Midtveis eksamen Mat1110 våren 2017

(Fasit: Se siste side)

Oppgave 1

La $\mathbf{r}(t)$ være en kurve i $\mathbb{R}^3$ der $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.
La F være en avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som er slik at
$F'(\mathbf{i}+\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sett $\mathbf{h}(t) = F(\mathbf{r}(t))$
Da blir $\mathbf{h}'(1)$ lik:

Velg ett alternativ

- $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{h}$ er ikke deriverbar for $t = 1$.
- $2\mathbf{j}$
- $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 2

Tangentplanet til ellipsoiden $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ i punktet $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$ har ligning:

Velg ett alternativ

- $z = 2 - x - \frac{y}{2}$
- $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}$
- $z = -2 + x + \frac{y}{2}$
- $z = 2 - \frac{x}{2} - y$
- $z = \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4}$

Oppgave 3

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Hvilken av påstandene under er riktige?

Velg ett alternativ

- $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningene $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{x} = (1, -5, 3)$.
- Alle punkter på den rette linja gjennom $(0, 0, 0)$ og $(1, -5, 3)$ er en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ingen løsninger.
- Alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oppgave 4

Egenverdiene til matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
er:

Velg ett alternativ

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{0, 2\}$
- $\{0, 1, -2\}$
- $\{-1, 0, 2\}$
- $\{0, 1, 2\}$

Oppgave 5

La A være en $n \times n$ matrise. Anta at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning for en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Hvilket av følgende utsagn er riktig:

Velg ett alternativ

- $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en eller ingen løsning for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ har kun en løsning.
- A er ikke inverterbar.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Søylene i A er lineært avhengige, men radene er lineært uavhengige.

Oppgave 6

Et kraftfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = y\cos(xy)\,\mathbf{i} + x\cos(xy)\,\mathbf{j}$. Da er en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ gitt ved:

Velg ett alternativ

- $-\frac{1}{2}x^2\cos(xy) + \frac{1}{2}y^2\cos(xy)$
- $\cos(xy)$
- $\cos(xy)\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}$ har ingen potensialfunksjon.
- $\sin(xy)$

Oppgave 7

La $\mathcal{C}_1$ være en kontinuerlig deriverbar kurve i $\mathbb{R}^n$ gitt ved $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0, 1]$.
La $\mathcal{C}_2$ være kurven gitt ved $\{\mathbf{r}(1-t) \mid t \in [0, 1]\}$
Hvilken av påstandene under er riktig?

Velg ett alternativ

- $\int_{\mathcal{C}_1} f\, ds = \int_{\mathcal{C}_2} f\, ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- $\int_{\mathcal{C}_1} f\, ds = -\int_{\mathcal{C}_2} f\, ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- $\int_{\mathcal{C}_1} f\, ds = \int_{\mathcal{C}_2} f\, ds = 0$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Oppgave 8

Hvilket kjeglesnitt beskriver ligningen $x^2 - 2x + 4y^2 + 16y + 13 = 0$?

Velg ett alternativ

- En ellipse med sentrum $(1, -2)$ og brennpunkter $(1 \pm \sqrt{3}, -2)$.
- En hyperbel med sentrum $(1, -2)$ og brennpunkter $(1 \pm \sqrt{3}, -2)$.
- En parabel med toppunkt $(1, -2)$ og brennpunkt $(1 + \sqrt{3}, -2)$, og styringslinje $x = 1 - \sqrt{\vphantom{3}}$
- En sirkel med sentrum $(1, -2)$ og radius $\sqrt{3}$.
- De rette linjene $x = 1 \pm \sqrt{3}(y + 2)$.

Oppgave 9

Ligningssystemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ har løsning:

Velg ett alternativ

- ○ $x = 2,\ y = 1,\ z = -1.$
- ○ $x = 2 - 2z,\ y = 1 - z,\ z$ fri.
- ○ $x = 1 + z,\ y = 1 - 2z,\ z$ fri.
- ○ Systemet har ingen løsninger.
- ○ $x = 2 - 2y - 3z,\ y$ og z frie.

Oppgave 10

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}y, \sqrt{x^2 + y^2}x)$.
Da er $\mathbf{F}'(x, y) =$

Velg ett alternativ

- ○ $\begin{pmatrix} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$
- ○ $\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
- ○ F er ikke deriverbar.
- ○ $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + xy$
- ○ $\begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

Oppgave 11

La C være kurven $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, og la $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+4y^2}}$.

Da blir $\int_C f\,ds$ lik:

Velg ett alternativ

- $(2\pi)^2$
- 0
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- $\sqrt{2\pi}$
- 2π

Oppgave 12

La matrisen A være gitt ved $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, der a er en konstant.

Hvilken av påstandene under er riktige:

Velg ett alternativ

- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for alle a.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger kun hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle $\mathbf{b}$ dersom $a = 0$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ingen løsninger for noen $\mathbf{b}$ dersom $a = 0$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger dersom $a = 0$.

Oppgave 13

Sett $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Da er $A^{10}\mathbf{c}$ lik

Velg ett alternativ

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2^{10} \\ 5^{10} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oppgave 14

Hvilken av matrisene under er ikke på trappeform:

Velg ett alternativ

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Oppgave 15

La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = ((1-t^2)\cos(t), (1-t^2)\sin(t), t) \in \mathbb{R}^3$ for $t \in [-1,1]$. Den rette linja som er tangent til $\mathcal{C}$ i punktet $(1,0,0)$ har parameterframstilling:

Velg ett alternativ

- $\mathbf{l}(\tau) = (\tau, 1, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (\tau, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (0, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (1, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (0, 1, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$

Oppgave 16

La A og B være $n \times n$ matriser, der B er en trappematrise.
Anta at A er radekvivalent med B; mao. $A \sim B$.
Da vet vi at:

Velg ett alternativ

- $\det(A) = \det(B)$
- $\det(A)$ har samme fortegn som $\det(B)$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ medfører at $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$
- $\det(A) = 0$ hvis og bare hvis $\det(B) = 0$
- $\det(AB) \neq 0$

Oppgave 17

La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [0, \pi]$,
og $\mathbf{F}$ være vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$.
Da blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

Velg ett alternativ

- $-\pi$
- $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$
- 0
- π
- $2\,\mathbf{j}$

Fasit:

31143 51111 55234 41 (altså alternativ 3 på oppgave 1, alternativ 1 på oppgave 2, osv.)