Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 15-19/3

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

March 18, 2010

Oppgave 6.11.3

Kjegleflaten $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ sier i kulekoordinater at

$$\begin{aligned}\rho\cos\phi = z &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{3}} \\ &= \frac{\rho\sin\phi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Med andre ord er $\tan\phi = \sqrt{3}$, og dermed er $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumet blir dermed

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^R \rho^2\sin\phi d\rho\right]d\phi\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}R^3\sin\phi d\phi\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}R^3\cos\phi\right]_0^{\pi/3}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{6}R^3\right)d\theta \\ &= 2\pi\frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

Oppgave 6.11.5

Jacobimatrisen til variabelskiftet $(u,v,w) = \mathbf{T}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$ blir $\mathbf{T}'(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$, og Jacobideterminanten blir $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{abc}$, slik at $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$. Volumet til området vårt blir derfor , etter variabelskiftet,

$$\int\int\int_V \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = abc\int\int\int_V dudvdw,$$

der V er kula $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Vi vet at volumet av denne kula er $\frac{4}{3}\pi$ (som vi kunne vise på nytt her ved å bruke kulekoordinater). Volumet av ellipsoiden blir derfor $\frac{4}{3}\pi abc$.

Oppgave 6.11.9

Skjæringen mellom paraboloiden (venstre ulikhet) og kula (høyre ulikhet) får vi ved å løse

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ r^2 &= \sqrt{2 - r^2} \\ r^4 &= 2 - r^2 \\ r^4 + r^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

som gir at $r = 1$ som eneste mulige løsning. Det er videre klart at for $r < 1$ er ulikheten i oppgaven oppfylt. Volumet er da gitt ved trippelintegralet

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3 - r\sqrt{2 - r^2} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{3}(2 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) d\theta \\ &= \left(\frac{7}{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

Oppgave 6.11.11

Vi ser på området avgrenset av flatene $z = 6 - x^2 - y^2$, og $z = x^2 - 4x + y^2$.

a)

Skjæringen mellom de to flatene finner vi ved å løse $6 - x^2 - y^2 = x^2 - 4x + y^2$, som koker ned til at $2x^2 - 4x + 2y^2 = 6$. Fullfører vi kvadratene finner vi at $2(x-1)^2 + 2y^2 = 8$, eller $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Med andre ord avgrenses området $S = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ av de to flatene. I dette området er det lett å sjekke at $z = 6 - x^2 - y^2$ ligger øverst (sjekk for eksempel ved å sette inn $(x, y) = (0, 0)$, som ligger i S). Derfor blir integralet

$$\begin{aligned} \int\int\int_R y dz dx dy &= \int\int_S \int_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} y dz dx dy \\ &= \int\int_S [yz]_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} dz dx dy \\ &= \int\int_S \left(6y - yx^2 - y^3 - yx^2 + 4xy - y^3 \right) dx dy \\ &= \int\int_S \left(6y - 2x^2 y - 2y^3 + 4xy \right) dx dy. \end{aligned}$$

b)

Vi regner ut integralet ved å sette $u = x - 1$, $v = y$ (Jacobideterminanten blir da 1). Setter vi $D = \{u^2 + v^2 \leq 4\}$ får vi

$$\begin{aligned}
\int\int_S \left(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy\right) dxdy &= \int\int_D \left(6v - 2(u+1)^2v - 2v^3 + 4(u+1)v\right) dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8v - 2v(u^2+v^2)\right) rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8r^2\sin\theta - 2r^4\sin\theta\right) rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3}r^3\sin\theta - \frac{2}{5}r^5\sin\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}2^3 - \frac{2}{5}2^5\right)\sin\theta d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c)

Med parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2\sin t, 1 - 4\cos t).$$

av C regner vi ut at

$$\begin{aligned}
6 - x^2 - y^2 &= 6 - (1 + 2\cos t)^2 - 4\sin^2 t \\
&= 6 - 1 - 4\cos t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z \\
x^2 - 4x + y^2 &= (1 + 2\cos t)^2 - 4(1 + 2\cos t) + 4\sin^2 t \\
&= 1 + 4\cos t + 4\cos^2 t - 4 - 8\cos t + 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z.
\end{aligned}$$

Dermed er det klart at den parametriserte kurven ligger langs skjæringskurven mellom de to kurvene. Siden skjæringskurven er lukket, og den parametriserte kurven beskriver en lukket kurve som ikke skjærer seg selv, så er det klart at den parameteriserte kurven inneholder hele skjæringskurven. Setter vi $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ får vi at

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (1 - 4\cos t, 2\sin t, 1 + 2\cos t) \\
\mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t, 4\sin t),
\end{aligned}$$

og dermed får vi

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(8\cos t\sin t - 2\sin t + 4\sin t\cos t + 4\sin t + 8\sin t\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(20\cos t\sin t + 2\sin t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(10\sin 2t + 2\sin t\right) dt = 0.
\end{aligned}$$