12.1 Konvergens av rekker

En rekke er en uendelig lang sum:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Hvis

$$S = \lim_{n \to \infty} (\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{S_n})$$

S_n : Delsum n

fins, sier vi at rekken konvergerer mot S. I motsatt fall divergerer rekken.

Geometriske rekker er på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a r^n$$

Teorem Sum av geometriske rekker

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

for alle reelle tall $a \neq 0$ og $|r| < 1$. Hvis $|r| \geq 1$, divergerer rekken.

Bevis Kan anta $r \neq \pm 1$. Får

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$r \cdot S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n), \quad \text{altså} \quad S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

0 hvis $|r|<1$

fins ikke hvis $|r|>1$.

eks. $yx^2 + yx^5 + yx^8 + yx^{11} + \dots$

$r = x^3$

$a = yx^2$

Sum: $\frac{a}{1-r}$

$$= yx^2 + yx^2\cdot(x^3)^1 + yx^2\cdot(x^3)^2 + \dots$$

$$= \frac{yx^2}{1-x^3} \quad \text{hvis } |r| = |x^3| < 1, \text{ dvs. } |x| < 1. \quad \square$$

Regneregler for rekker:

① $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ gitt at de to rekkene her konv.

② $\sum_{i=1}^{\infty} c a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ for konstant tall c, gitt at høyre rekke konv.

Divergenstesten

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bevis Skisse: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$

Grenselov for følger

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S = 0 \quad \text{hvis rekken konv. mot } S. \quad \square$$

eks. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n^2 + 2e^n}$ Konvergerer?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2+2e^n} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2n + 2e^n} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2 + 2e^n}$$

$$\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{2\cancel{e^n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dvs. divergens ved div. testen.

12.2 Konvergenstester

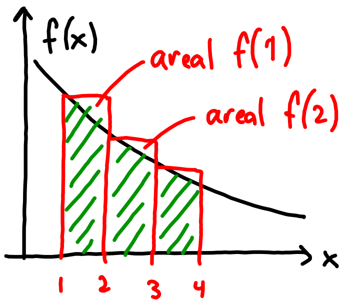
Integraltesten

Hvis funksjonen f er kontinuerlig, avtakende og positiv på intervallet $[1, \infty)$, har vi at

$$\text{rekken } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{og integralet } \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

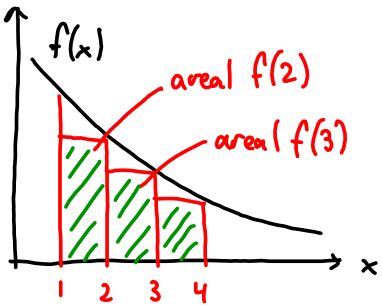
enten begge konvergerer eller begge divergerer.

Bevis



Ser at $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

så hvis integralet divergerer, divergerer summen også.



Ser at $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

så hvis integralet konvergerer, konvergerer summen også (kompletthet)

$\square$

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Konvergerer? $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Integraltesten med $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \Big[\ln x\Big]_1^{b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \big[\ln b - \ln 1\big] = +\infty, \text{ dvs. } \underline{\text{divergens}}$$

p-rekkene

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konv. for $p>1$ og div. for $p \leq 1$.

Bevis Antar $p \neq 1$. Integraltesten:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1}\cdot b^{1-p} - \frac{1}{-p+1}\cdot 1\right]$$

∞ hvis $p<1$

0 hvis $p>1$

Så vi har divergens for $p<1$ og konvergens for $p>1$. $\square$

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $(p=2)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konv. $(p=3/2)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. $\left(p=1/2, \text{ skriver } \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}\right)$ $\square$

Sammenlikningstesten

Anta at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle n. Da:

(i) $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konv.

(ii) $\sum a_n$ div. $\Rightarrow$ $\sum b_n$ div.

Bevis Kompletthet. (Detaljer droppes.)

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\underbrace{(\sin^2 n)\sqrt{n}}_{\text{rusk}} + 2^n}$ Konv. ?

Vi har $\frac{2}{(\sin^2 n)\sqrt{n} + 2^n} \leq \frac{2}{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ er rekken

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Dette er en geometrisk rekke med sum 2

Dermed konvergerer rekken vår ved sml-testen. $\square$

Grensesammenlikningstesten (GS-testen)

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være rekker med positive ledd. Hvis

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

fins og $0 < L < \infty$, så enten konvergerer begge rekkene eller divergerer begge rekkene.

Hvis $L = 0$ og $\sum b_n$ konv., så konvergerer $\sum a_n$ også.

Bevis Velg P og Q slik at $0 < P < L < Q$.

Siden $\frac{a_n}{b_n} \to L$, har vi for store n

$$P < \frac{a_n}{b_n} < Q, \quad \text{dvs.} \quad P \cdot b_n < a_n < Q \cdot b_n$$

Vanlig sml-test:

$\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum Q \cdot b_n = Q \cdot \sum b_n$ div, dvs. $\sum b_n$ div.

$\sum a_n$ konv $\Rightarrow \sum P \cdot b_n = P \cdot \sum b_n$ konv., dvs. $\sum b_n$ konv. $\square$

eks. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ Konvergerer?

dominerer

GS-testen, sammenlikner med $\sum \frac{1}{n^2}$: (konvergent p-rekke)

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 1$$

Altså konvergens ved GS-testen

Forholdstesten

Gitt rekke $\sum a_n$. La $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Da har vi: $\begin{cases} L<1 \Rightarrow \text{Rekken konvergerer} \\ L>1 \Rightarrow \text{" divergerer} \end{cases}$

Bevis Anta $L < 1$

Velg r slik at $L < r < 1$.
Da fins N slik at for $n \geq N$ er

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r, \text{ dvs. } |a_{n+1}| < |a_n| \cdot r$$

Altså

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots$$

geometrisk rekke med $r<1$

$$< |a_N| + |a_N|\cdot r + |a_N|\cdot r^2 + \ldots$$

$$= \frac{|a_N|}{1-r}$$

Altså konv. ved sammenlikningstesten.

Anta $L > 1$

For store nok n har vi nå $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, dvs. $|a_{n+1}| > |a_n|$.

Altså $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ umulig. Altså divergens ved div. testen. □

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ Konv ? Forholdstesten :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n}$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ når } n \to \infty$$

dvs. $L = 0$ i forholdstesten. Altså konvergens.

Mer generelt: For alle faste tall x har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{konvergerer.}$$

Altså har vi også at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{for alle faste } x.$$

(fakultet dominerer potens.)

Rot-testen

Gitt rekke $\sum a_n$. La $L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Da har vi : $\begin{cases} L < 1 : & \text{Rekken konvergerer} \\ L > 1 : & \text{" divergerer.} \end{cases}$

Bevis Anta $L < 1$

Velg r slik at $L < r < 1$.

Da fins N slik at for $n \geq N$ er

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < r, \quad \text{dvs. } |a_n| < r^n$$

Rekken $\sum r^n$ er geometrisk med $r < 1$, så den konvergerer.

Dermed konvergerer vår rekke ved sml-testen.

Anta $L > 1$

For store nok n har vi nå $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, dvs. $|a_n| > 1$.

Dvs. divergens. $\square$

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^n}$ Konv ? Rot-testen :

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4n+1} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

dvs. $L = 0$ i rot-testen. Altså konvergens. $\square$

12.3 Alternerende rekker

Alternerende rekke: Annethvert ledd positivt/negativt.

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$

Alternerende rekke-testen

Gitt en alternerende rekke $\sum a_n$.

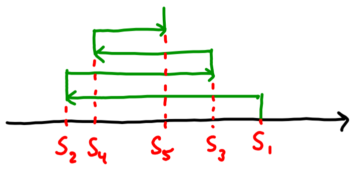
Hvis $|a_n| > |a_{n+1}| > 0$ for alle n, og

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

så konvergerer rekken. Videre: Hvis vi tilnærmer summen av hele rekken med delsummen S_N opp til a_N, er feilen vi gjør mindre enn $|a_{N+1}|$.

Bevis Figur:

S_N: Sum av de N første leddene i rekken.



Fordi leddene avtar i absoluttverdi, og absoluttverdien av leddene går mot 0, vil delsummene stabilisere seg på noe "midt i" når $N \to \infty$. (Bruker kompletthet.)

Feilestimatet: Feilen blir mindre enn lengden av neste pil, som er $|a_{N+1}|$. $\square$

eks. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

a) Vis at rekken konvergerer

b) Finn N slik at delsummen opp til ledd N tilnærmer summen av rekken med feil høyst 0,01.

Løsn.

a) Alt. rekke-testen: Rekken er alternerende, og

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{(ok)}$$

Videre: Med $f(x) = \frac{1}{x+1}$ har vi $f(n) = |a_n|$.

Vi har $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x+1)^{-1}\right] = -(x+1)^{-2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ for $x>0$

Dermed er f avtakende på $(0,\infty)$. Altså

$$|a_n| > |a_{n+1}| \text{ for alle } n.$$

Altså konvergerer rekken ved alt. rekke-testen.

b) $|a_{N+1}| = 0{,}01$ gir

$$\frac{1}{(N+1)+1} = \frac{1}{N+2} = 0{,}01 \text{ , dvs. } N = \underline{\underline{98}} \text{ holder.}$$

12.4 Absolutt og betinget konvergens

$\sum a_n$ kalles absolutt konvergent hvis rekken

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \quad \text{konvergerer}$$

Hvis $\sum a_n$ konvergerer, men ikke er absolutt konvergent, kalles den betinget konvergent.

Absolutt konvergens-testen

$$\sum |a_n| \text{ konv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.}$$

Bevis Se bok. $\square$

eks. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} \sin^3 n}{n^2}$ Konv ?

Vi har : $\displaystyle\left| \frac{(-1)^{n+2} \sin^3 n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

Rekken $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer (p-rekke med $p = 2$)

Ergo er rekken vår absolutt konvergent, så den konvergerer ved abs. konv. - testen. $\square$