MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-07: Løsningsforslag

Oppgave 1. a) Vi deriverer på vanlig måte:

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

,

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Enkel algebra gir dessuten

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

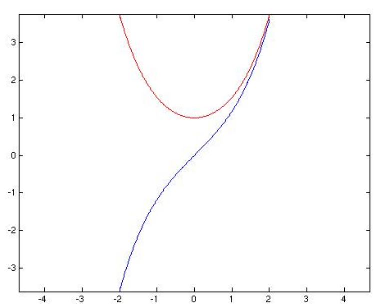
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

(husk at $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$).

b) Kommandosekvensen

```
>> x=-2:0.01:2;
>> y=sinh(x);
>> plot(x,y)
>> hold on
>> z=cosh(x);
>> plot(x,z,'r')
>> axis('equal')
```

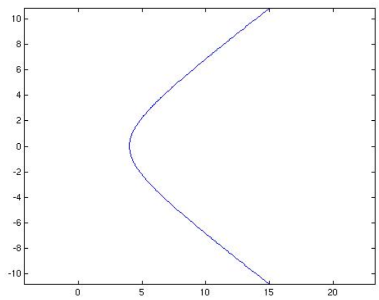
produserer figuren under med $\cosh x$ tegnet i rødt.



c) Kommandosekvensen

```
>> t=-2:0.01:2;
>> x=4*cosh(t);
>> y=3*sinh(t);
>> plot(x,y)
>> axis('equal')
```

produserer figuren nedenfor:



Figuren ligner på en del av en hyperbel, og vi får dette bekreftet ved å observere at

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

d) Når vi substituerer $x = \sinh u$, får vi $dx = \cosh u\ du$. Siden $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, har vi dessuten $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \cosh u$. Dermed er

$$\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \cosh^2 u\ du$$

Det siste integralet kan løses på mange måter, men den enkleste er kanskje å bruke delvis integrasjon. Vi setter $U = \cosh u$, $V' = \sinh u$, og får $U' = \sinh u$, $V = \sinh u$. Dermed er

$$\int \cosh^2 u\ du = \cosh u \sinh u - \int \sinh^2 u\ du =$$

$$= \cosh u \sinh u - \int (\cosh^2 u - 1)\ du = \cosh u \sinh u + u - \int \cosh^2 u\ du$$

Dette gir oss en ligning for $\int \cosh^2 u\ du$, og løser vi den, får vi

$$\int \cosh^2 u\ du = \frac{1}{2} \cosh u \sinh u + \frac{u}{2} + C$$

Nå gjenstår det å komme tilbake til den opprinnelige variabelen x. Vi vet at $\sinh u = x$ og kan dermed slutte at $\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{1+x^2}$. For å finne u, må vi løse ligningen $x = \sinh u$ mhp. u. Dersom vi først ganger ligningen

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

med $2e^u$, får vi

$$2xe^u = (e^u)^2 - 1$$

som kan skrives

$$(e^u)^2 - 2xe^u - 1 = 0$$

Dette er en annengradsligning i e^u med løsninger:

$$e^u = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Siden e^u er positiv, er det bare løsningen

$$e^u = x + \sqrt{x^2+1}$$

som gir mening. Tar vi logaritmer på begge sider, får vi

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Dermed er

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u + \frac{u}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

e) Vi vet at

$$L(0,1) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

Setter vi $x = 2t$, $dx = 2\, dt$, får vi

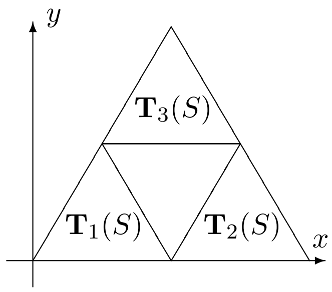
$$L(0,1) = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dt$$

Punkt d) forteller oss at

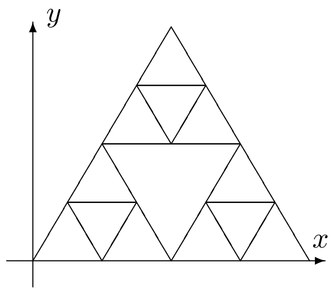
$$L(0,1) = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

Oppgave 2. a) og b) T_1, T_2 og T_3 er alle affine avbildninger som avbilder rette linjer på rette linjer. Avbildning T_1 er en ren sammentrekning som avbilder enhver vektor på halvparten av seg selv. Bildet av S under T_1 blir derfor en trekant som er halvparten så stor som den opprinnelige, og det nedre, venstre hjørnet ligger fortsatt i origo. De to andre hjørnene ligger dermed i $(\frac{1}{2}, 0)$ og $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Avbildningen T_2 fungerer på samme måte som T_1, men etter at den har halvert alle vektorer, flytter den hele planet en distanse $(\frac{1}{2}, 0)$. Den opprinnelige trekanten er dermed blitt halvparten så stor, og det nedre, venstre hjørnet ligger i punktet $(\frac{1}{2}, 0)$. Avbildningen T_3 fungerer på samme måte som T_2 bortsett fra at forskyvningen nå er $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Trekantens nedre, venstre hjørne ligger dermed i punktet $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Figuren nedenfor viser hvordan de tre bildene passer sammen.



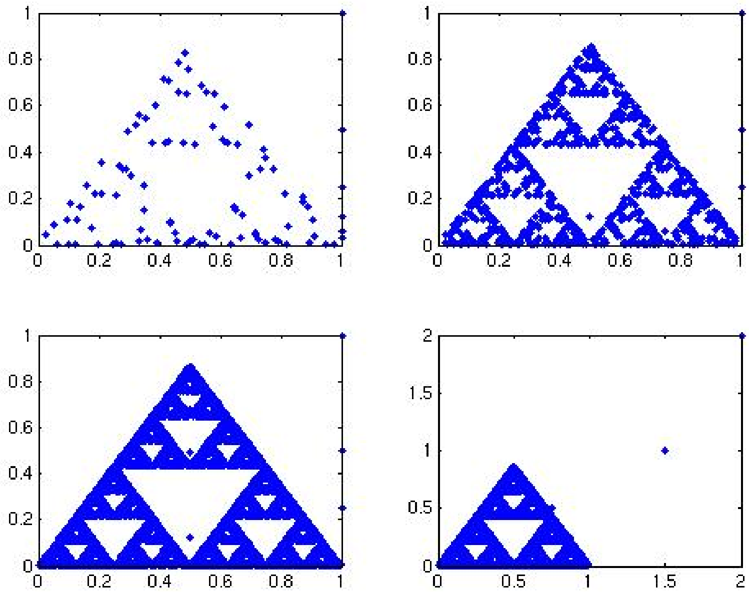
Gjentar vi operasjonen en gang til, får vi figuren nedenfor:



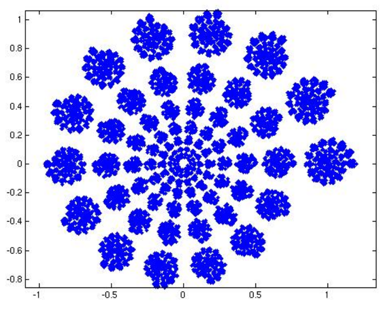
Prosessen fortsetter på den måten ved stadig å tegne inn nye og mindre trekanter. Figuren som fremkommer når vi (i prinsippet!) har gjennomført prosessen uendelig mange ganger, kalles *Sierpinski-trekanten.*

c) Input-verdiene a, b og N angir henholdsvis startpunktet (a, b) og antall iterasjoner (gjentagelser) N. Kommandoen `rand` plukker ut et nytt, "tilfeldig" tall i intervallet $[0, 1]$ hver gang den utføres. "If-else" betingelsene sørger derfor for at vi velger T_1 med sannsynlighet (tilnærmet lik) 1/3, T_2 med sannsynlighet (tilnærmet lik) 1/3 og T_3 med sannsynlighet (tilnærmet lik) 1/3. Punktumet i `plot`-kommandoen sørger for at MATLAB bare plotter punkter og ikke linjestykkene mellom dem (prøv uten punktumet og se hva som skjer!).

d) Figuren nedenfor viser resultatet av 4 kjøringer. I de tre første har vi brukt $(a, b) = (1, 1)$ som startpunkt og kjørt løkken henholdsvis 100, 1000 og 10 000 ganger. I det siste bildet har vi brukt $(2, 2)$ som startpunkt, og kjørt løkken 10 000 ganger. Uansett hvor vi starter hen, vokser Sierpinski-trekanten frem når vi kjører programmet. Siden vi starter lenger ute, har det siste vinduet en litt annen skalering enn de andre, men figuren som vokser frem er den samme.

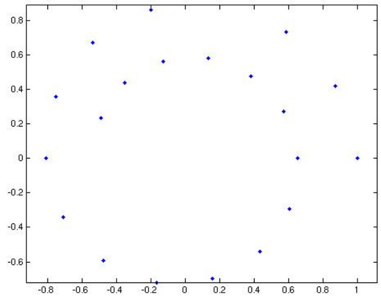


e) Programmet virker på omtrent samme måte som det foregående bortsett fra at i dette tilfellet er det bare to avbildninger å velge mellom ($\mathbf{F}_1(x, y) = r(x \cos \frac{\pi}{d} - y \sin \frac{\pi}{d}, x \sin \frac{\pi}{d} + y \cos \frac{\pi}{d})$ og $\mathbf{F}_2(x, y) = (sx + 1, sy)$) og den første velges i 95% av tilfellene. Figuren nedenfor viser resultatet av en kjøring med de input-verdiene som er angitt i oppgaveteksten



Andre input-verdier gir lignende figurer med større eller mindre grad av overlapp.

For å forstå figuren som fremkommer, må vi forstå hvordan de to funksjonene $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$ fungerer. $\mathbf{F}_1$ dreier alle vektorer en vinkel $\frac{\pi}{d}$ om origo, og skrumper dem samtidig (lite grann) med en faktor r. $\mathbf{F}_2$ skrumper alle vektorer (mye kraftigere) med en faktor s, og flytter dem slik de starter i punktet $(1, 0)$ istedenfor i origo. Siden $\mathbf{F}_1$ er mye mer sannsynlig enn $\mathbf{F}_2$, vil vi i en "normal kjøring" ha mange forekomster av $\mathbf{F}_1$ mellom hver forekomst av $\mathbf{F}_2$. Kjøring vil derfor starte med vektoren $(1, 0)$, dreie den en vinkel $\frac{\pi}{d}$ en rekke ganger samtidig som den hver gang forminskes med en faktor r. Figuren nedenfor viser resultatet av en slik sekvens.



Første gang programmet "trekker" $\mathbf{F}_2$, får vi en ny vektor i nærheten av $(1, 0)$. Denne vektoren gjennomgår tilsvarende rotasjoner og krympninger inntil vi igjen får en $\mathbf{F}_2$ som bringer oss tilbake i nærheten av $(1, 0)$ osv. Prøv å forsta hvordan punktene på figuren nedenfor har fremkommet gjennom denne prosessen.