Løsningsforslag for eksamen MAT1110, 13/6 2005

Oppgave 1

Vi setter først opp den utvidete matrisen til likningssystemet i b) og anvender elementære rekkeoperasjoner på denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -6 & 7 & h \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 7 & h \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7-h \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-14 \end{bmatrix}.$$

a) Siden A er matrisen som utgjør de 4 første kolonnene i den utvidete matrisen, får vi fra rekkereduksjonen at A ha rekkeredusert matrise lik

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

b) Av den rekkereduserte til den utvidete matrisen ser vi at siste kolonne ikke er pivotkolonne hvis og bare hvis $2h - 14 = 0$ dvs. for $h = 7$. Likningsystemet er derfor konsistent hvis og bare hvis $\underline{\underline{h = 7}}$.
For $h = 7$ ser vi av den rekkereduserte til den utvidete matrisen at vi har likningsystemet:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 \quad &= 0 \\ x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Vi ser at x_3 er fri variabel og setter $x_3 = t$. Vi får da $x_1 = t$, $x_2 = -2t$ og $x_4 = 1$. Dvs. vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

c) Vektorene i den første mengden vi ser på er 1. 2. og 4. kolonnevektor i A. Fra den rekkereduserte til A innser vi at matrisen med disse tre vektorene som kolonner er rekkeekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Here er alle kolonner pivotkolonner så vektorene

$$\{\begin{bmatrix}0\\1\\6\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\7\\0\end{bmatrix}\},$$

er lineært uavhengig.

Vektorene i den andre mengden vi ser på er 1. 2. og 3. kolonnevektor i A. Fra den rekkereduserte til A innser vi at matrisen med disse tre vektorene som kolonner er rekkeekvivalent med

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Her er bare de to første kolonner pivotkolonner. Dvs. at det tilhørende homogene likningssystemet har frie variable og derfor ikke-trivielle løsninger. Vektorene

$$\{\begin{bmatrix}0\\1\\6\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-6\\0\end{bmatrix}\},$$

er derfor lineært avhengige.

Oppgave 2

a) Bruker vi Greens Teorem ser vi at kurveintegralet har verdi lik

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(4x + e^{y^2} + 3\arctan y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + \ln(x^2+1)\right)dA = \iint_D (4 - x)\, dA = \underline{\underline{2\pi}}.$$

(Her har vi brukt direkte at dobbelt integralet av konstanten 4 er 4 ganger arealet av halvsirkelen og dobbeltintegralet av x er lik 0, siden området er symmetrisk om y-aksen, mens funksjonen x er antisymmetrisk.)

b) Vi bruker forholdskriteriet for å finne konvergensradien:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n x^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)} \Big/ \frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{2^n n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}|x|.$$

Vi skal ha $\frac{1}{2}|x| < 1$ som gir $|x| < 2$, så konvergensradius er 2 dvs. rekka må konvergere når $x \in (-2,2)$. La $x = 2$. Vi har da rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2}{n}$. Siden denne rekka er alternerende og $\frac{2}{n}$ konvergerer monotont mot 0, blir rekka konvergent når $x = 2$. La $x = -2$. Vi har da rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$. Denne rekka må divergere siden vi vet at den harmoniske rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent. Tilsammen får vi konvergens når $x \in (-2, 2]$ og divergens ellers.

c) La $|x| < 2$. Vi setter $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{2^n n}$. Vi har da $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n}$. $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2+x}$. Vi får da $g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2+t}\,dt = \ln(2+x) - \ln 2 = \ln(1+\frac{x}{2})$. Som gir $f(x) = xg(x) = \underline{\underline{x\ln(1+\frac{x}{2})}}$ (siden $x\ln(1+\frac{x}{2})$ er kontinuerlig for $x = 2$ følger det fra Abels teorem at formelen for $f(x)$ er gyldig i $(-2, 2]$).

Oppgave 3

a) Området D ligger inne i både halvkula $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Dvs. vi får et område med en nedre randflate som ligger på $z = x^2 + y^2$ og en øvre randflate på $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Vi innfører sylinderkoordinater. Da har flaten $z = x^2 + y^2$ likning $z = r^2$ og flaten $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ likning $z = \sqrt{2 - r^2}$. En ser nærmest direkte at disse flatene snitter nå $r = 1$ (alternativt kan en løse likningen $r^2 = \sqrt{2 - r^2}$ som gir likningen $r^4 = 2 - r^2$ som kan løses som 2. gradslikning i r^2). I sylinderkoordinater vil derfor volumet være gitt ved integralet

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sqrt{2-r^2} - r^3)dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\Big|_0^1 -\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4}\right)d\theta = \underline{\underline{\pi(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6})}}.$$

b) Vi har

$$(x'(t))^2 = (\frac{2\cos t}{t} - \frac{2\sin t}{t^2})^2 = \frac{4\cos^2 t}{t^2} - \frac{8\cos t\sin t}{t^3} + \frac{4\sin^2 t}{t^4}$$
$$(y'(t))^2 = (\frac{-2\sin t}{t} - \frac{2\cos t}{t^2})^2 = \frac{4\sin^2 t}{t^2} + \frac{8\sin t\cos t}{t^3} + \frac{4\cos^2 t}{t^4}$$
$$(z'(t))^2 = 1.$$

Dette gir

$$((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)^{\frac{1}{2}} = (\frac{4}{t^2} + \frac{4}{t^4} + 1)^{\frac{1}{2}} = ((\frac{2}{t^2} + 1)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{t^2} + 1.$$

Buelengden til kurven blir derfor lik

$$l = \int_1^2 \frac{2}{t^2} + 1\,dt = \Big|_1^2 -\frac{2}{t} + t = \underline{\underline{2}}.$$

Oppgave 4

a) I uv koordinater får linja $y = 2x$ likningen $2u\cos v = 2u\sin v$. Dette gir oss $u = 0$ eller $\cos v = \sin v$ som gir $\tan v = 1$, $v = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Merk at likningen $x^2 + \frac{y^2}{4} = c^2$ i uv-koordinatene over gir oss $u^2 = c^2$ så området i 1. kvadrant som oppfyller $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$ er beskrevet ved $0 \leq u \leq 1$, og når også $v \in [0, \frac{\pi}{4}]$ får vi R i uv-koordinater. Vi har videre

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ 2\sin v & 2u\cos v \end{vmatrix} = 2u.$$

Foretar vi koordinatskifte over er arealet da gitt ved dobbeltintegralet

$$\iint_R dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 2u\,du\,dv = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

b) Arealet av flaten blir

$$\iint_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dA = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dA \overset{\text{koordinatskiftet fra pkt.a)}}{=}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \sqrt{1+4u^2}\,2u\,du\,dv = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{1}{6}(1+4u^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 dv = \underline{\underline{\frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1)}}.$$