Oppg 1. 2014

Systemet:

$$\begin{aligned} x+3y+2z+2w &= 0\\ 2x+y+2z-3w &= 0\\ x+y+z-w &= 0\\ 2x+y+z-4w &= 0 \end{aligned}$$

på matriseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{utvidet matrise}}$$

$(A x = \vec{b}: (A, \vec{b})$

Red trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2I\\ III-I\\ IV-2I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2\\ 0 & -5 & -2 & -7\\ 0 & -2 & -3 & -3\\ 0 & -5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) De lineært uavhengige søylene i A svarer til pivotsøylene i A, som her er søyle 1, 2, og 3. (setn 4.6.7)

x, y, z: basisvariable, w: fri variabel.

Løsninger:

$$\begin{aligned} x \quad -3w &= 0\\ y \quad + w &= 0\\ z + w &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3w\\ y &= -w\\ z &= -w \end{aligned}$$

generell løsning:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w\\ -w\\ -w\\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorem 4.4.1 i boka:

Hvis siste søyle i (A, b) er pivot: Da har ikke systemet løsninger.

Ellers: { Alle andre søyler pivot: Nøyaktig en løsning.
{ en annen ikke pivot: Har uendelig mange løsninger. ↑ inntreffer her.

b) siden trappeformen ble $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, så er $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{a}_4$

der $\vec{a}_i$ er søylene i A

Bevis: Vi skal finne x, y, z slik at

$$x \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ -1\\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ -1\\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{utvidet matrise:} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

som vi har fått på trappeform, og i trappeformen kan x, y, z leses ut fra siste søyle.

Annet som er verd å huske

$A\vec{x} = \vec{b}$ har unik løsning for alle høyresider $\vec{b}$:
⇕
A har pivot i alle rader og søyler (I_n = trappeformen) (A må være kvadratisk)

$A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for alle høyreside $\vec{b}$:
⇕
A har pivot i alle rader

Vår A her har 0 i siste rad, som derfor ikke er en rad med pivot. Så for vår A finnes det en høyreside $\vec{b}$ s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har løsning

For å finne $\vec{b}$ **slik** at $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har løsning:

Skriv opp:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{trappeform } A} \begin{matrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{matrix}\right) \overset{\substack{\text{inverse radops.}\\ \text{i motsatt rekkefølge}}}{\sim \dots \sim} \left(A, \tilde{\vec{b}}\right)$$

↑ ingen løsning siden pivot i siste søyle.

$A\vec{x} = \vec{b}$ har ingen løsning

Oppg 1 2013

B invers til A : $BA = AB = I_n$

Hvis A $(n \times n)$ så ~~er~~ inversen unik hvis den eksisterer.

a) Når er $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ inverterbar ?

Radreduserer: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix} \overset{\substack{II-3I \\ III-2I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} a=6 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a \neq 6: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Teorem 4.a.12 (Mange ekvivalente utsagn for når A er inverterbar)
en av dem: $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning alle $\vec{b}$.

$\Updownarrow$

A har en pivot i hver rad / søyle.

$a \neq 6$: Da må dermed A være inverterbar

$a = 6$: Ikke inverterbar.

b) Vi ser fra trappeformen for $a=6$ at $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$

$\vec{v}$ egenvektor for A med egenverdi λ: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Oppg 3. 2014

a) $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{7}{6} \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{3})(\lambda - \tfrac{7}{6}) + \tfrac{1}{9}$$

$$= \lambda^2 - \tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}}$$

2 forskjellige egenverdier $\Rightarrow$ det finnes to lineært uavhengige egenvektorer (setn. 4.10.4)

egenvektor for $\lambda_1 = 1$:

$$\lambda_1 I - C = I - C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -\tfrac{1}{2}y$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix}$$

$$y = 2 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

egenvektor for $\lambda_2 = \frac{1}{2}$:

$$\tfrac{1}{2}I - C = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$$

$$y = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Komplekse egenverdier (setn. 4.10.8)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

egenvektor for $\lambda_1 = i$ blir (etter litt regning) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

En egenvektor for λ_2 $(= \bar{\lambda}_1)$ $\underline{\underline{\text{blir } \vec{v}_2 = \bar{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) Hva blir $\lim_{n\to\infty} C^n \vec{w}$ når $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finn x, y s.a. $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{w} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad y = -2$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C^n\vec{w} = C^n\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2C^n\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1^n\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \underbrace{-2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\to 0}$$

$$\to \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}} = \vec{v}_1$$

Oppg 4. 2013: Veldig lik

Oppg. 5 fra 2015

a) Er $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ egenvektor for A_n?

$$A_n\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\ n\\ \vdots\\ n\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n\vec{v}_1$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ egenvektor, egenverdi $\lambda_1 = n$

Anta $\vec{w} \neq 0$ $\quad \vec{w}\cdot\vec{v}_1 = 0$

$$A_n\vec{w} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}\vec{w} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1\cdot\vec{w}\\ \vec{v}_1\cdot\vec{w}\\ \vdots\\ \vec{v}_1\cdot\vec{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{w}$$

$\Rightarrow$ $\vec{w}$ er egenvektor med egenverdi 0.

Siden $\vec{v}_1$ kan utvides til en ortogonal basis av egenvektorer $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ så følger det at $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er egenvektorer alle sammen, med egenverdi 0. $\Rightarrow$ A har 0 som egenverdi, multiplisitet $n-1$

n som egenverdi, multiplisitet 1

b) A_3 har egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, egenverdi 3.

$\vec{v}_2, \vec{v}_3$ må være slik at $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = 0$

$\vec{v}_1\cdot\vec{w}_2 = 0$: $\quad (1,1,1)\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix} = 0 \qquad w_1 + w_2 + w_3 = 0$

feks $w_1 = 1, w_2 = -1, w_3 = 0$

$\Rightarrow$ vi kan velge $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

finn så $\vec{v}_3$ slik at $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = 0$, $\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 = 0$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix}\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3\\ \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&-1&0\end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\ 0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ x\quad y\quad z\end{array} \Rightarrow x = y = -\tfrac{1}{2}z$$

$z = 2 \Rightarrow x = y = -1$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow$ ortogonal basis av egenvektorer.

c) $A_n(a) = \begin{pmatrix}a&&1\\ &\ddots&\\ 1&&a\end{pmatrix} = (a-1)I_n + A$

$\vec{v}$ egenvektor for A:

$$A_n(a)\vec{v} = (a-1)I_n\vec{v} + A\vec{v} = (a-1)\vec{v} + \lambda\vec{v} = (a-1+\lambda)\vec{v}$$

$\Rightarrow$ $a-1+\lambda$ egenverdi for $A_n(a)$

$\Rightarrow$ $a-1+n$ egenverdi med mult. 1 (siden $\lambda_1 = n$ er det for A)

$a-1$ egenverdi med mult $n-1$ (siden $\lambda = 0$ er det for A)