Fra sist: Viste hvordan radoperasjoner endret determinanten.

Byttet to rader: Determinanten endrer da fortegn

Korollar: Hvis A har to like rader, så er $\det A = 0$

Bevis: La i og j være to rader i A som er like. Bytter vi rad i og j vil da ikke matrisen endre seg, men da må $\det(A) = -\det A$
$\Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Lemma 4.9.9 fra i går: Determinanten endre seg ikke når legger til multiplum av en rad til en annen.

Del av beviset: La oss legge s ganger rad i til rad 1
La B være den nye matrisen. Første rad i B: $a_{1j} + s a_{ij}$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{1j} B_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (a_{1j} + s a_{ij}) A_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} A_{1j} + s \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} A_{1j}}$$

$= \det A + s \cdot 0$

$= \underline{\det A}$

determinanten til en matrise der rad 1 i A byttes ut med rad i i A. rad i kommer da to ganger, slik at determinanten blir 0

eks. 4.9.11

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II + (-3)I \\ III + (-2)I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{III + (-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = B$$

B er øvretriangulær, og $\det B = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$
radoperasjonene endrer $\det(A)$ til: $\det(A) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3}$
Derfor: $\det(A) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\det A = -8}}$

Teorem 4.9.12 For en $n \times n$ matrise A så er følgende ekvivalent:

(i) $\det A \neq 0$

(ii) A er inverterbar

(iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$

(iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har $\vec{x}$ som entydig løsning

(v) søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$

(vi) A er radekvivalent med I_n

__Bevis__ Nok å vise at (i) $\Leftrightarrow$ (vi):

Vi kan skrive $B = E_k \cdots E_1 A$, B redusert trappeform til A, E_k elementære matriser.

$E_k, \ldots, E_1$ endrer determinanten ved å gange den med (-1), eller med $s \neq 0$, eller med 1

Derfor: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) = \det(E_k \cdots E_1 A) \neq 0$

(vi) er det samme som at $\det B \neq 0$ $(\det I_n = 1)$, ~~og~~ derfor $\det(A) \neq 0$

4.9.2: Determinanten til et produkt.

Vi vet, hvis E elementær matrise: E radbytte: $\det E = -1$

E ganger en rad med s: $\det E = s$

E legger til mult av en rad til en annen: $\det E = 1$

Lemma 4.9.14

Anta $C = EB$, der B er en matrise, og E en elementær matrise.
Da er $\det(C) = \det(E) \cdot \det(B)$.

Dette følger av at å gange med de tre typene elementære matriser
enten ganger determinanten med -1 ($= \det E$ for radbytter)
eller med s ($= \det E$, der vi ganger en rad med s)
eller med 1 ($= \det E$, legger mult. av en rad til en annen).

Setning 4.9.16 Vi har at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, for alle kvadratiske A, B

Bevis: Anta først at A er inverterbar.
Da er $A = E_1 \cdots E_m$ (E_i elementære, og red. trappeform $= I$)
Da er $\det(A) = \det(E_1 \cdots E_m) = \det E_1 \det(E_2 \cdots E_m) = \cdots \det(E_1) \cdots \det(E_m)$
$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_m B) = \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_m B) = \cdots = \det(E_1) \cdots \det(E_m)\det(B)$
$= \det(A)\det(B)$

Anta så at A ikke er inverterbar.
Vi skal vise at da er heller ikke AB inverterbar

A ikke inverterbar $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \det(A)\det(B) = 0$
AB heller ikke inverterbar $\Rightarrow \det(AB) = 0$
Lemma 4.9.15: AB er heller ikke inverterbar:
Bevis: A ikke inverterbar $\Rightarrow$ vi mangler en pivotsøyle.
$\Rightarrow$ en rad har ikke pivotelement
$\Rightarrow$ Finnes høyreside $\vec{b}$ slik at $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har noen løsning.
$\Rightarrow$ med $C = AB$, så har heller ikke $C\vec{y} = \vec{b}$ en løsning (ellers ville $AB\vec{y} = \vec{b}$, slik at $\vec{x} = B\vec{y}$ ville løse $A\vec{x} = \vec{b}$)
$\Rightarrow C = AB$ er heller ikke inverterbar.

Korollar 4.9.17 og 4.9.18:
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (følger av at $I = A^{-1}A \Rightarrow \det(I) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$)
$\det(A^T) = \det(A)$

$A = E_1 \cdots E_m B \Rightarrow \det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_m)\det(B)$ ← øvre triang.
$A^T = B^T E_m^T \cdots E_1^T \Rightarrow \det(A^T) = \det(E_1^T) \cdots \det(E_m^T)\det(B^T)$ ← nedre triang.
(vet allerede at $\det(E_i) = \det(E_i^T)$)

Eksempel 4.9.19 Vi har at

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} A_{1j} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

Kan også "utvikle" langs annen rad/søyle:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{ij} A_{ij}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

4.10 Vi sier at λ er en egenverdi for A $(n\times n)$
hvis det finnes en vektor $\vec{v}\neq 0$ slik at $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$
egenvektor for λ

Lemma 4.10.1 λ egenverdi for $A \iff \det(\lambda I_n - A)=0$

Bevis: $A\vec{v}=\lambda\vec{v} \iff (\lambda I_n - A)\vec{v}=\vec{0} \iff \lambda I_n - A$ ikke inverterbar
$\iff \det(\lambda I_n - A)=0$

def 4.10.3 $\det(\lambda I_n - A)$ er et polynom i λ, vi kaller denne for det karakteristiske polynomet til A, og skriver $P_A(\lambda)$ for denne. Egenverdiene λ er nullpunktene til $P_A(\lambda)$.
$P_A(\lambda)$ er et n'te gradspolynom i $\lambda \Rightarrow$ maks n røtter/egenverdier

---

eks. 4.10.2 $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ $\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix}\lambda-4 & 1\\ -5 & \lambda+2\end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = P_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda+2)+5 = \lambda^2-2\lambda-3=0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2$$

$\Rightarrow$ egenverdiene er $\lambda_1=3$, og $\lambda_2=-1$

egenvektor $\vec{v}_1$ for $\lambda=3$: $A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1$
$(3I-A)\vec{v}_1=\vec{0}$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -5 & 5 & 0\end{pmatrix} \sim \cdots \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x=y$$

y fri variabel

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}$ er en egenvektor. Vi kan feks. velge $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

egenvektor $\vec{v}_2$ for $\lambda=-1$ $(-I-A)\vec{v}_1=\vec{0}$

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

y fri variabel

$x=\frac{1}{5}y$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}y\\ y\end{pmatrix}$ er en egenvektor.
Med $y=5$ så blir $\vec{v}_2$ $\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$ en egenvektor.