# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra. |
| Eksamensdag: | Fredag 13. juni 2014. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 13.00 |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Formelsamling. |
| Tillatte hjelpemidler: | Godkjent kalkulator. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

**FASIT**

**Oppgave 1** La $A$ være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

med redusert trappeform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Angi antallet lineært uavhengige søyler i $A$, og finn alle løsninger til ligningssettet

$x + 3y + 3z + 2w = 0$

$2x + y + 2z - 3w = 0$

$x + y + z - w = 0$

$2x + y + z - 4w = 0$

b) Skriv en av søylene i $A$ som en lineærkombinasjon av de andre.

**Oppgave 2** La $S$ være mengden

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

*(Fortsettes på side 2.)*

og la $f$ være funksjonen $f(x, y, z) = xz - y^2$. Bruk Lagrange til å finne maksimum og minimum for $f$ på $S$.

Setter vi $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ skal vi altså optimere/minimere $f$ under bibetingelsen $g = 1$. Vi har $\nabla g(x, y, z) = 2(x, y, z)$ og $\nabla f(x, y, z) = (z, -2y, x)$ og vi må løse $\nabla f = \lambda \nabla g$ under betingelsen $g = 1$. Dette leder til ligningene

(i) $z = \lambda x$

(ii) $-2y = \lambda y$

(iii) $x = \lambda z$

Dersom $y \neq 0$ må vi ha $\lambda = -2$, og siden (i) og (ii) samlet gir oss $z = \lambda^2 z$ får vi $z = 0$ og dermed også $x = 0$. Dermed må $y = \pm 1$ så $(0, 1, 0)$ og $(0, -1, 0)$ er kandidater med funksjonsverdier $-1$. I tilfellet $y = 0$ ser vi fra (i) og (iii) at $\lambda = \pm 1$. Fra bibetingelse har vi for $\lambda = 1$ at kandidatene blir $(\pm\sqrt{2}/2, \pm 0, \sqrt{2}/2)$ med funksjonsverdi $1/2$, og for $\lambda = -1$ blir kandidatene $(\pm\sqrt{2}/2, \mp 0, \sqrt{2}/2)$ med funksjonsverdi $-1/2$. Dermed er minimumsverdien $-1$ og maksimumsverdien $1/2$.

**Oppgave 3**
La $C$ være matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 7/6 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen $C$.

b) La $\mathbf{w} = (3, 0)$. Finn grensen $\lim_{n\to\infty} C^n \mathbf{w}$.

**Oppgave 4** La $f(x, y) = x^2y + yx + y^2$

a) Finn de stasjonære punktene til $f$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er maksima, minima, eller sadelpunkter.

a) Vi har

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y = y(2x + 1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x + 2y$

Dersom $y = 0$ må vi ha at $x^2 + x = x(x+1) = 0$, altså får vi punktene $(0, 0)$ og $(-1, 0)$. Dersom $2x+1 = 0$ har vi $x = -1/2$, og vi får $(-1/2)^2 - 1/2 + 2y = 0$, som gir oss punktet $(-1/2, 1/8)$.

b) Vi har at Hessematrisen er

$$H = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 2 \end{pmatrix}$$

I punktet $(0, 0)$ har vi $\triangle = -1$ så dette er et sadelpunkt. I punktet $(-1, 0)$ har vi også $\triangle = -1$, så dette er også et sadelpunkt. I punktet $(-1/2, 1/8)$ har vi $\triangle = 1/2 > 0$, og siden $2 \cdot 1/8 > 0$ er dette et lokalt minimum.

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 5** Avgjør om rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+7n}{2n^3+n}$ konvergerer eller divergerer.

**Oppgave 6** La $f(x, y, z)$ være funksjonen

$$f(x, y, z) = z + x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$$

og la $Z$ betegne mengden av punkter $(x, y, z)$ slik at $f(x, y, z) = 0$.

a) Mengden av punkter der $Z$ skjærer $(x, y)$-planet er et kjeglesnitt. Finn dette.

b) La nå $S$ være den begrensete mengden i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av $(x, y)$-planet og $Z$. Finn

$$\int\int\int_S z dx dy dz.$$

SLUTT