UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Mandag 14. juni 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Bruk elementære rekkeoperasjoner til å bringe matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform. Finn så alle løsninger av likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Finn en basis for nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

og en basis for kolonnerommet til A.

(Fortsettes side 2.)

b) Finn invers til matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ og bruk B^{-1} til å løse likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

c) Finn for hvilke a og $b \in \mathbb{R}$ likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &= 5 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 3 \\ -2x_2 + (a+1)x_3 &= b^2 - 10 \end{aligned}$$

har ingen, én eller uendelig mange løsninger. Finn rangen og dimensjonen til nullrommet til matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

når a varierer.

Oppgave 2.

a) La D være området som både ligger på innsiden av kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og på innsiden av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Beregn $\iiint\limits_D z dV$.

b) La C være kurven gitt ved parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\vec{\imath} + \sqrt{2}\,t\vec{\jmath} + \ln(t)\vec{k}.$$

Finn buelengden av C mellom punktene svarende til parameterverdiene $t = 1$ og $t = e$.

Oppgave 3.

a) Finn arealet av området i $\mathbb{R}^2$ som i polarkoordinater er bestemt av ulikhetene $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$, $0 \le \theta \le 1$.

(Fortsettes side 3.)

b) For hvilke x er rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{n}$ konvergent?

c) La $f(x)$ betegne summen av rekka i b) der den konvergerer. Finn et funksjonsuttrykk for $f(x)$.

Oppgave 4.

a) La D være området i $\mathbb{R}^2$ som oppfyller ulikhetene: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $0 \leq y \leq x$.

Lag en skisse av området og beregn dobbelt integralet $I = \iint_D (x+y^2)dA$ ved å innføre polarkoordinater.

b) Beregn I ved å regne ut direkte et kurveintegral $\oint_C P dx + Q dy$ av et passelig vektorfelt $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}$ langs den stykkevis glatte kurven C som utgjør randa til D.

SLUTT