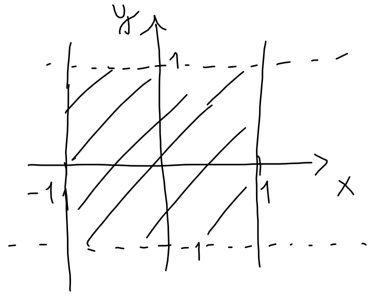
Plenum 13/5

5.1: 1cde, 4, 6
5.2: 4
5.4: 6, 7
5.5: 1

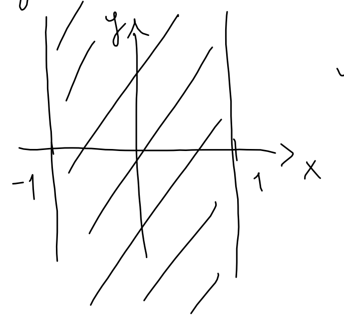
5.1: Topologi i $\mathbb{R}^m$

1) c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ og } |y| < 1\}$



Mengden er verken åpen eller lukket siden den inneholder noen, men alle, av randpunktene sine.

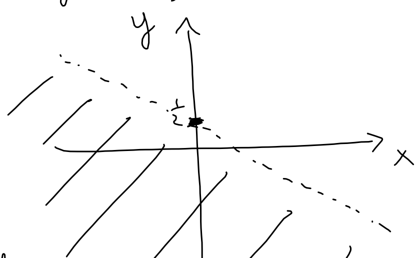
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$



Mengden er lukket fordi den inneholder alle randpunktene sine.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y < 1\}$

$$x + 2y < 1$$
$$x - 1 < -2y$$
$$-\frac{x-1}{2} > y$$



Mengden er åpen siden den ikke inneholder noen av randpunktene sine.

4) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_n \to \vec{b}$

VIS: $\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

HINT: $\big|\, |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \,\big| \leq |\vec{x}_n - \vec{b}|$

Bevis hint: $|\vec{x}_n - \vec{a}| = |\vec{x}_n - \vec{b} + \vec{b} - \vec{a}| \leq |\vec{x}_n - \vec{b}| + |\vec{b} - \vec{a}|$

Δ-ulikhet

$$|\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \leq |\vec{x}_n - \vec{b}| \qquad (\star)$$

Tilsvarende, ved å bytte om rollene til $\vec{x}_n$ og $\vec{b}$

$$|\vec{b} - \vec{a}| - |\vec{x}_n - \vec{a}| \leq |\vec{b} - \vec{x}_n| = |\vec{x}_n - \vec{b}|$$

$$-\left(|\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \right) \leq |\vec{x}_n - \vec{b}| \qquad (\star\star)$$

Fra $(\star)$ og $(\star\star)$: $\Downarrow$ (siden $|x| := \begin{cases} x & \text{hvis } x > 0 \\ -x & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases}$)

$$\big|\, |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - a| \,\big| \leq |\vec{x}_n - \vec{b}|$$

Bevis oppg:

Så: La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da kan vi finne $N \in \mathbb{N}$ s.a.
$|\vec{x}_n - \vec{b}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$ (siden $\vec{x}_n \to \vec{b}$).

Men da er:

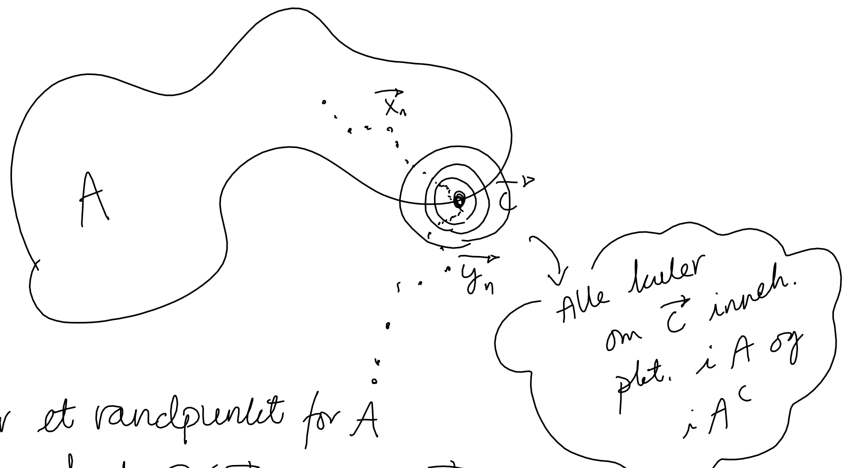
$$\big|\, |\vec{x}_n - \vec{a}| - |\vec{b} - \vec{a}| \,\big| \overset{\text{HINT}}{\leq} |\vec{x}_n - \vec{b}| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N$$

$\Downarrow$ (Def. konvergens)

$$\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

$\blacksquare$

6) $\mathbb{R}^2$:



Bevis: At $\vec{c}$ er et randpunkt for A betyr at enhver kule $B(\vec{c}, r)$ om $\vec{c}$ inneholder både plt. fra A og plt. som ikke er med i A.

Definer $r_n := \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$, og se på $B(\vec{c}, r_n)$. Denne kula inneholder i alle fall ett plt. i A og ett plt. i A^c. Kall plt. i A for $\vec{x}_n$ og plt. i A^c for $\vec{y}_n$.

Ved å gjøre dette for alle $n \in \mathbb{N}$ får vi to følger $\{\vec{x}_n\} \subseteq A$ og $\{\vec{y}_n\} \subseteq A^c$. Disse to følgene konvergerer mot $\vec{c}$ fordi:

La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la N være det første naturlige tallet større enn $\frac{1}{\varepsilon}$. Da er, for alle $n \geq N$:

$$|\vec{x}_n - \vec{c}| \underset{n \geq N}{\leq} |\vec{x}_N - \vec{c}| \underset{\vec{x}_N \in B(\vec{c}, r_N)}{\leq} r_N = \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$1 < \varepsilon N$

$N > \frac{1}{\varepsilon}$

Dvs. $\vec{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{c}$

Tilsvarende: $|\vec{y}_n - \vec{c}| \leq |\vec{y}_N - \vec{c}| \leq r_N = \frac{1}{N} < \varepsilon$

Dvs. $\vec{y}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{c}$

Oppsum: $\{x_n\} \subseteq A$, s.a. $\vec{x}_n \to \vec{c}$ og $\{\vec{y}_n\} \in A^c$ s.a. $\vec{y}_n \to c$. ▨

5.2 : Komplettthet av $\mathbb{R}^m$

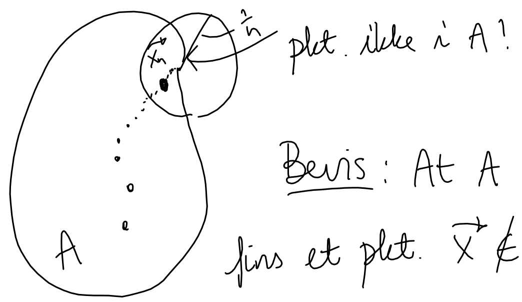
4) a) VIS: $\vec{x}$ opphopningsplt. $\Leftrightarrow$ $\{\vec{x_n}\}$ har delfølge som konv. mot $\vec{x}$.

Bevis: $\Rightarrow$: Anta at $\vec{x}$ er et opphopningsplt for $\{\vec{x_n}\}$.
La $n \in \mathbb{N}$. Da vil enhver kule $B(\vec{x}, \frac{1}{n})$ inneholde minst et plt, f. eks. $\vec{x_m}$, fra følgen. Definer en delfølge v/ $\vec{y_n} := \vec{x_m}$. Da vil delfølgen $\{\vec{y_n}\}$ konvergere mot $\vec{x}$ siden $|\vec{y_n} - \vec{x}| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\Leftarrow$: Anta at det fins en delfølge $\{\vec{y_n}\}$ som konvergerer mot $\vec{x}$. La $B(\vec{x}, r)$ være en kule om $\vec{x}$ m/ radius r.
Siden $\vec{y_n} \to \vec{x}$, fins det $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\vec{y_n} \in B(\vec{x}, r)$ for alle $n \geq N$. Men dvs. at $B(\vec{x}, r)$ inneholder ∞ mange plt. fra $\{\vec{y_n}\} \subseteq \{\vec{x_n}\}$. Fra def. av opphopningspunkt betyr det at $\vec{x}$ er et opphopningsplt. for $\{\vec{x_n}\}$. ∎

b) Bevis: Fra Bolzano-Weierstass teorem har enhver følge i A en konvergent delfølge (siden A er begrenset). La $\vec{x}$ være plt. denne delfølgen konvergerer mot. Merk: $\vec{x} \in A$ siden A er lukket. Fra a) er $\vec{x}$ et opphopningsplt. for $\{\vec{x_n}\}$. Men dermed har følgen et opphopningsplt. i A. ∎

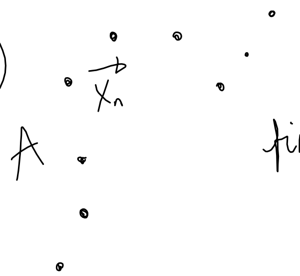
c)



<u>Bevis</u>: At A ikke er lukket betyr at det fins et plt. $\vec{x} \notin A$, men der hver kule $B(\vec{x}, \frac{1}{n})$, for $n \in \mathbb{N}$, inneholder plt. fra A. F. eks. kan vi kalle et slikt plt $\vec{x}_n \in A$. Ved å gjøre dette for alle $n \in \mathbb{N}$ får vi en følge $\{\vec{x}_n\}$ som konvergerer mot $\vec{x}$ (siden kulene blir mindre og mindre). Denne følgen ligger i A og har kun ett opphopningspunkt, nemlig $\vec{x}$ (siden $\vec{x}_n \to \vec{x}$).

Men $\vec{x} \notin A$, så dermed har vi funnet en følge i A som ikke har noe opphopningsplt i A. ∎

d)



<u>Bevis</u>: Siden A ikke er begrenset fins det en følge $\{\vec{x}_n\}$ i A der

$$|\vec{x}_{n+1}| > |\vec{x}_n| + 1 \quad : (*)$$

Det betyr at:

$$|\vec{x}_{n+k}| \underset{(*)}{>} |\vec{x}_{n+k-1}| + 1 \underset{(*)}{>} |\vec{x}_{n+k-2}| + \overbrace{1 + 1}^{2} \underset{(*)}{>} \dots \underset{(*)}{>} |\vec{x}_n| + k$$

for alle $k \in \mathbb{N}$

<u>Men</u>: $|\vec{x}_{n+k}| = |\underbrace{\vec{x}_{n+k} - \vec{x}_n} + \underbrace{\vec{x}_n}| \leq |\vec{x}_{n+k} - \vec{x}_n| + |\vec{x}_n|$ $\boxed{\Delta\text{-ulikhet}}$

$$|\vec{x}_{n+k}| - |\vec{x}_n| \leq |\vec{x}_{n+k} - \vec{x}_n|$$

Dvs: $|\vec{x}_{n+k} - \vec{x}_n| \geq |\vec{x}_{n+k}| - |\vec{x}_n| > k$, for $k \in \mathbb{N}$

Men dermed kan ikke $\{\vec{x}_n\}$ ha noe opphopningspunkt siden alle plt. i følgen har avstand større enn minste slike k, dvs. 1. ∎

5.4: Iterasjon av funksjoner

6.) a) Firma 1:

$$\max_p \underbrace{\underbrace{1000\, e^{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}}_{\text{ettersp.}} \cdot \underbrace{p}_{\text{pris}}}_{\text{salgsinntekt}}$$

Deriverer & setter lik 0:

$$1\cancel{000}\, e^{\cancel{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}} + 1\cancel{000}\, p\, e^{\cancel{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}} \left(-\frac{1}{q} - \alpha\right) = 0$$

$$1 - p\left(\frac{1+\alpha q}{q}\right) = 0$$

$$p^* = p = \frac{q}{1+\alpha q}$$

Dette er maksimum siden funk. må ha et maksimum og det kan ikke være minimum siden dette oppnås for $p = 0$.

Helt tilsvarende: Firma 2:

$$q^* = q = \frac{p}{1+\beta p}$$

7) $f(x) = x^2 + x - 2$

Fikspkt: $f(\bar{x}) = \bar{x}$

$f(\underline{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 2 = 2 + \sqrt{2} - 2 = \underline{\sqrt{2}}$