Oppgave 3.5.12

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

February 18, 2011

Oppgave 3.5.12

a)

Med $\phi_1(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ får vi

$$\bigtriangledown \phi_1(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\mathbf{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\mathbf{j} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} = \mathbf{F}(x,y).$$

b)

Siden $\mathbf{F}$ har potensialfunksjonen ϕ_1, og denne er definert til høyre for y-aksen, så har vi at

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \phi_1(3,3) - \phi_1(1,-1) = \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

c)

Med $\phi_2(x,y) = -\arctan \frac{x}{y} + C$ får vi

$$\bigtriangledown \phi_2(x,y) = -\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\mathbf{i} + -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\mathbf{j} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} = \mathbf{F}(x,y).$$

```
% Oppgave 3.5.12 d)
C=1;
[x,y]=meshgrid([-10:0.01:10],[-10:0.01:10]);
z1=atan(y./x)+C;
z2=-atan(y./x)+C;
mesh(x,y,z1);
figure(2);
mesh(x,y,z2);
```

e)

Funksjonene ϕ_1 og ϕ_2 er begge kontinuerlige når $x, y \neq 0$. Spesielt er de kontinuerlige i hver kvadrant, og siden de har de samme partielle deriverte, så skiller de seg fra hverandre med en konstant i hver kvadrant. Men som vi skal se, konstanten er forskjellig fra kvadrant til kvadrant:

I likningen $\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y) + C$ setter vi inn punktet $(1,1)$ fra første kvadrant, og får $\arctan(1) = -\arctan(1) + C$, som gir $C = \frac{\pi}{2}$. Setter vi inn punktet $(-1,-1)$ fra tredje kvadrant får vi samme verdi for C.

Setter vi så inn punktet $(-1,1)$ fra andre kvadrant får vi at $\arctan(-1) = -\arctan(-1) + C$, som gir $C = -\frac{\pi}{2}$. Setter vi inn punktet $(1,-1)$ fra fjerde kvadrant får vi samme verdi for C.

Setter vi inn for ϕ_1 og ϕ_2 får vi dermed at

$$\begin{aligned} \arctan \frac{y}{x} &= -\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} \text{ i første og tredje kvadrant, eller når } xy > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} &= -\arctan \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} \text{ i andre og fjerde kvadrant, eller når } xy < 0. \end{aligned}$$

f)

Vi vet at $\phi_1(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ er en potensialfunksjon for $x \neq 0$, uansett verdi av C. For $y > 0$ har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \phi_1(x,y) &= \frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x \to 0^-} \phi_1(x,y) &= -\frac{\pi}{2} + C. \end{aligned}$$

Velger vi derfor potensialfunksjonen $\psi_1(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + C$ for $x > 0$ og potensialfunksjonen $\psi_2(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + C + \pi$ for $x < 0$ får vi at, for $y > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \psi_1(x,y) &= \frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x \to 0^-} \psi_2(x,y) &= -\frac{\pi}{2} + C + \pi = \frac{\pi}{2} + C, \end{aligned}$$

slik at vi har en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$, ψ, definert ved

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \arctan \frac{y}{x} + C \text{ for } x > 0, \\ \psi(x,y) &= \frac{\pi}{2} + C \text{ for } x = 0, y > 0, \\ \psi(x,y) &= \arctan \frac{y}{x} + C + \pi \text{ for } x < 0, \end{aligned}$$

som er kontinuerlig utenom den negative y-aksen. Gitt en verdi for C, så er det klart at dette er den eneste måten å kontinuerlig utvide ϕ_1 til planet utenom den negative y-aksen. For å se at det er umulig å utvide ϕ_1 til den negative

y-aksen, regner vi ut, for $y < 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \psi(x,y) &= \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{y}{x} + C = -\frac{\pi}{2} + C \\ \lim_{x\to 0^-} \psi(x,y) &= \lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{y}{x} + C + \pi = \frac{\pi}{2} + C + \pi = \frac{3\pi}{2} + C.\end{aligned}$$

Derfor blir ikke utvidelsen vi har gjort kontinuerlig også på den negative y-aksen, slik at det er umulig å lage en kontinuerlig utvidelse til hele $\mathbb{R}^2$.