Øyvind (oyvindry@math.uio.no)

Fra sist: Rep. av enkel regning med matriser og vektorer
(skalarprodukt, vektorprodukt, matrisemultiplikasjon, determinant)

I dag: Innføring til disse med matlab.
↑ Time 1

Time 2–4: Kap. 3: Kurver og flater i rommet (grunnleggende begreper)

Senere: 9/2 Matlab på visualisering av kurver / flater

MATLAB (MATrix LABoratory)

Matnat har site-lisens

1. Installert på de fleste UIO-maskiner.
2. Kan kjøres fra kiosk.uio.no
   (eller via ssh)
3. Mac : macprog.uio.no
4. Windows: winprog.uio.no
5. Octave. Samme syntaks som matlab. Gratis!

Kap. 3 Kurver og flater

Sek 3.1:

En parametrisert kurve i planet er en funksjon $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

(t betegner ofte tid)

i rommet: $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$

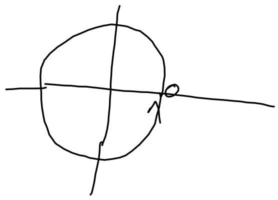
Definisjon 3.1.3:

En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon $\underbrace{I}_{\text{et intervall}} \to \mathbb{R}^n$,

$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$

(Kalles for en vektorvaluert funksjon)

Eks: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad I = [0, 2\pi]$



Hva kan vi gjøre med parametriserte kurver?

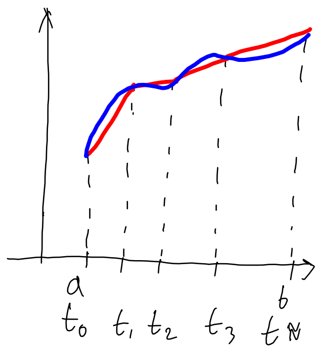
1. Regne ut lengden av kurven (3.1)
2. Når t er tid: Hva er fart / akselerasjon langs kurven (3.1)
3. Plotte dem.
4. Derivere en funksjon langs kurven (3.2)
5. Integrere en funksjon langs kurven (3.3)
6. Regne ut arbeidet en kraft gjør langs kurven (3.4)

1. Lengden av en kurve.

Starter med å tilnærme kurven ved å dele den opp i linjesegmenter:

$I = a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$,

vi legger sammen lengden av hvert linjesegment.



(hvis oppdelingen er fin nok, er dette en god tilnærming til lengden av kurven)

Lengden av i'te linjesegment (røde) er $|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$

$= |(x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i)) - (x_1(t_{i-1}), \ldots, x_n(t_{i-1}))|$

$= |(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}), \ldots, x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))|$

$= \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \cdots \left(\frac{x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \, (t_i - t_{i-1})$

$\approx \sqrt{x_1'(t_i)^2 + \cdots x_n'(t_i)^2} \, (t_i - t_{i-1})$

Summen av alle lengdene på segmentene $\approx$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_1'(t_i)^2 + \cdots + x_n'(t_i)^2} \, (t_i - t_{i-1})}_{\text{Riemann sum for } \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} \, dt}$$

$$\approx \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} \, dt$$

Definisjon 3.1.5 Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er deriverbare med kont. deriverte. Buelengden til $\vec{r}(t)$ fra $\vec{r}(a)$ til $\vec{r}(b)$ er definert ved

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} \, dt$$

Eksempel 3.1.7

Buelengden til $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = 1$

$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Buelengde: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\cdots}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \underline{\underline{2\pi\sqrt{2}}}$

Vi kan se på $s(t) = L(a,t)$ som tilbakelagt strekning opp til tid t.

fart = derivert av strekning.

$v(t) = s'(t) = \left(\int_a^t \sqrt{x_1'(r)^2 + \cdots + x_n'(r)^2}\, dr\right)'$

$\overset{\text{analysens fund. teorem}}{=} \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$

(Seksjon 3.1 kaller $v(t)$ for fart)

Fart med retning kalles hastighet $(\vec{r}\,'(t))$

$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \ldots, \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right)$

$= (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ (hastighetsvektoren $\vec{v}(t)$).

Vi ser at $|\vec{v}(t)| = v(t)$

Setning 3.1.10 "Kjente" Regleregler gjelder også for parametriserte kurver, feks. (hvis $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ er kurver)

(iii): $\left(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1\,'(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2\,'(t)$

Korollar 3.1.11: Hvis $|\vec{r}(t)|$ er konstant, så er $\vec{r}(t)$ og $\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\text{hastighet}}$ ortogonale

Bevis: I 3.1.10 (iii), sett $\vec{r} = \vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t)$.

Vi får da $\left(|\vec{r}(t)|^2\right)' = 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)$

$$\overset{\parallel}{0} = 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) \text{ og } \vec{r}\,'(t) \text{ er ortogonale.}$$

Akselerasjon defineres som $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$

baneakselerasjonen defineres som $a(t) = v'(t)$

Det viser seg at $|\vec{a}(t)| \neq a(t)$!

Vi definerer først $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$, kaller for enhetstangentvektoren.

$\Rightarrow \vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$

Deriver: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underbrace{\overset{a(t)}{\overset{\parallel}{v'(t)}}\vec{T}(t) + v(t)\vec{T}\,'(t)}_{\text{en ortogonal dekomp. av akselerasjonen,}}$

Siden $\vec{T}(t)$ har konstant lengde, så er $\vec{T}$ og $\vec{T}\,'$ ortogonale

en ortogonal dekomp. av akselerasjonen,

der baneakselerasjonen $a(t)$ er akselerasjonskomponent i fartsretningen.

Sek 3.2

Setning 3.2.1

Hvis $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ er deriverbar for $t \in I$, og $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er deriverbar i $\vec{r}(t)$, så er $u(t) = f(\vec{r}(t))$ deriverbar i t, og

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\, x_n'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

def. av gradientvar: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Bevis: Kjerneregelen (2.7) på $u(t) = f(\vec{r}(t))$ gir:

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))x_n'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\right) \cdot (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) = \underline{\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)}$$

I kap. 5 får vi bruk for middelverdisetningen i flere variable:

Setning 3.2.5: Anta at f er som over, og er deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom a og b. Da finnes det en $\vec{c}$ på dette linjestykket slik at

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \qquad 0 \le t \le 1$$

Bevis: Definer $g(t) = f(\vec{r}(t))$, $\underbrace{\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})}_{\text{linjestykket fra } \vec{a} \text{ til } \vec{b}}$

Vi har vist at $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$ $\qquad \vec{r}\,'(t) = \vec{b} - \vec{a}$

Etter vanlig middelverdisetning:

Finnes en $c \in (0,1)$ slik at:

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c)$$

$$\Downarrow$$

$$g(1) - g(0) = g'(c)$$

$$f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = \nabla f(\underbrace{\vec{r}(c)}_{\text{kaller for } \vec{c}}) \cdot \vec{r}\,'(c)$$

$$\underline{f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$$

Det finnes også en vektorvaluert versjon av kjerneregel for parametriserte kurver (setning 3.2.3), der f byttes ut med en vektorvaluert funksjon F, som også er funksjon av tid:

$$f(\vec{r}(t)) \longrightarrow \vec{F}(\vec{r}(t), t)$$

Se eks. 3.2.4