UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	29. april, 2010.
Tid for eksamen:	10:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Alle oppgavene teller 1 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 20. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Sett

$$\mathbf{F}(x,y) = (y,x),$$

og la $\mathcal{C}$ være kurven $\mathbf{r}(t) = (t^4 \cos t, t^4 \sin t)$, der $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. Linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ blir da:

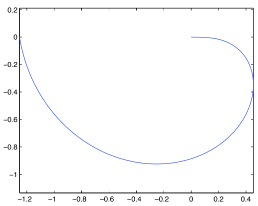
- ☐ 0
- ☑ $\frac{\pi^8}{2^{17}}$
- ☐ Eksisterer ikke
- ☐ $\frac{\pi^4}{2^4}$
- ☐ π

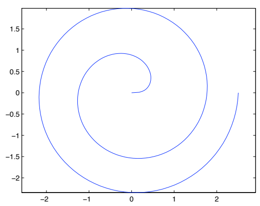
Oppgave 2. La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \left(\cos\left(2\pi(e^t - 1)\right), \sin\left(2\pi(e^t - 1)\right)\right)$, $0 \leq t \leq \ln 2$, og la $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 y, xy^2)$. Da er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

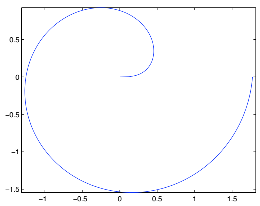
- ☐ π
- ☐ $\ln 2$
- ☐ e^2
- ☐ 1
- ☑ 0

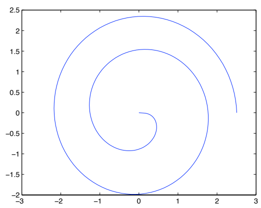
(Fortsettes på side 3.)

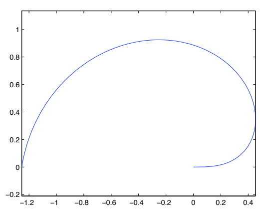
Oppgave 3. La $\mathcal{C}$ være kurven definert ved $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t}\cos(2t), \sqrt{t}\sin(2t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Kurven ser da slik ut:

☐ 

☑ 

☐ 

☐ 

☐ 

Oppgave 4. Mengden

$$\left\{(x, y) \;\middle|\; \sin(x^2 + y^2) = 0\right\} \text{ blir}$$

☐ en sirkel med radius $\sqrt{\pi}$.

☑ Punktet $(0, 0)$, sammen med uendelig mange sirkler, der sirklene med større radier er nærmere hverandre.

☐ kun punktet $(0, 0)$.

☐ punktet $(0, 0)$, sammen med uendelig mange sirkler, der sirklene har lik avstand mellom hverandre.

☐ punktet $(0, 0)$, sammen med uendelig mange sirkler, der sirklene med større radier er lenger unna hverandre.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5. Ligningen

$$x^2 - y^2 + 4x - 3y + 10 = 0$$

beskriver:

- ☐ en rett linje
- ☐ en parabel
- ☐ en ellipse
- ☑ en hyperbel
- ☐ det fins ingen punkter (x, y) som oppfyller ligningen

Oppgave 6. En lysstråle kommer inn parallelt med aksen til parabelen $y^2 = 4x$ fra punktet $(4, 1)$, med retning mot y-aksen, og blir reflektert via parabelen to ganger (vi tenker oss parabelen som et perfekt speil). Den totale lengden lyset tilbakelegger før det treffer linjen $x = 5$ er:

- ☐ 10
- ☐ 9
- ☑ 11
- ☐ avhengig av lyshastigheten
- ☐ 14

Oppgave 7. Vi definerer funksjonene $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(u, v) = u\cos(v) \text{ og } \mathbf{G}(x, y) = (e^{xy}, x^2).$$

Da er tangentplanet til grafen til den sammsensatte funksjonen $H(x, y) = F(\mathbf{G}(x, y))$ i $(x, y) = (0, 1)$ gitt ved:

- ☐ $y = 0$
- ☐ $x + y + z = 0$
- ☐ Tangentplanet eksisterer ikke i det gitte punktet
- ☐ $x - y - z = 0$
- ☑ $-x + z = 1$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 8. Lineæravbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er slik at alle punkter speiles gjennom planet $x + y = 0$. Matrisen til T er da gitt ved:

☐
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

☑
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9. En affinavbildning $T\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$, er gitt ved at

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ og } T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen til T (altså A) er da gitt ved:

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

☑
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 10. Arelaet av området som er avgrenset av kurvene $y = x^{1/4}$ og $y = x^4$ er:

- ☐ 1
- ☑ $\frac{3}{5}$
- ☐ $\frac{2}{5}$
- ☐ 2
- ☐ $\sqrt{2}$

Oppgave 11. La den parametriserte kurven $\mathcal{C}$ være gitt ved $\mathbf{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$. Da blir

$$\int_{\mathcal{C}} xz\,ds$$

- ☑ $e - e^{-1}$
- ☐ $e - 1$
- ☐ $2\sqrt{2}$
- ☐ $e + e^{-1}$
- ☐ 0

Oppgave 12. Buelengden til kurven $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{8}{3}t^{3/2}, 8t)$ fra $t = 0$ til $t = 1$ er:

- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ 1
- ☐ 4
- ☑ $\frac{17}{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$

Oppgave 13. I punktet $(0, 0, 1)$ vokser funksjonen

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + e^{x^2+y^2}$$

raskest i retningen:

- ☐ $(-1, -1, 3)$
- ☐ $(1, 1, 3)$
- ☑ $(0, 0, 1)$
- ☐ $(1, 1, 1)$
- ☐ $(-1, -1, 1)$

Oppgave 14. For funksjonen $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + e^{x^2+y^2}$ i forrige deloppgave er $(0, 0, 0)$ (origo):

- ☑ et globalt minimum for f
- ☐ et globalt maksimum for f
- ☐ et lokalt minimum for f
- ☐ et lokalt maksimum for f
- ☐ ikke et kritisk punkt for f

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 15. Vi lar $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$. For hvilke positive tall p vil det uegentlige integralet

$$\iint_R \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \, dxdy$$

konvergere?

- ☐ Kun for $p = 2$
- ☐ $p \geq 1$
- ☑ $p > 1$
- ☐ Ikke konvergens for noen p
- ☐ $p \geq 0$

Oppgave 16. La A være paraboloiden gitt ved $z = x^2 + y^2$. Da er arealet av den delen av A som har $x^2 + y^2 \leq 1$ lik:

- ☐ π
- ☐ $\pi/4$
- ☑ $\pi(5\sqrt{5} - 1)/6$
- ☐ $\sqrt{5}\pi$
- ☐ $2\pi^2$

Oppgave 17. Volumet til legemet avgrenset av paraboloiden
$z = x^2 + y^2$, sylinderen $x^2 + y^2 = 25$, xy-planet, og som ligger i første oktant (d.v.s. $x, y, z \geq 0$) er:

- ☐ $\frac{625\pi}{2}$
- ☐ $\frac{125\pi}{8}$
- ☐ $\frac{25\pi}{4}$
- ☐ π
- ☑ $\frac{625\pi}{8}$

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 18. Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

er gitt ved:

☑
$$\begin{pmatrix} 23 & -8 & 6 \\ -11 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 22 & -8 & 6 \\ -13 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 23 & -8 & 4 \\ -13 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 25 & -8 & 4 \\ -11 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 17 & -8 & 6 \\ -10 & 4 & -3 \\ 14 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 19. Vektorene

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

tilfredsstiller:

☐ $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$
☑ $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
☐ $\mathbf{d} = -\frac{3}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
☐ $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
☐ $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 20. La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en affinavavbildning. Hvillket av følgende utsagn er *riktig*? (for *alle* affinavbildninger T)?

☐ T er unikt bestemt av $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \cdots, T(\mathbf{e}_n)$, der $\mathbf{e}_i$ er vektoren med 1 på plass i, 0 ellers.

☐ $T(t\mathbf{x}) = tT(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der t er et vilkårlig tall

☐ $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})$

☑ Avbildningen $S(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0})$ er lineær

☐ Funksjonen $f(\mathbf{x}) = |T(\mathbf{x})|^2$ har et globalt minimum for $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

SLUTT