Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 19/4-23/4

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

April 19, 2010

Oppgave 4.11.3

a)

Den karakteristiske likningen blir

$$(\lambda - 1.1)(\lambda - 0.8) + 0.02 = \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.90 = (\lambda - 0.9)(\lambda - 1).$$

- Egenvektor for $\lambda_1 = 0.9$: Vi radreduserer

$$0.9I - A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vi ser at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en tilhørende egenvektor.

- Egenvektor for $\lambda_2 = 1$: Vi radreduserer

$$0.9I - A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vi ser at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en tilhørende egenvektor.

b)

Vi ser at modellen for dyrebestandene kan skrives

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Vi skriver startbestanden $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som en kombinasjon av egenvektorer ved først å radredusere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3000 \\ 1 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3000 \\ 0 & -1 & -2000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1000 \\ 0 & 1 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Vi ser derfor at

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -1000\mathbf{v}_1 + 2000\mathbf{v}_2.$$

Dermed blir

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = -1000 \times 0.9^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2000 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 - 1000 \times 0.9^n \\ 2000 - 1000 \times 0.9^n \end{pmatrix}.$$

Når n går mot uendelig ser vi at dyrebestandene nærmer seg $\begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \end{pmatrix}$.

Oppgave 4.11.4

a)

Etter at Viktoria har helt over saft til Emil sitter hun igjen med $\frac{8}{9}x_n$ i mengde sukker, mens Emil sitter med $y_n + \frac{1}{9}x_n$ mengde sukker. En tiendedel av saften han nå har blir helt tilbake til Viktoria (ikke en niendedel, siden Emil nå har mer saft enn han opprinnelig hadde!). Siden saften blir rørt godt rundt vil derfor Viktoria få tilbake $\frac{1}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right)$ mengde sukker, og hun vil totalt sitte igjen med

$$x_{n+1} = \frac{8}{9}x_n + \frac{1}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right) = 0.9x_n + 0.1y_n$$

mengde sukker. Emil sitter igjen med

$$y_{n+1} = \frac{9}{10}\left(y_n + \frac{1}{9}x_n\right) = 0.1x_n + 0.9y_n$$

mengde sukker.

b)

Vi lar $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ være koeffisientmatrisen til likningssystemet vi fant i a). Da er

$$\det(\lambda I - M) = (\lambda - 0.9)^2 - 0.1^2 = \lambda^2 - 1.8\lambda + 0.8.$$

Setter vi dette lik 0 får vi at $\lambda = \frac{1.8 \pm \sqrt{3.24 - 3.2}}{2} = 0.9 \pm 0.1$, slik at egenverdiene blir $\lambda_1 = 0.8$ og $\lambda_2 = 1$.

- Egenvektor for $\lambda_1 = 0.8$:

  $$\lambda_1 I - M = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ser at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

- Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

  $$\lambda_2 I - M = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ser at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

c)

Vi skriver $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer. For å få til dette må vi radredusere

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi kan derfor skrive $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dermed blir

$$\begin{aligned} M^n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0.8^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 0.8^n \\ 3 + 0.8^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$