La $\varepsilon > 0$ være gitt. La N være første naturlige tall $> \frac{1}{\varepsilon}$. Da er det så for alle $n \geq N$ er

$$|x_n - \vec{c}| \leq \underbrace{|x_N - \vec{c}| \leq}_{\text{siden iunni kula}} \overset{\text{def}}{r_N = \frac{1}{N}} < \varepsilon$$

$N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$

Tilsvarende

$$|y_n - \vec{c}| \leq |y_N - \vec{c}| \leq r_N = \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Siden $n \geq N$

så kula har blitt mindre

men dvs. at $x_n \to \vec{c}$ & $\vec{y_n} \to \vec{c}$, og $\{x_n\}_n \in A$, mens $\{y_n\}_n \in A^c$.

Dermed er teoremet vist. $\boxtimes$

5.2: Komplettheet av $\mathbb{R}^n$

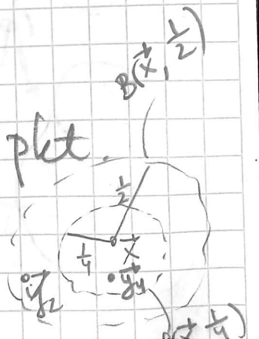
4) <u>Anta</u>: $\{\vec{x}_n\}$ følge i $\mathbb{R}^m$. $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ er <u>opphopningspkt</u>. for $\{\vec{x}_n\}$ hvis enhver kule $B(\vec{x}, r)$ inneh. ∞ mange elementer av følgen.

a) <u>VIS</u>: $\vec{x}$ er opphopningspkt. $\Leftrightarrow$ $\{\vec{x}_n\}$ har delfølge som konv. mot $\vec{x}$.

Hopper alltid inn mot $\vec{x}$ igjen!

<u>Bevis</u>: $\underset{\sim}{\Rightarrow}$: Anta at $\vec{x}$ er et opphopningspkt. for $\{\vec{x}_n\}$.
La $n \in \mathbb{N}$.
Da vil enhver kule $B(\vec{x}, \frac{1}{n})$ inneholde minst et pkt. (faktisk ∞ mange) fra følgen.
f.eks. $\vec{x}_m$

Definer en delfølge v/ $\vec{y}_n := \vec{x}_m$ (altså pkt. fra $\{x_n\}_n$ inni $B(\vec{x}, \frac{1}{n})$).



Men da vil delfølgen $\{\vec{y_n}\}_n$ konvergere mot $\vec{x}$ siden $|\vec{y_n} - \vec{x}| \leq \frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

Sjekk dette m/def. av konvergens!

La $\varepsilon > 0$ osv. som i 5.1:6

$\Leftarrow$: Anta at det fins en delfølge $\{\vec{y_n}\}$ som konv. mot $\vec{x}$. La $B(\vec{x}, r)$ være en kule m/ radius r om $\vec{x}$. Siden $\vec{y_n} \to \vec{x}$, fins det en $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\vec{y_n} \in B(\vec{x}, r)$ for alle $n \geq N$.

Fra def. konvergens

Men dvs. at $B(\vec{x}, r)$ inneh. ∞ mange pkt. fra $\{y_n\} \subseteq \{x_n\}$, men per def. betyr det at $\vec{x}$ er et opphopningspkt for $\{\vec{x_n}\}$. ▣

b) <u>Anta:</u> A lukket, begrenset $\subseteq \mathbb{R}^m$.

<u>VIS</u>: Enhver følge i A har et opphopningspkt i A.

<u>Bevis:</u> Fra Bolzano-Weierstrass teorem (Thm. 5.2.3) har enhver følge fra A en konvergent delfølge (siden A er begrenset). La $\vec{x}$ være pkt. denne delfølgen konvergerer mot. Merk at $\vec{x} \in A$ siden A er lukket. Fra a) er $\vec{x}$ et opphopningspkt. for $\{\vec{x_n}\}_n$. Men dermed har følgen et opphopningspkt. i A. ▣

c) Anta $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikke lukket. <u>VIS</u>: Fins følge i A som ikke har opphopningspkt. i A.