Omkretsen av en ellipse

John Rognes

22. februar 2011

Likning og parametrisering

La $a \geq b > 0$ være store og lille halvakse for ellipsen med likning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

og parametrisering

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

for $t \in [0, 2\pi]$.

Hastighet og fart

Hastigheten til et punkt som følger parametriseringen er

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)\,,$$

med farten

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,.$$

Omkretsen, I

Omkretsen til hele ellipsen er derfor

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \, .$$

Vi kan skrive om integranden som

$$a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t = a^2 - c^2 \cos^2 t = a^2(1 - e^2 \cos^2 t)$$

der $c^2 = a^2 - b^2$ er brennvidden og $e = c/a$ er eksentrisiteten til ellipsen.

Omkretsen, II

Derfor er omkretsen

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - e^2 \cos^2 t)}\, dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt \end{aligned}$$

(buelengden er den samme i hver av de fire kvadrantene).

Elliptisk integral

Vi substituerer $x = \cos t$, $dx = -\sin t\, dt$, $dt = -dx/\sqrt{1-x^2}$, og får

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt = E(e)$$

der

$$E(e) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

kalles et *komplett elliptisk integral*. Omkretsen til ellipsen med halvakser a og b er altså

$$L = 4aE(e)$$

der $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ er eksentrisiteten.

Sirkeltilfellet

For en sirkel med radius $r = a = b$ er $e = 0$, og

$$E(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \big[\arcsin x\big]_0^1 = \pi/2\,.$$

Den omvendte funksjonen til det ubestemte integralet $u = \arcsin x$, dvs. $x = \sin u$, oppfyller addisjonsformelen

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \\
&= \sin u \cdot \sqrt{1-\sin^2 v} + \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \sin v \\
&= x \cdot \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y
\end{aligned}$$

der $y = \sin v$.

Elliptiske funksjoner

Euler og Lagrange så på *elliptiske integraler*, f.eks. det ubestemte integralet

$$\int \frac{\sqrt{1 - e^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

som en funksjon $u = g_e(x)$ av x (med $u = \arcsin x$ for $e = 0$).

I 1827 begynte N. H. Abel å se på de omvendte funksjonene $x = g_e^{-1}(u)$. Disse kalles *elliptiske funksjoner*, og oppfyller liknende addisjonsformler som $x = \sin u$.

Elliptiske kurver

Når x og $u = g_e(x)$ betraktes som komplekse variable, blir det naturlige definisjonsområdet for den elliptiske funksjonen $x = g_e^{-1}(u)$ en Riemann-flate som kalles en *elliptisk kurve*. Topologisk sett er dette en torus. Teorien for elliptiske kurver er sentral i f.eks. A. Wiles' bevis av Fermats siste sats.