MAT 1110: Løsningsforslag til obligatorisk oppgave 2, V-07

Oppgave 1: a) Vi finner først de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + xe^{-x^2-y^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2-y^2}(-2y) = -2xye^{-x^2-y^2}$$

Siden $e^{-x^2-y^2}$ aldri er null, er de stasjonære punktene gitt ved

$$1-2x^2 = 0 \qquad \text{og} \qquad 2xy = 0$$

Den første ligningen har løsningene $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, og setter vi dette inn i den andre, får vi $y = 0$. Vi har derfor to stasjonære punkter $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ og $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

b) Vi regner først ut de annenderiverte ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big((1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\big) = -4xe^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$= -4xe^{-x^2-y^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

(siden vi vet at $1-2x^2 = 0$ i de punktene vi er interesert i, lønner det seg ikke å trekke sammen mer).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big((1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\big) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$= -2y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-2xye^{-x^2-y^2}\big) = -2xe^{-x^2-y^2} - 2xye^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$2x(2y^2-1)e^{-x^2-y^2}$$

Vi bruker nå annenderiverttesten i de to stasjonære punktene:

<u>Punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$</u>: I dette punktet har vi

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 4e^{-1}$$

Siden $\Delta > 0$ og $A < 0$, er $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et lokalt maksimum.

<u>Punktet $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$:</u> I dette punktet har vi

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 4e^{-1}$$

Siden $\Delta > 0$ og $A > 0$, er $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et lokalt minimum (det er også mulig å se dette direkte fra forrige punkt ved å bruke at $f(-x, y) = -f(x, y)$).

c) Vi legger merke til at den lokale maksimumsverdien $M = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.429$ er større enn null, og at den lokale minimumsverdien $m = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -0.429$ er mindre enn 0. Bytter vi til polarkoordinater, ser vi dessuten at $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta e^{-r^2}$. Siden $\lim_{r\to\infty} re^{-r^2} = 0$, betyr dette at vi kan få tallverdien til f så liten vi vil ved å velge (x, y) tilstrekkelig langt fra origo. Spesielt kan vi velge R så stor at dersom (x, y) ligger på eller utenfor sirkelen med radius R om origo, så er $m < f(x, y) < M$. Dette betyr at eventuelle (globale) maks.- og min.-punkter må ligge i sirkelskiven $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Ved ekstremalverdisetningen (Theorem 2 i seksjon 13.1 hos Adams) må f ha et maks.- og min.-punkt i S, og de eneste kandidaten er "våre" punkter $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ og $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. De er altså globale maks.- og min.-punkter på S og dermed på hele $\mathbb{R}^2$.

d) Det er mange muligheter avhengig av hvilket utseende du ønsker. Følgende sekvens gir nivåkurver fra -0.4 til 0.4 med mellomrom på 0.1. Kommandoen `clabel` får MATLAB til å skrive verdier på nivåkurvene.

```
>> x=-2:0.1:2;
>> y=-2:0.1:2;
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
>> clabel(contour(x,y,z,-0.4:0.1:0.4))
```

Når kommandoene ovenfor er utført, behøver du bare skrive

```
>> mesh(x,y,z)
```

for å få MATLAB til å tegne grafen.

e) Med kommandoene vi allerede har utført (i forrige punkt), behøver vi bare å legge inn vektorfeltet $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ før vi bruker `>> quiver`. Det gjør vi med kommandoene

```
>> u=(1-2.*x.^2).*exp(-x.^2-y.^2);
>> v=-2.*x.*y.*exp(-x.^2-y.^2);
>> quiver(x,y,u,v)
```

Siden gradienten peker i den retningen funksjonen vokser raskest, peker vektorfeltet mot maksimumspunktet og fra minimumspunktet. Disse punktene er derfor lette å lokalisere på figuren.

f) Bruker vi polarkoordinater, får vi (husk "Jacobi-faktoren" r):

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos\theta e^{-r^2}\, d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^\infty \left[r^2 \sin\theta e^{-r^2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty r^2 e^{-r^2}\, dr$$

Vi bruker delvis integrasjon til å omdanne det siste integralet til standardintegralet $\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr$. Setter vi $u = r$, $v' = re^{-r^2}$, får vi $u' = 1$, $v = -\frac{1}{2}e^{-r^2}$. Dette gir

$$\int r^2 e^{-r^2}\, dr = -\frac{r^2}{2}e^{-r^2} + \frac{1}{2}\int e^{-r^2}\, dr$$

Siden $\lim_{r\to\infty} r^2 e^{-r^2} = 0$, får vi

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

der vi har brukt resultatet fra eksempel 4 i Adams' seksjon 14.4.

Kombinerer vi alle våre resultater, har vi dermed

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}$$

g) Vi bruker kommandoen `dbquad` over kvadratet med hjørner i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. I tillegg må vi "nulle ut" funksjonen på den delen av kvadratet som ikke er med i integrasjonsområdet. Siden den delen vi er interessert i, ligger nedenfor linjen $y = x$ og innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, får vi

```
>> dblquad(@(x,y) x.*exp(-x.^2-y.^2).*(x.^2+y.^2<1).*(y<x),0,1,0,1)

ans =
      0.1338
```

Oppgave 2: a) m-filen kan f.eks. se slik ut

```
function [x,y]=oblig2(u,v,N)
x(1)=u;
y(1)=v;
for n=1:N
    x(n+1)=sin(x(n)+y(n))/2;
    y(n+1)=cos(x(n)+y(n))/2;
end
```

b) Bruk kommandoen `>> oblig2(1,-1,20)` (forutsatt at filen din heter `oblig2.m`)

c) Kommandoen `rand` velger et tilfeldig tall i intervallet $[0, 1]$. For å få tilfeldige tall i intervallet $[-2.5, 2.5]$, kan du skrive

```
>> u=5*rand-2.5;
>> v=5*rand-2.5;
```

Det første plottet kan du nå lage slik

```
>> u=5*rand-2.5;
>> v=5*rand-2.5;
>> [x,y]=oblig2(u,v,20);
>> subplot(3,2,1)
>> plot(x,y)
>> axis([-2.5,2.5,-2.5,2.5])
```

d) Tar vi grenseverdien på begge sider av ligningen $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$, får vi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\mathbf{u}_n) = \mathbf{F}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n) = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

der vi har brukt kontinuitet av $\mathbf{F}$ til å flytte grenseverdien innenfor $\mathbf{F}$ (dette følger blant annet fra setning 2.2.5 i *Flervariabel analyse og lineær algebra*). Siden $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}$, er påstanden bevist.