Prøveeksamen MAT 1110 lørdag 26. mai 2018

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 11 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II - 2 \cdot I \\ III + I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \overset{II \cdot (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III - 6 \cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I - 4 \cdot II}{\sim} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b) Vi ser at

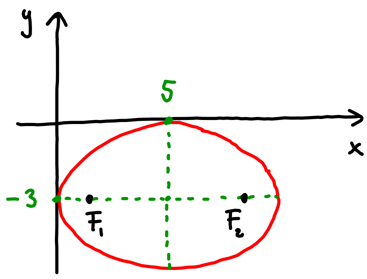
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4+7) = 11 \neq 0$$

Dermed kan vi la basisen være $\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$

Oppgave 2

Likningen for ellipsen kan skrives

$$\frac{(x-5)^2}{5^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$



Altså er dette en ellipse med sentrum

$$(5, -3)$$

og halvakser $a = 5$, $b = 3$.

Avstanden c fra sentrum til brennpunktene F_1 og F_2 gis av

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

Altså $c = 4$. Ergo er brennpunktene $\underline{\underline{(9, -3) \text{ og } (1, -3)}}$

Oppgave 3

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(2n)!}$ Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x|\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$\boxed{(2n+2)! = (2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)\cdots 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x|\cdot\frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1/n}^{0} + \overbrace{1/n^2}^{0}}{4+\underbrace{6/n}_{0}+\underbrace{2/n^2}_{0}} = 0$$

Så rekken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n}(x-3)^n$ Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{7^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{7^n(x-3)^n}\right|$$

$$= |x-3|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{n+1} = 7\cdot|x-3|$$

Altså konvergens hvis

$7\cdot|x-3| < 1$, dvs. $|x-3| < \frac{1}{7}$

og divergens hvis $|x-3| > \frac{1}{7}$.

Endepunkter:

$x = 3+\frac{1}{7}$ gir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n}\left(\frac{1}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ (divergent p-rekke)

$x = 3-\frac{1}{7}$ gir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n}\left(-\frac{1}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (konv. alternerende)

Altså: Rekken konvergerer for $x \in \left[3-\frac{1}{7}, 3+\frac{1}{7}\right) = \left[\frac{20}{7}, \frac{22}{7}\right)$

Oppgave 4

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

Polarkoordinater
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$J = r$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_{r=0}^{r=R} d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\ln(1+R^2)\, d\theta$$

$$= \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \ln(1+R^2) = +\infty.$$

Integralet divergerer

Oppgave 5

a) $f(x,y) = xy+1$ gir $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$

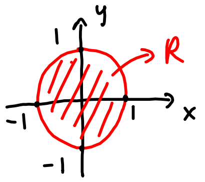
Så $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ gir $(x,y) = (0,0)$. Stasjonært punkt: $(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenverdier til H:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \text{ gir } \lambda = \pm 1.$$

Ergo er $(0,0)$ et sadelpunkt.

b) 

R er området begrenset av enhetssirkelen.

Siden R er lukket og begrenset, følger fra ekstremalverdisetningen at f har et globalt maksimumspunkt på R, siden f er kontinuerlig.

Finner kandidater til maks på randen ved Lagrange:

Bibetingelse: $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ I

Kravet $\nabla f = \lambda \nabla g$ gir

$y = \lambda \cdot 2x$ II
$x = \lambda \cdot 2y$ III

Ser at $x=0$ gir $y=0$ og omvendt, som er i strid med I. Kan derfor anta $x,y \neq 0$.

(Oppgave 5 forts.)

II og III kombinert gir $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, dvs. $x^2 = y^2$, $x = \pm y$.

Innsatt i I gir dette

$$2x^2 = 1, \quad \text{dvs.} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

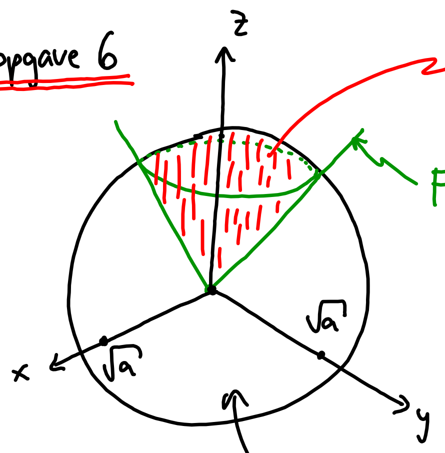
Kandidater:

$$\left.\begin{aligned}
f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{3}{2} \\
f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{1}{2} \\
f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{1}{2} \\
f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{3}{2} \\
f(0,0) &= 1
\end{aligned}\right\}$$

Ser at maksimumsverdien til $f(x,y)$ på R er $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

($\nabla g = 0$ gir $x = y = 0$, som ikke tilfredsstiller bibetingelsen)

<u>Oppgave 6</u>



T er her (en slags vid, delvis spist kroneis)

Flaten $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Beskrivelse av T i kulekoordinater:

$$\rho \in [0, \sqrt{a}], \ \phi \in [0, \tfrac{\pi}{4}], \ \theta \in [0, 2\pi).$$

kuleflaten $x^2+y^2+z^2 = a$, som gir $z = \sqrt{a - x^2 - y^2}$ (øvre halvdel)

$$\iiint_T z \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{a}} \rho\cos\phi \cdot \underbrace{\rho^2\sin\phi}_{J} \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{a})^4 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\phi\cos\phi \, d\phi = \frac{\pi}{2} \cdot a^2 \left[\tfrac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot a^2 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\pi a^2}{8}}}$$

Oppgave 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$ Finne summen.

Hint: Sammenlikner med rekken for arctan x med $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n}\cdot\sqrt{3}\cdot(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{6}$$

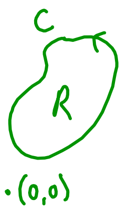
fordi: $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Altså er summen av rekken vår $\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}}$

Oppgave 8

a) Ved Greens teorem er $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

der R er området avgrenset av kurven C. Hvis origo ikke ligger i R, er forutsetningene i Greens teorem oppfylt. Vi får



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

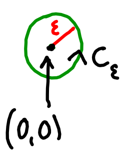
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ergo $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ på hele R. Så $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$.

b) $\vec{s}(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{s}(t))\cdot\vec{s}\,'(t)\,dt$$

$$\left(\begin{aligned} x^2+y^2 &= \varepsilon^2\cos^2 t + \varepsilon^2\sin^2 t \\ &= \varepsilon^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = \varepsilon^2 \end{aligned}\right)$$

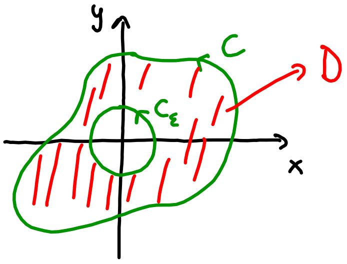


$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\varepsilon\sin t}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\right]\cdot\left[-\varepsilon\sin t, \varepsilon\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

(Oppgave 8 forts.)

c) Hvis origo ligger i det indre av området begrenset av C, kan vi velge $\varepsilon > 0$ slik at kurven C_ε også ligger i det indre av området begrenset av C.



Ved Greens teorem brukt på området D avgrenset av C på utsiden og C_ε på innsiden, følger at $-\int_{C_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

(fordi $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ på D)

Altså $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{2\pi}}$

Oppgave 9

a)
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II-3\cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{II\cdot(-\frac{1}{8})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\overset{I-3\cdot II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Så den inverse av $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ er $M^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}}$

b) Vi kan velge A slik at

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(en matrise med egenvektorer for A som søyler diagonaliserer A)

Løser med hensyn på A:

$$M^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$$

$$A = \boxed{M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}}$$ må finne denne

(Oppgave 9 forts.)

		2	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
		0	7	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
1	3	2	21	$\frac{61}{8}$	$-\frac{15}{8}$
3	1	6	7	$\frac{15}{8}$	$\frac{11}{8}$

Altså $A = \begin{pmatrix} \frac{61}{8} & -\frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$

Oppgave 10

Hvis $\vec{x}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ, får vi

$$(A - 2A^2 + 3A^3)\cdot \vec{x} = A\vec{x} - 2A^2\vec{x} + 3A^3\vec{x}$$

$$= \lambda x - 2\cdot\lambda^2\vec{x} + 3\lambda^3\vec{x}$$

$$= (\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3)\cdot\vec{x}$$

F.eks. $A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda(\lambda\vec{x})$

Dette viser at $\vec{x}$ er en egenvektor for matrisen $A - 2A^2 + 3A^3$ med egenverdi $\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3$.

Slutt!