UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	11. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, vedlagt formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Du må begrunne alle svar, og vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

1a

La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Transformér A til redusert trappeform.

Svar:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

1b

Er vektorene

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$$

lineært uavhengige?

Svar: Disse er lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen A (som har vektorene som kolonner) har determinant forskjellig fra null. Vi ser fra **a** at determinanten er lik null, altså er vektorene lineært avhengige.

1c

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2y + z &= 1 \\ 3y + z &= 2 \\ x + 4y &= 3. \end{aligned}$$

Svar: Ligningssystemet har utvidet matrise A, vi leser løsningen fra den reduserte trappeformen, $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$.

Oppgave 2

Definér funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2a

Finn

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

der de eksisterer.

(Fortsettes på side 3.)

Svar: For $(x, y) \neq (0, 0)$ finner vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Her kan vi også utnytte symmetrien til å si at

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$

For $(x, y) = (0, 0)$ får vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2b

Finn verdien av f langs linja $y = ax$, der a er et fast tall. Avgjør om f er kontinuerlig i origo.

Svar: Nei. Betrakt $f(x, ax)$ der a er et reellt tall. Vi har at

$$f(x, ax) = \frac{ax^2}{x^2 + a^2x^2} = \frac{a}{a^2 + 1}.$$

Grensen

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

kan derfor anta alle verdier som $a/(a^2 + 1)$ antar når a gjennomløper de reelle tallene.

2c

Finn maksimumsverdien og minimumsverdien til f.

Svar: Vi har at

$$f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right), \; g(a) = \frac{a}{a^2 + 1}.$$

Maks.- og min.- verdi vil da være de samme som for g. $-1/2 = g(-1) \leq g(a) \leq g(1) = 1/2$, så dette er maks og minverdiene.

(Fortsettes på side 4.)

2d

Finn volumet til legmet avgrenset av den delen av (x, y) planet der x og y er positive, grafen til f, og sylinderen $x^2 + y^2 \leq 1$.

Svar: I polarkoordinater blir området beskrevet ved at $r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Derfor blir volumet

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sin(\theta)\cos(\theta) r\,drd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3

La

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

der rekka konvergerer.

3a

Finn konvergensområdet til rekka.

Svar: Vi bruker forholdstesten,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n}\,|x|\,.$$

Rekka blir konvergent for $|x| < 1$, og vi sjekker endepunktene. For $x = 1$ har vi at $\lim a_n = \lim n = \infty$ og vi har ikke konvergens. For $x = -1$ blir $a_n = (-1)^n n$, og rekka divergerer siden $|a_{n+1}| > |a_n|$.

3b

For x med i konvergensintervallet til rekka, finn

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(y)}{y}\,dy.$$

(Fortsettes på side 5.)

Svar: Vi vet at vi kan integrere rekker ved å integrere leddvis i det indre av konvergensintervallet, derfor

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x ny^{n-1}\,dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

3c

Finn $g(x)$.

Svar: Vi finner at

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \frac{g(x)}{x},$$

slik at

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Oppgave 4

Finn den minste avstanden fra flaten gitt ved $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ til punktet $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Svar: Vi bruker Lagranges multiplikatormetode på

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2, \text{ med bibetingelse } g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1 - z^2 = 0.$$

Ligningene blir da

$$\begin{aligned} x - 1 &= \lambda x \\ y - 2 &= \lambda y \qquad \text{og } z^2 = x^2 + y^2 + 1. \\ z &= -\lambda z \end{aligned}$$

$z = 0$ er ikke mulig, så $\lambda = -1$, dette gir $x = 1/2$ og $y = 1$, som igjen gir $z^2 = 1/4 + 2 = 9/4$.

$$f(1/2, 1, 3/2) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} = \frac{7}{2}.$$

(Fortsettes på side 6.)

Altså blir minste avstand $\sqrt{7/2}$.

Oppgave 5

Betrakt avbildningen fra "ellipsoidekoordinater" (ϕ, θ, ρ) til Kartesiske koordinater (x, y, z), gitt ved

$$x = a\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = b\rho\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = c\rho\cos(\phi),$$

der a, b og c er faste positive tall, og $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ og $\rho \geq 0$.

5a

Finn Jacobideterminanten til denne avbildningen, mao. $\partial(x, y, z)/\partial(\phi, \theta, \rho)$.

Svar: Vi regner ut og får

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\phi,\theta,\rho)} &= \begin{vmatrix} \rho a\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho a\sin(\phi)\sin(\theta) & a\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \rho b\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho b\sin(\phi)\cos(\theta) & b\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\rho c\sin(\phi) & 0 & c\cos(\phi) \end{vmatrix} \\
&= abc\,\rho^2 \begin{vmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & c\cos(\phi) \end{vmatrix} \\
&= abc\,\rho^2 \Big[\cos(\phi)\cos(\theta)(\sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\phi)) + \sin(\phi)\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\phi)\sin(\theta) + \sin^2(\phi)\sin(\theta)\right) \\
&\qquad v + \sin(\phi)\cos(\theta)(\sin^2(\phi)\cos(\theta))\Big] \\
&= abc\,\rho^2\sin(\phi).
\end{aligned}$$

Her kunne vi også appelert til formelen for variabelskifte til kulekoordinater.

5b

La D være mengden gitt ved

$$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

Regn ut integralet

$$\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz.$$

(Fortsettes på side 7.)

Svar: Vi regner ut at

$$\frac{x^2(\phi,\theta,r)}{a^2}+\frac{y^2(\phi,\theta,r)}{b^2}+\frac{z^2(\phi,\theta,r)}{c^2}=r^2.$$

Ved å bruke Jacobideterminanten fra forrige punkt får vi at

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(\frac{x^2(\phi,\theta,r)}{a^2}+\frac{y^2(\phi,\theta,r)}{b^2}+\frac{z^2(\phi,\theta,r)}{c^2}\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\phi,\theta,r)}\right|\;drd\phi d\theta\\ &= abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4\sin(\phi)\,drd\phi d\theta\\ &= abc\,2\pi\frac{1}{5}\int_0^{\pi}\sin(\phi)\,d\phi=\frac{4\pi}{5}abc.\end{aligned}$$