$\boxed{\text{Greens teorem (6.5)}}$

Notasjon

Hvis $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$

og C er en kurve parametrisert ved

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \qquad \text{for } t \in [a,b]$$

så er

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

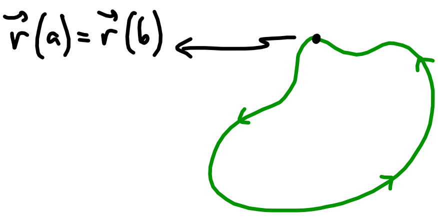
$$= \int_a^b \left[P\cdot\frac{dx}{\cancel{dt}} + Q\cdot\frac{dy}{\cancel{dt}}\right]\cancel{dt} \qquad \text{(stryker "liksom")}$$

$\boxed{\text{skriver dette slik}}$

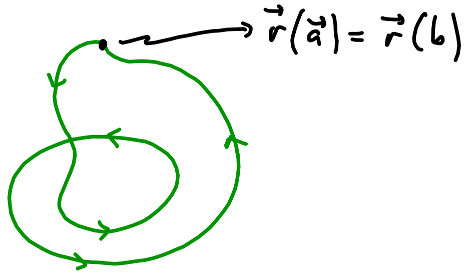
$$= \int_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{(forkortet notasjon)}$$

Enkel, lukket kurve $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

- $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ (lukket)
- $\vec{r}(s) \neq \vec{r}(t)$ for alle $s,t \in [a,b)$ slik at $s \neq t$ (enkel)



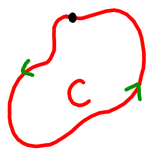
enkel og lukket



lukket, men ikke enkel

Greens teorem (6.5.1)

La C være en enkel, lukket kurve med stykkevis glatt parametrisering $\vec{r}$, og la R være området avgrenset av C. Hvis de partiellderiverte til P og Q er kontinuerlige i et åpent område som inneholder R, så er



$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

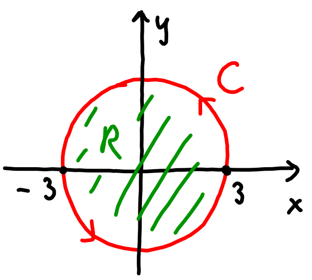
når C er parametrisert (orientert) mot klokken.

eks. Finn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ der

$$\vec{F}(x,y) = \left(\sqrt{1+x^4} + 4y,\ 2x - e^{y^2} \right)$$

og C er sirkelen $x^2+y^2 = 9$ orientert mot klokken.

Løsn.



La R være området avgrenset av C.

$$P(x,y) = \sqrt{1+x^4} + 4y$$

$$Q(x,y) = 2x - e^{y^2}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

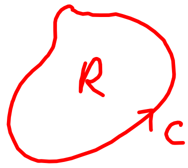
$$= \iint_R (2-4)\,dx\,dy = -2 \cdot \text{areal}(R)$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot 3^2 = \underline{\underline{-18\pi}}$$

Korollar av Greens teorem (6.5.4)

Anta at C er en enkel, lukket kurve med en stykkevis glatt parametrisering $\vec{r}$, og la R være området avgrenset av C.
Da er arealet til R gitt ved

$$\text{Areal}(R) = \int_C x\,dy = -\int_C y\,dx$$



der linjeintegralene er orientert mot klokken.

Bevis La $\vec{F}(x,y) = 0\,\vec{i} + x\,\vec{j}$, altså $\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = x \end{cases}$

Da:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C x\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_R (1-0)\,dx\,dy = \text{areal}(R)$$

La så $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$, altså $\begin{cases} P(x,y) = y \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$

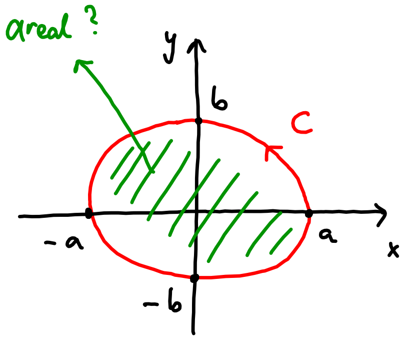
Da:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C y\,dx \overset{\text{Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_R (0-1)\,dx\,dy = -\text{areal}(R). \quad \square$$

eks. Skal finne arealet A avgrenset av ellipsen C gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Løsn. Parametriserer C ved

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{for } t \in [0, 2\pi)$$

$$A \underset{\text{Greens korollar}}{=} \int_C x\,dy \underset{\substack{\frac{dy}{dt} = b\cos t \\ dy = b\cos t\,dt}}{=} \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt$$

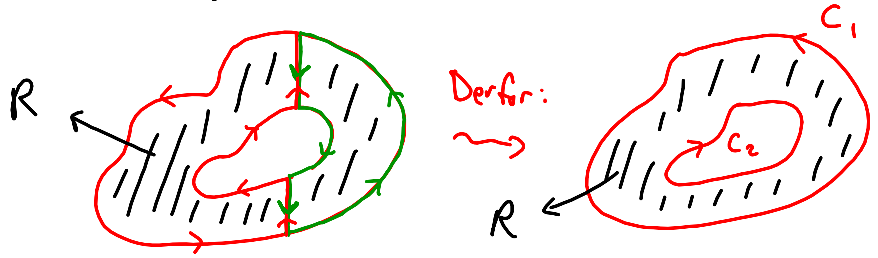
$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$$

$$\underset{\text{Formelsamling}}{=} ab\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t\right]_0^{2\pi}$$

$$= ab\left[\pi - 0 - (0+0)\right] = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Oppdelingsprinsipp

Vi kan også ha områder R med "hull".

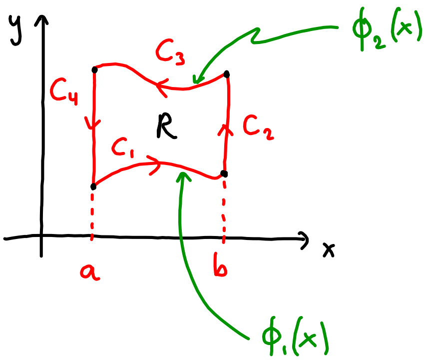


R er alltid til venstre for kurven.

Har nå $\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

(Omløpsretningen markeres ofte slik på linjeintegralene. Brukes ikke i boken.)

Delvis bevis for Greens teorem (for spesielle områder R)



Parametrisering C_1:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \phi_1(x) \end{cases} \qquad x \in [a,b]$$

Parametrisering C_3 (motsatt vei)

$$\begin{cases} x = x \\ y = \phi_2(x) \end{cases} \qquad x \in [a,b]$$

Beskrivelse av R:

$$\begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)] \end{cases}$$

Vi får da:

$$\iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = -\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right] dx$$

Fundamentalteoremet

$$= -\int_a^b \Big[P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))\Big]\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, \phi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x))\,dx$$

Må skifte fortegn her fordi para. av C_3 gikk motsatt vei

$$= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx$$

$$= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx$$

Hvis vi lar C bestå av C_1, C_2, C_3 og C_4

$$= \int_C P\,dx$$

På tilsvarende måte vises $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_C Q\,dy$, men da bruker vi et område der rollene til x og y er byttet om. Vi kan dele opp "pene" områder R i områder som kan beskrives både på måten vi har brukt her og på den "omvendte" måten. Ved så å bruke oppdelingsprinsippet, får vi Greens teorem for mer generelle områder. (Detaljer utelates.) □