Avslutter 3.6 med et kjeglesnitt som blir en hyperbel:

$$-3x^2+4y^2+6x+32y+49=0$$

$$\underbrace{-3x^2+6x-3}_{-3(x^2-2x+1)} \qquad \underbrace{+4y^2+32y}_{4(y^2+8y+16)}+64 \qquad +49+3-64=0$$

$$-3(x-1)^2+4(y+4)^2=12$$

$$\frac{(y+4)^2}{3}-\frac{(x-1)^2}{4}=1 \iff \frac{(y+4)^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{(x-1)^2}{2^2}=1$$

Vi ser at dette er en hyperbel med sentrum $(1,-4)$

brennvidde $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$

hyperbelen har hulning oppover / nedover

brennpunktene er da $(1,-4)\pm(0,\sqrt{7}) \Rightarrow F_1=(1,-4-\sqrt{7})$

$F_2=(1,-4+\sqrt{7})$

3.7 Grafisk fremstilling av skalarfelt.

Hjelpemidler til å tegne skalarfelt:

1. Regn ut plott nivåkurvene. Nivåkurvene til $f(x,y)$

$$N_c = \{ (x,y) : f(x,y) = c \}$$

Nivåene c kan vi angi selv, eller maskinen kan regne de ut for oss

2. Tegne nok punkter $(x, y, f(x,y))$ i rommet, forbinder plottepunktene med linjer eller flater.

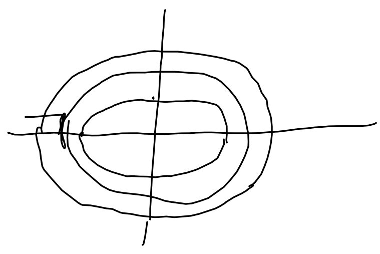
3. Tegne tverrsnitt av funksjonen: snitt med flater som er parallelle med xz-planet eller yz-planet.

Eksempel 3.7.1 $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

nivåkurver: $x^2 + 4y^2 = c \iff \dfrac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} = 1$

Ser at dette er en ellipse med store halvakse $a = \sqrt{c}$

lille halvakse $b = \dfrac{\sqrt{c}}{2}$



plot3(x, 2*cos(...), x.^2)

Tverrsnitt: snitt med xz-planet: $z = x^2$

snitt med yz-planet: $z = 4y^2$ → parabler.

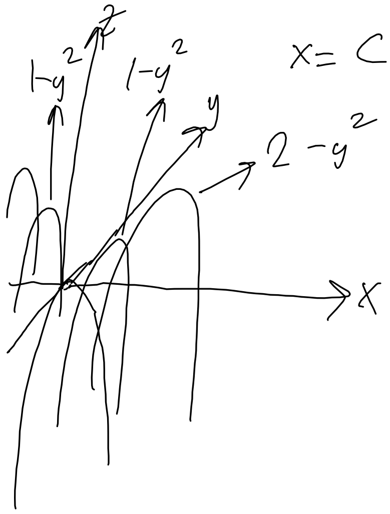
Ekzempel 3.7.2 $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$

nivåkurver: $x^2 - y^2 = c \iff \dfrac{x^2}{(\sqrt{c})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{c})^2} = 1$

Dette blir hyperbler med asymptoter $y = \pm \frac{b}{a} x = \pm x$.

sentrum i origo

Tverrsnitt: $x = 0 \quad z = -y^2$
$x = c \quad z = c^2 - y^2$ } alle er parabler.

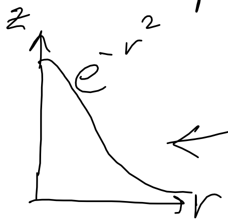


Eksempel 3.7.3

Polarkoordinater kan også være gode hjelpemidler til å tegne en flate.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\qquad r^2 = x^2 + y^2$

La oss se på $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$



$z = e^{-r^2}$ fås ved å dreie denne om z-aksen

3.7.1 Funksjoner i tre variable

nivåflater/
nivåkurver: $N_c = \{ (x,y,z) \mid f(x,y,z) = c \}$

En måte å visualisere på: Tegne tverrsnitt der vi bruker andre koordinatsystemer.

sylinderkoordinater (r, θ, z)

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ $\Big\}\ x^2+y^2=r^2$
$z = z$

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^{-z}$
$= r^2 e^{-z}$

kulekoordinater (ρ, θ, ϕ)

$x = \rho\cos\theta\sin\phi$
$y = \rho\sin\theta\sin\phi$ $\Big\}\ x^2+y^2+z^2=\rho^2$
$z = \rho\cos\phi$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
$= \rho^2$

Nivåflater når vi bruker kulekoord.: er kuleskall, $\rho^2 = c$.

Nivåflater generelt:

Def. 3.7.7 Nivåflate for en funksjon f definert på $A \subset \mathbb{R}^n$ er (med nivå c)

$N_c : \{ \vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c \}$

Setning 3.7.8: Anta at f er deriverbar i $\vec{a}$.
Hvis $f(\vec{a}) = c$, så står gradienten $\nabla f(\vec{a})$ normalt på nivåflaten N_c i følgende forstand:
Hvis $\vec{r}$ er en deriverbar kurve på nivåflaten (dvs $f(\vec{r}(t)) = c$, alltid)
og $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$,
så gjelder at $\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0$

<u>Bevis</u>: $u(t) = f(\vec{r}(t))$

Kjerneregel: $u'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$

$u'(t) = 0$ siden $f(\vec{r}(t))$ er konstant lik c

Tangentplanet til $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$
er definert ved $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$
normalvektoren til denne er gitt ved

$$\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j} + \vec{k}.$$

Hvorfor?
Vi definerer $g(x,y,z) = z - f(x,y)$
gradienten til g er $\nabla g(x_0,y_0,\dots) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j} + \vec{k}$,
som er lik $\vec{n}$, slik vi definert den.
Videre er flaten $z = f(x,y)$ en nivåflate for g (N_0),
derfor er $\vec{n}$ normal på flaten.

Tangentplanet slik vi definerte det, står normalt på $\vec{n}$:

$$0 = \vec{n} \cdot ((x,y,z) - (x_0,y_0,f(x_0,y_0))) = \vec{n} \cdot ((x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)))$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z - f(x_0,y_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$