Avsluttet med i går: viste at

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$ ved å radredusere:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Seksjon 4.6

$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kalles for en linearkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ hvis det finnes $x_1, \dots, x_n$ slik at $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$

$\vec{b}$ linkomb. av $A \Leftrightarrow$ kan også skrives $A\vec{x} = \vec{b}$

der $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Eks. 4.6.1 skriv $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en linear kombinasjon av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dvs. finn x_1, x_2 s.a $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b} \Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

utvidet matrise: $(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{I \leftrightarrow II \\ I \cdot (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\substack{II + (-3)I \\ III + (-2)I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I + II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{b} = (-2)\vec{a}_1 + \vec{a}_2}}$

Setning 4.6.2/4.6.3 (omformulering av 4.2.8/4.2.10)

For å undersøke om $\vec{b}$ er en lin.komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$:
Radreduser $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b})$ til en trappematrise C. Da gjelder:

(i): siste søyle i C pivotsøyle: $\vec{b}$ er ikke en linkomb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

ellers:

(ii) Alle andre søyler pivot: $\vec{b}$ kan skrives som linkomb. av $\vec{a}_i$'ene på kun en måte

(iii) En annen søyle <u>ikke</u> pivot: $\vec{b}$ kan skrives som linkomb. av $\vec{a}$'ene på uendelig mange måter.

Enhver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives som linkomb. av $\vec{a}_i$'ene hvis og bare hvis alle radene i A har pivotelementer.

$Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ er mengden av alle lineære kombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ (kalles også for spennet av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$)

Korollar 4.6.4: hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$ ($\Leftrightarrow Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$) så må vi ha at $n \geq m$.

Def. 4.6.5: Vi sier at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige hvis hver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineær kombinasjon på en unik måte. (ellers sier vi at de er lineært avhengige)

setning 4.6.6: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

$$\Updownarrow$$

(hvis $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$, så er $x_1 = \dots = x_n = 0$)

Bevis:

$\Downarrow$ Vi har at $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n$

Siden $\vec{a}_i$ er lin. uavhengige, så er denne dekomposisjonen unik, slik at $x_1 = \dots = x_n = 0$ når $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

$\Uparrow$ Anta at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ikke er lineært uavhengige.

Finnes $\vec{b}$ slik at

$$\vec{b} = y_1\vec{a}_1 + \dots + y_n\vec{a}_n \quad (\text{finnes } i \text{ slik at } y_i \neq z_i)$$
$$\vec{b} = z_1\vec{a}_1 + \dots + z_n\vec{a}_n$$

trekk fra hverandre:

$$\vec{0} = \underbrace{(y_1 - z_1)}_{x_1}\vec{a}_1 + \dots + \underbrace{(y_i - z_i)}_{x_i \neq 0}\vec{a}_i + \dots + \underbrace{(y_n - z_n)}_{x_n}\vec{a}_n$$

Har da funnet verdier $x_1, \dots, x_n, \neq 0$ s.a. $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$

("ikke A" $\Rightarrow$ "ikke B") $\blacksquare$

Setning 4.6.7:

Anta $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan radreduseres til trappematrise D

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin uavh. $\Leftrightarrow$ alle søyler i D er pivotsøyler.

Bevis: radreduser $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{0}) \rightarrow (D, \vec{0})$

alle søyler unntatt siste er pivot

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ har unik løsning $\vec{x} = (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige.

Eks: Er $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin uavh.?

Ja, siden trappematrisen har pivot i hver søyle.

Korollar 4.6.9: En lineært uavhengig delmengde i $\mathbb{R}^m$ har m eller færre elementer $(n \leq m)$

setn. 4.6.10

Anta $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$

Er mulig å finne en delmengde $\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}$ av disse, med samme spenn, ~~og~~ og som er lineært uavhengige.

Bevis: La A være $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, og radreduser denne.
Anta at pivotsøylene er $i_1, \dots, i_k$

$\vec{b}$ er i spennet av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ $\Leftrightarrow$ siste søyle etter radred. av $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b})$ er ikke en pivotsøyle.

samme radops. $\Updownarrow$

$\vec{b}$ er i spennet av $\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}$ $\Leftrightarrow$ siste søyle etter radred av. $(\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}, \vec{b})$ er ikke en pivotsøyle.

$$\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \Longleftrightarrow \vec{b} \in Sp(\underbrace{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}}_{\text{lin. uavh., siden pivot i hver søyle.}})$$

4.6.2 Baser

det 4.6.12: En basis for $\mathbb{R}^m$ er en lineært uavhengig mengde $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som utspenner hele $\mathbb{R}^m$.

Må da ha $n=m$: lin. uavh $\Rightarrow$ pivot i hver søyle $\Rightarrow m \geq n$
utspenner $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ pivot i hver rad $\Rightarrow m \leq n$ $\Big\}$ $m=n$

$(A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n))$, trappematrisen C har da pivot i hver søyle og rad.

setning 4.6.13: Hvis $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ er en basis, så er A radekvivalent med I_m

Korollar 4.6.14: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ er lineært uavh., eller utspenner hele $\mathbb{R}^m$, så er de en basis for $\mathbb{R}^m$.

Bevis: lin uavh $\Rightarrow$ pivot i hver søyle $\Rightarrow$ pivot i hver rad $\Rightarrow$ utspenner $\mathbb{R}^m$
utspenner hele $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ pivot i hver rad $\Rightarrow$ pivot i hver søyle $\Rightarrow$ lin. uavh.
$\Downarrow$
basis

setn 4.6.15 Anta at $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ lin.uavh., og at $n < m$

Vi kan finne vektorer $\vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m$ slik at $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ er en basis for $\mathbb{R}^m$.

Bevis: Bring $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til trappeform, C = trappematrisen.

alle søyler er da pivotsøyler.

det er $m-n$ rader som ikke har pivotelementer.

Lag en ny trappematrise C' ved å legge til søyler på formen $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ slik at C' har pivotelement i hver søyle og rad.

gjør så de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge.

Den nye matrisen A' har pivot i hver søyle og rad, og inneholder $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som søyler, + $n-m$ nye vektorer slik at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ er basis.