MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-09

Innleveringsfrist: *Fredag 20. februar, 2009, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Se forøvrig*

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v09/obliger.xml

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er plotting av funksjoner av flere variable og programmering.*

Alle delspørsmål (punktene a), b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha tastet inn alle programmene og selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringene. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Det er anledning til å bruke python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med python-spørsmål.

Oppgave: I denne oppgaven skal vi se på vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

der $f(x,y) = e^{-xy} - y$ og $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2$.

a) Regn ut Jacobi-matrisen $\mathbf{F}'(x,y)$.

b) Bruk MATLAB til å tegne grafene til $f(x, y)$ og $g(x, y)$ både hver for seg og i samme figur. Bruk intervallene $-1.5 \leq x \leq 1.5$ og $-1.5 \leq y \leq 1.5$. Vri på grafene slik at de blir enkle å se.

c) Bruk kommandoen `contour` til å tegne noen nivåkurver for $f(x, y)$ og $g(x, y)$ både hver for seg og i samme figur (bruk de samme intervallene for x og y som ovenfor). Sørg for å få med nivåkurvene for $c = 0$, og finn ved inspeksjon alle punkter i vinduet der $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$

I resten av oppgaven skal vi se på en metode for å regne oss frem til nullpunktene til $\mathbf{F}$. Teknikken kalles *Newtons metode* og er en generalisering av den metoden som de fleste av dere vil kjenne fra MAT-INF1100. Vil du vite mer om denne teknikken, kan du kikke litt fremover til seksjon 5.6 i *Flervariabel analyse med lineær algebra* eller du kan ta en titt på MATLAB-lab 4 (se `http://www.math.uio.no/~klara/matlab/`).

Når vi bruker Newtons metode, velger vi først et punkt $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ (som helst ikke bør ligge for langt unna et nullpunkt til $\mathbf{F}$). Vi lager så en følge av punkter $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ved gjentatt bruk av formelen

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$$

(her er $(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}$ den inverse matrisen til Jacobi-matrisen $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)$).

d) Vis at dersom følgen $\mathbf{x}_n$ konvergerer mot et punkt $\mathbf{x}$ der $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ er inverterbar, så er $\mathbf{x}$ et nullpunkt for $\mathbf{F}$.

e) Skriv et program som beregner følgen $\{\mathbf{x}_n\}$. Programmet skal ha tre input-variable a, b, N der $a = x_1$, $b = y_1$ og N er antall ledd vi beregner. Output skal være følgene $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

f) Kjør programmet ditt med startpunkter $(a, b) = (-1, 1)$, $(a, b) = (1, 1)$, $(a, b) = (0.5, 0.5)$, $(a, b) = (-0.5, 0.5)$ og passende valg av N (prøv deg litt frem). Plott de følgene $\{\mathbf{x}_n\}$ som du får for de forskjellige startverdiene, i samme koordinatsystem, men med forskjellig farge (det er nok at de har forskjellig farge på skjermen, du behøver ikke bruke en fargeprinter til innleveringen). Sammenlign resultatene med det du fant i punkt c).

g) Kjør programmet med 5 tilfeldige startpunkter med $0 \leq x \leq 1$ og $0.5 \leq y \leq 1.5$ (bruk kommandoen `rand` til å velge tilfeldige startpunkter). Det kan godt tenkes at noen av følgene du får, ikke konvergerer, eller at MATLAB gir en advarsel om at beregningene ikke er pålitelige. Du kan godt bruke disse kjøringene likevel bare du forklarer hva resultatet ble.