Helgen 28.-29. april. Kr. 500,- . Rekker. Utøya
Buss fra Blindern lørdag kl. 08.00
Tilbake til Blindern/sentrum søndag til kl. 18

2

Setning 4.3.5 Et likningssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

med n likninger og n ukjente har en entydig løsning hviss (hvis og bare hvis) matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er radekvivalent med identitetsmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Seksjon 4.4/4.5 : Matriselikninger og inverse matriser

Likningssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan skrives som matriselikningen

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{der} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Utvidet matrise for likningssystemet:

$$B = (A, \vec{b})$$

Definisjon Hvis A er en $(n \times n)$-matrise, så er A^{-1} den inverse matrisen til A dersom

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

Kan løse matriselikningen $A\vec{x} = \vec{b}$ slik:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

$$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I} \cdot \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Setning 4.5.3

Anta at A og B er to $(n\times n)$-matrisen. Hvis

$$A\cdot B = I_n \qquad (\text{dvs. } A \text{ reverserer avbildningen } B)$$

så er A og B inverterbare, og $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

Bevis La $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ være vilkårlig. Da:

$$A\big(\underbrace{(BA)\vec{x}}\big) = (AB)\cdot(A\vec{x}) = I_n\cdot(A\vec{x}) = A\underbrace{\vec{x}}$$

må være like, for siden A reverserer B, kan ikke A avbilde to ulike vektorer på samme vektor.

Altså $(BA)\vec{x} = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, så $BA = I_n$. $\square$

Setning 4.5.4

La A være en $(n\times n)$-matrise. Følgende er ekvivalent:

(i) A er inverterbar

(ii) Matriselikningen $A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning for alle $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

(iii) A er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n

⊃: Vi kan sjekke om A er inverterbar ved å radredusere den og se om vi får I_n.

eks. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matlab}} \text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inverterbar

Metode for å finne inverse matrisen

Hvis

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}}^{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right)$$

lar seg radredusere til den reduserte trappeformen

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}}_{B}\right)$$

Så er A inverterbar, og $B = A^{-1}$.

Bevis Å finne A^{-1} betyr å finne ukjente b_{jk} slik at

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & 7 & 1 \\ & & 0 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 14 & 12 \\ 3 & -1 & 21 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 21 & 1 \end{bmatrix}$$

Da vil $b_{11}, \ldots, b_{n1}$ være løsninger av likningssystemet

$$\begin{cases} a_{11} b_{11} + \ldots + a_{1n} b_{n1} = 1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1} b_{11} + \ldots + a_{nn} b_{n1} = 0 \end{cases}$$

Så

$$\operatorname{rref}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} \end{pmatrix}$$

hvis A er inverterbar

Tilsvarende med de andre søylene i B. Metoden finner alle søylene på en gang, dvs. vi løser n likningssystemer på en gang. $\square$

eks.

$$\text{rref}\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \overset{\text{Matlab}}{\underset{\text{Tom}}{=}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Matlab:
- $B = \text{inv}(A)$ finner den inverse av A
- Løse $A\vec{x} = b$, kan da skrive
  $>> x = Bb = A^{-1} \cdot b$
- Alternativt: $>> x = A\backslash b$ gir deg x direkte.