Plenum 3/5

5.4: 6, (2)

5.5: 1, 4

5.7: 3, 4, (7)

5.4: Iterasjon av funksjoner

b) $$E_1(p,q) = 1000\, e^{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}$$

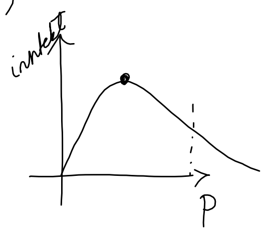
$$E_2(p,q) = 1000\, e^{-\frac{q}{p} - \beta(p+q)}$$

NB: $\alpha \uparrow \Rightarrow E_1 \downarrow$, $\beta \uparrow \Rightarrow E_2 \downarrow$

a) VIS: q fast $$p^* = \frac{q}{1+\alpha q}$$

Tilsv: p fast $$q^* = \frac{p}{1+\beta p}$$

Firma 1: $$\max_p \underbrace{\underbrace{p}_{\text{pris}} \cdot \underbrace{1000\, e^{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}}_{\text{etterspørsel}}}_{\text{salgsinntekt}}$$



mhp. p

Deriver og sett lik 0:

$$\cancel{1000\, e^{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}} + p\, \cancel{1000\, e^{-\frac{p}{q} - \alpha(p+q)}} \left(-\frac{1}{q} - \alpha\right) = 0$$

$$1 - p\left(\frac{1+\alpha q}{q}\right) = 0$$

$$p^* = p = \frac{q}{1+\alpha q}$$

maks fins fra ekstremalverdi-set., ikke min pga. det er i $p=0$

Helt tilsvarende arg. for Firma 2 gir at

$$q^* = \frac{p}{1+\beta p}.$$

5.5: Konvergens mot fikspunkt

~~1)~~ Ang. c): Hvorfor vil

$$\left(\overset{2,5}{\text{ovre}} - \overset{-2,5}{\text{nedre}}\right)\underbrace{\text{rand}}_{\in[0,1]} + \overset{-2,5}{\text{nedre}} \text{ gi et tall}$$

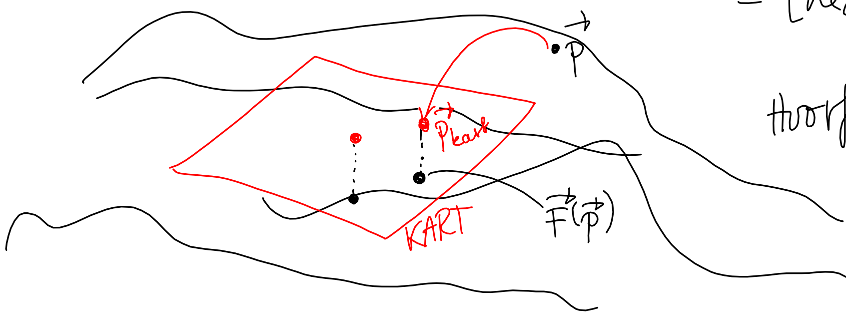
i [nedre, ovre] ?

$\text{rand} \in [0,1]$, så vil $(\text{ovre} - \text{nedre})\,\text{rand} \in [0, \text{ovre} - \text{nedre}]$.

Da vil $\text{nedre} + (\text{ovre} - \text{nedre})\text{rand} \in [\text{nedre}, \text{ovre} - \text{nedre} + \text{nedre}]$

$= [\text{nedre}, \text{ovre}]$

4)



Hvorfor nøyaktig ett pkt. på kart loddrett over tilsv. pkt. i landskap?

La $A = \{\text{punkter i terrenget}\}$. Ser på avbildningen $\vec{F}$ definert ved at et punkt i terrenget $\vec{p}$ sendes på det punktet i terrenget som punktet på kartet tilsvarende $\vec{p}$ ligger loddrett ovenfor. $\vec{F}$ er en kontraksjon siden kartet er mindre enn terrenget og i tillegg er $\vec{F}$ en avbildning fra A til A.

$\Downarrow$ Banachs fikspunktteorem

$\vec{F}$ har et unikt fikspunkt, dvs. at det fins ett, og bare ett, punkt i terrenget det punktet på kartet ligger loddrett ovenfor.

5.7: Omvendte og implisitte funksjoner

3) VIS: $x^3+y^3+y=1$, $y=f(x)$ som oppfyller ligningen
$f'(x_0)$?

La $g(x,y)=x^3+y^3+y-1$. Hvis (x_0,y_0) er på kurven, så er $g(x_0,y_0)=0$. I tillegg:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=3y_0^2+1\neq 0.$$

alle partiellderiverte er kont, $\mathbb{R}^2$ åpen

Da gir Implisitt funksjonsteorem at det fins en funk.
$f(x)$ $(=y)$ s.a. $g(x,f(x))=0$. Dvs.

$$x^3+f(x)^3+f(x)-1=0\text{, så}$$

$$x^3+f(x)^3+f(x)=1\text{, altså er ligningen oppfylt.}$$

(for alle x i en omegn om x_0).

Da er:

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}=-\underline{\underline{\frac{3x_0^2}{3y_0^2+1}}}$$

4) VIS: Fins $g(x,y)$, omegn $(-1,2)$ s.a. $g(-1,2)=0$ og
$f(x,y,g(x,y)) = -4$. $\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2)$?

$f(x,y,z) = xy^2e^z + z$
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Def: $h(x,y,z) = f(x,y,z) + 4$

Vil altså finne $g(x,y)$ i omegn om $(-1,2)$ s.a.

$\cdot\ g(-1,2) = 0$ og

$$h(x,y,g(x,y)) = f(x,y,g(x,y)) + 4 = -4 + 4 = 0$$

oppg-teksten

Merk: $h(-1,2,0) = -4+4 = 0$ $(\star)$

og $\frac{\partial h}{\partial z} = xy^2e^z + 1$, så $\frac{\partial h}{\partial z}(-1,2,0) = -3 \neq 0$

I tillegg: $\frac{\partial h}{\partial x} = y^2e^z$ $\quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2xye^z$; kontinuerlige.

Fra Implisitt funksjonsteorem ($\mathbb{R}^3$ åpen delmengde av seg selv) fins $g(x,y)$ def. i en omegn om $(-1,2)$ med $g(-1,2)=0$ (må til for at $(\star)$ skal holde) og s.a.

$$h(x,y,g(x,y)) = 0, \text{ dvs.}$$

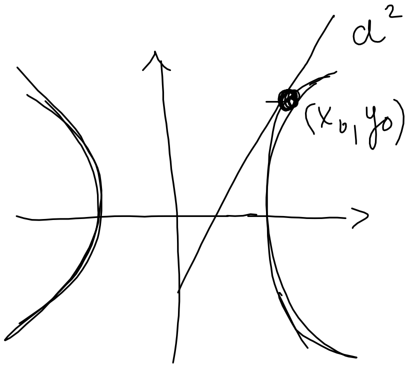
$$f(x,y,g(x,y)) = h(x,y,g(x,y)) - 4 = 0 - 4 = -4$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(-1,2,0)}{\frac{\partial h}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial y}(-1,2,0)}{\frac{\partial h}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{-4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

7.) Finn: Stigningstall til tangent til

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad i \ (x_0, y_0), \ y_0 \neq 0.$$



Implisitt derivasjon:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{TENK: } y(x)$$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y\,(y'(x))}{b^2} = 0$$

$$\frac{2y}{b^2}\, y'(x) = \frac{2x}{a^2}$$

$$y'(x) = \frac{x\, b^2}{y\, a^2}$$

$$y'(x_0) = \frac{x_0\, b^2}{y_0\, a^2}$$