# $\boxed{\text{12.1 Konvergens av rekker}}$

En rekke er en uendelig lang sum:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Delsummer:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{osv.}$$

Hvis $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ fins, sier vi at rekken konvergerer mot $S$.

Geometriske rekker er på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

**Teorem** Sum av geometriske rekker

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

for alle reelle tall $a \neq 0$ og $r$ slik at $|r| < 1$. Hvis $|r| \geq 1$, divergerer rekken.

**Bevis** Kan klart anta $r \neq \pm 1$, for begge disse gir divergens.
Vi får

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}}$$
$$r \cdot S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots + ar^n$$
$$S_n - r S_n = a - ar^n$$
$$S_n(1-r) = a(1-r^n), \quad \text{dvs.} \quad S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

Her har vi $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } |r|<1 \\ \text{fins ikke} & \text{hvis } |r|>1. \end{cases}$ $\square$

eks. $x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \ldots$

Geometrisk rekke med $r = x^3$ og $a = x^4$

Sum: $\frac{a}{1-r} = \frac{x^4}{1-x^3}$ hvis $|r| = |x^3| < 1$. $\square$

Regneregler for rekker:

① $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ gitt at de to rekkene til høyre konvergerer.

② $\sum_{i=1}^{\infty} c a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gitt at rekken til høyre konvergerer.

**Divergenstesten**

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bevis: Se boken, skisse.

grenselover

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right)$$

$= S - S = 0$ hvis konv. $\square$

eks. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{5(n^2+e^n)}$ Konvergerer?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{5(n^2+e^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{5n^2+5e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{5n^2e^{-n}}_{0} + 5} = \frac{1}{5}$$

Siden $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, divergerer rekken ved divergenstesten. $\square$

## 12.2 Konvergenstester

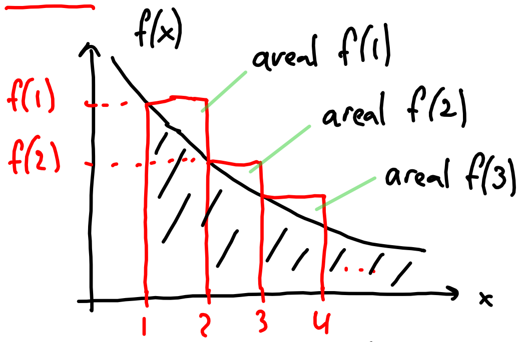
**Integraltesten**

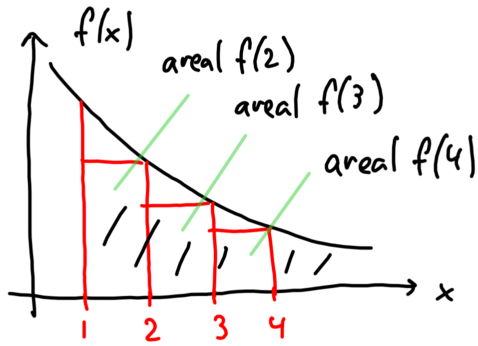
Hvis funksjonen $f$ er kontinuerlig, avtakende og positiv på intervallet $[1,\infty)$, har vi at

rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ og integralet $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

enten begge konvergerer eller begge divergerer.

**Bevis**




Ser at $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$,

så hvis summen konv., konvergerer integralet også

Ser at $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$,

så hvis summen divergerer, divergerer integralet også. $\square$

**eks.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Konvergerer? Rekken: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Integraltesten med $f(x) = \frac{1}{x}$. Har

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln b - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = +\infty$$, dvs. divergens

**p-rekkene**

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konv. for $p > 1$ og div. for $p \leq 1$

**Bevis** Vi bruker integraltesten:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{konv. for } p>1 \text{ og div. for } p \leq 1. \quad \square$$

(jf. pensum i Mat 1100)

**eks.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $(p=2)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. $(p = 1/2)$

**Sammenlikningstesten**

Anta at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n$. Da:

(i) $\sum b_n$ konv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konv.

(ii) $\sum a_n$ div $\Rightarrow$ $\sum b_n$ div.

**Bevis** Bok.

**eks.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}+2^n}$ Konv. ?

$a_n$ $b_n$

Vi har $\frac{3}{\sqrt{n}+2^n} < \frac{3}{2^n} = 3 \cdot 2^{-n} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Og: $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er geometrisk med $a = 3$ og $r = \frac{1}{2}$.

Så den konvergerer. Dermed konvergerer rekken vår, ved (i) i sammenlikningstesten. $\square$

**Grensesammenlikningstesten (GS-testen)**

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være rekker med positive ledd.
Hvis
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
fins og $0 < L < +\infty$, så enten konvergerer begge rekkene eller divergerer begge rekkene.

Hvis $L = 0$ og $\sum b_n$ konv., så konv. $\sum a_n$ også.

Bevis Velg $P$ og $Q$ slik at $0 < P < L < Q$.

Siden $\frac{a_n}{b_n} \to L$, har vi for store $n$
$$P < \frac{a_n}{b_n} < Q, \quad \text{dvs.} \quad P \cdot b_n < a_n < Q \cdot b_n.$$

Vanlig sml-test:

$\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum Qb_n = Q \cdot \sum b_n$ div, dvs. $\sum b_n$ div.

$\sum a_n$ konv $\Rightarrow \sum P \cdot b_n = P \cdot \sum b_n$ konv., dvs. $\sum b_n$ konv. $\square$