12.1. Rekker

Husk at en følge er en mengde $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $c_n \in \mathbb{R}$.

En <u>rekke</u> er en uendelig sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad .$$

Definer den m'te delsummen

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n .$$

<u>DEF</u>: Vi sier at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>konvergerer</u> dersom følgen $\{s_m\}$ konvergerer, og ellers sier vi at rekka <u>divergerer</u> eller er divergent.

<u>Eks1</u>: $\underline{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

<u>Eks2</u>: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

<u>12.1.4</u> <u>Divergenstest</u>: Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent følge så må

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

<u>Bevis</u>: Rekka konvergerer hvis følgen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ konvergerer.

Men da må $s_m - s_{m-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$,

og $s_m - s_{n-1} = \sum_{n=0}^{m} a_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n = a_m$,

så $a_m \to 0$ når $m \to \infty$. ∎

mai 19-11:31

12.1.1 SETNING: La $a_0 \neq 0$. Rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n \quad \left(= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)$$

konvergerer dersom $|r| < 1$, og i så fall er summen lik

$$\frac{a_0}{1-r},$$

og rekka divergerer dersom $|r| \geq 1$.

Bevis: Divergens: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$.

Ser at $a_0 r^n$ umulig kan gå mot null dersom $|r| \geq 1$, så dette følger av div.testen.

Konvergens:

Husk at: $$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_0 r^n = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \cdot a_0 .$$

$$\lim_{m \to \infty} r^{m+1} = 0 \text{ dersom } |r| < 1,$$

så $$\lim_{m \to \infty} S_m = \frac{a_0}{1-r}. \quad \blacksquare$$

Eks: Achilles og skilpadden.

$$1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

Ved steg m har skilpadden løpt $\underbrace{1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^m}_{= \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{10}\right)^n}$ meter.

$$\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{10}\right)^n \xrightarrow{m \to \infty} \frac{1}{1 - 1/10}.$$

Regneregler for rekker.

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er konvergente rekker, da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

$c \in \mathbb{R}$