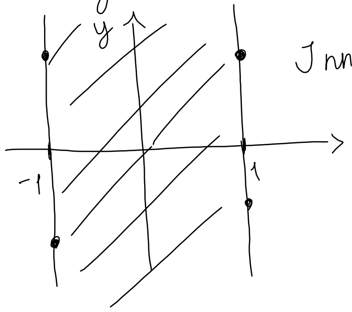
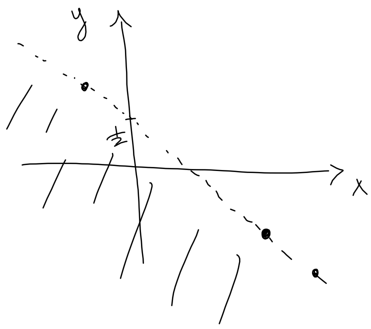
5.1: 1) d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1\}$



Inneholder alle randpkt; Lukket.

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y<1\}$;

$$x+2y<1$$
$$x-1<-2y$$
$$\frac{x-1}{2}<-y$$
$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}<-y$$
$$\frac{-x}{2}+\frac{1}{2}>y$$



Inneholder ingen randpunkter: Åpen

4) $\vec{x}_n \to \vec{b}$

VIS: $\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n-\vec{a}| = |\vec{b}-\vec{a}|$

HINT: $\big|\,|\vec{x}_n-\vec{a}|-|\vec{b}-\vec{a}|\,\big| \le |\vec{x}_n-\vec{b}|$

Bevis hint: $|\vec{x}_n-\vec{a}| = |\vec{x}_n-\vec{b}+\vec{b}-\vec{a}| \underset{\Delta\text{-ulikhet}}{\le} |\vec{x}_n-\vec{b}|+|\vec{b}-\vec{a}|$

Flytt over: $|\vec{x}_n-\vec{a}|-|\vec{b}-\vec{a}| \le |\vec{x}_n-\vec{b}|$ $(*)$

Tilsvarende (bytt om rollene til $\vec{x}_n$ og $\vec{b}$):

$(**)$ $|\vec{b}-\vec{a}|-|\vec{x}_n-\vec{a}| \le |\underbrace{\vec{b}-\vec{x}_n}_{-(\vec{x}_n-\vec{b})}| = |\vec{x}_n-\vec{b}|$

$(*)$ og $(**)$ $\Downarrow$

$\big|\,|\vec{x}_n-\vec{a}|-|\vec{b}-\vec{a}|\,\big| \le |\vec{x}_n-\vec{b}|$ Både + og − er $\le$

siden $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

Så: La $\varepsilon>0$ være gitt. Da kan vi finne $N\in\mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n-\vec{b}|<\varepsilon$ for $n\ge N$ (siden $\vec{x}_n\to\vec{b}$). Men da er

$$\big|\,|\vec{x}_n-\vec{a}|-|\vec{b}-\vec{a}|\,\big| \underset{\text{HINT}}{\le} |\vec{x}_n-\vec{b}| \underset{\text{over}}{<} \varepsilon \text{ for alle } n\ge N$$

Dvs. fra def. av konvergens $\lim_{n\to\infty}|\vec{x}_n-\vec{a}| = |\vec{b}-\vec{a}|$. ∎