \int_0^1 8t^8\,dt = \frac{8}{9}$$

Oppgave 13. (4 poeng): $\mathcal{C}$ er den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hva er

$$\int_{\mathcal{C}} (-y + e^{\sin^2 x})\,dx + (x + \sin(e^{y^2}))\,dy\ ?$$

A) $1 + \sin(e^{4\pi^2})$
B) $e^{4\pi^2}$
C) 0
D) 2π
E) 18π

Riktig svar: E) 18π
Begrunnelse: Vi bruker Greens teorem. Siden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + \sin(e^{y^2})) = 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y + e^{\sin^2 x}) = -1\,,$$

har vi

$$\int_{\mathcal{C}} (-y+e^{\sin^2 x})\,dx + (x+\sin(e^{y^2}))\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \iint_S 2\,dxdy$$

der S er sirkelskiven om origo med radius 3. Siden denne har areal 9π, får vi

$$\int_{\mathcal{C}} (-y + e^{\sin^2 x})\,dx + (x + \sin(e^{y^2}))\,dy = 2\cdot 9\pi = 18\pi$$

Oppgave 14. (4 poeng): Volumet til området avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + y^2 + x - 2y$ og planet $z = x - 2y + 4$ er:
A) 4
B) π^2
C) 8π
D) 6π
E) $\frac{25}{3}\pi$

Riktig svar: C) 8π
Begrunnelse: Skjæringskurven er gitt ved

$$x^2 + y^2 + x - 2y = x - 2y + 4 \iff x^2 + y^2 = 4$$

som er en sirkel om origo med radius 2. Siden planet ligger over paraboloiden i området vi er interessert i, får vi

$$V = \iiint_R 1\,dxdydz = \iint_S \left[\int_{[x^2+y^2+x-2y}^{x-2y+4} 1\,dz\right] dxdy =$$

(Fortsettes på side 7.)

$$= \iint_S \big((x-2y+4)-(x^2+y^2+x-2y)\big)\,dxdy = \iint_S (4-x^2-y^2)\,dxdy$$

der S er sirkelskiven om origo med radius 2. Bytter vi til polarkoordinater (husk Jacobi-determinanten r), får vi

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (4-r^2)r\,d\theta\right] dr = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (4r-r^3)\,d\theta\right] dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4r-r^3)dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

Oppgave 15. (4 poeng) Arealet til området i første kvadrant avgrenset av kurvene $y=x$, $y=3x$, $y=\frac{1}{x}$ og $y=\frac{2}{x}$ er:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{2}\ln 3$

C) $\frac{2}{3}$

D) e^{-1}

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Riktig svar: B) $\frac{1}{2}\ln 3$

Begrunnelse: Siden området kan beskrives ved $1 \leq \frac{y}{x} \leq 3$ og $1 \leq xy \leq 2$, er det fristende å innføre nye variable $u = \frac{y}{x}$ og $v = xy$. Vi ser at $\frac{v}{u} = \frac{xy}{\frac{y}{x}} = x^2$, som gir $x = u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$. Siden $y = xu$, gir dette $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$. Jacobi-determinanten er

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}\,,$$

og dermed får vi (når S er området beskrevet i de nye koordinatene)

$$A = \iint_R 1\,dxdy = \iint_S 1 \cdot \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dudv = \int_1^3 \left[\int_1^2 \frac{1}{2u}\,dv\right] du$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$$