# Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT 1110, våren 2006

**Oppgave 1:** a) Vi har

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & a^2+3a & -3a \end{bmatrix} \overset{II+(-2)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & a^2+3a & -3a \end{bmatrix}$$

$$\overset{III+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & a^2+3a-1 & -3a \end{bmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & a^2+3a-4 & 3-3a \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a^2+3a-1 & -3a \end{bmatrix} \overset{I+(-1))II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+3a-4 & 3-3a \end{bmatrix}$$

b) Dersom $a^2+3a-4 \neq 0$, så har ingen rad pivotelement til slutt (i "**b**-delen"), og ligningen har derfor minst én løsning. I tillegg er alle søyler i "$A$-delen" pivotsøyler, så løsningen må være entydig. Siden ligningen $a^2+3a-4=0$ har løsningene $a=1$ og $a=-4$, har vi derfor:

<u>Dersom $a \neq 1$ og $a \neq -4$, så har ligningen nøyaktig én løsning.</u>

Tilfellene $a=1$ og $a=-4$ må vi se nærmere på. For $a=1$, er den reduserte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siden ingen rader har pivotelement til slutt, har ligningen løsninger, og siden den tredje søylen (den siste i $A$-delen) ikke er en pivotsøyle, må det finnes uendelig mange av dem. Vi har dermed:

<u>Dersom $a=1$, har ligningen uendelig mange løsninger.</u>

For $a=-4$, er den reduserte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Her har den nederste raden et pivotelement til slutt. Dermed kan vi konkludere med:

<u>Dersom $a=-4$, har ligningen ingen løsninger.</u>

c) Når $a = -4$, ser vi at pivotsøylene til trappeformen er søyle 1, 2 og 4. De tilsvarende søylene i $C$ utgjør da en basis for søylerommet (Lay, theorem 13 i seksjon 2.8), dvs. at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

utgjør en basis for søylerommet.

Når $a = 1$, har vi sett at $C$ har trappeformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nullrommet består da av løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x \quad - 2z + u &= 0 \\ y + \ z - u &= 0 \end{aligned}$$

Her kan $z$ og $u$ velges fritt, og vi har $x = 2z - u$, $y = -z + u$. På vektorform kan løsningene altså skrives

$$\begin{pmatrix} 2z-u \\ -z+u \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u \\ u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at nullrommet er generert av vektorene

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og siden disse er lineært uavhengige, danner de en basis. (For å se at vektorene er lineært uavhengige, observer at hvis

$$\mathbf{0} = x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+y \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

så må $x = y = 0$ for å få null i de to siste radene.)

**Oppgave 2:** Bruker forholdstesten på den første rekken:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = 0$$

(sørg for at du skjønner forkortningene!) Dette viser at rekken konvergerer for alle $x$.

Forholdstesten på den andre rekken gir tilsvarende

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right| = 0$$

og dermed konvergens for alle $x$.

b) Potensrekker kan deriveres leddvis. Vi begynner med $g$:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{2n+1})'}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = f(x)$$

Vi har tilsvarende regninger for $f$, men de er litt verre siden vi må skifte summasjonsindeks:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{2n})'}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = g(x)$$

c) Vi har

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Den første summen består av alle ledd av typen $\frac{x^k}{k!}$ der $k$ er et partall, og den andre består av alle slike ledd der $k$ er et oddetall. Til sammen har vi derfor alle ledd av typen $\frac{x^k}{k!}$, og dermed er

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Dette kjenner vi igjen som potensrekken til $e^x$, og følgelig er

$$f(x) + g(x) = e^x \tag{1}$$

Tilsvarende består

$$f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

av alle ledd av typen $\frac{x^k}{k!}$, men med vekslende fortegn. Vi har dermed

$$f(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

Dette kjenner vi igjen som potensrekken til $e^{-x}$, og dermed er

$$f(x) - g(x) = e^{-x} \tag{2}$$

Vi løser ligningene (1) og (2), og får

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Disse funksjonene er forøvrig kjent som *cosinushyperbolicus* (cosh) og *sinushyperbolicus* (sinh).

**Problem 3** a) Flaten $z = 6 - x^2 - y^2$ er en rotasjonsparaboloide som vokser nedover og har toppunkt i $(6, 0, 0)$. Flaten $z = x^2 - 4x + y^2$ kan også skrives $z = (x-2)^2 + y^2 - 4$. Dette viser at den er en paraboloide som vokser oppover, og har bunnpunkt i $(2, 0, -4)$. Området $R$ ligger derfor under flaten $z = 6 - x^2 - y^2$ og over $z = x^2 - 4x + y^2$. Skjæringen mellom de to flatene er gitt ved

$$6 - x^2 - y^2 = x^2 - 4x + y^2$$

Denne ligningen kan omformes til

$$x^2 - 2x + y^2 = 3$$

og fullfører vi kvadratet, får vi

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

som er en sirkel i $xy-$planet med sentrum i $(1, 0)$ og radius 2. Projeksjonen av området $R$ i $xy-$planet er innsiden av denne sirkelen, altså

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

Kombinerer vi alt dette, får vi:

$$\iiint_R y\, dV = \iint_S \left[\int_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-z^2} y\, dz\right] dA =$$

$$= \iint_S \left[yz\right]_{z=x^2-4x+y^2}^{z=6-x^2-z^2} dA = \iint_S (6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy)\, dA$$

etter at vi har trukket sammen litt i den siste integranden.

b) For å regne ut integralet er det lurt å bruke polarkoordinater med sentrum i $(1, 0)$. Da blir $x = 1 + r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Siden vi integrerer over en sirkel med sentrum i $(1, 0)$ og radius 2, må $r$ løpe fra 0 til 2, og $\theta$ løpe fra 0 til $2\pi$. Integralet kan dermed skrives (husk Jacobi-determinanten $r$!):

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(6r\sin\theta - 2(1 + r\cos\theta)^2 r\sin\theta - 2r^3\sin^3\theta + 4(1 + r\cos\theta)r\sin\theta\right) r\, d\theta\right] dr$$

Multipliserer vi ut og trekker sammen, ser vi at dette er lik

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (8r^2\sin\theta - 2r^4\cos^2\theta\sin\theta - 2r^4\sin^3\theta)\, d\theta\right] dr$$

Dette uttrykket kan vi forenkle ved å bruke at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, og vi sitter da igjen med:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (8r^2\sin\theta - 2r^4\sin\theta)\, d\theta\right] dr = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} 2r^2(4 - r^2)\sin\theta\, d\theta\right] dr$$

Resten er lett — vi integrerer med hensyn på $\theta$ og får:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} 2r^2(4-r^2)\sin\theta \, d\theta\right] dr = \int_0^2 \left[-2r^2(4-r^2)\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0$$

siden $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$.

**Kommentar:** De stygge utregningene ovenfor blir enklere dersom vi gjennomfører variabelskifte på en litt annen måte. Vi kan nemlig først skrive om den opprinnelige integranden slik:

$$(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy) = y(6 - 2x^2 - 2y^2 + 4x) =$$

$$y(8 - 2(x^2 - 2x + 1) - 2y^2) = y(8 - 2(x-1)^2 - 2y^2)$$

Hvis vi nå skifter variabel, får vi

$$\iint_S (6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy)\, dA = \iint_S y(8 - 2(x-1)^2 - 2y^2)\, dA =$$

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r\sin\theta(8 - 2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta) r \, d\theta\right] dr =$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} 2r^2(4-r^2)\sin\theta \, d\theta\right] dr$$

c) Fra a) vet vi at skjæringskurven ligger over sirkelen $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Denne sirkelen kan vi parametrisere (mot klokken) med $x = 1 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. For å finne $z$-komponenten setter vi inn i en av de to flateformlene. Bruker vi $z = 6 - x^2 - y^2$, får vi

$$z(t) = 6 - (1 + 2\cos t)^2 - (2\sin t)^2 = 6 - 1 - 4\cos t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t = 1 - 4\cos t$$

Dermed er parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + (1 - 4\cos t)\,\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Deriverer vi, ser vi at

$$\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 4\sin t\,\mathbf{k}$$

Dette gir

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \big[(1-4\cos t)(-2\sin t) + (2\sin t)(2\cos t) + (1+2\cos t)(4\sin t)\big]\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[2\sin t + 20\cos t\sin t\big]\, dt = \Big[-2\cos t - 10\cos^2 t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

**Oppgave 4.** Vi deriverer·

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{(-1)(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dette viser at $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ for $(x,y) \neq (0,0)$.

Enhetsirkelen er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Dermed er

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

og vi får

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t)\right] dt = \int_0^{2\pi} 1\; dt = 2\pi$$

Siden integralet rundt den lukkede kurven ikke er 0, kan vektorfeltet ikke være konservativt i hele planet. Siden $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ for $(x,y) \neq (0,0)$, kan man imidlertid vise at $\mathbf{F}$ er konservativt i alle enkeltsammenhengende områder som ikke inneholder origo (men dette resultatet ligger utenfor vårt pensum). Dette betyr at linjeintegralet over alle lukkede kurver som ikke omslutter origo, er null.