Fra i går: Hva vi kan gjøre med parametriserte kurver: Buelengde, derivere langs kurve.

Sek 3.3 Integrere langs en kurve:

Def 3.3.1: Anta $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, og la $\vec{r} : [a,b] \to A$ være en stykkevis glatt parametrisering (def senere) av kurven C.
<u>Linjeintegral av skalarfelt</u> $\int_C f\, ds$ er def. ved

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\, v(t)\, dt$$

Motivasjon: Vi har en snor (tenk på som $\vec{r}(t)$), med tetthet $f(x, y, z, ..)$

Del tråden opp i småbiter med lengde $s_1, s_2, \dots, s_N$. La $x_1, x_2, \dots, x_N$ være punkter på hver bit.

massen til tråden $\approx f(x_1)\cdot s_1 + f(x_2)\cdot s_2 + \dots + f(x_N) s_N$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i) s_i$$

Deler opp $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, og lar bit i svare til segmentet på C fra $\vec{r}(t_{i-1})$ til $\vec{r}(t_i)$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}(t_i)) \underbrace{v(t_i)(t_i - t_{i-1})}_{s_i \,=\, \text{lengden på bit } i \,=\, \text{fart}\cdot\text{tid}}$$

Dette er en Riemann-sum for integralet

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\, v(t)\, dt,$$ som var definisjonen av linjeintegral av skalarfelt.

glatt: $\vec{r}$ kontinuerlig på $[a,b]$
$\vec{r}\,'$ kontinuerlig på (a,b)

stykkevis glatt: Finnes t_i med $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ slik at hver $\vec{r} : [t_{i-1}, t_i] \to A$ er glatt.

Eks. 3.3.2 $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$f(x,y) = xy^2 \qquad x'(t) \qquad y'(t)$$

$f(\vec{r}(t)) = xy^2 = \cos t \sin^2 t \qquad \vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt \qquad u = \sin t,\ du = \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t\,dt = \int_0^0 u^2\,du = 0$$

Setning 3.3.3 "Kjente" regneregler gjelder for linjeintegral av skalarfelt, feks.

$$\int_C (f+g)\,ds = \int_C f\,ds + \int_C g\,ds$$

---

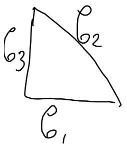
setning 3.3.4 hvis $C : \vec{r} : [a,b] \to A$

og $C_i : \vec{r} : [t_{i-1}, t_i] \to A$

Vi har da at $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \cdots + \int_{C_N} f\,ds$

Eks 3.3.7 Regn ut $\int_C f\,ds$ når $f(x,y) = x + y^2$

C er trekanten med hjørner $(0,0), (1,0), (0,1)$.



C_1 : parametisert ved $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} \quad 0 \le t \le 1$

$f(\vec{r}_1(t)) = x + y^2 = t$

$\vec{r}_1\,'(t) = \vec{i} \Rightarrow v(t) = 1$

C_2 : $\vec{r}_2(t) = (1-t)\vec{i} + t\vec{j} \quad 0 \le t \le 1$

$f(\vec{r}_2(t)) = x + y^2 = 1 - t + t^2$

$\vec{r}_2\,'(t) = -\vec{i} + \vec{j} \qquad v(t) = \sqrt{2}$

C_3 : $\vec{r}_3(t) = t\vec{j} \quad 0 \le t \le 1$

$f(\vec{r}_3(t)) = t^2 \quad \vec{r}_3\,'(t) = \vec{j} \quad v(t) = 1$

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \int_{C_3} f\,ds$$

$$= \int_{C_1} f(\vec{r}_1(t))\,v_1(t)\,dt + \int_{C_2} f(\vec{r}_2(t))\,v_2(t)\,dt + \int_{C_3} f(\vec{r}_3(t))\,v_3(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1 - t + t^2)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 t^2\,dt = \cdots =$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{6}(1+\sqrt{2})}}$$

Linjeintegraler av skalarfelt er uavhengige av parametriseringen!

Setning 3.3.6: Anta $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
$\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

er to ekvivalente ($\to$ def 3.3.5), stykkevis glatte parametriseringer av $\mathcal{C}$. Da har $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ samme verdi for begge parametriseringer.

Skisse av bevis: med $\vec{r}_1$: $\int_a^b f(\vec{r}_1(t))\,v_1(t)\,dt$

$$= \int_a^b f(\vec{r}_2(\phi(t)))\,v_1(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(\vec{r}_2(\phi(t)))\,v_2(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

sett $u = \phi(t)$. Da er $du = \phi'(t)\,dt$

$$= \int_c^d f(\vec{r}_2(u))\,v_2(u)\,du$$

$$= \int_c^d f(\vec{r}_2(t))\,v_2(t)\,dt$$

ekvivalent betyr:
Finnes ϕ s.a.
$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$
↑ def 3.3.5

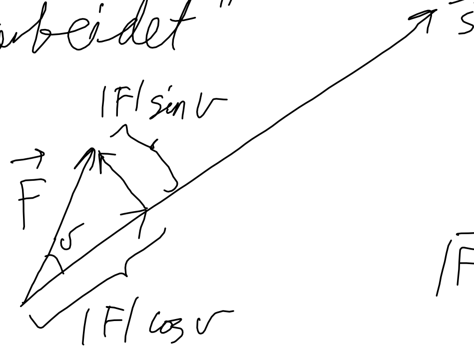
$\vec{v}_1 = \vec{r}_1{}'(t) = (\vec{r}_2(\phi(t)))'$
$= \vec{r}_2{}'(\phi(t))\,\phi'(t)$
$= \vec{v}_2(\phi(t))\,\phi'(t)$
Siden $\vec{v}_1 = \vec{v}_2(\phi(t))\,\phi'(t)$
så er $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2(\phi(t))\,\phi'(t)|$
så $v_1 = v_2(\phi(t))\,\phi'(t)$

$\Rightarrow$ samme verdi for de to parametriseringene.

Sek. 3.4 Linjeintegral av vektorfelt.

Fra fysikkens verden: Arbeid en kraft $\vec{F}$ utfører langs en kurve.

"Det er bare den komponenten av kraften som peker i bevegelsens retning som bidrar til arbeidet"



Arbeidet i bevegelsesretning er $F s$ → strekningen

$$|F| \cos v \, |s| = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

utført arbeid fra t til $t + \Delta t$

$$\approx \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

$$\approx \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \Delta t$$

Vi deler opp $[a, b]$; $a = t_0 < \cdots < t_N = b$

Arbeid som utføres langs kurven kalles for W:

$W \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}\,'(t_i) \Delta t$, som er en Riemannsum for $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$

Definisjon 3.4.1 Anta $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon i n variable, og la $\vec{r}: [a, b] \to A$ være en stykkevis glatt parametrisering av kurven $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$. Linjeintegral av vektorfelt $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ er definert ved

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\vec{v}(t)}\, dt$$

Eks. 3.4.2 $\qquad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{F} = -x\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$

$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \sin t\cos t + t\sin t\cos t + t$

$u = \sin t$

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin t\cos t + t\sin t\cos t + t)\,dt$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t \qquad \nearrow 2\pi^2$

$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t + t\right)dt$

$0 \qquad \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}t\sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{4}t\cos 2t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos 2t\,dt = \dots = -\frac{\pi}{2}$

$$= \underline{\underline{-\frac{\pi}{2} + 2\pi^2}}$$