Regning med potensrekker

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}$$

Viste: Anta at $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$ konvergerer for $|x-a|<r$. Da konvergerer $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}(x-a)^{j+1}$ for $|x-a|<r$, og

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}(x-a)^{j+1}.$$

Setning: Anta at $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$ konvergerer for $|x-a|<r$. Da konvergerer $\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j (x-a)^{j-1}$ for $|x-a|<r$ og

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j (x-a)^{j-1}.$$

Bevis: Anta at $a=0$. $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Viser konvergens: Viser at $\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j \cdot x^{j-1}$ konvergerer for $|x|<r$.

Fiks en x med $|x|<r$, og velg $|x| < s < r$.

Forholdstest: $\lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)\cdot a_{j+1} s^j}{j \cdot a_j \cdot s^{j-1}}$

$$= \lim_{j\to\infty} \underbrace{\left(\frac{j+1}{j}\right)}_{\downarrow_{j\to\infty}\, 1} \cdot \underbrace{\frac{a_{j+1}}{a_j} \cdot s}_{\downarrow_{j\to\infty}\, \le 1}.$$

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j s^j$ konvergerer

↑

Forholdstest gir at $\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} \cdot s \le 1$.

Sjekker for x: $\lim_{j\to\infty} \left(\frac{j+1}{j}\right) \cdot \frac{a_{j+1}}{a_j} \cdot \frac{|x|^j}{|x|^{j-1}}$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{j+1}{j}\right)\left(\frac{a_{j+1}}{a_j}\right) \cdot |x|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \underbrace{\left(\frac{j+1}{j}\right) \cdot \frac{a_{j+1}}{a_j} \cdot s}_{\downarrow\, \le 1} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{s}}_{<1} < 1.$$

Så vi har konvergens ved forholdstest.

Altså : $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j \cdot x^{j-1}$ konvergerer for $|x|<r$,

Ved forrige resultat

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$$

Men da vet vi at $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ er deriverbar og den deriverte er $g(x)$. ∎

Summasjon av rekke

Eksempel: Avgjør hvor rekken $\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot x^{j-1}$ konvergerer og finn summen.

Konvergensområde: Forholdstest:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)|x|^j}{j\cdot |x|^{j-1}} = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\frac{(j+1)}{j}}_{\downarrow \atop 1} \cdot |x| = |x|$$

Så vi har konvergens for $|x|<1$

divergens for $|x|>1$.

Siden $j\cdot(-1)^{j-1}$ og j er ubegrensede har vi ikke konvergens for $x=1$ og $x=-1$,

Finn summen: $\sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1}$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}},$$

<u>Eksempel:</u> Avgjør hvor $f(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j-1}$ konvergerer og finn summen.

Konvergensområde: Forholdstest gir konvergens på $|x|<1$ og divergens på $|x|>1$.

Endepunkter: $x=1$ Rekka er $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j-1}$, og den har vi sett divergerer (integraltest).

$x=-1$ Rekka er $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j-1}$.

Denne er alternerende og

$$\frac{1}{j-1} \searrow 0 \text{ når } j \to \infty.$$

Da har vi sett at rekka konvergerer.

Så konvergensområdet er $[-1, 1)$.

<u>Summen</u> $f(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j-1}$

$$= x \cdot \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j-1}$$

Hadde vært kra $\left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j}\right)' = \sum_{j=2}^{\infty} x^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} x^j$

Summerer heller $g(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j-1}$.

$$g'(x) = \sum_{j=2}^{\infty} x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

Så $g'(x) = \frac{1}{1-x}$

Integrerer $g(x) = -\log(1-x) + C$

siden $g(0)=0$ får vi $C=0$.

Så $g(x) = -\log(1-x)$

Får at $f(x) = -x \cdot \log(1-x)$,

Eks.: $\sum_{j=1}^{\infty}(3j+1)\cdot x^{3j-2}$. Summ!

$(x^{3j+1})' = (3j+1)\cdot x^{3j}$.

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(3j+1)\cdot x^{3j}$$

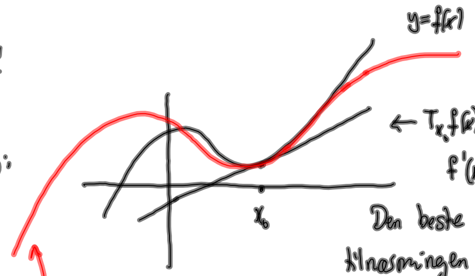
$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}x^{3j+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(x\cdot\sum_{j=1}^{\infty}x^{3j}\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot\left(x\cdot\sum_{j=1}^{\infty}(x^3)^j\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(x\cdot\left(\frac{1}{1-x^3}-1\right)\right)' = \ldots\ldots$$

Taylorrekker

Taylorpolynom:



DEF: La f være en funksjon som er m ganger deriverbar i et punkt x_0. Da er Taylor-polynomet til f av grad m i x_0:

$$T_m f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Hva er feilen? Dersom f er $(m+1)$ ganger deriverbar så er

$$f(x) = T_m f(x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1},$$

der $c\in[x_0,x]$.

Dersom f er uendelig ganger deriverbar i x_0 så er Taylor-rekka til f i x_0

$$Tf(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Sentralt spørsmål: når er Taylor-rekka til f lik f på et intervall?

Eks: Se på $f(x) = e^x$

Taylorrekka i 0: har at $f^{(m)}(x) = e^x$ for alle m.

$$Tf(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Se på Taylors formel med rest-ledd:

$$f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \cdot x^{m+1}$$

der $c \in [0, x]$.

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} + \underbrace{\frac{e^c}{(m+1)!} \cdot x^{m+1}}$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$\rightarrow 0$ uniformt når $m \to \infty$ for $x \in [-N, N]$.

Har sett før:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{N^{m+1}}{(m+1)!} = 0.$$

$$\frac{N}{1} \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{3} \cdots \frac{N}{N} \cdot \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N}{N+2} \cdots \to 0,$$

mai 21-09:35