MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-08

Innlevering: *Senest fredag 22. februar, 2008, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk obligforside!** *Se forøvrig*

http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er grafisk fremstilling, numerisk integrasjon og enkel programmering inkludert behandling av m-filer.*

Alle delspørsmål a), b) osv. teller like mye. Du kan få poeng på et delspørsmål selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringer. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Oppgave: I hele oppgaven er $\mathcal{C}$ kurven med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Forklar at $\mathcal{C}$ er en ellipse. Finn sentrum, halvaksene og brennpunktene til $\mathcal{C}$. Bruk MATLAB til å tegne $\mathcal{C}$ med samme enhet langs begge aksene.

b) Vis at buelengden til $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 16\sin^2 t}\, dt$$

Bruk MATLAB og kommandoen `quad` til å finne en tilnærmet verdi for L.

c) Vi skal nå bruke en annen metode for å finne en tilnærmet verdi for buelengden til $\mathcal{C}$. Vi deler intervallet $[0, 2\pi]$ inn i 10 jevnt fordelte delepunkter

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_9 < t_{10} = 2\pi$$

Bruk MATLAB til å regne ut

$$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_2)| + |\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_3)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_9) - \mathbf{r}(t_{10})|$$

Forklar geometrisk hvorfor dette er en fornuftig (men grov) tilnærming til buelengden til $\mathcal{C}$.

d) Du skal nå lage en m-fil som utfører regningene ovenfor for deg. Gitt to vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ som input, skal filen returnere

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| + \cdots + |\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n|$$

der $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$. Programmet skal fungere uansett hvor mange komponenter vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ har (men du kan anta at de har like mange). Du kan ha nytte av kommandoen `length` som forteller hvor mange komponenter en vektor har. (Dersom $\mathbf{a} = (1, -2, 13, 9)$, gir altså `>> length(a)` svaret 4). Bruk programmet ditt til å gjennomføre beregningene i punkt c) med 100, 1000, 10 000, og 1 000 000 delepunkter.

e) La

$$f(t) = \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}) & \text{når } t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{når } t = 0 \end{cases}$$

og sett

$$\mathbf{s}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1]$$

Bruk programmet ditt med 100, 1000, 10 000 og 1 000 000 delepunkter for å estimere buelengden til $\mathbf{s}$. Hva tror du skjer?

Lykke til!