Rekker (kap 12, Kalkulus)

Intuitivt: En rekke er en uendelig sum av tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Delsum: $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N$

Definisjonen: Hvis følgen $\{s_N\}$ av delsummer konvergerer mot et tall s, så sier vi at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent og vi kaller s summen til rekken. Notasjon

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Hvis følgen $\{s_N\}$ ikke konvergerer, sier vi at rekken er divergent.

Hovedproblemstillinger:

(i) Finn summen $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ når den finnes (ambisiøst)

(ii) Avgjør om en rekke er konvergent eller divergent (overkommelig)

Fra tidligere: Geometriske rekker

$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + a_0 r^3 + \cdots \quad \text{kvotient}$$

Konvergerer når $|r| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n + \cdots = \frac{a_0}{1-r}$$

Divergenstesten: Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. M.a.o. dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, så divergerer rekken.

OBS: En rekke kan godt divergere selv om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

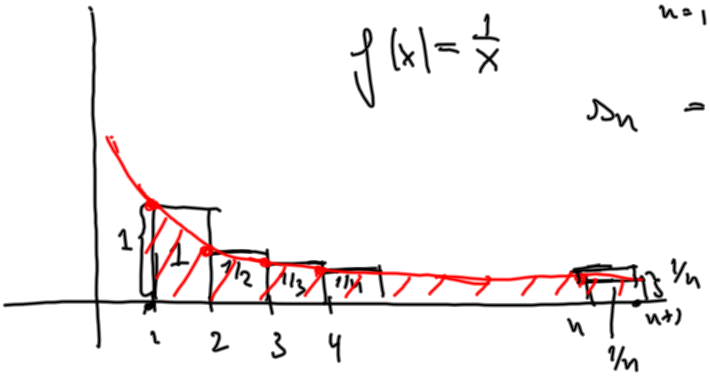
Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer selv om $\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

Bevis for divergenstesten: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, og la $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

$$\left.\begin{aligned} s_N &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ s_{N-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{ccccc} s_N & - & s_{N-1} & = & a_N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & - & s & & 0 \end{array}$$

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} (s_N - s_{N-1}) = \underline{0}.$$
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ s & s \end{array}$$

Viser nå at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$



$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\ln x\right]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

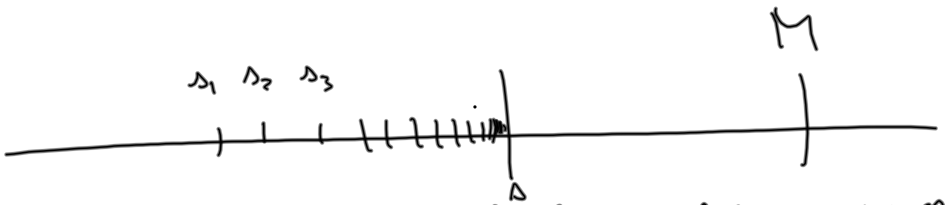
Altså $s_n \to \infty$.

Positive rekker (12.2)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles en positiv rekke dersom $a_n \geq 0$ for alle n.

Delsummene s_n til en positiv rekke er en voksende følge.

Fra MAT 1100: En voksende, begrenset følge er konvergent.



En positiv rekke er derfor konvergent dersom delsummene er begrenset, dvs dersom det finnes et tall M slik at $s_n \leq M$ for alle n.

Integraltesten: Anta at $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ er en avtagende og positiv kontinuerlig funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Bevisidé: Sammenlign arealet av bokser med høyde $f(n)$ og arealet under funksjonsgrafen.

Setning: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer når $p>1$ og divergerer når $p \leq 1$.

Bevis: Vet at resultatet stemmer for $p=1$. For $p \neq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergerer} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ konvergerer} \overset{\text{MAT1100}}{\iff} p>1.$$

(Begrunnelse: $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$$

$\to \infty$ hvis $1-p>0 \Rightarrow p<1$ divergens

0 hvis $1-p<0 \Rightarrow p>1$ konvergens.