Løsningsforslag av eksamen Mat1110, 14/6 2004

Oppgave 1

(**a**) Vi anvender elementære rekkeoperasjoner på den oppgitte matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Av den rekkereduserte over ser vi at likningssystemet kan skrives som:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ x_3 + \ \ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Vi setter $x_4 = t$, og får $x_3 = 2 - t, x_2 = 1, x_1 = 3 - 2t$, dvs.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Av rekkereduseringen ovenfor fremgår at redusert trappeform for A er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Vi ser her at de tre første kolonnene er pivotkolonner så de tre første kolonnene i A er basis for kolonne rommet dvs. $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, er basis for kolonnerommet. Siden A er koeffisientmatrisen til det inhomogene likningsystemet, ser vi av løsningene av dette systemet at en basis for nullrommet til A er $\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(**b**) Vi anvender elementære rekkeoperasjoner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Av dette ser vi at $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Siden B er koeffisientmatrisen til likningssystemet har vi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(**c**) Vi anvender en elementære rekkeoperasjon på den utvidete matrisen til systemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 & b^2-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 & b^2-4 \end{pmatrix}.$$

Av matrisen på trappeform ser vi at siste kolonne er pivotkolonne hvis og bare hvis $a = -3$ og $b^2 - 4 \neq 0$. Vi har derfor ingen løsning når $a = -3$ og $b \neq \pm 2$. Vi ser videre at vi har kun to pivotkolonner og derfor frie variable når $a = -3$ og $b^2 = 4$ dvs. $b = \pm 2$. I dette tilfelle har vi uendelig mange løsninger. De tre første kolonnene er pivotkolonner hvis og bare hvis $a \neq -3$. I dette tilfelle har vi bare en løsning. C er koeffisientmatrisen til likningssystemet i (**c**). Av trappeformen over ser vi at matrisen C har tre pivotkolonner og derfor rang 3 når $a \neq -3$. I dette tilfelle får nullrommet dimensjon $3 - 3 = 0$ (dvs. nullrommet=$\{\mathbf{0}\}$). Når $a = -3$ har C 2 pivotkolonner derfor rang lik 2, og nullrommet får nå dimensjon 3-2=1.

Oppgave 2

(**a**) På kjeglen har vi $z^2 = x^2 + y^2$ så skjæringskurven mellom kjeglen og kula oppfyller $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$. Bruker vi sylinderkoordinater er kjeglen gitt ved $z = r$ og øvre halvkule gitt ved $z = \sqrt{1-r^2}$. Grensene for integralet blir derfor $r \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$, $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi får derfor

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Big|_r^{\sqrt{1-r^2}} \frac{z^2}{2} r\,dr\,d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{r}{2} - r^3)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4})\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

(**b**) Vi har $\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$, som gir oss

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{(t + \frac{1}{t})^2} = t + \frac{1}{t}.$$

Buelengden er derfor gitt ved

$$l = \int_1^e (t + \frac{1}{t})dt = \Big|_1^e \frac{t^2}{2} + \ln t = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 + 1).$$

Oppgave 3

(**a**) Arealet av området er gitt ved

$$A = \int_0^1 \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta = \Big|_0^1 \frac{1}{2} \arctan\theta = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}.$$

(**b**) Vi bruker forholdskriteriet for å finne konvergensradien:

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} x^{2n+2}}{n+1} \Big/ \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{n} \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \frac{n}{n+1} 2x^2 \Big| = 2x^2.$$

Vi skal ha $2x^2 < 1$ som gir $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs. konvergensradien blir $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har da rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Siden denne rekka er alternerende og $\frac{1}{n}$ konvergerer monotont mot 0, blir rekka konvergent når $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tilsammen får vi konvergens når $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ og divergens ellers.

(**c**) For $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ er $f(x)$ deriverbar og den deriverte er lik summen av den potensrekken vi får ved å derivere ledd for ledd. Dette gir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 2x^{2n-1} = -\frac{4x}{1+2x^2}.$$

(Det siste følger av at rekka vi får ved leddvis derivasjon er en geometrisk rekke der første ledd er $-4x$ og forholdet mellom leddene er $-2x^2$). Vi får nå for $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x -\frac{4t}{1+2t^2} dt = \Big|_0^x -\ln(1+2t^2) = -\ln(1+2x^2).$$

Siden rekka konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet følger det fra Abels teorem at formelen for $f(x)$ også gjelder når $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Oppgave 4

(**a**) Området blir en 1/8 av sirkelen $x^2 + y^2 \leq 1$ svarende til $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (Lag tegning selv). Innfører vi polarkoordinater får vi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r\cos\theta + r^2 \sin^2\theta) r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{8}(1 - \cos 2\theta)) d\theta =$$

$$\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{8}\theta - \frac{1}{16}\sin 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}.$$

(**b**) Orienterer vi C mot urviseren og velger $\mathbf{F}$ slik at $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x + y^2$, følger det av Greens teorem at $I = \oint_C Pdx + Qdy$. Vi kan f.eks velge $Q(x, y) = \int (x + y^2)dx = \frac{x^2}{2} + xy^2$ og velge $P = 0$. C består av tre glatte kurver, C_1 gitt ved $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i}$ der $t \in [0, 1]$, C_2 gitt ved $\mathbf{r}_2(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ der $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ og C_3 gitt ved $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ der $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (her skal parameteren på grunn av orienteringen gjennomløpe intervallet fra $\frac{\sqrt{2}}{2}$ til 0)
Siden $P = 0$ skal vi altså regne ut $\oint_C Qdy$. På C_1 er $y(t) = 0$, så $dy = y'(t)dt = 0$ og derfor $\int_{C_1} Qdy = 0$.
Vi har videre:

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_2} Qdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\cos^2 t}{2} + \cos t \sin^2 t) \cos t dt = \\
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2}(1 - \sin^2 t) \cos t + \frac{1}{4} \sin^2 2t) dt = \\
&\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^3 t}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8}(1 - \cos 4t)dt = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{24} + \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} = \\
&\frac{5\sqrt{2}}{24} + \frac{\pi}{32},
\end{aligned}
$$

og vi har tilslutt:

$$
\int_{C_3} Qdy = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 (\frac{t^2}{2} + t^3)dt = \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{24} - \frac{1}{16}.
$$

Tilsammen får vi

$$
\begin{aligned}
&I = \oint_C Qdy = \int_{C_1} Qdy + \int_{C_2} Qdy + \int_{C_3} Qdy = \\
&0 + \frac{5\sqrt{2}}{24} + \frac{\pi}{32} - \frac{\sqrt{2}}{24} - \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16},
\end{aligned}
$$

som er lik svaret vi fikk i (**a**).