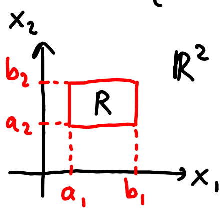
Teori for multiple integraler (fra 6.1 og 6.9 bl.a.)

Rektangler i $\mathbb{R}^n$: Mengder R på formen

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\}$$



$$|R| = \text{volum av } R \stackrel{\text{def}}{=} (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

Partisjon Π av R i delrektangler $R_1, \dots, R_k$ ved å dele intervallene på hver akse som vanlige partisjoner.

$f: R \to \mathbb{R}$ begrenset funksjon

$$m_j = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in R_j\}$$
$$M_j = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in R_j\} \qquad \text{for } j = 1, \dots, k$$

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} m_i |R_i| \qquad \underline{\text{nedre trappesum}}$$

$$\emptyset(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} M_i |R_i| \qquad \underline{\text{øvre} \quad \text{— " —}}$$

Utplukk $\mathcal{U}$ for Π: Et punkt $\vec{c}_i \in R_i$ for hver i.

$$R(\Pi, \mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{k} f(\vec{c}_i) \cdot |R_i| \qquad \underline{\text{Riemannsum}} \text{ for } \Pi \text{ og } \mathcal{U}$$

Definisjon (6.1.1. og 6.1.9 med litt til)

$$\overline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \inf\{\emptyset(\Pi) \mid \Pi \text{ partisjon av } R\}$$

$$\underline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \sup\{N(\Pi) \mid \Pi \text{ — " — }\}$$

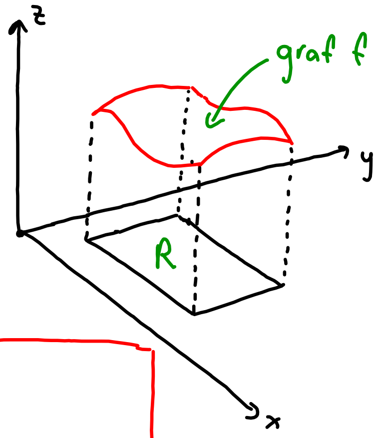
Er disse like, kalles f <u>integrerbar</u> på R. Skriver da begge som

$$\int \cdots \int_R f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

Tolkning i tilfellet $n = 2$ $(\mathbb{R}^2)$:
Hvis $f(x,y) \geq 0$ på R, er

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

volumet under grafen til f på R.



Teorem 6.1.5 (generalisert)

$R \subseteq \mathbb{R}^n$ rektangel og $f: R \to \mathbb{R}$ kontinuerlig
$\Rightarrow$ f integrerbar på R.

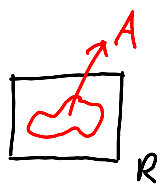
Teorem 6.1.6

$\{\Pi_m\}_{m=1}^{\infty}$ følge av partisjoner av rektangel $R \subseteq \mathbb{R}^n$
slik at maskevidden $|\Pi_m| \to 0$ når $m \to \infty$
U_m atplukk for Π_m for hver m
For alle kontinuerlige $f: R \to \mathbb{R}$ er da

$$\int \cdots \int_R f(\vec{x})\,dx_1 \cdots dx_n = \lim_{m\to\infty} R(\Pi_m, U_m)$$

Multiple integraler over begrensede områder

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være begrenset
Velg rektangel R slik at $A \subseteq R$



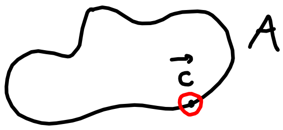
$$\int \cdots \int_A f(\vec{x})\,d\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \int \cdots \int_R f_A(\vec{x})\,d\vec{x}$$

der $f_A(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{hvis } \vec{x} \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

(hvis integralet til høyre fins.)
Vi sier at f er integrerbar på A hvis f_A er integrerbar på R

Hva skal til for at f_A er integrerbar på R?

- **Randen** ∂A til A består av alle punkter $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ slik at enhver kule $B(\vec{c}, r)$ om $\vec{c}$ inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er det.



- En begrenset mengde $B \subseteq \mathbb{R}^n$ har **innhold 0** hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins endelig mange rektangler $R_1, \ldots, R_m \subseteq \mathbb{R}^n$ slik at $B \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_m$ og

$$|R_1| + |R_2| + \ldots + |R_m| < \varepsilon$$

- En begrenset mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles **Jordan-målbar** hvis funksjonen 1_A (1 på mengden A og 0 utenfor) er integrerbar på A.

Teorem 6.6.3 (analogier i høyere dimensjoner)

En begrenset mengde $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er Jordan-målbar hviss ∂A har innhold 0.

Teorem 6.6.6 (analogier i høyere dimensjoner)

Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket (dvs. inneholder randen sin) og Jordan-målbar, så er enhver kontinuerlig funksjon

$$f : A \to \mathbb{R}$$

integrerbar på A. (Dette er typisk oppfylt i oppgavene våre.)

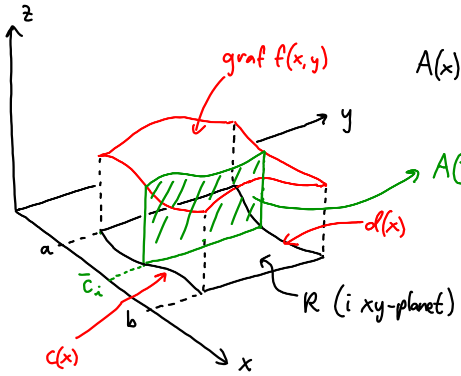
Hvordan beregne dobbeltintegraler

Gitt et integral

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{over et område } R \text{ i } xy\text{-planet.}$$

1. Få oversikt over integrasjonsområdet R. Tegn figur!
2. Velg et koordinatsystem u, v slik at du kan beskrive R ved
   $$u \in [a,b] \quad , \quad v \in [c(u), d(u)]$$
   (evt. åpne intervallgrenser), med $c(u)$ og $d(u)$ kontinuerlige funksjoner. Går ikke dette, så prøv å dele R opp.
3. Regn ut Jacobideterminanten
   $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (\text{uttrykt ved } u \text{ og } v)$$
4. Dobbeltintegralet er nå lik
   $$\int_a^b \left[\int_{c(u)}^{d(u)} f(\vec{T}(u,v)) \cdot |J|\,dv \right] du$$
   der $f(\vec{T}(u,v))$ betyr at (u,v)-uttrykk skal settes inn for x og y.

Hvorfor fungerer dette? (Ser nå kun på standardkoordinater x, y)



$A(x)$: Tverrsnittarealet i x

Deler $[a,b]$ inn i n delintervaller med lengder Δx_i
$\bar{c}_i \in$ delintervall i

Beskrivelse R : $\begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [c(x), d(x)] \end{cases}$

Volumet V under grafen til $f(x,y)$ vil da oppfylle

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i$$

Dette er en Riemannsum for $A(x)$ på $[a,b]$, dvs.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad (\text{når maskevidden} \to 0)$$

Men $\quad A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \qquad$ (x holdes fast i integrasjonen)

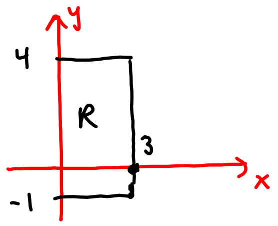
Dermed $\quad V = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$

Annet koordinatsystem: $|J|$ er forstørrelsesfaktor. $\square$

eks. 1 Finne $\iint_R (4x^2y + 2xy)\,dx\,dy$

der R er gitt ved $x \in [0,3]$, $y \in [-1,4]$

Løsn.



$$\iint_R (4x^2y + 2xy)\,dx\,dy = \int_0^3 \left[\int_{-1}^{4} (4x^2y + 2xy)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[2x^2y^2 + xy^2 \right]_{y=-1}^{y=4} dx = \int_0^3 \left[32x^2 + 16x - (2x^2 + x) \right] dx$$

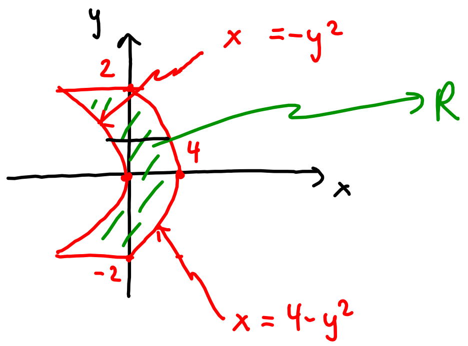
$$= \int_0^3 (30x^2 + 15x)\,dx = \left[10x^3 + \frac{15}{2}x^2 \right]_0^3 = \text{etc.} \qquad \square$$

eks. 2 Finne $\iint_R 2xy^2\,dx\,dy$

der R er området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av de fire kurvene

$x = -y^2$, $x = 4 - y^2$, $y = 2$ og $y = -2$.

Løsn.



Beskrivelse av R:

$$\begin{cases} y \in [-2, 2] \\ x \in [-y^2, 4 - y^2] \end{cases}$$

$$\iint_R 2xy^2\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} \left[\int_{-y^2}^{4-y^2} 2xy^2\,dx \right] dy$$

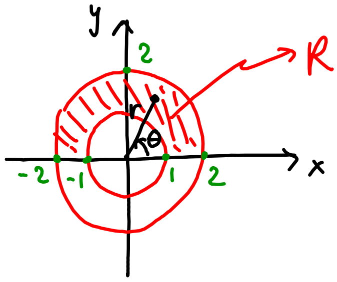
$$= \int_{-2}^{2} \left[x^2y^2 \right]_{x=-y^2}^{x=4-y^2} dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[(4-y^2)^2y^2 - (-y^2)^2y^2 \right] dy = \text{etc.} \qquad \square$$

<u>eks. 3</u> Finne $\iint_R 15x^2y\,dx\,dy$

der R er det lukkede området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av sirkelen $x^2+y^2=4$, sirkelen $x^2+y^2=1$ og x-aksen, for $y \geq 0$.

<u>Løsn.</u>



Polarkoordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Beskrivelse av R:

$$\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ r \in [1,2] \end{cases}$$

Jacobideterminanten:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} = r.$$

$$\iint_R 15x^2y\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left[\int_1^2 15(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)\cdot|J|\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\int_1^2 15r^3\sin\theta\cos^2\theta\cdot r\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[15\cdot\frac{1}{5}r^5\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right]_{r=1}^{r=2}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[96\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta\right]d\theta$$

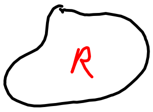
$$= \int_0^{\pi} 93\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Substitusjon:} \\ u = \cos\theta \\ \frac{du}{d\theta} = -\sin\theta \\ du = -\sin\theta\,d\theta \end{array}}$$

$$= \left[-31\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = 31-(-31) = \underline{\underline{62}}$$

Definisjon (Areal, masse og massemiddelpunkt i planet)

La $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være en begrenset mengde.



- $\text{Areal}(R) = \iint_R 1 \, dx \, dy$

- Hvis $f(x,y)$ er kontinuerlig og positiv på R, og vi tolker $f(x,y)$ som massetettheten til R, så

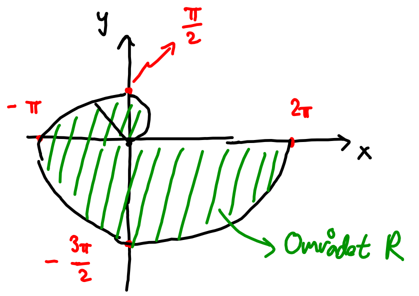
$$\text{Masse}(R) = \iint_R f(x,y) \, dx \, dy$$

- Massemiddelpunktet til R: $(\bar{x}, \bar{y})$ der

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{\text{Masse}(R)} \cdot \iint_R x \cdot f(x,y) \, dx \, dy \\ \bar{y} = \dfrac{1}{\text{Masse}(R)} \cdot \iint_R y \cdot f(x,y) \, dx \, dy \end{cases}$$

eks. Finn arealet av det lukkede området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av polarkurven $r = \theta$ for $\theta \in [0, 2\pi]$ og den positive delen av x-aksen.

Løsn.



Beskrivelse av R i polarkoordinater:

$$\begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, \theta] \end{cases} \qquad J = r$$

Så
$$A = \iint_R 1 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\theta} 1 \cdot |J| \, dr \right] d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\theta} 1 \cdot r \, dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\theta^2 - 0 \right) d\theta = \left[\tfrac{1}{6}\theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi^3}}$$