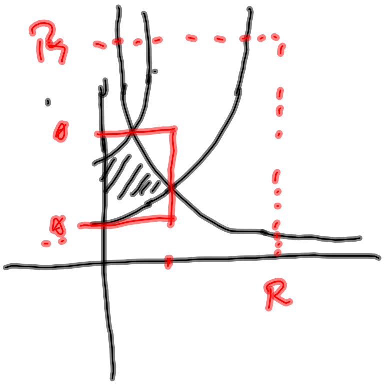


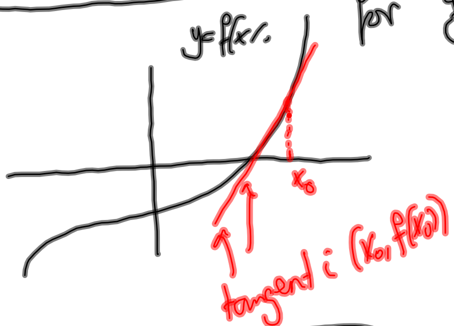
Newton's Metode

Anta at vi vil løse

$$x^2 + 2y = 2 \qquad\qquad x^2 + 2y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^3 + 5xy = 1 \qquad\qquad x^3 + 5xy - 1 = 0$$

Dersom vi definerer en avb. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ved $F(x,y) = (x^2+2y-2,\ x^3+5xy-1)$, så er dette igjen ekvivalent med å finne nullpunktene til F.

Newton i en variabel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vil finne nullpunkter for f.



Gjett at x_0 er et nullpunkt.

$$T_{x_0}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Vil løse $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$

$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$
$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

apr 25-14:07

Newton i flere variable

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Ønsker å finne nullpunkt for F.

- Gjett en løsning $\vec{x}_0$. $T_{x_0}F$
- Finn lineariseringen til F i $\vec{x}_0$, og finn nullpunktet til $T_{x_0}F$ – håper at dette er en bedre tilnærming.

$$T_{x_0}F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + F'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Løser $F(\vec{x}_0) + F'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$

$$F'(x_0)^{-1} F'(\vec{x}_0)(x - \vec{x}_0) = F'(x_0)^{-1} - F(x_0)$$

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = -F'(x_0)^{-1}(F(x_0))$$

en variabel

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - F'(x_0)^{-1}(F(x_0))}.$$

Setter $\boxed{\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} - F'(x_{n-1})^{-1} \cdot (F(\vec{x}_{n-1}))}.$

Det er slik at

- Dersom vi "gjetter" godt nok første gang så konvergerer dette mot en løsning.
- Dersom forskjellen mellom x_0 og x_1 er liten nok konvergerer det også.

<u>Eks:</u> $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y - 2 \\ x^3 + 5xy - 1 \end{pmatrix}$ velg $x_0 = (1,1)$.

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 3x^2 + 5y & 5x \end{pmatrix}$$

Lag for-løkke i MATLAB.

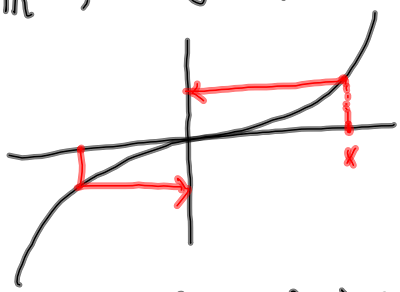
apr 25-14:30

Inverse funksjonsteoremet

Husk fra $\mathbb{R}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$y = x^3$

$x = \sqrt[3]{y}$.



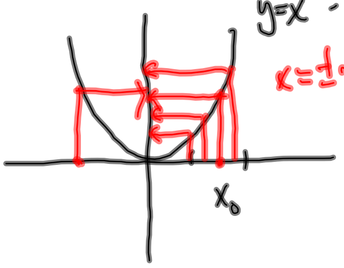
$\leftarrow y = f(x)$.

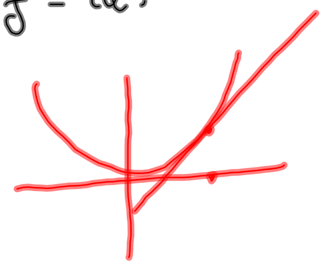
Ser at det for hver y bare fins en x s.a. $f(x) = y$.

Kan lage funksjonen $x = g(y)$, som til hver y tilordner den entydige x'en s.a. $f(x) = y$. Vi kaller g den <u>inverse</u> funksjonen til f, og vi ser at $\underbrace{g(f(x)) = x}_{g \circ f \,=\, id.}$ for alle x.

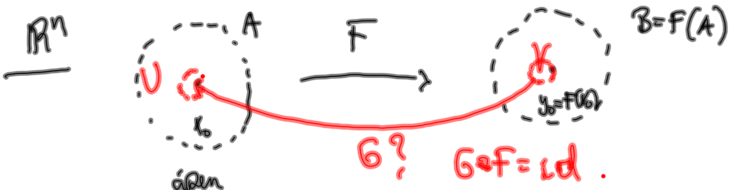
$y = x^2$.

$x = \pm\sqrt{y}$.





<u>Teorem</u>: La $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ være deriverbar med kontinuerlige partiellderiverte og anta at $f'(c) \neq 0$ for en $c \in (a,b)$.
Da fins $(a',b') \ni c$ s.a. $f : (a',b') \to \mathbb{R}$ er injektiv og $(c,d) = f(a',b')$
Da fins deriverbar $g : (c,d) \to (a',b')$ s.a. $g \circ f = id$. Videre $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$,



DEF: Med en åpen omegn om et punkt x_0, mener vi en åpen mengde som inneholder x_0.

Teorem (omvendt funksjonsteorem) (inverse)

Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ er en åpen mengde og at $F: A \to \mathbb{R}^n$ er deriverbar med kontinuerlige partiellderiverte. $(\det F'(x_0) \neq 0)$

La $\vec{x}_0 \in A$ og anta at $F'(x_0)$ er invertibel.

Da fins en åpen omegn U om x_0 og en åpen omegn V om $y_0 = F(x_0)$, s.a. $V = F(U)$, og det fins en deriverbar $G: V \to U$ s.a. $\underbrace{G(F(x))}_{G\circ F = id} = x$ for alle $x \in U$.

Videre er $G'(F(x)) = F'(x)^{-1}$.

Skal ikke bevise det.

$$\underbrace{G(F(x))}_{} = x$$

$$(G\circ F)' = id$$

Kjerneregel

$$G'\circ F \cdot F' = id$$

$$G'\circ F = (F')^{-1}.$$

Eks: La $F(x,y) = (3x^2 + y, 5 + 2xy)$.

Vis at F er injektiv på en liten omegn om $(1,1)$, altså har en invers G, og finn $G'(F(1,1))$.

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

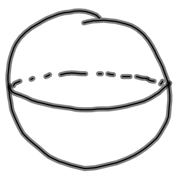
$\det(F'(1,1)) = 12 - 2 = 10$, så F' er invertibel i $(1,1)$.

Vet at $G'(F(1,1)) = \text{inv}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

Implisitte funksjonsteorem

$\mathbb{R}^{n+1}$. Gitt en mengde $f(x_1,\dots,x_n,y)=0$,
der f er en deriverbar funksjon,
ønske vi å løse $y=g(x_1,\dots,x_n)$,
dvs. $f(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))=0$.

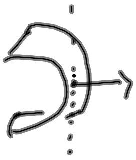
Eks:

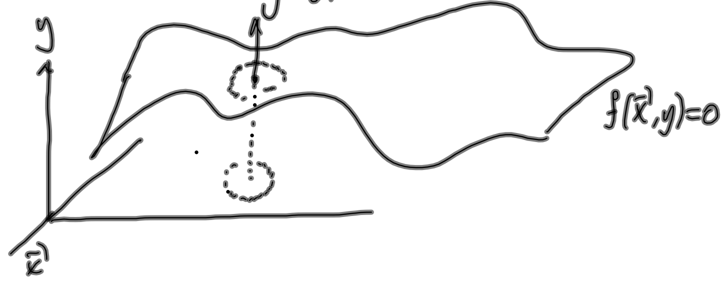


Kula er gitt ved $\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{f(x,y,z)}=0$.

har $z=\underbrace{\pm\sqrt{1-x^2-y^2}}_{g(x,y)}$.

Generelt:



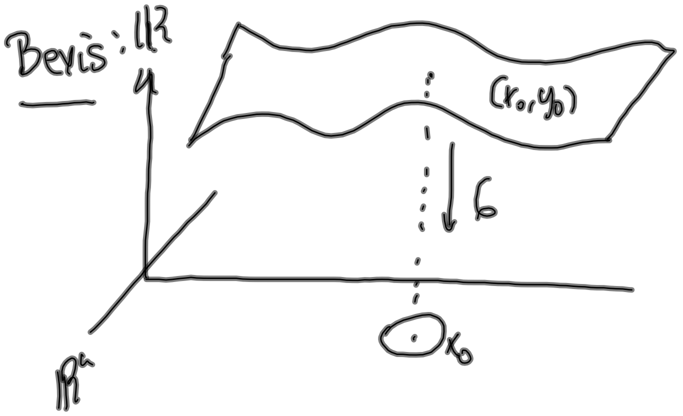


Implisitte funksjonsteorem: Anta at $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ er en åpen mengde og anta at $f: A\to\mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon med kont. partiellderiverte. Anta at $f(\vec{x}_0,y_0)=0$ og at $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0,y_0)\neq 0$. Da fins en omegn U om $\vec{x}_0$ og en deriverbar $g: U\to\mathbb{R}$, s.a. $f(\vec{x},g(\vec{x}))=0$ for alle $x\in U$.

Videre har vi at

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0,y_0)}.$$

Bevis:



$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

Danner avbildingen $G(\vec{x}, y) = (\vec{x}, f(\vec{x}, y))$.

$$G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

Ser at
$$G'(\vec{x}_0, y_0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ * \; \cdots \; * & \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Ser at $G'(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$, så

dermed har G en invers $H(\vec{x}, y)$ i nærheten av $(\vec{x}_0, 0)$.

Ser at $H(\vec{x}, y) = (\vec{x}, \tilde{g}(\vec{x}, y))$.

Da kan vi sette $g(\vec{x}) = \tilde{g}(\vec{x}, 0)$.

Til slutt
$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{x}, g(\vec{x}))\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}, g(\vec{x})) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0.$$