LH 5.2 Kompletthet av $\mathbb{R}^m$

Følge $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^m$

delfølger $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$

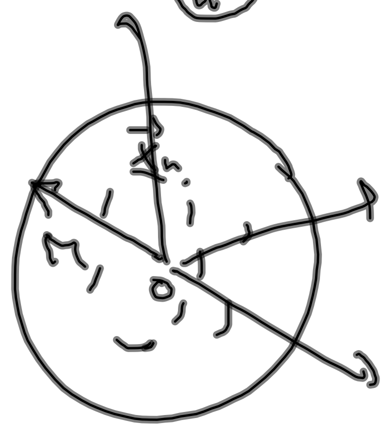
- $\{\vec{x}_n\}_n$ konvergent

  $\vec{x}_n \longrightarrow \vec{a} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$

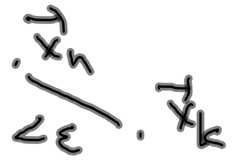
  når $n \to \infty$

- $\{\vec{x}_n\}_n$ begrenset

  $\exists M \; \forall_n \; |\vec{x}_n| \leq M$



- $\{\vec{x}_n\}_n$ Cauchy



$n, m \geq N$

Vet at

- en delfølge av en konvergent følge er konvergent

- Bolzano–Weierstraß:
  Hver begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

- hver konvergent følge er Cauchy

Teorem 5.2.6

Enhver Cauchy-følge i $\mathbb{R}^m$ er konvergent.

Bevis La $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ være Cauchy.

(1) $\{\vec{x}_n\}_n$ er begrenset

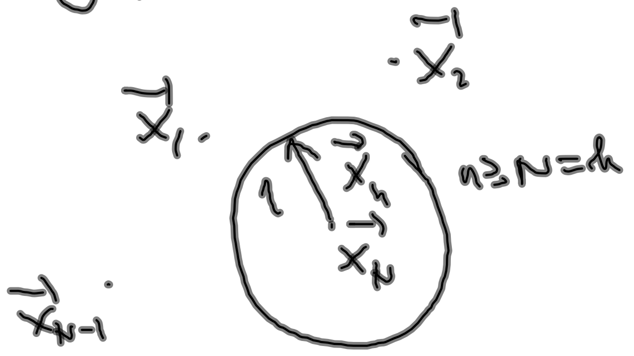
(2) $\{\vec{x}_n\}_n$ har en konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}_k$.

(3) En Cauchy-følge med en konvergent delfølge er konvergent.

---

(1) Bruk Cauchy-egenskapen for $\varepsilon = 1$:

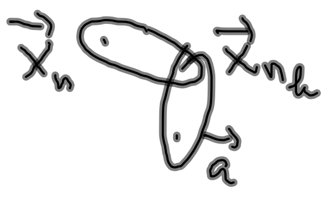
$$\exists N \ \forall k, n \geq N \quad |\vec{x}_k - \vec{x}_n| < 1.$$



(2) Følger fra B.-W.' teorem

(3) $\{\vec{x}_n\}_n$ Cauchy, $\vec{x}_{n_k} \longrightarrow \vec{a}$ når $k \to \infty$

$$\Longrightarrow \vec{x}_n \longrightarrow \vec{a} \text{ når } n \to \infty.$$



Korollar ($\mathbb{R}^m$ er komplett):

En følge $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy

$\Longleftrightarrow$ følgen er konvergent.

LH 5.3 Konsekvenser av komplethet

Def $A \subseteq \mathbb{R}^m$

En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $\vec{u} \in A$ hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\vec{u}, \varepsilon))$ slik at for hver $\vec{v} \in A$ med $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$ er $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < \varepsilon$.

En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig på A hvis

$\delta = \delta(\vec{u}, \vec{\varepsilon})$

$\forall \vec{u} \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\forall \vec{v} \in A$ med $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$

er $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < \varepsilon$.

En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuerlig hvis

$\delta = \delta(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

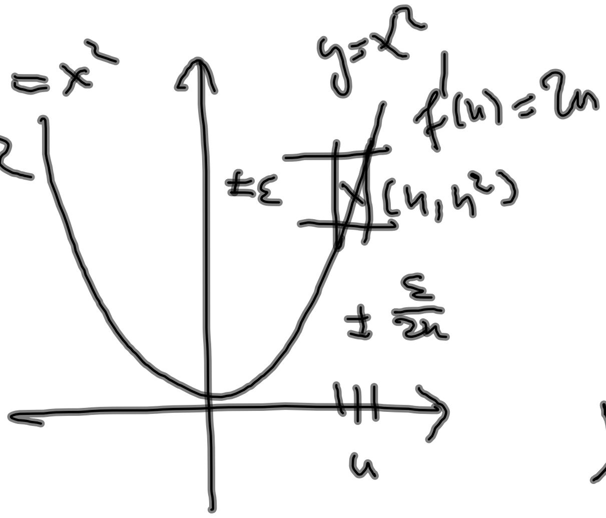
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in A$ med $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$

er $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < \varepsilon$.

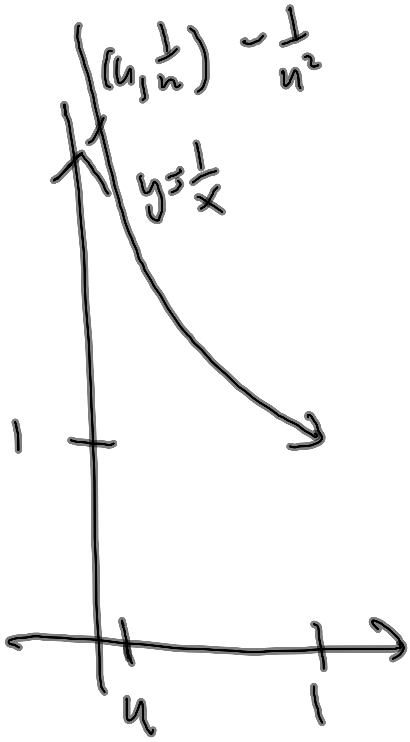
Eks på $f: A \to \mathbb{R}$ som er kont. men ikke uniformt kont:

$f(x) = x^2$

$x \in \mathbb{R}$



$f: (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$



<u>Teorem</u> La $K \subset \mathbb{R}^m$ være <u>lukket</u> og <u>begrenset</u>. Da er $f: K \to \mathbb{R}$ kontinuerlig hvis og bare hvis f er <u>uniformt kontinuerlig</u>

<u>Korollar</u> Hvis $K \subseteq \mathbb{R}^m$ er lukket, begrenset og Jordan-målbar og $f: K \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er f integrerbar.

<u>Bevis</u> Antar at f er kontinuerlig, men ikke uniformt kontinuerlig på K.
At f ikke er unif. kont. betyr at

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$$
$$\exists \vec{u}, \vec{v} \in K \text{ med } |\vec{u} - \vec{v}| < \delta$$
$$\text{slik at } |f(\vec{u}) - f(\vec{v})| \geq \varepsilon.$$

Fiksér en slik $\varepsilon > 0$.

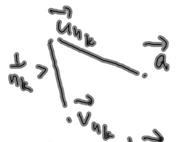
Bruker dette for $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.
Kan velge $\vec{u}_n, \vec{v}_n \in K$ med $|\vec{u}_n - \vec{v}_n| < \frac{1}{n}$
men $|f(\vec{u}_n) - f(\vec{v}_n)| \geq \varepsilon$.

Siden K er <u>begrenset</u> er $\{\vec{u}_n\}_n$ begrenset.
~~Ved B-W.~~ finnes en konvergent delfølge

$$\vec{u}_{n_1}, \vec{u}_{n_2}, \dots, \vec{u}_{n_k} \longrightarrow \vec{a} \in \mathbb{R}^m$$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ når $k \to \infty$

Siden hver $\vec{u}_{n_k} \in K$ og K er <u>lukket</u>
må $\vec{u} \in K$, (der f er kont.).



Ved trekantulikheten er

$$|\vec{v}_{n_k} - \vec{a}| \leq |\vec{u}_{n_k} - \vec{v}_{n_k}| + |\vec{u}_{n_k} - \vec{a}|$$
$$< \frac{1}{n_k} + |\vec{u}_{n_k} - \vec{a}|$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{når } k \to \infty.$$

Så $\vec{v}_{n_k} \longrightarrow \vec{a}$ når $k \to \infty$.

Ved ~~kontinuitet~~ av f i $\vec{a} \in K$ ~~er~~ vil

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{u}_{n_k}) \longrightarrow f(\vec{a}) \\ f(\vec{v}_{n_k}) \longrightarrow f(\vec{a}) \end{array} \right. \quad \text{når } k \to \infty$$

Så
$$0 < \varepsilon \leq |f(\vec{u}_{n_k}) - f(\vec{v}_{n_k})|$$
$$\longrightarrow |f(\vec{a}) - f(\vec{a})| = 0$$
når $k \to \infty$.

<u>Umulig</u> $\square$

Les om derivasjon under integraltegnet

$f(x,t)$

Teorem 5.3.3

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,t)\,dt$$

vs. $$\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$$

LH 5.4 Iterasjon av funksjoner

$$\vec{r}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{byttedyr} \\ \leftarrow \text{rovdyr} \end{matrix} \qquad \vec{r}_{n+1} = A\vec{r}_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}$$

lineær modell

$$x_{n+1} = ax_n - by_n \qquad a, d \sim 1$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n \qquad b, c > 0$$

$$AM = MD$$

$$\vec{r}_n = M\vec{c}_n \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}_{n+1} = D\vec{c}_n$$

$$\boxed{\vec{r}_n = MD^n\vec{c}_0}$$

<u>Eks</u>

$$x_{n+1} = 1.01\,x_n - 0.03\,y_n$$
$$y_{n+1} = 0.001\,x_n + 0.98\,y_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.03 \\ 0.001 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$AM = MD$$

$$x_n =$$

$$\vec{r}_n = MD^n\vec{c}_0 = \begin{bmatrix} 929.7\,(1{,}009)^n + 70.3\,(0.9810)^n \\ 32.09\,(1.009)^n + 67.9\,(0.9810)^n \end{bmatrix}$$

$$= y_n$$

ikkelineær modell

$$x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n \qquad a, d \sim 1$$
$$\qquad b, c > 0$$

$$y_{n+1} = c x_n y_n + d y_n$$

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy + dy \end{pmatrix} \qquad \vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

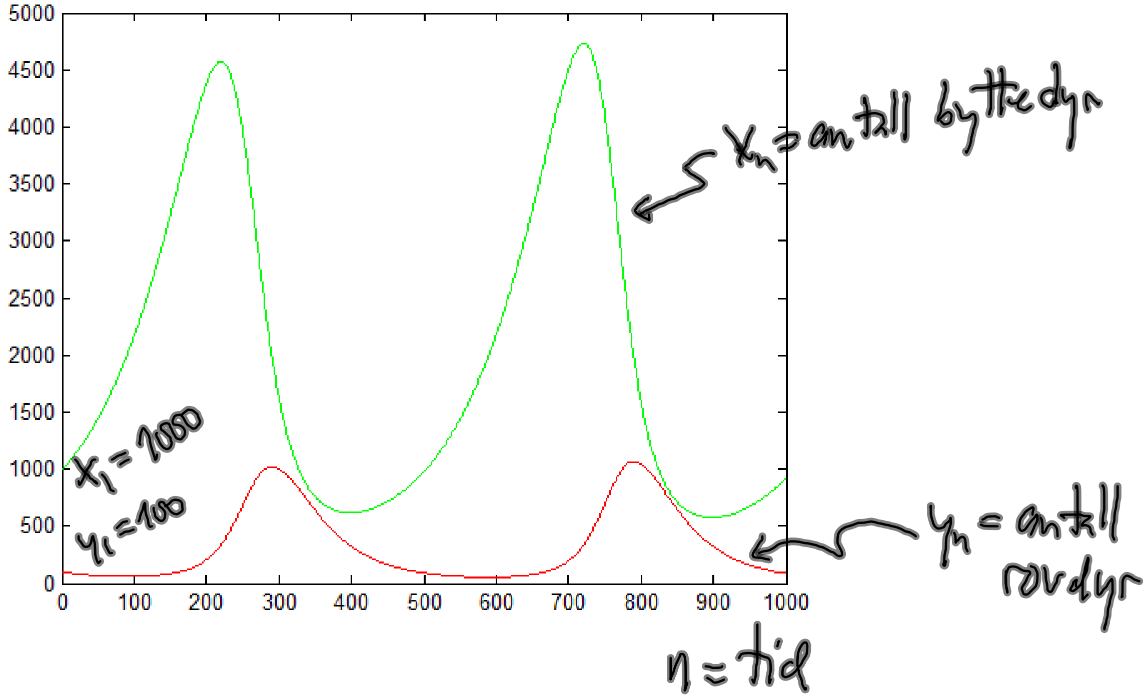
$x_1 = 1000$
$y_1 = 100$

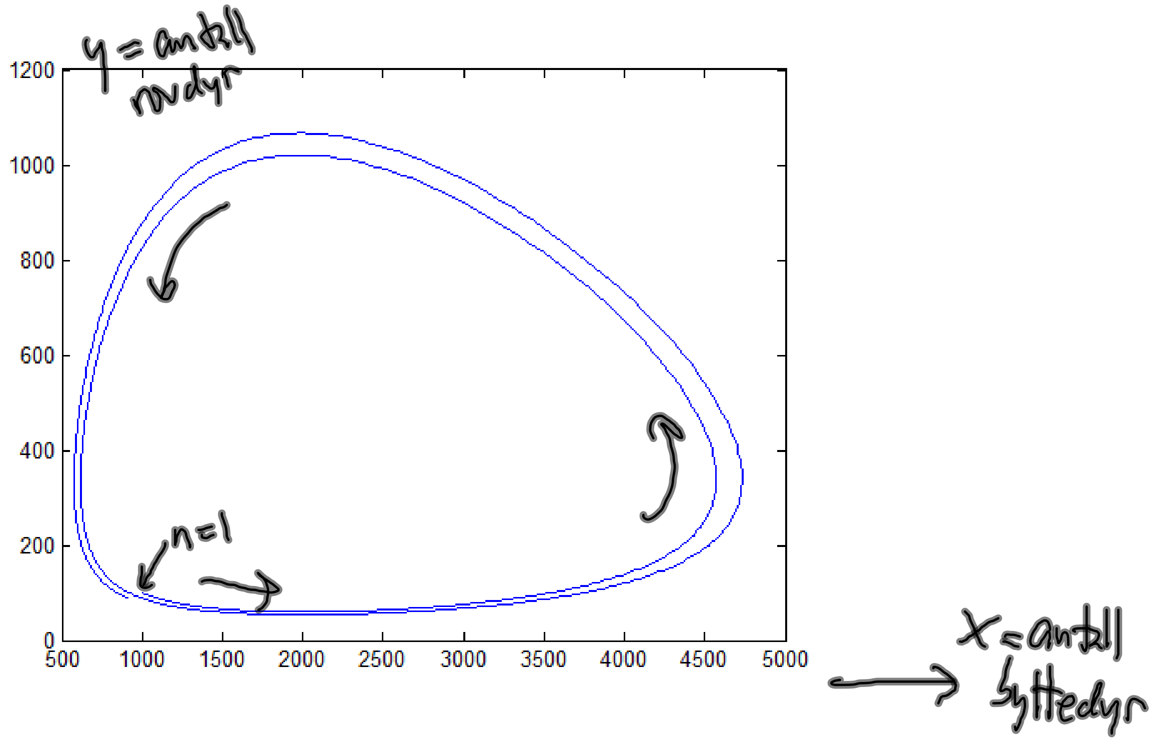
$a = 1.01 \quad b = 3 \cdot 10^{-5}$

$c = 10^{-5} \quad d = 0.98$

$$\begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix} = ?$$

Den lineære modellen tilnærmer denne ikkelineære modellen når $x \approx 1000$, $y \approx 100$.


5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
$x_1 = 1000$
$y_1 = 100$
x_n = antall byttedyr
y_n = antall rovdyr
n = tid


y = antall rovdyr
1200
1000
800
600
400
200
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
n=1
x = antall byttedyr