5.2 : Kompletthet av $\mathbb{R}^m$

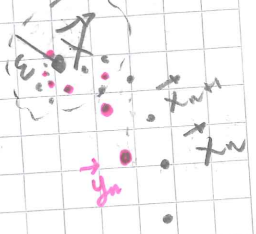
1.) Set. 5.2.2: Anta $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer mot $\vec{x}$. Da konvergerer også alle delfølger mot $\vec{x}$.

Bf: La $\{\vec{y}_n\} \subseteq \{\vec{x}_n\}$ være delfølge og la $\varepsilon > 0$ være gitt. Siden $\vec{x}_n \to \vec{x}$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\forall\, n \geq N$ er $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$. Siden $\{\vec{y}_n\} \subseteq \{\vec{x}_n\}$ fins det en $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ s.a. $\forall\, n \geq \tilde{N}$ er $\vec{y}_n = \vec{x}_m$ s.a. $m \geq N$. Men da er $\forall\, n \geq \tilde{N}$

$$\|\vec{y}_n - \vec{x}\| = \|\vec{x}_m - \vec{x}\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\vec{y}_n \to \vec{x}. \quad \blacksquare$$

def. konvergens



2.) Bolzano Weierstrass i $\mathbb{R}^m$ for generell m:

I $\mathbb{R}^m$ kan man (tilsvarende som i $\mathbb{R}^2$), dele rommet opp i (generaliserte) terninger på en finere og finere måte. Slik kan man alltid kan finne en følge $(a_{1i}, \dots, a_{mi})$ tilsvarende hjørnekoordinaten med minst verdi i alle komponenter i et rektangel som inneholder ∞ mange av punktene. Velger disse terningene s.a. bredden i alle dimensjoner $\to 0$. Da er hver av følgene a_{ki} voksende & begrenset $\Rightarrow$ konvergent mot et pkt. a_i. Dermed kan vi finne en delfølge $\{\vec{x}_n\}$ der alle komponenter $\to a_i \Rightarrow \vec{x}_n \to \vec{a} := (a_1, \dots, a_m)$.