Seksjon 3.7:

Eksempel 3.7.10:

$f(x,y) = x^3 y^2$. Hva er tangentplanet til f i ~~punktet~~ i $(2,-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y \qquad f(2,-1) = 8$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 12 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -16$

Tangentplan: $z = f(2,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)(y+1)$

$$\underline{\underline{z = 8 + 12(x-2) - 16(y+1).}}$$

normalvektoren til flaten i $(2,-1)$ var gitt ved

$\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)\vec{j} + \vec{k} = \underline{\underline{-12\vec{i} + 16\vec{j} + \vec{k}}}$

Seksjon 3.8 Grafisk fremstilling av vektorfelt.

i to dimensjoner:

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (u,v)$

quiver(X, y, u, v)

i tre dimensjoner:

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to (u,v,w)$

quiver3(x, y, z, u, v, w)

Når vi visualiserer et vektorfelt: i punktet (x,y) tegner vi vektorer med komponenter $\vec{F}(x,y) = (u,v)$

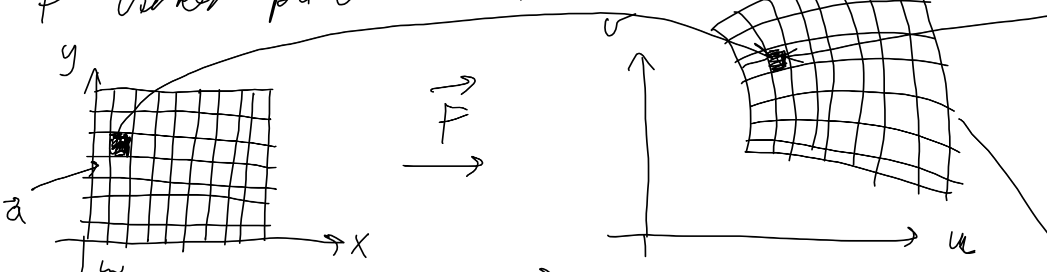
Eksempel 3.8.1 $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{i} + x\sin(xy)\,\vec{j}$

Hvis $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ er slik at $\vec{r}\,'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$ for alle t, så sier vi at $\vec{r}(t)$ er en strømningslinje.

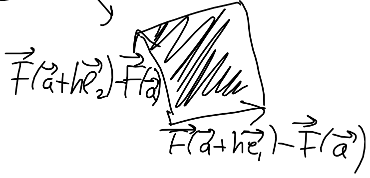
(tegnes med funksjonen streamline i matlab)

Ikke sikkert man tenker på $\vec{F}(x,y)$ som en vektor med start i (x,y), men heller som en avbildning $(x,y) \to (u,v)$.

For å forstå hvordan $\vec{F}$ virker, tegn hvordan $\vec{F}$ virker på et rutenett.



utspent av $\vec{F}(\vec{a})$, $\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_1)$, $\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_2)$



Hvordan forstørrer $\vec{F}$?

Areal forgelogt rektangel venstre side $= h^2$

Arealet til bildet ~~av~~ denne er utspent av

$$\vec{F}(\vec{a}+he_1)-\vec{F}(\vec{a}) \approx \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{a})\,h \quad \text{når } h \text{ er liten}$$

$$\vec{F}(\vec{a}+he_2)-\vec{F}(\vec{a}) \approx \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}(\vec{a})\,h$$

Arealet til parallellogrammet utspent av disse er gitt ved

$$\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{a})h & \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{a})h \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{a})h & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{a})h \end{vmatrix}\right| \quad \text{(setning 1.8.2)}$$

$$h^2 \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{a}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{a}) \end{vmatrix}\right| = \underbrace{h^2 \left|\det\left(\vec{F}'(\vec{a})\right)^T\right|}_{\text{forstørrelsesfaktoren.}} = h^2 \left|\det F'(\vec{a})\right|$$

3.9 Parametriserte flater.

Vanlige måten å parametrisere flate på med x, y:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$$

Kan være tungvint: For eksempel, en kuleflate er parametrisert:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\vec{k}$$

Kan være enklere for noen flater å bruke u, v, og parametrisere som

$$\vec{r}(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}.$$

Kuleflaten, sett $u = \phi$, $v = \theta$, $\rho = R$, vi får da

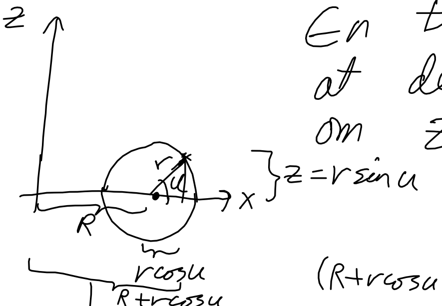
$$\vec{r}(\phi,\theta) = R\sin\phi\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\phi\sin\theta\,\vec{j} + R\cos\phi\,\vec{k}.$$

$$0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

En kjegle er i sylinderkoordinater (r, θ, z) gitt ved $z = r$

$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j} + r\vec{k}$$

En torus



En torus fremkommer ved at dere dreier denne sirkelen om z-aksen

La oss parametrisere med u og $v = \theta$

Vi får da

$$\vec{r}(u,v) = (R + r\cos u)\cos v\,\vec{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\vec{j} + r\sin u\,\vec{k}$$

$$0 \le u \le 2\pi \qquad 0 \le v \le 2\pi$$