MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-12

Innleveringsfrist: *Torsdag 26. april, kl.14.30, i 7. etasje Niels Henrik Abels hus. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Se for øvrig*

http://www.mn.uio.no/math/studier/obligerv12.html

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk forside og husk å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%.*

Alle delspørsmål (punktene a), b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha tastet inn alle programmene og selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringene. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Det er anledning til å bruke Python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende Python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med Python-spørsmål.

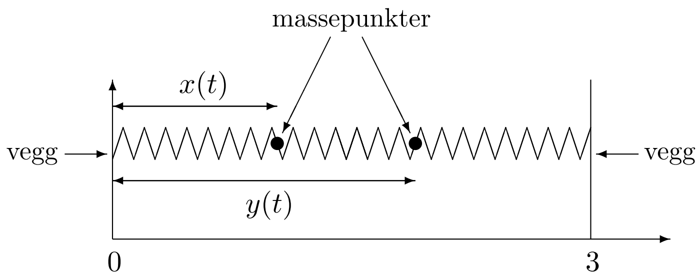
I dette oppgavesettet skal vi se på differensialligningssystemet

$$x''(t) = -18x(t) + 9y(t) \tag{1}$$

$$y''(t) = 9x(t) - 18y(t) + 27 \tag{2}$$

med initialbetingelsene $x(0) = 1, x'(0) = 2$ og $y(0) = 2, y'(0) = -1$. Vi er altså på jakt etter funksjoner x og y som tilfredsstiller disse betingelsene, og vi skal gjennomføre denne jakten både med numeriske og analytiske metoder. Settet består av tre oppgaver der oppgave 1 og 2 kan løses uavhengig av hverandre, mens oppgave 3 bygger på begge de to andre.

Det har ingen betydning for løsningen av oppgavene, men kanskje er det likevel greit å vite at ligningssystemer som (1)-(2) blant annet beskriver de svingende bevegelsene til punktmasser som er koblet sammen med fjærer som vist på figuren nedenfor.



Oppgave 1: Numerisk angrepsmetode
I denne oppgaven skal vi se hvordan vi kan bruke MATLAB til å finne gode tilnærmelser til x og y. Vi skal først se hvordan vi kan tilnærme den annenderiverte ved hjelp av funksjonsdifferanser.

a) Anta at f er en funksjon med kontinuerlig annenderivert. Vis (f.eks. ved hjelp av L'Hôpitals regel) at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

Punkt a) forteller oss at når h er liten, så er $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ en god tilnærmelse til $f''(a)$. Vi skal bruke dette til å omdanne differensialligningssystemet (1)-(2) ovenfor til et system av differensligninger.

b) La $X(n)$ og $Y(n)$ være definert for $n = 1, 2, 3, \ldots$ ved at $X(1) = 1, X(2) = 1 + 2h$, $Y(1) = 2, Y(2) = 2 - h$ og

$$X(n+1) = 2X(n) - X(n-1) - 18X(n)h^2 + 9Y(n)h^2$$
$$Y(n+1) = 2Y(n) - Y(n-1) + 9X(n)h^2 - 18Y(n)h^2 + 27h^2$$

for $n \geq 2$. Forklar at når h er liten, så bør $X(n)$ og $Y(n)$ være gode tilnærmelser til henholdsvis $x((n-1)h)$ og $y((n-1)h)$. (*Bemerkning:* Grunnen til at vi bruker $n-1$ og ikke n, er at MATLAB naturlig begynner alle nummereringer med 1 og ikke 0).

I resten av oppgaven setter vi $h = 10^{-3}$

c) Lag et program `Oblig2` som regner ut $X(n)$ og $Y(n)$ for n = 1,2,3, $\ldots, 10^3N + 1$. Programmet skal lagres som en m-fil, ha N som inputvariabel og kunne kjøres ved å skrive `[X,Y]=Oblig2(N)` for forskjellige verdier av N.

d) Kjør programmet for $N = 30$ og tegn X og Y i samme koordinatssystem, men med forskjellig farge. Forklar hvorfor kurvene burde gi en god beskrivelse av funksjonene x og y på intervallet $[0, 30]$.

Oppgave 2: Analytisk angrepsmetode
I denne oppgaven skal vi se hvordan vi kan finne formler for $x(t)$ og $y(t)$. Vi skal bruke begrepene *egenvektorer* og *egenverdier* som du finner mer informasjon om i seksjonene 4.10 og 4.11 i læreboken, men egentlig trenger du ikke å vite mer enn det som står i oppgaveteksten.

a) Vis at ligningssystemet (1)-(2) med initialbetingelser kan skrives

$$\mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

der

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix}$$

b) La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vis at $A\mathbf{a} = -9\mathbf{a}$ og $A\mathbf{b} = -27\mathbf{b}$. Vi sier at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er *egenvektorer* for A med *egenverdier* hhv. -9 og -27.

c) Vis at $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$. Skriv $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

Siden $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, må det for hver t finnes entydig bestemte tall $u(t)$ og $v(t)$ slik at

$$\mathbf{x}(t) = u(t)\mathbf{a} + v(t)\mathbf{b}$$

d) Vis at ligningssystemet (3) kan skrives

$$u''(t)\mathbf{a} + v''(t)\mathbf{b} = \left(-9u(t) + \frac{27}{2}\right)\mathbf{a} + \left(-27v(t) - \frac{27}{2}\right)\mathbf{b}$$

og at dette leder til ligningene

$$u''(t) + 9u(t) = \frac{27}{2}, \qquad u(0) = \frac{3}{2},\ u'(0) = \frac{1}{2}$$
$$v''(t) + 27v(t) = -\frac{27}{2}, \qquad v(0) = -\frac{1}{2},\ v'(0) = \frac{3}{2}$$

e) Hvis k og a er konstanter, så er den generelle løsningen til differensialligningen

$$z''(t) + kz(t) = a$$

gitt ved

$$z(t) = \frac{a}{k} + C\sin(\sqrt{k}t) + D\cos(\sqrt{k}t)$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Bruk denne formelen til å finne $u(t)$ og $v(t)$.

f) Finn $x(t)$ og $y(t)$. Plot begge grafene på samme figur over intervallet $[0, 30]$.

Oppgave 3: Sammenligning

Sammenlign de numeriske løsningene X, Y i oppgave 1 og de analytiske løsningene x, y i oppgave 2 ved å plotte $X - x$ og $Y - y$. For å få til dette må du sørge for at alle vektorene X, Y, x, y har det samme antall komponenter.

Lykke til!