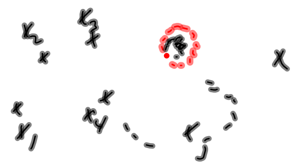
Avslutter komplettheit av $\mathbb{R}^n$

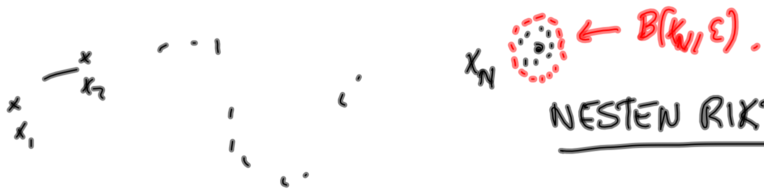
$\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x}_j \longrightarrow \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dersom det

for alle $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$\| \vec{x}_j - x \| < \varepsilon$ når $j \geq N$.



DEF: En følge $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ er en Cauchy-følge dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\| \vec{x}_k - \vec{x}_\ell \| < \varepsilon$ når $k, \ell \geq N$.



NESTEN RIKTIG.

Teorem: En følge $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ er Cauchy hviss den er konvergent, dvs. at det fins $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $\| \vec{x} - \vec{x}_j \| \to 0$ når $j \to \infty$.

Bevis: • Anta først at det fins $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $\vec{x}_j \to \vec{x}$ når $j \to \infty$

Gitt $\varepsilon > 0$.

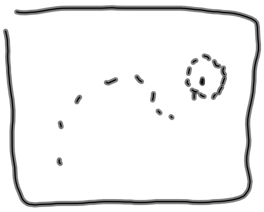
Nå fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_j - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ dersom $j \geq N$

La $k, \ell \geq N$ og se på $|x_k - x_\ell|$.

trekant-ulikheten.

$$|x_k - x_\ell| = |(x_k - x) + (x - x_\ell)|$$
$$\leq |x_k - x| + |x - x_\ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Anta at $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ er Cauchy.



<u>Husk</u>: Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delfølge.

Merk først: enhver Cauchy-følge er begrenset.

Så det fins $\{\vec{x}_{j(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ som konvergerer mot et punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Skal vise at $\vec{x}_j \to \vec{x}$ når $j \to \infty$.

Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins $N_1 \in \mathbb{N}$ s.a.
$|\vec{x}_k - \vec{x}_l| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $k, l \geq N$.

Det fins også N_2 s.a. $|\vec{x}_{j(k)} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $j(k) \geq N_2$.

La $N = \max\{N_1, N_2\}$.

For $j \geq N$ får vi $|\vec{x}_j - \vec{x}| = |\vec{x}_j - \vec{x}_{j(k)} + \vec{x}_{j(k)} - \vec{x}|$
for $j(k) \geq N$,

$$\leq |x_j - x_{j(k)}| + |x_{j(k)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

<u>DEF</u>: Et metrisk rom er <u>komplett</u> dersom enhver Cauchy-følge er konvergent.

<u>Eks</u>: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ er et metrisk rom.
Vet at $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Men det fins $q_j \in \mathbb{Q}$ s.a. $q_j \to \sqrt{2}$.
Da er $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$ som ikke konvergerer mot noe tall i $\mathbb{Q}$.

Uniform Kontinuitet

DEF: La $A \subset \mathbb{R}^n$ og $F: A \to \mathbb{R}^m$.
Vi sier at F er uniformt kontinuerlig dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ s.a. $|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| < \varepsilon$ når $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$.

Husk kont: F er kont. i $\vec{x} \in A$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ s.a. $|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| < \varepsilon$ når $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$.

F er kont. dersom F er kont. i alle punkter $\vec{x} \in A$.

Teorem: Enhver kontinuerlig funksjon på en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$ er uniformt kontinuerlig.

Husk: Vi brukte dette resultatet til å vise at alle kontinuerlige funksjoner på et rektangel i $\mathbb{R}^2$ er integrerbare.

Bevis: La $A \subset \mathbb{R}^n$ være lukket og begrenset, la $f \in C(A)$ (f kont. funksjon på A), og anta for å få en motsigelse at f ikke er uniformt kont.

Dvs: Det fins $\varepsilon > 0$ og følger $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in A$ s.a. $|\vec{x}_j - \vec{y}_j| \to 0$ når $j \to \infty$ men $|f(\vec{x}_j) - f(\vec{y}_j)| \geq \varepsilon$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

Siden A er lukket og begrenset har $\{\vec{x}_j\}$ en konvergent delfølge.

$$\vec{x}_{k(j)} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \vec{x} \in A$$

Da er også $\vec{y}_{k(j)}$ konvergent og $\vec{y}_{k(j)} \to x$ når $j \to \infty$ siden $|\vec{x}_{k(j)} - \vec{y}_{k(j)}| \to 0$ når $j \to \infty$.

apr 23-08:46

$x_{k(j)} \to x$ når $j \to \infty$

$y_{k(j)} \to x$ når $j \to \infty$.

Siden f er kont. fins $N \in \mathbb{N}$

s.a. $|f(\vec{x}_{k(j)}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$

og $|f(\vec{y}_{k(j)}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$

når $j \geq N$.

For $j \geq N$ får vi $\left| f(\vec{x}_{k(j)}) - f(\vec{y}_{k(j)}) \right|$

$$= \left| f(\vec{x}_{k(j)}) - f(\vec{x}) + f(\vec{x}) - f(\vec{y}_{k(j)}) \right|$$

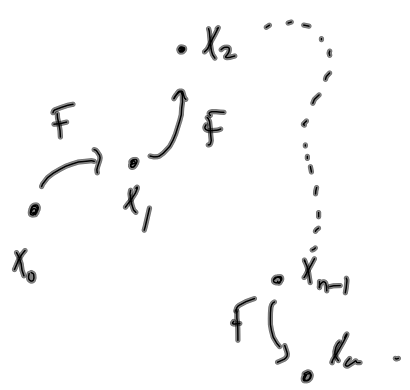
$$\leq \left| f(\vec{x}_{k(j)}) - f(\vec{x}) \right| + \left| f(\vec{x}) - f(\vec{y}_{k(j)}) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Så vi har en motsigelse. $\blacksquare$

Iterasjon av avbildinger

$$F : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{A}{\cup}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{A}{\cup}}$$



velger $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_1 := F(x_0)$

$x_2 := F(x_1) = F(F(x_0)) = F^{(2)}(x_0)$

$\vdots$

$x_n := F(x_{n-1}) = F^{(n)}(x_0)$

Dynamisk system.

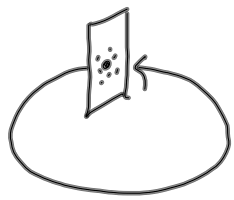
Har sett eksempel: (x,y) vektor i $\mathbb{R}^2$ er antall byttedyr (x) og rovdyr (y) i en populasjon.

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$ Ax er populasjonen etter et år.

$$\begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2\cdot x - 0{,}2\cdot y \\ 0{,}1x + 0{,}9y \end{pmatrix}.$$

Studerer iterasjon av A.

Eks:



$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Må studere $F^{(n)}$.

BANACH's FIKSPUNKTTEOREM

DEF: Dersom $A \subset \mathbb{R}^n$ og $F: A \to A$ er en avbildning med $F(\vec{x}) = \vec{x}$ for en $\vec{x} \in A$. Da sier vi at $\vec{x}$ er et fikspunkt.

DEF: En avbildning $F: A \to A$ kalles en kontraksjon dersom det fins $0 \le s < 1$ så
$$|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \le s\,|\vec{x} - \vec{y}|,$$
for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$.

Lemma: Dersom $F: A \to A$ er en kontraksjon og $\vec{x} \in A$ er et fikspunkt så har vi $F^{(n)}(\vec{y}) \to \vec{x}$ for alle $\vec{y} \in A$.

Bevis:
$$|F(x) - F(y)| \le s\cdot|\vec{x} - \vec{y}|$$
$$|\vec{x} - F(\vec{y})| \le s\,|\vec{x} - \vec{y}|$$
$$|F(\vec{x}) - F(F(\vec{y}))| \le s\,|\vec{x} - F(\vec{y})|$$
$$|\vec{x} - F^{(2)}(\vec{y})| \le s^2\,|\vec{x} - \vec{y}|$$
$$\vdots$$
$$|\vec{x} - F^{(n)}(\vec{y})| \le \underbrace{s^n\,|\vec{x} - \vec{y}|}_{\to 0,\ n \to \infty}.$$

Teorem (Banach) La A være en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$ og la $F: A \to A$ være en kontraksjon. Da fins et entydig fikspunkt $\vec{x} \in A$ for F og $F^{(n)}(\vec{y}) \to \vec{x}$ for alle $\vec{y} \in A$.

Bevis: Vi behøver bare å vise eksistens.

La $\vec{y} \in A$ være vilkårlig.
Vil vise at $F^{(n)}(\vec{y})$ konvergerer mot et punkt når $n \to \infty$.

$R := \text{diam}(A)$
La $\varepsilon > 0$.
La $N \in \mathbb{N}$ s.a. $s^N \cdot R < \varepsilon$.
For $N \leq k < l$:

$$
\begin{aligned}
& \left| F^{(k)}(\vec{y}) - F^{(l)}(\vec{y}) \right| \\
&= \left| F\left(F^{(k-1)}(\vec{y})\right) - F\left(F^{(l-1)}(\vec{y})\right) \right| \\
&\leq s \cdot \left| F^{(k-1)}(\vec{y}) - F^{(l-1)}(\vec{y}) \right| \\
&\leq s^2 \cdot \left| F^{(k-2)}(\vec{y}) - F^{(l-2)}(\vec{y}) \right| \\
&\vdots \\
&\leq s^N \cdot \left| \vec{y} - F^{(l-N)}(\vec{y}) \right| \\
&\leq s^N \cdot R < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Så $\{F^{(n)}(\vec{y})\}$ er Cauchy $\Rightarrow F^{(n)}(\vec{y})$ konvergerer mot et punkt $\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x}$ er et fikspunkt ▨

apr 23-09:49