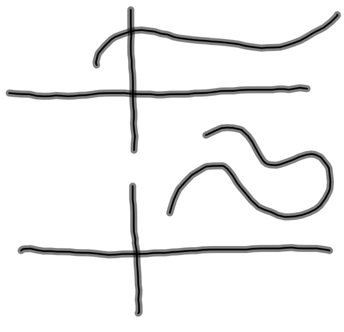
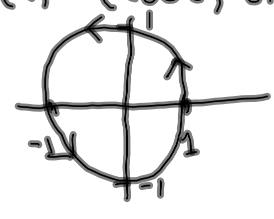
Parametriserte kurver (3.1).



$(x, f(x))$

$(x_1(t), x_2(t))$

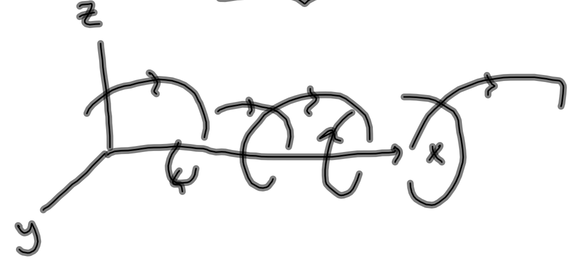
Eks: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



$r_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$

$t \in [-1, 1]$.

Eksempel: $r(t)=(t, \underbrace{\cos t, \sin t})$, $t\in[0,\infty)$.

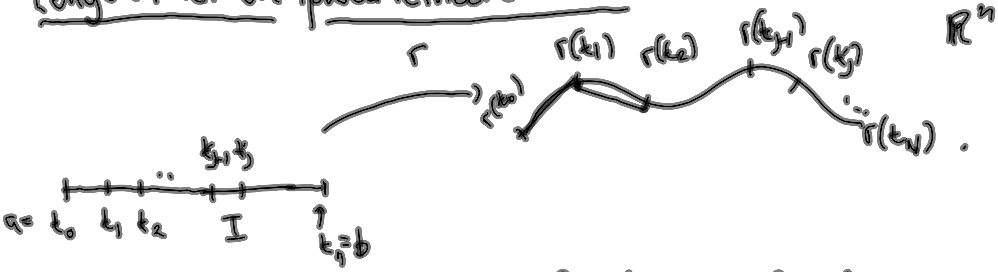


DEF 3.1.1. En parametrisert kurve er en kontinuerlig avbildning $r: I \to \mathbb{R}^n$ der $I\subset\mathbb{R}$ er et intervall.

$$r(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

P.K. kalles også vektorvaluerte funksjoner.

Lengden til en parametrisert kurve



Naturlig forsøk på å tilnærme lengden til $l=r(I)$:

$$\sum_{j=1}^{N} |r(t_j)-r(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_1(t_j)-x_1(t_{j-1}))^2 + \dots (x_n(t_j)-x_n(t_{j-1}))^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}(t_j-t_{j-1})\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1(t_j)-x_1(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right)^2+\dots+\left(\frac{x_n(t_j)-x_n(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\right)^2}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{N}(t_j-t_{j-1})\cdot\sqrt{(x_1'(t_{j-1}))^2+\dots+(x_n'(t_{j-1}))^2}$$

(dersom r er deriverbar og t_j-t_{j-1} er veldig liten).

Kjenner igjen dette som en Riemann sum for integralet $\int_a^b |r'(t)|\,dt$.

DEF 3.1.2: Anta at funksjonene $x_1(t), \dots, x_n(t)$ er kontinuerlig deriverbare på et intervall $[a,b]$. Da er <u>buelengden</u> til kurven $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ definert som

$$L(a,b) := \int_a^b |r'(t)|\,dt .$$

<u>Eks:</u> $r(t) = (t, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$L(0,2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\cdot\pi .$$

<u>Merk:</u> Buelengden er uavhengig av parametriseringen til kurven.

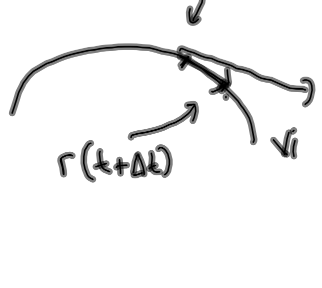
Hastighet: Lengden til en kurve $r(t)$ er

$$s(t) = L(a,t) = \int_a^t |r'(t)|\,dt .$$

Farten blir $v(t) = s'(t)$

$$= |r'(t)| .$$

Analysens fundamentalteorem.



$r'(t)$? $\dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$

Ser at når $\Delta t \to 0$ så nærmer vi oss tangenten til kurven i $r(t)$.

jan 24-14:38

DEF 3.1.3: Anta at $x_1(t), \dots, x_n(t)$ er deriverbare i t. Da sier vi at $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ er deriverbar i t, og den deriverte er

$$V(t) = r'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Vi kaller $V(t)$ for hastigheten til gjenstanden i t.

Merk: Hastigheten er en vektor, mens $v(t) = |V(t)|$ er farten.

V

v

jan 24-14:51

Eks: Finn hastigheten og farten til

$$r(t) = (t\cdot \cos t,\ t\cdot \sin t).$$

Hastighet: $v(t) = (\cos t - t\cdot \sin t,\ \sin t + t\cdot \cos t)$

Fart: $v(t) = |v(t)| = \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t}$

$$= \sqrt{1+t^2}.$$

Setning 3.1.4: Dersom r_1 og r_2 er to parametriserte kurver gjelder

(i) $(r_1(t) + r_2(t))' = r_1'(t) + r_2'(t)$,

(ii) $(r_1(t) - r_2(t))' = r_1'(t) - r_2'(t)$,

(iii) $(r_1(t)\cdot r_2(t))' = r_1'(t)\cdot r_2(t) + r_1(t)\cdot r_2'(t)$,

(iv) $(r_1(t)\times r_2(t))' = r_1'(t)\times r_2(t) + r_1(t)\times r_2'(t)$

(v) dersom $r(t)$ er en p.k. og $u(t)$ er en funksjon (deriverbar)

$$(u(t)\cdot r(t))' = u'(t)\cdot r(t) + u(t)\cdot r'(t).$$

Bevis: Gjør (v) som eksempel:

$$(u(t)\cdot r(t))' = (\underbrace{u(t)\cdot x_1(t)}, u(t)\cdot x_2(t), \dots, u(t)\cdot x_n(t))'$$

$$= (u'(t)\cdot x_1(t) + u(t)\cdot x_1'(t), \dots\dots, u'(t)\cdot x_n(t) + u(t)\cdot x_n'(t))$$

$$= u'(t)\cdot(x_1(t) \quad x_n(t)) + u(t)\cdot(x_1'(t) \quad x_n'(t)$$

jan 24-14:57

$r(t)$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$

Normen til $r(t) = \sqrt{r(t) \cdot r(t)}$

$$= \sqrt{x_1(t)^2 + \dots + x_n(t)^2}$$

Korollar: Dersom $|r(t)|$ er konstant, så står $r(t)$ ortogonalt på $v(t) = r'(t)$.

Bevis: $r(t) \cdot r(t) = \text{konstant}$.

$$0 = (r(t)\cdot r(t))' \underset{(iii)}{=} 2 \cdot r(t) \cdot r'(t). \quad \blacksquare$$

Merk:

Den dobbeltderiverte til $r(t)$ er

$$a(t) = v'(t) = (x_1''(t), \dots, x_n''(t)),$$

kaller vi akslerasjonen til gjenstanden $r(t)$.

Akslerasjonen beskriver hvordan hastigheten endrer seg både i norm (lengde) og retning.

Merk: akslerasjonen måler noe mer enn bare hvordan farten forandrer seg.

Eks: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$v(t) = r'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Fart: $\upsilon(t) = |v(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$.

$\upsilon'(t) = 0$.

$$a(t) = v'(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

Dekomposisjon av akslerasjonen:

La $T(t)$ betegne enhets tangent vektoren

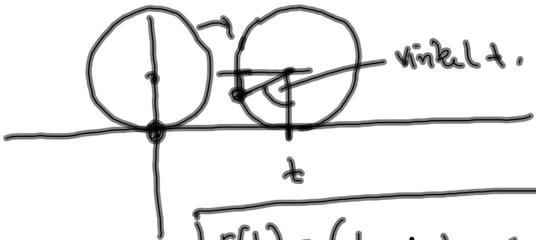
$$T(t) = \frac{v(t)}{\upsilon(t)}$$

Skriv om: $v(t) = \upsilon(t) \cdot T(t)$.

Setning: $$\boxed{a(t) = \upsilon'(t) \cdot T(t) + \upsilon(t) T'(t)}$$

Står normalt på tangent vektoren siden $T(t)$ har konstant lengde 1.

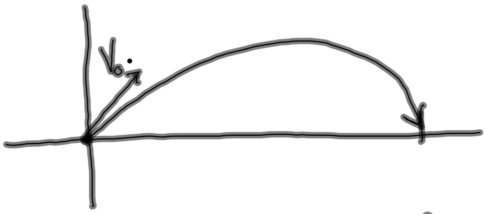
<u>Eks:</u> Beskriv bevegelsen til et fast punkt på et hjul av radius 1 som ruller.



$$\boxed{r(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)}$$

Kalles sykloide.

<u>Eks:</u> Beskriv et prosjektil som skytes ut fra et bestem punkt med en bestemt utgangshastighet.



F = kraften som virker på legemet.
a = akselerasjonen

Newton: $F = m \cdot a$

Krefter som virker: tyngdekraft $= -m \cdot g \cdot \vec{j}$
luftmotstand $= -K \cdot v$

Får $m \cdot a(t) = -m \cdot g \cdot \vec{j} - K \cdot v(t)$

$$a(t) = -g \cdot \vec{j} - \frac{K}{m} \cdot v(t).$$

Får $x''(t) = -\frac{K}{m} \cdot x'(t)$

$$y''(t) = -g - \frac{K}{m} \cdot y'(t).$$