Prøveeksamen i MAT1110, V-15

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2, 3 osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

a) Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x, y) = x^2y^2 - 2x + 2y$$

b) Avgjør om det stasjonære punktet er et sadelpunkt, et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt.

Oppgave 2
Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 + 2n + 3}\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

Oppgave 3
Finn volumet til området som ligger over xy-planet, under flaten $z = x^2 - y^2$ og mellom planene $x = 0$ og $x = 1$.

Oppgave 4
Vis at det finnes en deriverbar funksjon $z = g(x, y)$ definert i et område rundt $(1, 0)$ slik at $g(1, 0) = 1$ og

$$g(x, y) = e^{x+2y-g(x,y)}$$

Finn $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)$.

Oppgave 5
Finn verdien til linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathcal{C}$ er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ med positiv orientering og

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(\ln(\pi + \arctan x) - (x^2 + x)y\big)\,\mathbf{i} + \big(xy^2 + e^{\sin y}\big)\,\mathbf{j}$$

Oppgave 6

I denne oppgaven er A matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ -0.1 & 1.3 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Forklar at det ikke finnes en basis av egenvektorer.

I resten av oppgaven skal vi bruke en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av vektorene $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Skriv vektorene $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ og $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som lineærkombinasjoner av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Vi skal studere to dyregrupper. Hvis antall dyr i gruppene er henholdsvis x_n og y_n etter n år, så er antallet etter $n+1$ år gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.4y_n \\ y_{n+1} &= -0.1x_n + 1.3y_n \end{aligned}$$

Starttilstanden er $x_0 = 1000$, $y_0 = 1000$.

c) Vi setter $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Vis at $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$ og forklar at det finnes tall c_n og d_n slik at $\mathbf{r}_n = c_n\mathbf{u} + d_n\mathbf{v}$. Vis at

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 1.1c_n + 0.2d_n \\ d_{n+1} &= 1.1d_n \end{aligned}$$

d) Vis at $d_n = 500 \cdot 1.1^n$ og $c_n = 1.1^{n-1}(100n + 550)$, og finn x_n og y_n.

SLUTT