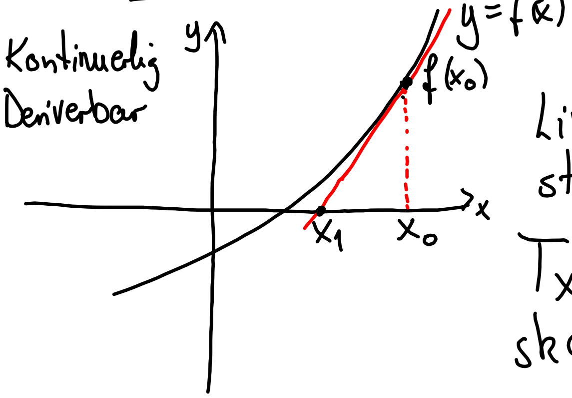
## Newtons metode (i en variabel)

Kontinuerlig
Deriverbar




Skal finne x slik at $f(x) = 0$

Lineariserer funksjonen i et startpunkt $x_0$

$$T_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

skjæring med x-aksen:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

Ettpunktsformel:

$(x_0, f(x_0))$, st.tall: $f'(x_0)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Følge $x_0, x_1, x_2, \ldots \longrightarrow x$ (Håper at den konvergerer)

$x$ er nullpktet. Huis $x_{i+1} = x_i = x$

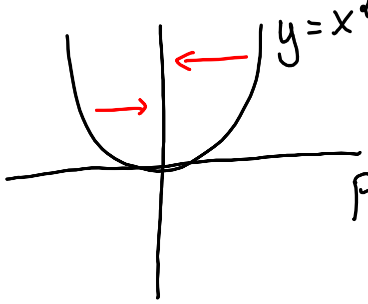
$$\Rightarrow \quad x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = 0}}$$

Kall nullpkt $a$, $f(a) = 0$

Vesentlig forutsetning er at $f'(a) \neq 0$

Nullpunktsiterasjon

# Omvendte funksjoner (Inverse funksjoner)



$y = x^2$

$A \subset \mathbb{R}^2$ (parabelen)

$p: A \to \mathbb{R}$

$(x, x^2) \mapsto x^2$

Definere invers funksjon: Går ikke fordi funksjonen ikke er 1-1 (injektiv, monomorfi)

$U \subseteq A$ være $U = A \cap \{x \geq 0\}$

Invers funksjon $x = \sqrt{y}$

$\exists!$ det eksisterer entydig

## Utvide til $\mathbb{R}^n$

Def. (injektivitet)

En funksjon $F: D_F \to V_F$ er injektiv dersom $\forall \bar{y} \in V_F$, $\exists! \bar{x} \in D_F$ slik at $F(\bar{x}) = \bar{y}$

Resultat: Injektive funksjoner tillater omvendte funksjoner

Omvendte funksjonsteoremet (5.7.2)

$\bar{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^m$
åpen

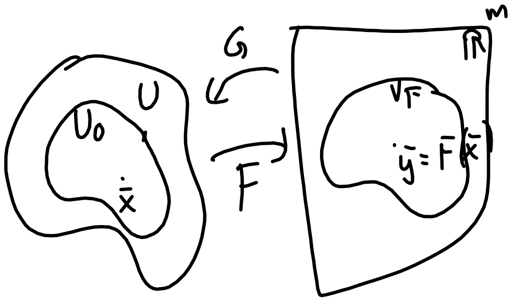
$F : U \to \mathbb{R}^m$
kontinuerlige partiellderiverte
$(C^1)$

$F'(\bar{x})$ inverterbar

Da $\exists\, \bar{x} \in U_0 \subseteq U$ s.a $F|_{U_0}$ er injektiv
$D_F$
omegn

og
• Verdimengden til $F$ er en omegn om $\bar{y} = F(\bar{x})$
$V_F$

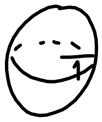
• $G = F^{-1} : V_F \to U_0$ er deriverbar
(inverse fn.)
i $\bar{y}$ med $G'(\bar{y}) = F'(\bar{x})^{-1}$




$\bar{x} = G(F(\bar{x}))$

# Implisitt funksjonsteorem

Eks. $x^2+y^2+z^2=1$ z er implisitt gitt som en funksjon i x,y



$$z^2 = 1-x^2-y^2$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Eks 1.

$$e^{x+y}+y-1=0$$

Uttrykke y som en funksjon av x.

Under forutsetninger/begrensninger eksisterer en slik funksjon

## Implisitt funksjonsteorem (5.7.4)

$(x_1,\dots,x_m,y)=(\bar{x},y)\in U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ åpen

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

kont. part. der. $(C^1)$

$f(\bar{x},y)=0$

Dersom $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},y)\neq 0$ så finnes $\bar{x}_0\in U_0\subseteq\mathbb{R}^m$ slik at $\forall\,\bar{x}\in U_0$ $\exists!\, g(\bar{x})\in\mathbb{R}$ slik at

$$f(\bar{x},g(\bar{x}))=0$$

Funksjon $g: U_0\to\mathbb{R}$ er deriverbar, $y=g(\bar{x})$ og

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x},g(\bar{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\underbrace{g(\bar{x})}_{y})}$$

Eks 1. fortsetter:

$$f(x,y)=e^{x+y}+y-1=0$$

$\Rightarrow \exists\; y=g(x)$ slik at $f(x,g(x))=0$

Spesielt: $\nvdash$ $(0,0)$, $e^{0+0}+0-1=0$

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Utregning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y},\ \Big|_{(0,0)}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}+1,\ \Big|_{(0,0)}=2$$

Litt om bevis

- $f(\bar{x}, g(\bar{x})) = 0$

  $\frac{\partial}{\partial x_j} : f(\bar{x}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{g(\bar{x})}}) = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}, g(\bar{x})) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, g(\bar{x}))\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0$

  gir formelen.

- Lage ny funksjon: $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$

  $$F(x_1, \ldots, x_m, y) = (x_1, \ldots, x_m, f(\bar{x}, y))$$

  Bruke omvendt funksjonsteorem: $G : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$

  $$G(x_1, \ldots x_m, z) = (x_1, \ldots, x_m, h(\bar{x}, z))$$

  1) $F(G(\bar{x}, z)) = F(\bar{x}, h(\bar{x}, z)) = (\bar{x}, f(\bar{x}, h(\bar{x}, z)))$

  2) $F(G(\bar{x}, z)) = (\bar{x}, z)$

  $$\Rightarrow \quad z = f(\bar{x}, h(\bar{x}, z))$$

  Sett $z = 0$ !!!

  $0 = f(\bar{x}, h(\bar{x}, 0))$ , sett $g(\bar{x}) = h(\bar{x}, 0)$