5.8.2 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

1. $\varepsilon = \max_{|x|\leq 1} |f(x)|$

2. Det finnes N slik $\quad |f(x)| \leq \varepsilon \quad |x| \geq N$

3. La $K = \max_{|x|\leq N} |f(x)|$

Da er $|f(x)| \leq K$ for alle x $\qquad (K \geq \varepsilon)$
slik at f er begrenset

5.8. 3

a/ $\vec{F}: A \to A$ kont.

$f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{F}(\vec{x})|$

f er kont. siden den er ~~en~~ en sammensetning av kontinuerlige funksjoner.

f har min., siden enhver kont. funksjon har min. på en lukket, begrenset mengde.

b/ $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| < |\vec{x} - \vec{y}|$

$\vec{F}$ har entydig fikspunkt

1. Det kan ikke være mer enn et fikspkt.: anta $F(\vec{x}) = \vec{x}$, $F(\vec{y}) = \vec{y}$, $\vec{x} \neq \vec{y}$

$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - F(\vec{y})| < |\vec{x} - \vec{y}|$, motsigelse.

b) forts.

La $\vec{x}$ være min til $f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{F}(\vec{x})|$

$$f(\vec{F}(x)) = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{F}(\vec{x}))| < |\vec{x} - \vec{F}(x)| = f(\vec{x}),$$

slik at $\vec{x}$ ikke kan være min, med mindre $\vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$, så $\vec{x}$ må være det unike fikspunktet til $\vec{F}$.

c) $\vec{F}(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{2}$ $\qquad A = \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

hvis $\vec{F}$ var definert på hele $\mathbb{R}$ ville 0 være eneste fikspunkt. Fjerner vi 0 har vi ikke lenger noen fikspkt.

5.9.20

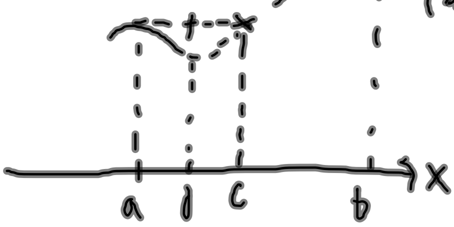
a) a er eneste stasjonære punktet til f, lokalt maks.

Anta for motsigelse at a ikke er globalt maks.

finner da b slik at $f(b) > f(a)$

finner c: $f(c) = f(a)$ (skjæringssetn.)

finner d der $f'(d) = 0$:



f antar alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$

middelverdisetningen: finner $d \in (a,c)$, slik at $f'(d) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = 0$

slik at d er et stasjonært punkt, som er en selvmotsigelse.

b) $f(x,y) = 1 - x^2 - (1+x)^3 y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3(1+x)^2 y^2 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(1+x)^3 y = 0$:

$\Downarrow$

$y = 0$ eller $-2(1+x)^3 = 0$

$\Updownarrow$

$x = -1$

$x=-1 \longrightarrow 2 - 0 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ gir ingen st. punkter.

$x = 0: \quad -3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$ er derfor eneste stasjonære pkt.

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 - 6(1+x)y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6(1+x)^2 y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(1+x)^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. egenverdiene er negative, så $(0,0)$ er maks.

ikke globalt: regn ut

$f(-2,y) = 1 - 4 + y^2 = -3 + y^2 \to \infty$ når $y \to \infty$,

og da kan ikke f ha globalt maks

d) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a, b to lokale maks.

g restriktert til $\underbrace{[a, b]}_{\text{lukket, begrenset}}$ har lokalt min.

e) $g(x,y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 8x e^y - 8x^3 = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2 e^y - 4e^{4y} = 0 \ ;$$

$$8x(e^y - x^2) = 0$$

$x = 0 \to -4e^{4y} = 0$, umulig.

$x^2 = e^y \to 4x^4 - 4x^8 = 0$

$4 - 4x^4 = 0$, $x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, $x = -1$

$x = \pm 1 \Rightarrow e^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow (1,0), (-1,0)$ er eneste stasjonære pkt.

f) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 8e^y - 24x^2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 8xe^y$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4x^2e^y - 16e^{4y}$

$x = \pm 1$, $y = 0$: $\quad = -16 \qquad = \pm 8 \qquad = -12$

$$Hf(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -16 & \pm 8 \\ \pm 8 & -12 \end{pmatrix}$$

determinanten: $(-16)(-12) - (\pm 8)(\pm 8) = 192 - 64 > 0$

siden $A < 0$ er punktene <u>lokale maksima</u>

Oppgave 2 (eksamen): $\frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$

$\frac{1}{2}x^2y^2 + D(x)$

$\vec{F}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$

Legg merke til at $\vec{F} = \nabla\phi$ der $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = xy^2 \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2y$

derfor er $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(1,0) - \phi(1,0) = \underline{\underline{0}}$

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (xy^2, x^2y) = (\cos t \sin^2 t, \cos^2 t \sin t)$

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = -\cos t \sin^3 t + \cos^3 t \sin t$

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -\sin^3 t \cos t + \cos^3 t \sin t \, dt = \left[-\cancel{\frac{1}{4}}\sin^4 t\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{1}{4}\cos^4 t\right]_0^{2\pi} = 0$

$u = \sin t \qquad u = \cos t$

Oppgave 6

$$h(x,y) = f(\underbrace{u(x,y), v(x,y)}_{\vec{U}(x,y)}) = f(\vec{U}(x,y))$$

$$h'(x,y) = f'(\vec{U}(x,y))\, \vec{U}'(x,y)$$

$$Dh(x,y) = \nabla f(\vec{U}(x,y))\, \vec{U}'(x,y)$$

$$Dh(x,y) = \nabla f(u(x,y), v(x,y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$h(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla h(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \nabla f(u(x,y), v(x,y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^T$ er ikke inverterbar $\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^T\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Oppgave 5

a) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x - z = 0$, $\quad y - z = 0$

uendelig mange løsninger: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) $I - A = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & -0.2 \\ -0.3 & 0.6 & -0.3 \\ -0.1 & -0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektor.

c) ser egenverdier $1, 0.4$, og 0.1

egenvektorer $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 120 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}120\\0\\0\end{pmatrix} = 40\vec{v}_1 + 80\vec{v}_2 + 40\vec{v}_3$$

d) $$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$

tilhengere i X dag n, i X,Y,Z dag n+1.

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} = A^n \left(40\vec{v}_1 + 80\vec{v}_2 + 40\vec{v}_3\right)$$

$$= 40\vec{v}_1 + 80(0.4)^n\vec{v}_2 + 40(0.1)^n\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 40 + 80(0.4)^n \\ 40 + - 40(0.1)^n \\ 40 - 80(0.4)^n + 40(0.1)^n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix}$$