MAT1110: Løsningsforslag til prøveeksamen V-15

Oppgave 1. a) Vi partiellderiverer funksjonen $f(x, y) = x^2y^2 - 2x + 2y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 2$$

I et stasjonært punkt må begge de partiellderiverte være null, dvs.

$$xy^2 - 1 = 0 \qquad \text{og} \qquad x^2y + 1 = 0$$

Legg merke til at i en løsning kan y ikke være 0. Løser vi den første ligningen for x, får vi $x = \frac{1}{y^2}$. Setter vi dette inn i den andre ligningen, får vi

$$\frac{1}{y^3} + 1 = 0$$

Dette er ekvivalent med $y^3 = -1$, og følgelig er $y = -1$. Setter vi dette inn i uttrykket $x = \frac{1}{y^2}$, ser vi at $x = 1$. Det eneste stasjonære punktet er derfor $(1, -1)$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten til å avgjøre hva slags kritiske punkter $(1, -1)$ er. De annenderiverte er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2$$

Setter vi inn $(x, y) = (1, -1)$, får vi

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, -1) = -4, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

Siden $D < 0$, er $(1, -1)$ et sadelpunkt.

Oppgave 2. Vi ser at

$$\frac{n^2}{2n^3 + 2n + 3} = \frac{n^2}{n^3(2 + 2/n^2 + 3/n^3)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2 + 2/n^2 + 3/n^3}$$

som viser at for store n er leddene av samme størrelsesorden som $\frac{1}{n}$. Vi sammenligner derfor rekken vår med den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2n^3+2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+2/n^2+3/n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+2/n^2+3/n^3} = \frac{1}{2}$$

gir en endelig grense, sier *grensesammenligningskriteriet* at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3+2n+3}$ divergerer.

Den andre rekken er alternerende, og størrelsen sin $\frac{1}{n}$ til leddene avtar mot null. Rekken konvergerer ved *testen for alternerende rekker*.

Oppgave 3. Funksjonen er positiv når $x^2 \geq y^2$, dvs. når $-x \leq y \leq x$. Volumet blir dermed (det kan være lurt å lage en figur)

$$V = \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\,dx = \left[\frac{x^4}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Oppgave 4. Setter vi $z = g(x,y)$, får vi ligningen

$$z = e^{x+2y-z}$$

dvs.

$$z - e^{x+2y-z} = 0 \tag{1}$$

Vi skal bruke implisitt funksjonsteorem på funksjonen

$$f(x,y,z) = z - e^{x+2y-z}$$

Observer at punktet $(1,0,1)$ passer i (1). Dessuten ser vi at

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 - e^{x+2y-z}(-1) = 1 + e^{x+2y-z}$$

som gir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 1 + e^0 = 2 \neq 0$$

Ifølge implisitt funksjonsteorem finnes det dermed en funksjon g definert i en omegn om $(1,0)$ slik at $g(1,0) = 1$ og $f(x,y,g(x,y)) = 0$, dvs.

$$g(x,y) = e^{x+2y-g(x,y)}$$

Ifølge samme teorem er

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1)}$$

Siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{x+2y-z}$$

ser vi at $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = -1$. Fra før vet vi at $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 2$, og dermed får vi

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Tilsvarende er

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1)}$$

Siden $\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x+2y-z}$, ser vi at $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = -2$, og dermed får vi

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -\frac{-2}{2} = 1$$

Oppgave 5. Vi skal bruke Greens teorem. Siden $P(x,y) = \ln(\pi + \arctan x) - (x^2+x)y$ og $Q(x,y) = xy^2 + e^{\sin y}$, ser vi at

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 - x$$

og

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

Ifølge Greens teorem er da

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (y^2+x^2+x)\,dxdy$$

der D er sirkelskiven om origo med radius 1. Bytter vi til polarkoordinater, får vi

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (r^2 + r\cos\theta)r\,d\theta\right] dr = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (r^3 + r^2\cos\theta)\,d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^1 \left[r^3\theta + r^2\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 r^3\,dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Oppgave 6. a) Vi finner først egenverdiene:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & -0.4 \\ 0.1 & \lambda - 1.3 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.9)(\lambda - 1.3) - (-0.4)(0.1) = \lambda^2 - 2.2\lambda + 1.21$$

gir oss annegradsligningen

$$\lambda^2 - 2.2\lambda + 1.21 = 0$$

som har løsningene

$$\lambda = \frac{2.2 \pm \sqrt{2.2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.21}}{2} = \frac{2.2 \pm 0}{2} = 1.1$$

Matrisen har altså bare én egenverdi, $\lambda = 1.1$.

De tilhørende egenvektorene er gitt ved

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ -0.1 & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som gir ligningene

$$\begin{aligned} 0.9x + 0.4y &= 1.1x \\ -0.1x + 1.3y &= 1.1y \end{aligned}$$

som begge er ekvivalente med $x = 2y$. Egenvektorene er derfor $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ der $y \neq 0$. Siden alle egenvektorene er parallelle, finnes det ikke to som er lineært uavhengige, og dermed er det ikke noen basis av egenvektorer.

b) Vi ser at $\mathbf{w} = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3 \end{pmatrix}$. For å skrive denne som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, må vi finne tall x, y slik at

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $x = 0.2$ og $y = 1.1$. Altså er

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3 \end{pmatrix} = 0.2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.2\mathbf{u} + 1.1\mathbf{v} \qquad (2)$$

For å skrive $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, må vi tilsvarende finne x, y slik at

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løser vi ligningssystemet, ser vi at $x = 500$, $y = 500$. Altså er

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} = 500 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 500 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 500\mathbf{u} + 500\mathbf{v} \tag{3}$$

c) Vi har

$$\mathbf{r}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9x_n + 0.4y_n \\ -0.1x_n + 1.3y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ -0.1 & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\mathbf{r}_n$$

Siden $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ åpenbart er lineært uavhengige, danner de en basis for $\mathbb{R}^2$, og dermed kan enhver vektor i $\mathbb{R}^2$ skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ på en entydig måte. Spesielt finnes det tall c_n og d_n slik at $\mathbf{r}_n = c_n\mathbf{u} + d_n\mathbf{v}$. Ligningen $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$ kan nå skrives

$$c_{n+1}\mathbf{u} + d_{n+1}\mathbf{v} = A(c_n\mathbf{u} + d_n\mathbf{v}) = c_nA\mathbf{u} + d_nA\mathbf{v}$$

$$= 1.1c_n\mathbf{u} + d_n(0.2\mathbf{u} + 1.1\mathbf{v}) = (1.1c_n + 0.2d_n)\mathbf{u} + 1.1d_n\mathbf{v}$$

der vi har brukt (2) til å uttrykke $A\mathbf{v}$ ved hjelp av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Siden $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, er lineærfremstillinger entydige, og dermed er

$$c_{n+1} = 1.1c_n + 0.2d_n \qquad \text{og} \qquad d_{n+1} = 1.1d_n$$

d) Fra b) vet vi at $\mathbf{r}_0 = 500\mathbf{u} + 500\mathbf{v}$, og følgelig er $c_0 = 500$ og $d_0 = 500$. Siden $d_{n+1} = 1.1d_n$, ser vi at $d_1 = 1.1d_0$, $d_2 = 1.1d_1 = 1.1^2d_0$ osv. Generelt har vi dermed $d_n = 1.1^n d_0 = 500 \cdot 1.1^n$. Altså er

$$c_{n+1} = 1.1c_n + 100 \cdot 1.1^n$$

Dette er en differensligning som kan løses med metodene fra MAT-INF1100, men siden svaret er oppgitt, kan vi like godt bruke induksjon. Induksjonshypotesen er:

$$\mathrm{P_n} : c_n = 1.1^{n-1}(100n + 550)$$

Vi sjekker først $\mathrm{P_0}$: Formelen gir $c_0 = 1.1^{-1}(100 \cdot 0 + 550) = \frac{550}{1.1} = 500$, som stemmer med det vi har funnet tidligere.

For å sjekke induksjonstrinnet antar vi at $\mathrm{P_n}$ holder, dvs. at $c_n = 1.1^{n-1}(100n + 550)$. Da er

$$c_{n+1} = 1.1c_n + 100 \cdot 1.1^n = 1.1(1.1^{n-1}(100n + 550) + 100 \cdot 1.1^n)$$

$$= 1.1^n(100n + 550 + 100) = 1.1^{(n+1)-1}(100(n + 1) + 550)$$

som viser at $\mathrm{P_{n+1}}$ holder. Ved induksjon holder da $\mathrm{P_n}$ for alle n.

Vi kan nå finne x_n og y_n. Siden $\mathbf{r}_n = c_n\mathbf{u} + d_n\mathbf{v}$, får vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1.1^{n-1}(100n + 550) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 500 \cdot 1.1^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1^{n-1}(200n + 1100) \\ 1.1^{n-1}(100n + 1100) \end{pmatrix}$$

det vil si

$$x_n = 1.1^{n-1}(200n + 1100)$$

$$y_n = 1.1^{n-1}(100n + 1100)$$