Mer Lagrange

$\mathbb{R}^n$ $\quad A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) = b \}$, $\quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (deriverbar).

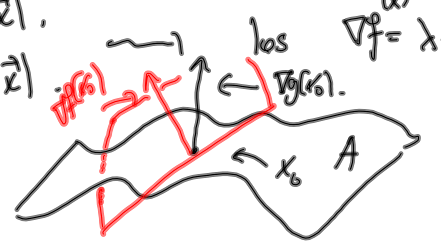
Finn maks/min for f på A.

$\nabla g(\vec{x})$.

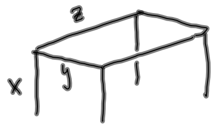
$\nabla f(\vec{x})$

løs $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x})$.

$\lambda \in \mathbb{R}$.



Eks: Bygge rektangulært telt med volum $500\ m^3$. Minimer total lengde på teltstenger.



minimer $4x + 2y + 2z$
under betingelsen $xyz = 500$.

Sett $f(x,y,z) = 4x + 2y + 2z$.
$g(x,y,z) = xyz$, $\quad b = 500$.

Obs: • f kan ikke ha et maks på A.
•• f må ha et min.

$\nabla f(x,y,z) = (4, 2, 2)$

$\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

løs $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$.

$(4,2,2) = \lambda \cdot (yz, xz, xy)$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = \lambda yz \\ 2 = \lambda \cdot xz \\ 2 = \lambda\, xy \end{array}\right\} \quad y = 2x, \quad y = z.$$

må ha $(x,y,z) = \underline{(x, 2x, 2x)}$

Fra bibet: $g(x,y,z) = 500$

$\Rightarrow 4x^3 = 500 \Rightarrow x^3 = 125$
$\Rightarrow x = 5$.

Flere bibetingelser

Teorem (Lagrange)

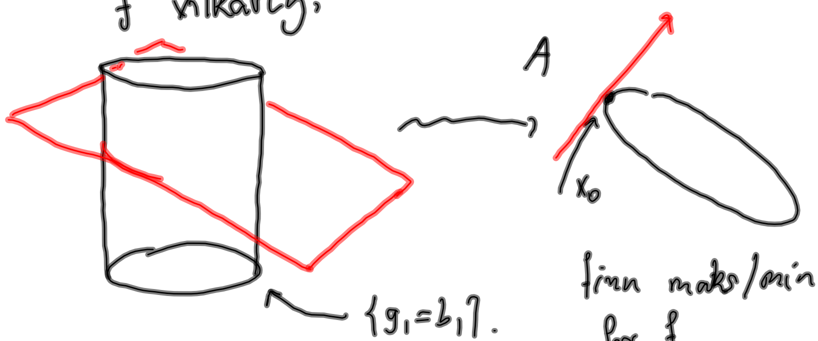
Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^n$ og at $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ og $\vec{x}_0 \in U$ er et lokalt maks- eller min-punkt for f på mengden

$$A = \{\vec{x} \in U : g_1(\vec{x}) = b_1, \dots, g_m(\vec{x}) = b_m\},$$

så er enten $\nabla g_1(\vec{x}_0), \dots, \nabla g_m(\vec{x}_0)$ lineært avhengige, eller

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(x_0).$$

"Bevis":
$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 \qquad b_1 = 1$
$g_2(x,y,z) = 2x + 3y - z \qquad b_2 = 0.$
f vilkårlig.



finn maks/min for f.

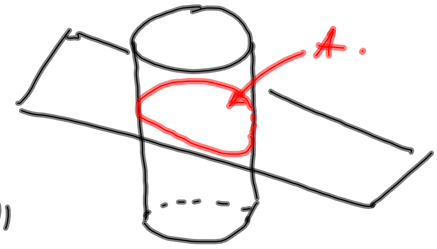
Anta at x_0 er et ekstrempunkt.

Eksempel: Som i "kurs"

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2 \quad , \quad b_1=1$$

$$g_2(x,y,z) = 2x+3y-z \qquad b_2=0$$

$$f(x,y,z) = z.$$



Se at gradientene til g_1 og g_2 e lineært uavh.

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,1)$$

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$$

$$\nabla g_2(x,y,z) = (2,3,-1).$$

Må løse $\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$.

$$(0,0,1) = \lambda_1 \cdot (2x, 2y, 0) + \lambda_2 \cdot (2,3,-1)$$

$$0 = \lambda_1 \cdot 2x + 2\lambda_2 = \lambda_1 \cdot 2x - 2$$

$$0 = \lambda_1 \cdot 2y + 3\lambda_2 = \lambda_1 \cdot 2y - 3$$

$$1 = -\lambda_2 \rightsquigarrow \lambda_2 = -1$$

$$2\lambda_1 \cdot x = 2 \qquad x = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$2\lambda_1 \cdot y = 3 \qquad y = \frac{3}{2\lambda_1}$$

Fra sirkel: $x^2+y^2=1$ $\quad \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda_1}\right)^2 = 1$

$$1 + \frac{9}{4} = \lambda_1^2$$

$$\frac{13}{4} = \lambda_1^2$$

$$\underline{\lambda_1 = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}}$$

Nå e det rett frem å finne x, y, z.

Gradientmetoden

Vil fremdeles finne maks/min-punkter for funksjon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ med kont. partiellderiverte.

Anta at vi er gitt f. Anta at $\vec{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ er et min.punkt for f.

Nivåkurver for f nær $\vec{a}_0$.

Gjett et min-punkt $\vec{x}_0$.

$$r(t) = \vec{x}_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$$

se på $f(r(t))$: ønsker nå å finn min.punkt for denne.

Deriver $f(r(t))$ m.h.p. t og løs $= 0$.

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) \overset{\text{kjerneregel}}{=} \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$$

$$= -\nabla f(x_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)) \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

Løs $\nabla f(x_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

Finner første nullpunkt t_0.

Set $\vec{x}_1 := \vec{x}_0 - t_0 \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$.

.... Fortsett.

MATLAB: Kan lage script som utfører disse operasjonene.