Løsningsforslag oblig 1 Mat 1110 vår 2018

Oppgave 1

a) Teksten sier at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9y_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + 9y_n + 0z_n \\ y_{n+1} = x_n + 0y_n + 0z_n \\ z_{n+1} = 0x_n + y_n + 0z_n \end{cases}$$

Altså

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}}$$

b) Egenverdier

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 0x + 9y + 0z = \lambda x \\ x + 0y + 0z = \lambda y \\ 0x + y + 0z = \lambda z \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} -\lambda x + 9y + 0z = 0 \\ x - \lambda y + 0z = 0 \\ 0x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \lambda^2 - 9 \cdot (-\lambda) + 0$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9)$$

$$= -\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda = \begin{cases} 3 \\ -3 \\ 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{\text{Egenverdiene er } \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3 \text{ og } \lambda_3 = 0}}$

(Oppg. 1 forts.)

Egenvektorer til $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = 3x & \text{I} \\ x = 3y & \text{II} \\ y = 3z & \text{III} \end{cases}$$

III sier $y = 3z$
I og II sier $x = 3y$, dvs. $x = 9z$

Løsn. $\begin{pmatrix} 9a \\ 3a \\ a \end{pmatrix}$ $a \neq 0$

Egenvektorer til $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = -3x & \text{I} \\ x = -3y & \text{II} \\ y = -3z & \text{III} \end{cases}$$

III sier $y = -3z$
I og II sier $x = -3y$, dvs. $x = 9z$

Løsn. $\begin{pmatrix} 9b \\ -3b \\ b \end{pmatrix}$ $b \neq 0$

Egenvektorer til $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = 0 & \text{I} \\ x = 0 & \text{II} \\ y = 0 & \text{III} \end{cases}$$

I og III sier $y=0$
II sier $x = 0$

Løsn. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ $c \neq 0$

Hvis tilstanden en sesong er på formen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ der $k \neq 0$, så har vi kun gamle kaniner. Disse får ikke unger, og alle er døde neste år. Tilstanden neste sesong er altså

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dette svarer til at tilstanden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 0.

(Oppg. 1 forts.)

c) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$ gir $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$

dvs. $\begin{cases} 9y = 45 \\ x = 18 \\ y = 5 \end{cases}$ Løsning: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ t \end{pmatrix}}}$ (t fri variabel)

Dette betyr at vi ikke kan regne oss bakover i tiden på en entydig måte, dvs. A er ikke inverterbar.

Vi kan også sjekke dette ved å finne $\underline{\det(A) = 0}$

d) Søylene i M velges som egenvektorer for A tilhørende $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

e) Skriver startvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for A:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9b \\ -3b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{cases} 9a + 9b = 18 & \text{I} \\ 3a - 3b = 0 & \text{II} \\ a + b + c = 0 & \text{III} \end{cases}$$

(II sier $a = b$; I sier da $a = b = 1$; III sier da $c = -2$)

Konklusjon:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stemmer!

Vi får nå, for $n > 0$:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= A^n \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

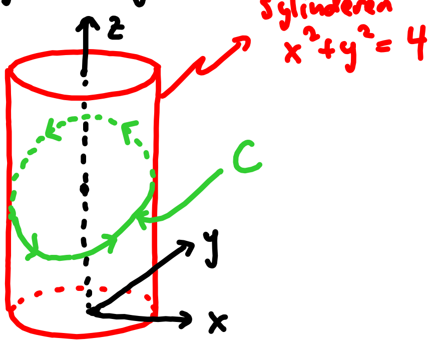
$$= 3^n \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 \cdot 3^n + 9 \cdot (-3)^n \\ 3 \cdot 3^n - 3 \cdot (-3)^n \\ 3^n + (-3)^n \end{pmatrix}}}$$

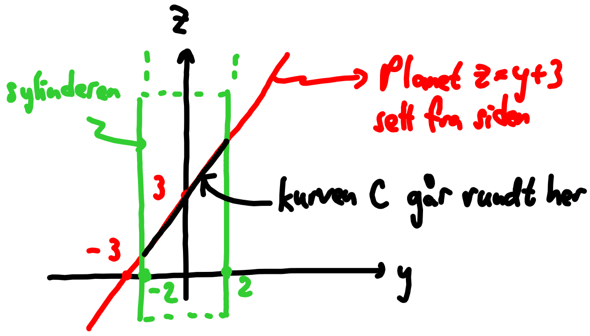
Oppgave 2

Se egen fil.

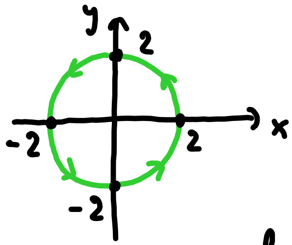
Oppgave 3

a) Tegner figur:





"Skyggen" (projeksjonen) av C ned i xy-planet:



Parametrisering av C:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = 2\sin t + 3 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

dvs. $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + (2\sin t + 3)\vec{k}$

b)
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\cos t, 2\sin t, 2\cos t] \cdot [-2\sin t, 2\cos t, 2\cos t]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-4\sin t\cos t} + \cancel{4\sin t\cos t} + 4\cos^2 t)\, dt$$

$$= 4 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= 2\left[t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 2\left[(2\pi + 0) - (0 + 0)\right] = \underline{\underline{4\pi}}$$

Formelsamling:
$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$
gir
$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

c) Siden integralet av $\vec{F}$ rundt den lukkede kurven C ikke er 0, kan ikke $\vec{F}$ være konservativt.

Oppgave 4

a) $\begin{cases} x_{n+1} = 40x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 40y_n \end{cases}$ gir $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) **Egenverdier**

$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gir $\begin{cases} 40x + y = \lambda x \\ -x + 40y = \lambda y \end{cases}$

dvs. $\begin{cases} (40-\lambda)x + y = 0 \\ -x + (40-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 40-\lambda & 1 \\ -1 & 40-\lambda \end{vmatrix} = (40-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 80\lambda + 1601 = 0$$

$$\text{gir } \lambda = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4\cdot 1601}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{80 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 40 + i \\ 40 - i \end{cases}$$

Egenverdier : $\underline{\underline{\lambda_1 = 40 + i \text{ og } \lambda_2 = 40 - i}}$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 40 + i$

$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (40+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gir $\begin{cases} 40x + y = (40+i)x & \text{I} \\ -x + 40y = (40+i)y & \text{II} \end{cases}$

I sier $y = ix$
II sier $-x = iy$
(Begge sier det samme)

Løsn. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix}}}$ $a \neq 0$

Egenvektorer til $\lambda_2 = 40 - i$

$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (40-i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gir $\begin{cases} 40x + y = (40-i)x & \text{I} \\ -x + 40y = (40-i)y & \text{II} \end{cases}$

I sier $y = -ix$
II sier $x = iy$
(Begge sier det samme)

Løsn. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} b \\ -ib \end{pmatrix}}}$ $b \neq 0$

(Oppg. 4 forts.)

c) $\begin{pmatrix}2\\80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ia\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\-ib\end{pmatrix}$ gir $\begin{cases} a+b=2 & \text{I} \\ ia-ib=80 & \text{II}\end{cases}$

I sier $b = 2-a$

II sier da $ia - i(2-a) = 80$, dvs. $2ia - 2i = 80$,

som gir $2ia = 80 + 2i$

$ia = 40 + i$ (ganger med $-i$ på begge sider)

$a = -40i - i^2 = 1 - 40i$

I gir da $b = 2 - a = 2 - (1-40i) = 1 + 40i$

Konklusjon:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-40i\\40+i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1+40i\\40-i\end{pmatrix}}}$$

stemmer!

Dette gir

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = M^n \left[\begin{pmatrix}1-40i\\40+i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1+40i\\40-i\end{pmatrix}\right]$$

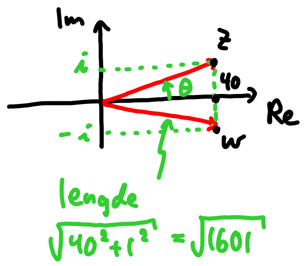
$$= M^n \cdot \begin{pmatrix}1-40i\\40+i\end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix}1+40i\\40-i\end{pmatrix}$$

Egenvektorer

$$= (40+i)^n \cdot \begin{pmatrix}1-40i\\40+i\end{pmatrix} + (40-i)^n \cdot \begin{pmatrix}1+40i\\40-i\end{pmatrix}$$

Her ser vi at $y_n = \underline{\underline{(40+i)^{n+1} + (40-i)^{n+1}}}$ (for $n \geq 0$)

d) Skriver $z = 40+i$ og $w = 40-i$ på polar (eksponentiell) form:



Ser at $\theta = \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{1601}}\right)$

$= \arccos\sqrt{\frac{1600}{1601}}$

Så $z = \sqrt{1601}\, e^{i\theta}$, $w = \sqrt{1601}\, e^{-i\theta}$

Innsatt i uttrykket for y_n fra c) gir dette:

$$y_n = z^{n+1} + w^{n+1} = \left(\sqrt{1601}\, e^{i\theta}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{1601}\, e^{-i\theta}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\sqrt{1601}\right)^{n+1}\left[\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} + \left(e^{-i\theta}\right)^{n+1}\right]$$

$$= (1601)^{(n+1)/2} \cdot \left[e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta}\right]$$

$$= \underline{\underline{(1601)^{(n+1)/2} \cdot 2\cos[(n+1)\theta]}}, \text{ der } \theta = \arccos\sqrt{\frac{1600}{1601}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{iu} + e^{-iu} \\ &= \cos u + i\sin u \\ &+ \cos(-u) + i\sin(-u) \\ &= \cos u + \cancel{i\sin u} \\ &+ \cos u - \cancel{i\sin u}\end{aligned}}$$

(Oppg. 4 forts.)

Utryddelse: $y_n = 0$ gir $\cos\left[(n+1)\theta\right] = 0$

Dette skjer når

$(n+1)\theta = \frac{\pi}{2}$, dvs. $n+1 = \frac{\pi}{2\theta}$

$n = \frac{\pi}{2\theta} - 1 \approx 61,8$

Så i følge modellen er de slemme billene utryddet etter 62 uker.

Nedenfor er et kort Matlab-program som løser oppgave 2 på oblig 1, Mat1110 våren 2018. Kommentarer i selve programmet er utelatt, her er forklaring:

- lambda1 og lambda2 er egenverdiene til den innleste matrisen A. Disse beregnes ved å bruke formelen for løsninger av annengradslikninger.

  Når elementene a, b, c og d i matrisen A leses inn som i programmet nedenfor, blir karakteristiske likningen

  (a-lambda)(d-lambda) - bd = 0.

  Løser vi denne med hensyn på lambda, får vi

  lambda1 = ((a+d)+sqrt((a+d)^2-4*(a*d-b*c)))/2
  lambda2 = ((a+d)-sqrt((a+d)^2-4*(a*d-b*c)))/2

- For å finne en egenvektor [p,q], kan vi ta utgangpunkt i likningen

  (a-lambda1)p + bq = 0,

  som fremkommer ved å sette opp Ax=(lambda)x med x=[p,q] og bruke likningen for første komponent. Løser vi denne med hensyn på q, får vi, gitt at b ikke er 0,

  q = p * (lambda1-a)/b

  Velger vi så p=1, får vi egenvektoren [p,q] = [1,(lambda1-a)/b]. Hvis b=0, blir [0,1] en egenvektor for matrisen med egenverdi d. Disse to alternativene er lagt inn i programmet ved en IF-konstruksjon.

Her er programmet (som bare er en av mange løsninger):

```
a=input('Legg inn a_11: ');
b=input('Legg inn a_12: ');
c=input('Legg inn a_21: ');
d=input('Legg inn a_22: ');
lambda1=((a+d)+sqrt((a+d)^2-4*(a*d-b*c)))/2
lambda2=((a+d)-sqrt((a+d)^2-4*(a*d-b*c)))/2
if b~=0
    evektor=[1,(lambda1-a)/b]
else
    evektor=[0,1]
end
```

(Kjøringer av programmet er utelatt her.)