hjelp av komponentlikningene over:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + 1 \\
y &= \frac{1}{4}\lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_2 \\
z &= \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Setter vi inn dette i bibetingelsene, får vi

$$
\begin{aligned}
g_1(x, y, z) &= x + y + z = \frac{5}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{2} = 1 \\
g_2(x, y, z) &= 2x - y - z = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{11}{4}\lambda_2 + \frac{5}{2} = 5.
\end{aligned}
$$

Setter vi konstantleddene på samme side, kan vi danne oss den utvidede matrisen

$$
\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.
$$

Radreduserer vi denne får vi matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$, slik at $\lambda_1 = \frac{2}{9}, \lambda_2 = \frac{8}{9}$. Setter vi inn dette i likningene for x, y, z får vi

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + 1 = 2 \\
y &= \frac{1}{4}\lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_2 = \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{6} \\
z &= \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Vi ser derfor at vårt minimum er $(x, y, z) = \left(2, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$. At dette faktisk er et minimum kan lett begrunnes ved å sammenligne med verdien i et annet punkt, eller ved å se på problemet som det å finne et punkt på en linje som ligger nærmest et annet punkt.

Oppgave 5.10.3

Vi skal minimere $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under de to bibetingelsene

$$
\begin{aligned}
g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 = 1 \\
g_2(x, y, z) &= x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Vi ser at

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= (2x, 2y, 2z) \\
\nabla g_1 &= (2x, 2y, 0) \\
\nabla g_2 &= (2x - y, -x + 2y, -2z).
\end{aligned}
$$

For å bruke Teorem 5.9.2 finner vi først ut når ∇g_1 og ∇g_2 er lineært avhengige. Dette kan vi finne ut av ved å bringe matrisen

$$
\begin{pmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \\ 0 & -2z \end{pmatrix}
$$

på trappeform. Vi splitter opp i følgende muligheter:

- Når $x = y = 0$ er søylene lineært avhengige siden første søyle er 0, men da er ikke den første bibetingelsen oppfylt.
- Hvis nøyaktig en av x, y er lik 0 er det fort å sjekke at begge søylene er pivotsøyler, så vi får ingen kandidater med lineært uavhengige gradienter her heller.
- Hvis både $x, y \neq 0$ kan vi skrive

$$
\begin{pmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \\ 0 & -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2xy & 2xy - y^2 \\ 2xy & 2xy - x^2 \\ 0 & -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2xy & 2xy - y^2 \\ 0 & y^2 - x^2 \\ 0 & -2z \end{pmatrix}.
$$

Det er klart at andre søyle ikke er en pivotsøyle kun når $y = \pm x, z = 0$. $y = \pm x$ kombinert med første bibetingelse gir at $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Det er fort gjort å sjekke at dette sammen med $z = 0$ ikke passer sammen med andre bibetingelse.

Med andre ord, lineært avhengige $\nabla g_1, \nabla g_2$ gir oss ingen kandidater. Det gjenstår nå å løse likningen

$$
\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2.
$$

På komponentform er denne

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - \lambda_2 y &= 2x \\
2\lambda_1 y - \lambda_2 x + 2\lambda_2 y &= 2y \\
-2z\lambda_2 &= 2z.
\end{aligned}
$$

Den tredje likningen sier at $z = 0$ eller $\lambda_2 = -1$.

- Anta først at $x = 0$ (så $y = \pm 1$ fra den første bibetingelsen). Da sier de to første likningene at

$$
\begin{aligned}
-\lambda_2 y &= 0 \\
2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y &= 2y.
\end{aligned}
$$

  Da blir $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 1$. Den tredje likningen er da oppfylt kun når $z = 0$. Det er klart at $(0, \pm 1, 0)$ oppfyller begge bibetingelsene.
- Helt tilsvarende får ved å anta at $y = 0$ at $(\pm 1, 0, 0)$ oppfyller begge bibetingelsene også.
- Anta til slutt $x, y \neq 0$. Vi ser $z = 0$ sammen med dette ikke er forenlig med de to bibetingelsene. Den tredje likningen sier derfor at $\lambda_2 = -1$. Vi skriver om de tre likningene til

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1 xy + 2\lambda_2 xy - \lambda_2 y^2 &= 2xy \\
2\lambda_1 xy - \lambda_2 x^2 + 2\lambda_2 xy &= 2xy \\
-2z\lambda_2 &= 2z.
\end{aligned}
$$

  Trekker vi den første likningen fra den andre, får vi at $\lambda_2 y^2 = \lambda_2 x^2$, slik at $x = \pm y$ siden $\lambda_2 \neq 0$. Vi ser at det er kun der x og y har motsatt fortegn at andre bibetingelse kan være oppfylt. Ved å sette inn i andre bibetingelse ser vi at følgende punkter er kandidater i tillegg til de vi allerede har:

$$
\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
$$

De siste fire punktene gir verdi $\frac{3}{2}$ for f, mens punktene $(0, \pm 1, 0)$,$(\pm 1, 0, 0)$ gir 1, som dermed blir punktene som minimerer avstanden til origo.

Oppgave 5.10.4

Kaller vi sidene i grunnflaten for x, y og høyden for z, blir uttrykket for overflaten

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

Bibetingelsen er $g(x, y, z) = xyz = V$, og vi har at

$$\nabla f = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y)$$
$$\nabla g = (yz, xz, xy).$$

Tilfellet der $\nabla g = 0$ er nå uinteressant (siden vi antar $x, y, z > 0$). Vi løser

$$\begin{pmatrix} y + 2z \\ x + 2z \\ 2x + 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Ganger vi opp alle likningene får vi

$$\begin{pmatrix} xy + 2xz \\ xy + 2yz \\ 2xz + 2yz \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} xyz \\ xyz \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Kombinerer vi den første og den andre likningen får vi at $x = y$. Kombinerer vi deretter den andre og den tredje likningen får vi at $x^2 = 2xz$, eller $x = 2z$. Vi har altså at $x = y = 2z$. I neste kombinerer vi dette med $xyz = V$ får vi først at $4z^3 = V$ og dermed $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{1/3}$. I neste omgang får vi at $x = y = (2V)^{1/3}$.

Oppgave 5.10.5

Funksjonen L kan nå skrives

$$L(x, y, z) = 4x + 2y + 2z,$$

og bibetingelsen er at $g(x, y, z) = xyz = 500$. Likningene for gradientene blir

$$\nabla L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

Deler vi første og andre komponent på hverandre får vi at $\frac{y}{x} = 2$, eller $y = 2x$. Deler vi første og tredje komponent på hverandre får vi at $\frac{z}{x} = 2$, eller $z = 2x$. Setter vi inn i bibetingelsen får vi $x2x2x = 500$, eller $x^3 = 125$. Altså er $x = 5$, og løsningen vår blir $(x, 2x, 2x) = (5, 10, 10)$.

Oppgave 5.10.8

a)

De partielle deriverte til funksjonen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + y^2$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} + 2y.$$