$$
(*)\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\
\quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m
\end{cases}
\qquad \vec{b} = (b_1, \ldots, b_m).
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Utvidet matrise: $[A \,|\, \vec{b}\,]$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

Setter $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Da kan $(*)$ skrives som $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Trappeform:

$$
\begin{bmatrix}
1 & \text{———} & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \text{———} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots\ 0 \\
0 & 0 & \cdots & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

Setning: Anta at den utvidete matrisen til et ligningssystem kan radreduseres til en trappematrise C. Da gjelder

(i) dersom den siste kolonnen i C er en pivotsøyle så har l.s. ingen løsn.

ellers,

(ii) dersom alle andre kollonner er pivot, så har vi entydig løsn.

(iii) dersom minst en annen søyle ikke er pivot så har vi uendelig mange løsn.

Korollar: Anta at den utvidete matrisen til et ligningssystem kan reduseres til matrisen C. Da har ligningssystemet en entydig løsning hviss og bare hvis alle søyler bortsett fra den siste er pivot.

Eks: $x + y = 1$

$2x + y = 2$ Utvidet matrise:

$x + 2y = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x + y = 1 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$\underline{x = 1, y = 0}$.

$\Rightarrow$ ligningssystemet har en tydig løsning

Ligningssystemer med samme venstreside

$A\vec{x} = \vec{b}_1$

$A\vec{x} = \vec{b}_2$

$\vdots$

$A\vec{x} = \vec{b}_n$

Setning: Anta at $(n \times n)$-matrisen A kan radreduseres til trappematrisen D. Da har ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ en løsning for alle valg av $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle rader i D har pivotelementer.

Bevis: $A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad [A \mid \vec{b}] \sim [D \mid \vec{b}']$

$D\vec{x} = \vec{b}'$.

Holder å vise at ligningen $D\vec{x} = \vec{b}'$ har en løsning for alle $\vec{b}'$ hviss og bare hvis alle rader i D har et pivot-element.

Anta at alle rader i D har pivotelement.

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}_{D} \; \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ \\ b_m \end{matrix}$$

Siste kolonne kan ikke være pivot, så systemet har løsning.

Hvis ikke: da har D en rad med bare nuller

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{matrix}$$

$0 = 1$ som er umulig, så ingen løsning.

$\blacksquare$

<u>Korollar</u>: Anta at A er en $(m \times n)$-matrise som kan reduseres til trappematrisen D. Da har ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ en <u>entydig</u> løsning for alle $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle rader og alle søyler i D inneholder pivot-elementer. I tilfelle må A være en $(n \times n)$-matrise.

<u>Bevis</u>: Forrige res: løsning hviss alle rader har pivot elementer.

Første res. i dag: entydig hviss alle søyler har pivotelementer.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & * \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Reduset trappeform

DEF: En matrise A er på redusert trappeform dersom A er på trappeform og dersom alle elementer over et pivot-element er null.

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{I \div III}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{I \div 5 \cdot II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setning: Enhver matrise A er radekvivalent med en matrise på redusert trappeform.

Setning 4.3.3: Ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$ hvis og bare hvis $A \sim I_n$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

Bevis: Dersom $A \sim I_n$.

$$[A \mid \vec{b}] \sim [I_n \vdots \tilde{b}]$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = \tilde{b}_1$$
$$x_2 = \tilde{b}_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = \tilde{b}_n \, .$$

apr 4-14:54

Omvendt $A\vec{x}=\vec{b}$ har en løsning for alle $\vec{b}$ $\Rightarrow$ alle søyle og rader i en trappeform har pivotelementer.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \sim \underline{I_n}.$$

Simultane løsninger for kvadratiske matriser som er ekvivalente med I_n

Anta $A \sim I_n$

Vil løse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$[A \mid \vec{b}] \sim [I_n \mid \tilde{\vec{b}}]$$

$$x_1 = \tilde{b}_1,\ x_2 = \tilde{b}_2, \dots, x_n = \tilde{b}_n$$

Dersom du vil løse flere ligninger samtidig

$$A\vec{x} = \vec{b}_1,\ A\vec{x} = \vec{b}_2, \dots, A\vec{x} = \vec{b}_m,$$

kan vi jobbe med

$$[A \mid \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \cdots \mid \vec{b}_m] \sim [I_n \mid \tilde{\vec{b}}_1 \mid \cdots \mid \tilde{\vec{b}}_m]$$

Eks: Løs $A\vec{x} = \vec{b}_j$ der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{II \div 2 \cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot -1/4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 5/4 \end{bmatrix} \overset{I \div 3 \cdot II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

Inverse matriser :

$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

La A være en $(n\times n)$-matrise. Vi sier at B er inversen til A dersom $AB = BA = I_n$, og i så fall sier vi at A er invertebar. Skriver gjerne $A^{-1} = B$.

Anta at A er invertebar og at vi vil løse ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$.

Da
$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$
$$\parallel$$
$$(A^{-1}A)\vec{x} = \vec{x}.$$

Så løsningen er gitt ved $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$,
Så systemet har en entydig løsning for alle $\vec{b}$,
så spesielt har vi at $A \sim I_n$.

Setning: Anta at $\underline{A \sim I}_n$. Da er A invertebar.

Bevis: Siden $A \sim I_n$ kan finne $\vec{b}_j$ for $j=1,\dots,n$
s.a. $A\cdot\vec{b}_j = e_j$, $e_j = (0,\dots,\underset{\uparrow}{1},0\dots,0)$.
j'te plass

$A\vec{x} = e_j$.

La B være matrisen
$$B = [\vec{b}_1 \,|\, \vec{b}_2 \,|\cdots|\, \vec{b}_n]$$
$$\underline{A\cdot B} = [A\vec{b}_1 \,|\, A\vec{b}_2 \,|\cdots|\, A\vec{b}_n]$$
$$= [e_1 \,|\, e_2 \,|\cdots|\, e_n].$$
$$= I_n$$

Må også vise at $BA = I_n$.

Holder å vise at $BA\vec{x} = \vec{x}$ for alle $\vec{x}$.

$$\Downarrow$$

$$BA\vec{x} - I_n\vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x}$$

$$\underbrace{(BA - I_n)}\vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x}.$$

$$\Rightarrow BA - I_n = 0 \Rightarrow BA = I_n.$$

Videre:

$$A(\underbrace{BA\vec{x}}_{\vec{b} := BA\vec{x}}) = (AB)A\vec{x} = I_n A\vec{x} = A\vec{x}.$$

$\vec{b}$ løser ligningssystemet $A\vec{b} = A\vec{x}$.

Men siden $A \sim I_n$ har ligningen entydig løsning så $BA\vec{x} = \vec{x}$. ∎

Eksempel: Avgjør om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ er inverterbar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim I_n$$

så A er inverterbar.

Merk: generelt, avgjør om $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ er inverterbar.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & & \ast & \\ 0\,0\,0 & 1 & \cdots & \\ 0\,0\,0 & 0 & ? & 0 \\ 0\,0\,0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Dersom en rad består av bare nuller fins $\vec{b}$ s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har noen løsning.

Så A er <u>ikke</u> inverterbar. ∎