Teorem 6.1.7. Anta at $R = [a,b] \times [c,d]$ er et rektangel og at $f : R \to \mathbb{R}$ er integrerbar. Dersom funksjonen $y \mapsto f(x,y)$ er integrerbar for hver $x \in [a,b]$, så er funksjonen $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ integrerbar over $[a,b]$ og

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Det samme gjelder om vi bytter om på rollene til x og y.

Korollar 6.1.8 Dersom $f : R \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig så er

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Eksempel: $f(x,y) = y^2 \sin x \qquad R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2]$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 y^2 \sin x\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} y^3 \sin x \right]_0^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} \cdot \sin x\,dx = \frac{8}{3} \cdot \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} y^2 \sin x\,dx \right) dy = \int_0^2 \left[-y^2 \cos x \right]_0^{\pi/2} dy = \int_0^2 y^2\,dy = \frac{8}{3}$$

<u>Eks:</u> $f(x,y) = x^5 \cdot \cos(yx^3)$ $\quad R = [a,b] \times [c,d]$,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d x^5 \cdot \cos(yx^3)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \Big[x^2 \sin(yx^3) \Big]_c^d \, dx$$

$$= \int_a^b x^2 \sin(dx^3) - x^2 \sin(c \cdot x^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3c} \cos(cx^3) - \frac{1}{3d} \cos(dx^3) \right]_a^b$$

$= \underline{\text{ok}}$.

Dobbeltintegraler over begrensede områder

Anta at vi vil integrere en funksjon f over et begrenset område $A \subset \mathbb{R}^2$.

Velg et rektangel R s.a. $A \subset R$.

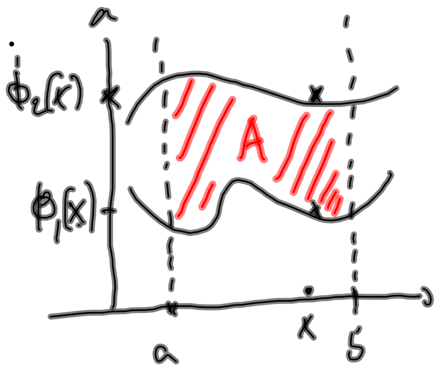
Definer en ny funksjon $f_A : R \to \mathbb{R}$ ved:

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{dersom } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{dersom } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

<u>DEF:</u> Vi sier at f er integrerbar over A dersom f_A er integrerbar over R.

Vi ser videre på bestemte typer områder.

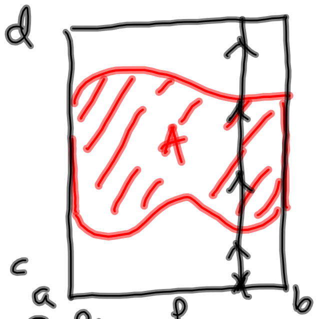
<u>Type 1</u>:



Anta at $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner s.a. $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ for alle $x \in [a,b]$.

Sett $A = \{(x,y) : a \le x \le b \text{ og } \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$.

Integrere over A: La f være en kontinuerlig funksjon på.



Definer f_A

Da er f_A integrerbar!

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f_A(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f_A(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

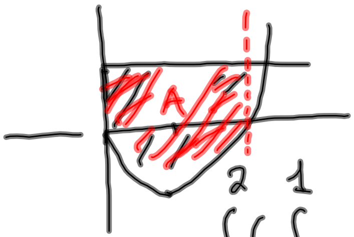
<u>Setning 6.2.1</u> Anta at A er et område av Type 1, og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Da er f integrerbar over A og

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Eksempel: $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2\ ,\ (x-1)^2-1 \le y \le 1\}$

$f(x,y) = x \cdot y$



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$

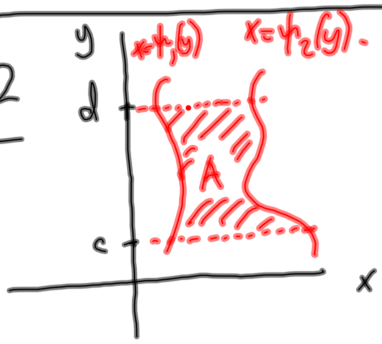
$$\int_0^2 \left(\int_{(x-1)^2-1}^{1} xy\,dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[xy^2 \right]_{(x-1)^2-1}^{1} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x - x\left(x^2-2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x - x\left(x^4-4x^3+4x^2\right) dx$$

= ok.

Type 2



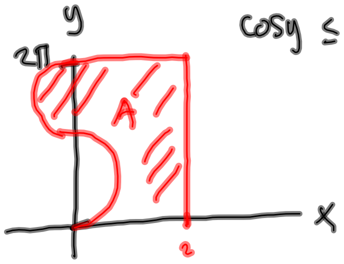
La $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner s.a. $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ for alle $y \in [c,d]$.

$$A = \{(x,y) : c \le y \le d\ ,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

Setning 6.2.2: La A være et Type 2 område og la $f : A \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da er f integrerbar på A og

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

Eksempel: $\left.\begin{array}{l} 0 \le y \le 2\pi \\ \cos y \le x \le 2 \end{array}\right\} = A.$



$$f(x,y) = x \cdot \cos^2 y .$$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\cos y}^{2} x \cos^2 y \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \cos^2 y \right]_{\cos y}^{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 y - \cos^4 y \; dy .$$

Integrer $\cos^2 y$: $(\sin y \cdot \cos y)'$

$$= \cos^2 y - \underline{\sin^2 y}$$

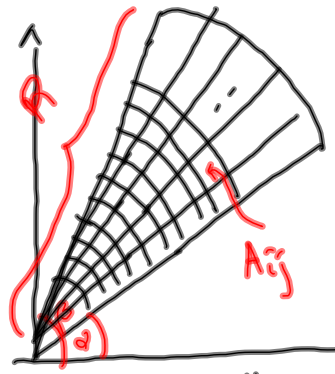
$$= \cos^2 y - (1 - \cos^2 y)$$

$$= 2\cos^2 y - 1 .$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\sin y \cdot \cos y + y \right) \right]' = \cos^2 y .$$

$\cos^4 y$; oppgave : $\sin y \cdot \cos^3 y$

Dobbeltintegraler i polarkoordinater



Vil integrere funksjoner over områder av typen

$$A=\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0\le r\le R,\ \alpha\le\theta\le\beta\}.$$

Anta gitt en kontinuerlig funksjon f på A.

Partisjon: $0\le r_0<r_1<r_2<\cdots<r_n=R$.

$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_m=\beta$

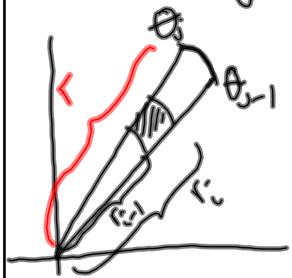
$$A_{ij}=\{(r\cdot\cos\theta, r\sin\theta) : r_{i-1}\le r\le r_i,\ \theta_{j-1}\le\theta\le\theta_j\}.$$

Dersom du velger punkter $c_{ij}\in A_{ij}$ for alle ij, burde integralet til f over A kunne tilnærmes:

$$\underline{\text{Integral}} \approx \sum_{ij} f(c_{ij})\cdot|A_{ij}|$$

arealet til A_{ij}.

Arealet til A_{ij}: $\frac{1}{2}(\theta_j-\theta_{j-1})\cdot r^2$.



Arealet av A_{ij} blir

$$\frac{1}{2}\cdot(\theta_j-\theta_{j-1})\cdot\underline{(r_i^2-r_{i-1}^2)}.$$

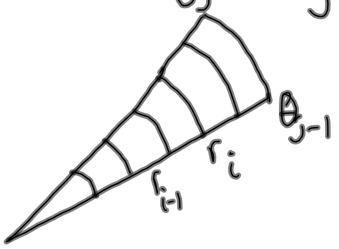
$$= \frac{1}{2}(\theta_j-\theta_{j-1})(r_i-r_{i-1})\cdot(r_i+r_{i-1})$$

$$= (\theta_j-\theta_{j-1})\cdot(r_i-r_{i-1})\cdot r_i^*,$$

der $r_i^*=\dfrac{r_i+r_{i-1}}{2}$.

Ville regne ut : $\sum_{ij} f(c_{ij})\,|A_{ij}|$.

Skriv $c_{ij} = (r_i^* \cdot \cos\theta_{ij}^*, r_i^* \sin\theta_{ij}^*)$.



$$\sum_{ij} f(c_{ij})\,|A_{ij}| = \sum_{ij} f(r_i^*\cos\theta_{ij}^*, r_i^*\sin\theta_{ij}^*)\cdot (r_i - r_{i-1})\cdot(\theta_j - \theta_{j-1})\cdot r_i^*$$

som vi kjenner igjen som en Riemann-sum for integralet

$$\int_0^R \int_\alpha^\beta f(r\cdot\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r \, dr\, d\theta.$$