LØSNINGSFORSLAG FOR NOTATET OM BASISER
MAT1110 VÅR 06

STEFFEN GRØNNEBERG*

8. februar 2006

Etter forespørsel om løsningsforslag grunnet manglende anledning til å være på forelesningen mandag 6. februar lagde jeg følgende notat. Merk at jeg skriver kolonnevektorer som transponerte radvektorer.

Oppgave 1

Merk at $\vec{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T \in \mathbf{R}^n$ kan skrives som $b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + \ldots + b_n\vec{e_n}$. Dermed utspenner vektorene hele $\mathbf{R}^n$. Anta så at $x_1, \ldots, x_n$ er tall slik at $x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n} = \vec{0}$. Men $x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = \vec{0}$ gir at alle $x_1, \ldots, x_n$ er null.

Oppgave 2

Radreduserer matrisen som har $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ og $\vec{v_4}$ som kolonner:

```
>> rref([2, 1, 3, 4; -1, 2, 6, -1; 4, 3, -1, 2; -1, 2, 3, -4])

ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

Fra Teorem 1 i notatet er dermed $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ og $\vec{v_4}$ en basis for $\mathbf{R}^4$.

Oppgave 3

Radreduserer matrisen som har $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ og $\vec{v_4}$ som kolonner:

```
>> rref([-1, 1, 3, 4; 4, 2, -1, -1; -1, 2, 3, 2])

ans =

    1.0000         0         0    1.3636
         0    1.0000         0   -2.0000
         0         0    1.0000    2.4545
```

Fra algoritmen som brukes i beviset av Teorem 3 følger det at $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ og $\vec{v_3}$ utspenner $\mathbf{R}^3$.

*steffeng@math.uio.no

Oppgave 4

La $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være definert som i slutten av notatet. Anta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ og $s, t \in \mathbf{R}$. Da finnes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ og $y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ slik at

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v_i} = x_1 \vec{v_1} + \ldots + x_n \vec{v_n} \\ \vec{b} &= \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v_i} = y_1 \vec{v_1} + \ldots + y_n \vec{v_n}\end{aligned}$$

siden $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ er en basis for $\mathbf{R}^n$. Siden $\vec{a}, \vec{b}$ og s, t var vilkårlig valgt er avbildningen T lineær hvis $T(s\vec{a} + t\vec{b}) = sT(\vec{a}) + tT(\vec{b})$. Dette er sant siden

$$T(s\vec{a}+t\vec{b}) = T\left(s\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{v_i} + t\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{v_i}\right) = T\left(\sum_{i=i}^{n}(sx_i + ty_i)\vec{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}(sx_i+ty_i)\vec{w_i} = sT(\vec{a})+tT(\vec{b}),$$

hvor nest siste likhet følger fra definisjonen til T. Videre er $\vec{v_i} = 0\vec{v_1} + \ldots + 1\vec{v_i} + \ldots + 0\vec{v_n}$, og dermed er $T(\vec{v_i}) = \vec{w_i}$ per definisjon av T.

Oppgave 5

Vektorene $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ er lineært avhengige fra

```
>> rref([2, -1, 0; -3, 2, 1; 1, -3, -5])

ans =

     1     0     1
     0     1     2
     0     0     0
```

Så $\vec{v_3} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2}$. Dermed utspenner $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ bare et todimensjonalt plan, og ikke hele $\mathbf{R}^3$.

Anta at $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er en lineæravbildning med

$$T(\vec{v_1}) = w_1 = [1, 1, 1]^T, T(\vec{v_2}) = w_2 = [-1, 3, 4]^T \text{ og } T(\vec{v_3}) = w_3 = [1, 0, -1]^T.$$

Merk at $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ er lineært uavhengig. Fra lineariteten til T og den lineære avhengigheten til $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ følger det at

$$T(\vec{v_3}) = T(\vec{v_1} + 2\vec{v_2}) = T(\vec{v_1}) + 2T(\vec{v_2}) = \vec{w_1} + 2\vec{w_2} = [-1, 7, 9]^T \neq \vec{w_3}.$$

Dette er en motsigelse, og dermed må antagelsen om at T er en lineæravbildning være feil.

Oppgave 6

Anta at $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en lineæravbildning gitt av dens verdier på punktene $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$som er lineært avhengige. Velg så verdiene $\vec{w_1} = T(\vec{v_1}), \ldots, \vec{w_p} = T(\vec{v_p})$ slik at de er lineært uavhengige, (f.eks ved enhetsvektorene fra oppgave 1). Siden $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ er lineært uavhengige finnes ikke-nulle $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{R}^n$ slik at $\sum_{i=1}^{p} x_i\vec{v_i} = \vec{0}$. Fra den antatte lineariteten til T er dermed også $\sum_{i=1}^{p} x_i\vec{w_i} = \vec{0}$, som motsetter at $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_p}$ er lineært uavhengige.

Alternativ: Anta at $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en lineæravbildning gitt av dens verdier på punktene $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$. Hvis $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ er lineært avhengige følger fra Teorem 7 i Lay at minst en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre. Dermed finnes en $1 \geq i \geq p$ slik at $\vec{v_i} = \sum_{k\neq i} x_k\vec{v_k}$ for skalarer x_k. Fra den antatte lineariteten til T er dermed $T(\vec{v_i}) = \sum_{k\neq i} x_k\vec{w_k}$. Velg dermed $\vec{w_i}$ forskjellig fra denne summen, og man får en motsetning.

Alternativ (muligens litt mer konstruktivt, men bruker bare teknikken til beviset av Teorem 7) : Anta at $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en lineæravbildning gitt av dens verdier på punktene $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$. Hvis $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ er lineært avhengige vil det eksistere $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{R}$ som ikke alle er null, slik at $x_1\vec{v_1} + \ldots + x_p\vec{v_p} = \vec{0}$. Anta at $x_1 \neq 0$ (og re-indekser elementene hvis dette ikke er sant). Da er $\vec{v_1} = -\sum_{i=2}^{p} \frac{x_i}{x_1}\vec{v_i}$. La $T(\vec{v_i}) = \vec{w_i} \in \mathbf{R}^m$ være vilkårlige og gitt for $2 \leq i \leq p$. Fra den antatte lineariteten til T, er

$$T(v_1) = T(-\sum_{i=2}^{p} \frac{x_i}{x_1}\vec{v_i}) = -\sum_{i=2}^{p} \frac{x_i}{x_1}\vec{w_i}.$$

Velg dermed $\vec{w_1}$ forskjellig fra denne summen, for eksempel $T(\vec{v_1}) = \vec{w_1} = -\sum_{i=2}^{p}(\frac{x_i}{x_1} + 1)\vec{w_i}$. Dette er en motsigelse, og dermed må antagelsen om at T er en lineæravbildning være feil.

Oppgave 7

Skriv A_p på redusert trappeform. Siden søylene er lineært uavhengige, er det et pivotelement i hver søyle, og den reduserte trappematrisen har derfor 1'ere på hoveddiagonalen. Fyll ut med søyler slik at den reduserte trappematrisen blir identitetsmatrisen. Bruk trappeoperasjonene i revers. Utvidelsen du nå har fått av A_p gir deg vektorene du er på jakt etter.

Alternativ: Anta $A_p = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ er en lineært uavhengig mengde i $\mathbf{R}^n$. Hvis den utspenner $\mathbf{R}^n$ er dette en basis. Anta dermed at dette ikke er tilfellet. Siden $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ ikke utspenner $\mathbf{R}^n$ kan man finne en vektor $\vec{v_{p+1}}$ som er lineært uavhengig av A_p. Definér $A_{p+1} = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}, \vec{v_{p+1}}\}$, og sjekk om denne mengden utspenner $\mathbf{R}^n$ (f.eks via radredusering). Hvis A_{p+1} ikke utspenner $\mathbf{R}^n$, fortsett rekursivt. Kall hver iterasjon A_{p+m}.

Prosessen må være endelig og slutte når $p + m = n$: Den lineære uavhengigheten gir pivotelementer til den radreduserte matrisen i hver søyle, og dermed blir denne radreduserte matrisen nettopp identitetsmatrisen når $p + m = n$. Tallet n kalles dimensjonen til $\mathbf{R}^n$, og er unikt nettopp av det foregående argumentet.

Oppgave 8

Anta at $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbf{R}^n$, og la $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_p} \in \mathbf{R}^m$. Vil finne en $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ slik at T er en lineær avbildning og $T(\vec{v_1}) = \vec{w_1}, \ldots, T(\vec{v_n}) = \vec{w_n}$. Utvid samlingen med lineært uavhengig vektorer $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ til en basis for $\mathbf{R}^n$, hvis mulighet ble bevist i forrige oppgave. Kaller disse (eventuelle) nye elementene $\vec{v_{p+1}}, \ldots, \vec{v_n}$. Velg så vilkårlige elementer i $\mathbf{R}^m$ som avbildningen T skal føre disse nye elementene til. Fra oppgave 4 vet vi at dette er en lineær avbildning med de ønskede egenskapene.