Integraler

John Rognes

15. mars 2011

Integraler

Integraler forener

- geometrisk målbare områder Ω og
- skalarfelt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definert på disse områdene.

Vi danner produktet $f(\Omega)|\Omega|$ av "verdien $f(\Omega)$ av funksjonen" og "størrelsen $|\Omega|$ av området". Mer presist deler vi området i biter $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$, danner produktet av størrelsen av hver bit med verdien av funksjonen på den lille biten, og summerer over alle områdene:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\Omega_i)|\Omega_i| \longrightarrow \int_\Omega f$$

Integralet er grenseverdien for summen når alle bitene er tilstrekkelig små.

Integrasjonsområder

For et 1-dimensjonalt område er størrelsen gitt ved en lengde.

- Et intervall $[a, b]$ i $\mathbb{R}$.
  Lengden til $[x_{i-1}, x_i]$ er $(x_i - x_{i-1})$.
- En kurve

$$\mathcal{C} = \mathbf{r}([a, b]) = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^N$$

  med parametrisering $\mathbf{r} \colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$.
  Lengden av veien fra $\mathbf{r}(x_{i-1})$ til $\mathbf{r}(x_i)$ er ca. $|\mathbf{r}(x_i) - \mathbf{r}(x_{i-1})|$.

For et 2-dimensjonalt område er størrelsen gitt ved et areal.

- Et rektangel $R = [a, b] \times [c, d]$ i $\mathbb{R}^2$.
  Arealet til $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ er $(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1})$.
- En parametrisert flate

$$T = \mathbf{r}(R) = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in R\} \subset \mathbb{R}^3$$

med parametrisering $\mathbf{r} \colon R \to \mathbb{R}^3$.
Arealet til flatebiten med hjørner $\mathbf{r}(x_i, y_j)$, $\mathbf{r}(x_{i-1}, y_j)$, $\mathbf{r}(x_i, y_{j-1})$ og $\mathbf{r}(x_{i-1}, y_{j-1})$ er ca.

$$|(\mathbf{r}(x_i, y_j) - \mathbf{r}(x_{i-1}, y_j)) \times (\mathbf{r}(x_i, y_j) - \mathbf{r}(x_i, y_{j-1}))|$$

Integrasjonsområder

Andre områder med areal:

- Et type I område A i $\mathbb{R}^2$, der $a \leq x \leq b$ og $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, for kontinuerlige $\phi_1, \phi_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Et type II område A i $\mathbb{R}^2$, der $c \leq y \leq d$ og $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, for kontinuerlige $\psi_1, \psi_2 \colon [c, d] \to \mathbb{R}$.
- Et Jordan-målbart område $A \subset \mathbb{R}^2$.

Skalar- og vektorfelt

Integranden er i utgangspunktet et skalarfelt, dvs. en funksjon $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
For passende integrasjonsområder $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ kan også integrere et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, ved å tilordne et skalarfelt $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

- For en parametrisert kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ lar vi $f(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Dette er lengden av komponenten av $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ i retning $\mathbf{r}'(t)$, ganger lengden $|\mathbf{r}'(t)|$.

Enkeltintegraler

- Riemann-integral $\int_a^b f(x)\,dx$
- Linjeintegral av skalarfelt $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ (mhp. buelengde s)
- Linjeintegral av vektorfelt $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (orientert langs parametriseringen $\mathbf{r}$)

Riemann-integral

Betrakt en partisjon $\{x_i\}_{i=0}^n$ av $[a, b]$ og en pen funksjon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Riemann-integralet er grensen for Riemann-summene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

kan beregnes vha. den anti-deriverte

$$\int_a^b f(x)\,dt \overset{sats}{=} \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

der $F'(x) = f(x)$ for alle x.

Linjeintegral av skalarfelt

Betrakt en partisjon $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ av $[a, b]$, en pen parametrisering $\mathbf{r} \colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ og en pen funksjon $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Grensen for Riemann-summene

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_i))|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \longrightarrow \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

definerer linjeintegralet $[ds = |\mathbf{r}'(t)|\, dt]$

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

der $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a, b])$. Kan beregnes ved å antiderivere $f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)$.

Lengde av en kurve

Buelengden til $\mathcal{C}$ er gitt ved integralet

$$\text{lengde}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1\, ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

der $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a, b])$. Hvis $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ er dette

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

Linjeintegral av vektorfelt

Grensen for Riemann-summene

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot (\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})) \longrightarrow \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

definerer linjeintegralet $[d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt]$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{def}{=} \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

der $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a, b])$. Kan beregnes ved å antiderivere $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

Konservative felt = gradientfelt

Når vektorfeltet $\mathbf{F} = \nabla\phi$ er gradienten til et skalarfelt $\phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{F}$ er konservativt), og $\mathcal{C}$ er en kurve fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$, er

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \overset{sats}{=} \Big[\phi(\mathbf{x})\Big]_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}^{\mathbf{x}=\mathbf{b}} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

Hvis $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (så $\mathcal{C}$ er en lukket kurve) er dette integralet 0.

Dobbeltintegraler

- Riemann-integral $\iint_R f(x,y)\,dxdy$
- Flateintegral av skalarfelt $\iint_T f\,dS$ (mhp. flateareal S)

Riemann-integral

Betrakt partisjoner $\{x_i\}_{i=0}^n$ av $[a,b]$ og $\{y_j\}_{j=0}^m$ av $[c,d]$, og en pen funksjon $f\colon R = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$. Grensen for Riemann-summene

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

kan beregnes som iktererte integraler

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

Type I og Type II områder

For A av type I er

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

For A av type II er

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

Polarkoordinater

Hvis transformasjonen $\mathbf{T} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(polarkoordinater) tar det pene området $D \subset \mathbb{R}^2$ injektivt til $A = \mathbf{T}(D) \subset \mathbb{R}^2$ er

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r\, drd\theta$$

$[dxdy = r\, drd\theta]$

Flateintegral av skalarfelt

Betrakt partisjoner $\{u_i\}_{i=0}^n$ av $[a,b]$ og $\{v_j\}_{j=0}^m$ av $[c,d]$, en pen parametrisering $\mathbf{r}\colon R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^N$ og en pen funksjon $f\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$. Grensen for Riemann-summene

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\mathbf{r}(u_i,v_j))|(\mathbf{r}(u_i,v_j)-\mathbf{r}(u_{i-1},v_j))\times(\mathbf{r}(u_i,v_j)-\mathbf{r}(u_i,v_{j-1}))|$$

definerer flateintegralet $[dS=|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}|\,dudv]$.

$$\iint_T f\,dS \stackrel{def}{=} \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}|\,dudv$$

der $T=\mathbf{r}(R)$. Kan beregnes ved å integrere iterativt.

Areal av en flate

Flatearealet til T er gitt ved integralet

$$\text{areal}(T) = \iint_T 1 \, dS = \iint_R |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}| \, dudv$$

der $T = \mathbf{r}(R)$. Hvis $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ er dette

$$\iint_R \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2} \, dudv$$

Greens teorem

La den enkle, lukkede kurven $\mathcal{C}$ være den positivt orienterte randen til et begrenset område $R \subset \mathbb{R}^2$. La $\mathbf{F} = (P, Q)$ være et pent vektorfelt på R. Da er

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy \overset{sats}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Hvis $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ parametriserer $\mathcal{C}$ for $t \in [a, b]$, er

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy &\stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))\,dt\end{aligned}$$

$[dx = x'(t)dt$ og $dy = y'(t)]$

Bruk av Greens teorem

- Hvis $\mathcal{C}$ er lukket, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$ er enklere enn P og Q, og R har en grei beskrivelse som et type I eller type II område, kan

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

  godt beregnes ved dobbeltintegralet til høyre.

- Hvis $\mathcal{C}$ har en grei parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, og skalarfeltet $f(x, y)$ kan uttrykkes på formen $f = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$, kan

$$\iint_R f\, dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy$$

  beregnes ved linjeintegralet til høyre.

Videre bruk av Greens teorem

Hvis R er et begrenset område med $\partial R = \mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_n$, der $\mathcal{C}_p$ er positivt orientert slik at R ligger på venstre side og $\mathcal{C}_n$ er negativt orientert slik at R ligger på høyre side, er

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

og

$$\int_{\mathcal{C}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Hvis vektorfeltet $\mathbf{F}$ er konservativt, eller mer generelt lukket ($\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$), er dobbeltintegralet 0 og

$$\int_{\mathcal{C}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Hvis den pene transformasjonen $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tar $(u, v) \in D$ til $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$, har Jacobi-determinant

$$\det \mathbf{T}' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

overalt ulik 0, og tar det pene området D injektivt til $A = \mathbf{T}(D)$ er

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_D f(\mathbf{T}(u, v))|\det \mathbf{T}'(u, v)|\, dudv$$

Hvis $A \subset \mathbb{R}^2$ er ubegrenset og $f: A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og ikke-negativ defineres det uegentlige integralet

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A\cap K_n} f(x,y)\,dxdy$$

der $A \cap K_n = \{(x,y) \in A \mid |x| \leq n, |y| \leq n\}$.