Litt mer om determinanter

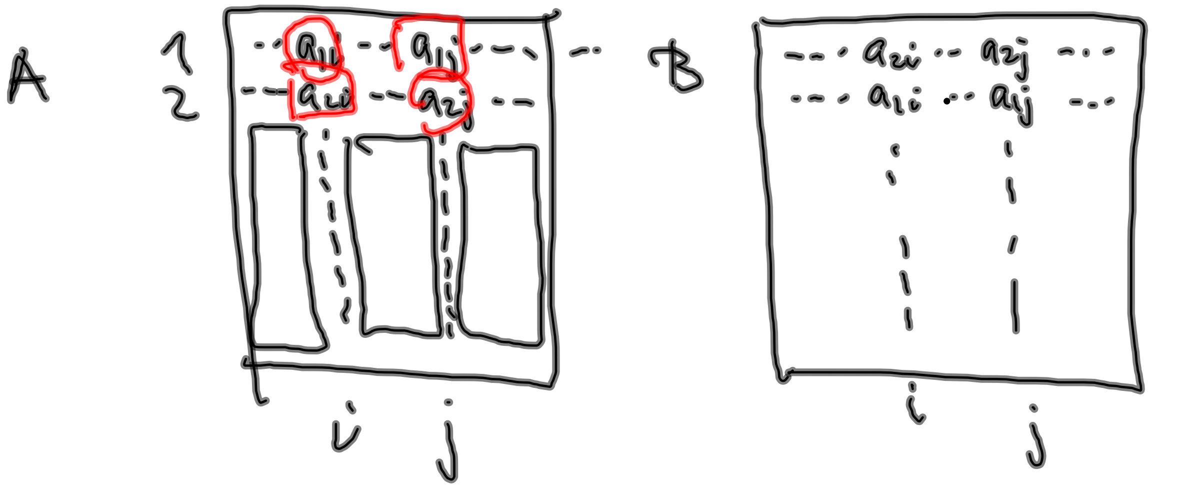
Lemma 4.9.12 La E være en elementær matrise og B en vilkårlig matrise, (slik at EB er resultatet av den samme radoperasjonen på B). Da er

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Det gjenstod å vise:

Lemma 4.9.4 La A være en $n \times n$ matrise og la B være gitt ved å bytte om to rader i A. Da er $\det(B) = -\det(A)$.

Bevis (Tilfellet der vi bytter om 1. og 2. rad) (+ induksjon på n)



La A_{ij} være determinanten til $(n-2)\times(n-2)$ matrisen som står igjen når vi stryker 1. og 2. rad og i-te og j-te søyle.

$$\det(A) = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j+1}(a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i})A_{ij}$$

$$\det(B) = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j+1}(a_{2i}a_{1j} - a_{2j}a_{1i})A_{ij}$$

så $\det(B) = -\det(A)$ $\square$

<u>Teorem 4.9.14</u> A, B $n \times n$ matriser

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

<u>Bevis</u> Hvis A ikke er invertibel er AB ikke invertibel.

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$$

Ellers er A invertibel og kan skrives som et produkt

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

så

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B)$$
$$= \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k B)$$
$$\cdots = \underbrace{\det(E_1) \cdots \det(E_k)}_{=\det(A)} \det(B)$$

$\square$

<u>Korollar 4.9.15</u>
Hvis A er invertibel er

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

<u>Bevis</u> $AA^{-1} = I_n$ så

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) \overset{!}{=} \det(A)\det(A^{-1}).$$

LH 4.10 <u>Egenverdier og egenvektorer</u>

A $n \times n$ matrise

<u>Def</u> En <u>egenvektor</u> for A er en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ slik at $A\vec{v}$ er et multiplum av $\vec{v}$, dvs. det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$.

<u>Merk</u> Hvis $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ og $s \neq 0$ er

$$A(s\vec{v}) = sA\vec{v} = s\lambda\vec{v} = \lambda(s\vec{v})$$

så hvis $\vec{v}$ er en egenvektor for A er også $s\vec{v}$ det.

<u>Def</u> Hvis $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ for en $\vec{v} \neq \vec{0}$ kaller λ <u>egenverdien</u> for A tilhørende $\vec{v}$.

<u>Lemma 4.10.1</u> λ er en egenverdi for A

$$\Updownarrow$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

<u>Bevis</u> $A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I_n \vec{v}$ for $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{0} = \lambda I_n \vec{v} - A\vec{v} = (\lambda I_n - A)\vec{v}$$

for $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\Updownarrow$$

$\lambda I_n - A$ er ikke invertibel

$$\Updownarrow$$

$\det(\lambda I_n - A) = 0$ $\square$

<u>Eksempel</u> $n=2$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+2) - (-1)(-1)$$
$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

λ er en egenverdi $\iff \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$= \underline{\underline{-3 \text{ eller } -1}}.$$

Egenverdiene er

$\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorene $\vec{v}_1$ med egenverdi $\lambda_1 = -3$ er løsninger i

$$A\vec{v}_1 = (-3)\vec{v}_1 \iff (-3I_2 - A)\vec{v}_1 = 0$$

Utvidet matrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1+2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda_1+2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \end{array} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

fri variabel y $\quad x = -y$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \neq 0. \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer for egenverdien $\lambda_2 = -1$

$$A\vec{v}_2 = (-1)\vec{v}_2 \qquad (-I_2 - A)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

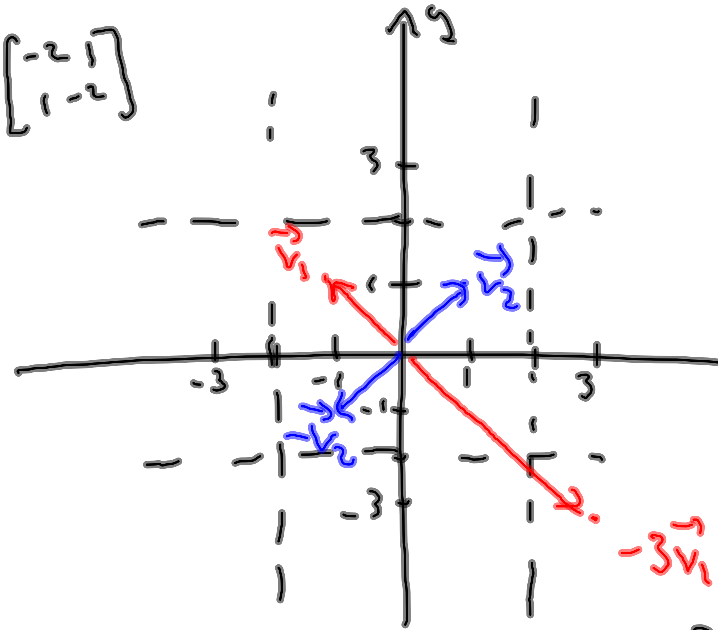
utvidet mat

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = y \end{array}$$

fri variabel

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \neq 0 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



$\lambda_1 = -3$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\vec{v}_1 = -3\vec{v}_1$

$\lambda_2 = -1$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$

$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Enhver $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ kan skrives

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

Da er

$$A\vec{x} = A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1 A\vec{v}_1 + c_2 A\vec{v}_2$$

$$= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2$$

og ved induksjon

$$A^k\vec{x} = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2$$

$$= c_1(-3)^k v_1 + c_2(-1)^k v_2$$

$$= c_1(-3)^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Def Det <u>karakteristiske polynomet</u> til en $n \times n$ matrise A er

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$
$$= \lambda^n + \ldots + (-1)^n \det(A)$$

et n-tegradspolynom i en variabel λ.

<u>Algebraens fundamentalteorem</u> sier at $p_A(\lambda)$ har n (komplekse) røtter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dersom hver rot regnes med multiplisitet:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

Eks $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1)$
$$= (\lambda - (-3))(\lambda - (-1))$$

Til hver egenverdi λ_i finnes minst en egenvektor $\vec{v}_i$ $(A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i,\ \vec{v}_i \neq \vec{0})$.

<u>Lemma 4.10.3</u> A $n \times n$ matrise.

Anta at A har k <u>forskjellige</u> egenverdier

$$(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k)$$

med tilhørende egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Da er $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ lineært uavhengige.

<u>Korollar</u> Hvis A har n <u>forskjellige</u> egenverdier med egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ er

$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

<u>Bevis</u> (for $k=2$) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

Skal vise at $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er lineært uavhengige.

<u>Anta</u> at $\underline{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}}$ med $(c_1, c_2) \neq (0,0)$.

Ved induksjon på k kan vi anta $c_1 \neq 0$ og $c_2 \neq 0$.

$$\vec{0} = A\vec{0} = A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1 A\vec{v}_1 + c_2 A\vec{v}_2$$

$$= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2$$

vet og

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{0} = \lambda_1(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)$$

$$= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_1\vec{v}_2$$

Differansen gir:

$$\vec{0} = c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_2$$

$\Rightarrow$ $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$. Umulig, siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Multiple egenverdier

Dersom noen av egenverdiene til A har multiplisitet ≥ 2 <u>kan det hende</u> at $\mathbb{R}^n$ ikke har en basis som består av egenvektorer for A.

<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1) - (-1)(0)$$

$$= (\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ gjentatt egenverdi

4.6.1 trykkfeil

<u>Egenvektorene til A med</u> egenverdi $\lambda_1 = 1$:

$A\vec{v} = \vec{v}$ $(I_2 - A)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

fri $\quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$y = 0$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x \neq 0$

<u>Utspenner ikke $\mathbb{R}^2$</u>

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ en dobbel egenverdi.

$A\vec{v} = 2\vec{v}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ er egenvektorer

F.eks er $\{\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer.

Spektralteoremet (for symmetriske matriser)

Def $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ er symmetrisk hvis

$a_{ij} = a_{ji}$ for alle $1 \le i,j \le n$

$\iff A = A^T$.

Teorem 4.10.6 Hvis A er en symmetrisk $n \times n$ matrise er alle egenverdiene

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

til A reelle og $\mathbb{R}^n$ har en (ortonormal) basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ som består av egenvektoren for A.