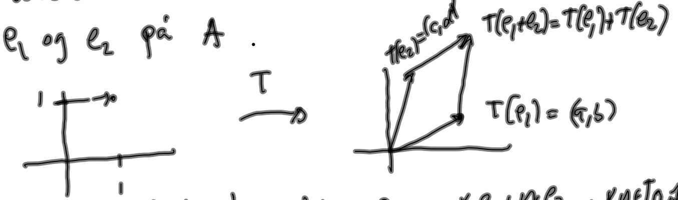
6.7.7. La A være parallellogrammed utspent av vektorene $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ som ikke er paralelle, og la $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

(a) Vis at avb. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avbildes enhetskvadratet K utspent av e_1 og e_2 på A.



Alle punkter i A kan skrives som $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$, $x,y \in [0,1]$.

$$T(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2)$$

(b) Vis at for alle kont. f så er

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \left(\iint_K f(au+cv, bu+dv)\,du\,dv \right) |\det M|.$$

Vet: $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_K f(T(u,v)) \cdot |\det T'(u,v)|\,du\,dv$

$$= |\det M| \iint_K f(T(u,v))\,du\,dv.$$

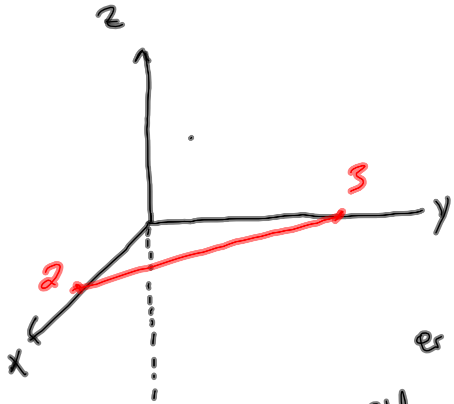
(c) Regn ut $I = \displaystyle\iint_A e^{2x-3y}\,dx\,dy$ der A er parallellogrammet utspent av $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(M) = 7$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^{2 \cdot (2u+v) - 3(-u+3v)}\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^{4u+2v+3u-9v}\,du\,dv = \underline{\underline{\frac{1}{7}(e^7-1)(e^{-7}-1)}}.$$

Beregn $\iiint_A (3y^2 - 3z)\, dx\, dy\, dz$, A er området avgrenset av koordinatplanene og planet $3x+2y-z=6$



$z = 3x+2y-6$

Snittet mellom planet og $\{z=0\}$ er linja $y = 3 - 3/2x$

siden $3x+2y \geq 0$ i første kvadrant kommer planet til å snitte den røde linja for så å ligge under (x,y)-planet når vi går i retning origo

Integralet blir: $\int_0^2 \left(\int_0^{3-3/2x} \left(\int_{3x+2y-6}^{0} 3y^2 - 3z\, dz \right) dy \right) dx$.

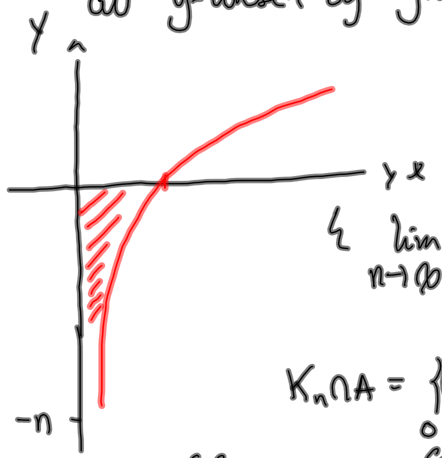
$$= \int_0^2 \left(\int_0^{3-3/2x} \left[3y^2 z - \frac{3}{2} z^2 \right]_{3x+2y-6}^{0} dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{3-3/2x} -3y^2 \cdot (3x+2y-6) + \frac{3}{2}(3x+2y-6)^2\, dy \right) dx$$

....

<u>6.8.3</u> Avgjør om $\iint_A x\,dx\,dy$ konvergerer når

A er området i 4de kvadrant avgrenset av y-aksen og grafen til $y = \ln x$.



$K_n = \{(x,y) : -n \le |x|, |y| \le n\}$.

¿ $\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n \cap A} x\,dx\,dy$?

$K_n \cap A = \{(x,y) : -n \le y \le 0\ ,\ x \le e^y\}$.

$$\iint_{K_n\cap A} x\,dx\,dy = \int_{-n}^{0}\left(\int_{0}^{e^y} x\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-n}^{0} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{e^y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-n}^{0} e^{2y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{-n}^{0}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \underbrace{e^{-2n}}\right)$$

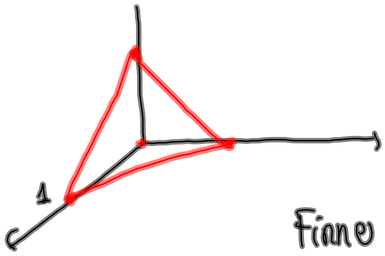
$\downarrow$ når $n \to \infty$

0

Så integralet konvergerer og $= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$.

6.9.2

(e) $\iiint_A xy \, dx\,dy\,dz$ når A er pyramiden med hjørner $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.



- Integrere m.h.p x fra 0 til 1.
- Integrere m.h.p y fra 0 til $1-x$.

Finne planet: $z = ax + by + c$.

$z = 1-x-y$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xy \, dz \right) dy \right) dx.$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \Big[xyz \Big]_0^{1-x-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot (1-x-y) \, dy \, dx.$$

$= \ldots$

6.8.6 La A være området

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$$

Avgjør for hvilke verdier av p integralet

$$I = \iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^p}\, dx\,dy$$

~~Konv~~, konvergerer.

Sjekker når

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \iint_{A\cap B(0,n)} \frac{1}{(x^2+y^2)^p}\, dx\,dy < \infty.$$

$\iint_{K_n \cap A} \ldots$

Skifter til polarkoordinater

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$I_n = \int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{1}{r^{2p}} \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_1^n r^{1-2p}\, dr.$$

To tilfeller: Dersom $p = 1$ har vi

$$I_n = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r}\, dr$$

$$= 2\pi\, \Big[\ln r\Big]_1^n = 2\pi \cdot \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

så i det tilfellet divergerer integralet.

Dersom $p \neq 1$; $I_n = \int_1^n r^{1-2p}\, dr$

$$= \left[\frac{1}{2-2p} r^{2-2p}\right]_1^n = \frac{1}{2-2p}\cdot n^{2-2p} - \frac{1}{2-2p}.$$

$p > 1$, $\to 0$; dersom $p < 1$ $\to \infty$

Så integralet konvergerer hviss $p > 1$.