Løsningsforslag til prøveeksamen Mat1110 våren 2004

Oppgave 1

(**a**) Elemetære rekkeoperasjoner anvendt på den utvidete matrisen til systemet gir oss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & a & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix}.$$

Setter vi $a = 2$ og $b = 1$ får vi da matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

som gir likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 1 \\ x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_4 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1$ dvs.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

blir løsning.

Siden den utvidete matrisen til systemet er rekkeekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{pmatrix},$$

og den siste kolonnen er pivotkolonne hvis og bare hvis $a = 1$ og $b \neq 1$, mens de fire første kolonnene er pivotkolonner hvis og bare hvis $a \neq 1$, følger det at systemet har

i) entydig løsning når $a \neq 1$
ii) uendelig mange løsninger når $a = 1$ og $b = 1$ og
iii) ingen løsning når $a = 1$ og $b \neq 1$.

(**b**) La A betegne koeffisientmatrisen til likningssystemet. A er da rekkeekvivalent med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Siden denne matrisen har 4 pivotkolonner når $a \neq 1$ og 3 pivotkolonner når $a = 1$, er rangen til koeffisientmatrisen 4 når $a \neq 1$ og 3 når $a = 1$.
La

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix},$$

være kolonnene i A. Når $a = 1$ har koeffisientmatrisen rang 3, og vi ser av den rekkereduserte til A over at 1., 2. og 3. kolonne er pivotkolonner, så $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ vil være en basis for kolonnerommet. Når $a \neq 1$ er alle fire kolonner pivotkolonner og $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ er en basis. (I dette tilfelle er kolonnerommet lik hele $\mathbf{R}^4$, og en hvilken som helst basis for $\mathbf{R}^4$ vil da selvfølgelig også være en basis for kolonnerommet.)
Siden dim nullrom $A = 4 - \operatorname{rang} A$, er nullrommet$=\{\mathbf{0}\}$ når $a \neq 1$ (og $\{\mathbf{0}\}$ har ingen basis). Når $a = 1$ ser vi av den rekkereduserte til A at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er lik

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Velger vi $x_4 = t$ får vi $x_3 = -t$, $x_2 = t$, $x_1 = -t$, så vi får

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ blir basis for nullrommet.

(**c**) Vi foretar nå de samme rekkeoperasjoner på identitetsmatrisen som de vi foretok i punkt (**a**) på den utvidete matrisen til likningssystemet (og som vi derfor også foretok på koeffisientmatrisen A).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Når vi i (**a**) foretok de samme rekkeoperasjoner på koeffisientmatrisen A vil endte vi opp med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Når $a \neq 1$ kan denne matrisen rekkereduseres videre til identitetsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi foretar nå samme rekkeoperasjoner på B og ender opp med A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} & \frac{-a}{a-1} & \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ \frac{-1}{a-1} & \frac{a}{a-1} & \frac{-a}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Setter vi $a = 2$ får vi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har nå:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som nettopp er løsningen vi fikk i (**a**).

Oppgave 2.
(**a**) Vi bruker sylinderkoordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Sylinderen $x^2 - 2x + y^2 = 0$ får da likningen $r = 2\cos\theta$, $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Den delen av kula $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ der $z \geq 0$ får likningen $z = \sqrt{4 - r^2}$. Volumet blir da gitt ved

$$
\begin{aligned}
V = &\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} 2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = \\
&\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big|_0^{2\cos\theta} -\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\,d\theta = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{16}{3} - \frac{2}{3}(4 - 4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}})d\theta = \\
&\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (1-\cos^2\theta)\sin\theta)d\theta = \frac{32}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}) = \\
&\frac{32}{3}(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{32}{18}(3\pi - 4).
\end{aligned}
$$

(**b**) Flaten vi skal beregne arealet til kan for $z \geq 0$ beskrives ved parameterfremstillingen $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og $z = \sqrt{4-r^2}$ der $r \in [0, 2\cos\theta]$ og $\theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vi får da $dS = || \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{-r}{\sqrt{4-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} || dr d\theta = \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}} dr d\theta$. Arealet av hele flaten (både der $z \geq 0$ og $z \leq 0$) blir da

$$
\begin{aligned}
A =& 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big|_0^{2\cos\theta} -2\sqrt{4-r^2}\,d\theta = \\
& 8\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\theta|)d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)d\theta = 16\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \theta + \cos\theta = 8\pi - 16.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.
(**a**) Arealet av området D er lik $A(D) = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} dydx$. Vi har

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_x^{2-x^2} dydx = \int_0^1 \Big|_x^{2-x^2} y\,dx = \\
&\int_0^1 (2 - x^2 - x)dx = \Big|_0^1 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

(**b**) Randa til D (orientert mot urviseren) er $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, der C_1 er gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$, C_2 er gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (2-t^2)\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$ og C_3 er gitt ved $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{j}$, $t \in [0,2]$(der t i henholdsvis $\mathbf{r}_2$ og $\mathbf{r}_3$ på grunn av orienteringen skal gjennomløpe parameterintervallet fra 1 til 0 og fra 2 til 0). Velger vi nå et vektorfelt $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ slik at $\frac{\partial Q}{x} - \frac{\partial P}{y} = 1$ gir Greens Teorem oss at $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D dxdy = A(D)$. Vi kan f.eks. her velge $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$. Med dette valget av $\mathbf{F}$ får vi

$$
\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_0^1 t\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j})dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2},
$$

og vi får

$$\int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_1^0 t\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} + (-2t)\mathbf{j})dt = \int_1^0 -2t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Siden $\mathbf{F} = 0$ på C_3 får vi $\int_{C_3} Pdx + Qdy = 0$. Så tilsammen vi får

$$\begin{aligned} A(D) &= \oint_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy + \int_{C_3} Pdx + Qdy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Oppgave 4.
(**a**) Vi har $\mathbf{r}'(t) = 2\sin t \cos t\mathbf{i} + -2\cos t \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$. Dette gir

$$||\mathbf{r}'(t)|| = (8\sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = \cos t(1 + 8\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}.$$

Buelengden blir da:

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 + 8\sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt \underset{u=\sin t}{=} 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{8} + u^2} du \\ &\underset{\text{integralformel fra formelsamling}}{=} 2\sqrt{2}\Big|_0^1 \Big(\frac{u}{2}\sqrt{\frac{1}{8} + u^2} + \frac{1}{16}\ln(u + \sqrt{\frac{1}{8} + u^2}\,)\Big) \\ &\underset{\text{etter litt tallregning}}{=} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3 + \sqrt{8}). \end{aligned}$$

(**b**) Vi bruker forholdskriteriet. Dette gir

$$\lim_{n\to\infty} |(\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+2})/(\frac{3^n x^n}{n+1})| = \lim_{n\to\infty} |3x\frac{n+1}{n+2}| = 3|x|.$$

Vi skal ha $|3x| < 1$, dvs, $|x| < \frac{1}{3}$. Konvergensradius blir altså lik $\frac{1}{3}$. Når $x = -\frac{1}{3}$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dette er en alternerende rekke og siden $\frac{1}{n+1}$ går monotont mot null vil rekka konvergere (konvergenskriteriet for alternerende rekker).
Når $x = \frac{1}{3}$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Dette er en rekke som divergerer, noe vi kan se ved f.eks. å bruke grensesammenlikningskriteriet på denne rekka og den divergente harmoniske rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. Vi får tilsammen at rekka konvergerer når $x \in [\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$.

(**c**) Når $|x| < \frac{1}{3}$, har vi $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}$. Siden summen av en potensrekke kan integreres ledd for ledd innenfor det åpne konvergensintervallet har vi når $|x| < \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-3t} = -\frac{1}{3}\ln(1-3x).$$

Når $|x| < \frac{1}{3}$, $x \neq 0$ har vi da $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-3x)}{3x}$ og vi ser fra rekka at $S(0) = 1$. Fra Abels Teorem følger at utrykket for $S(x)$ også gjelder når $x = -\frac{1}{3}$.