- En **vinnerstrategi** er en sekvens av valg spilleren alltid kan foreta for å vinne.
- Et **perfekt** spill betyr at begge spillerne gjør de mest fordelaktige valgene.
- **Tips:** Sjekk enkle tilfeller. Let etter mønstre. Bruk symmetri. Arbeid bakover. Diskuter. Spill med andre.

## Oppgave 1.

La $A$ være en tom $n \times n$ matrise. Spiller 1 setter inn et heltall i en tom plass, deretter setter Spiller 2 inn et heltall i en tom plass. Slik fortsetter de til alle $n^2$ plassene i $A$ er utfylte. Spiller 1 vinner hvis $\det(A)$ er et oddetall og Spiller 2 vinner hvis $\det(A)$ er et partall. Finner du en vinnerstrategi for en av de to spillerne?

## Oppgave 2.

Betrakt polynomet $p(x) = x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$. Spiller 1 fyller en ikke-tom rute med et heltall, deretter fyller Spiller 2 inn et heltall i en ikke-tom rute. Slik fortsetter de til alle 4 rutene er utfylte. Spiller 1 vinner hvis $p(x)$ har ingen heltallige røtter og Spiller 2 vinner hvis $p(x)$ har minst ett heltallig rot. Finner du en vinnerstrategi for en av de to spillerne? Generelt, hvis $p(x) = x^n + \square x^{n-1} + ... + \square x + \square$, hvem forventer du vil vinne?

## Oppgave 3. (Magi?)

a) To spillere spiller et perfekt spill av bondesjakk på et $3 \times 3$ rutenett. Vis at spillet vil ende uavgjort.

b) Ni kort, nummerert fra 1 til 9, ligger synlige på et bord. Spillerne bytter på om å trekke et kort. Den første spilleren med tre kort som summeres til 15 vinner. Hva blir utfallet av spillet hvis begge spillerne spiller perfekt?

## Oppgave 4.

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$. La $\mathscr{M}$ være en mengde som består av oppgitte skalarfelt $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Spiller 1 velger $f(x, y)$ fra $\mathscr{M}$. Deretter velger Spiller 2 $g(x, y)$ fra $\mathscr{M}$. Spiller 1 vinner hvis $\mathbf{F}$ er ikke et konservativt felt, mens Spiller 2 vinner hvis $\mathbf{F}$ er et konservativt felt.

a) La $\mathscr{M} = \{\text{Reelle polynomer av to variable}\}$. Finn en vinnerstrategi for en av de to spillerne.

b) La $\mathscr{M} = \{xy, x + y, e^{xy}, e^{x+y}\}$. Finner du en vinnerstrategi for en av de to spillerne?

## Oppgave 5. (A beautiful mind)

Finn en medstudent og spill spillet Hex[1]. Kan spillet bli uavgjort? Lag vinnerstrategier for et $n \times n$ Hexbrett, der $n$ er et lite heltall[2]. Dersom man spilte på et $n \times m$ Hexbrett der $n < m$, hvem forventer du vil vinne?

## Oppgave 6. (For de tøffe)

La $p(x) = x^{2010} + \square x^{2009} + ... + \square x + 1$. Gjenta spillet fra Oppgave 2, men med reglene om at Spiller 1 vinner hvis $p(x)$ har ingen reelle røtter og at Spiller 2 vinner hvis $p(x)$ har minst ett reelt rot.

---

[1] Hex ble oppfunnet av matematikeren John Nash, som forøvrig vant Nobelprisen i økonomi for arbeidet med spillteori.

[2] For $n \gtrsim 10$ er det å gi vinnerstrategier for Hex fortsatt et uløst problem.