$\boxed{\text{Seksjon 4.1 - 4.3 : Gauss-elinasjon, trappeform}}$

Lineært likningssystem med m likninger og n ukjente :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Den <u>utvidede matrisen</u> til likningssystemet :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad m \times (n+1) \text{ - matrise}$$

Gauss-eliminasjon bruker tre <u>radoperasjoner</u> på likn. systemet/matrisen:

(i) Bytte to rader

(ii) Gange en rad med et tall $\neq 0$

(iii) Legge et tall ganger en rad til en annen rad.

Strategi : Lage "trapp" fra venstre med 1-ere på hjørnene (Pivot-elementer)

Vil ha 1

eks.
$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 32x_4 = 13 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 + 28x_4 = -19 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 13 \end{cases} \qquad \text{I} \leftrightarrow \text{III}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 13 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 + 28x_4 = -19 \\ 2x_1 + 9x_2 + 32x_4 = 13 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{II} + 1 \cdot \text{I} \\ \text{III} + (-2) \cdot \text{I} \end{matrix}$$

drepe

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 13 \\ 0x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 21x_4 = -6 \\ 0x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 46x_4 = -13 \end{cases} \qquad \frac{1}{3} \cdot \text{II}$$

Vil ha 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & 46 & -13 \end{array}\right) \qquad \text{III} + (-5) \cdot \text{II} \quad \sim$$

drap

(Vi går nå over til å regne med matrisen. Enklere)

Drap

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \text{I} + 3 \cdot \text{III} \\ \text{II} + (-1) \cdot \text{III} \end{matrix} \quad \sim$$

(Matrisen (og likn. systemet) er nå på trappeform)

Drap

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 26 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -3 \end{array}\right) \qquad \text{I} + (-2) \cdot \text{II} \quad \sim$$

(Vi så ha nuller over pivot-enerne)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 34 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -3 \end{array}\right)$$

(Matrisen er nå på redusert trappeform)

Oversetter til likningssystem og flytter over x_4-leddene:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 34x_4 \\ x_2 = 1 + 4x_4 \\ x_3 = -3 - 11x_4 \end{cases}$$

x_1, x_2 og x_3 : Basisvariable

x_4 : Fri variabel

Definisjon 4.2.4

En matrise er på trappeform hvis enhver rad som ikke har kun nuller, oppfyller:

(i) Første ikke-null element fra venstre er et 1-tall

(ii) Raden begynner med minst én null mer enn raden over

Søyler (rader) som inneholder et pivot-element, kalles pivot søyler (pivotrader)

Definisjon 4.3.1

At en matrise er på redusert trappeform, betyr at den er på trappeform, og at alle elementer i pivotsøylene, unntatt pivotelementene, er lik 0.

To matriser kalles radekvivalente hvis det fins en sekvens av radoperasjoner som forvandler A til B. Vi skriver da $A \sim B$.

Setning

Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på trappeform, og en på redusert trappeform.

eks. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er på trappeform, men ikke redusert trappeform

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er på redusert trappeform

MatLab: rref(M)