12.7 Regning med potensrekker

Hvis vi kjenner summen av noen potensrekker, kan vi bruke triksene til å finne summen av mange nye.

Triks 1: Gange inn potenser

Vi kan gange rekken med x, x^2, x^3 etc. uten at konvergensområdet endres.

eks. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{for alle } x$$

Så
$$x^3 e^x = x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^7}{4!} + \dots \quad \text{for alle } x.$$

Regning med summetegn:
$$x^3 e^x = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n!}$$

Triks 2: Sette inn polynomer for x

Vi kan sette inn x^2, $2x^3$, x^5 etc. for x i en rekke.

eks. Vi har (geo. med $r = x$)
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

for $-1 < x < 1$. Innsetting av $2x^3$ for x gir
$$\frac{1}{1-(2x^3)} = 1 + (2x^3) + (2x^3)^2 + (2x^3)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (2x^3)^n$$

for $-1 < (2x^3) < 1$, dvs. $-\frac{1}{2} < x^3 < \frac{1}{2}$
$$-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/3} < x < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/3}$$

Pynt:
$$\frac{1}{1-2x^3} = 1 + 2x^3 + 4x^6 + 8x^9 + 16x^{12} + \dots$$
$$\text{for } x \in \left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/3}, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/3}\right)$$

Triks 3 : Leddvis derivasjon og integrasjon

Hvis vi har en rekke for $f(x)$ gyldig på $U = (a-R, a+R)$, så fås en rekke for $f'(x)$ på U ved å derivere leddvis.
Vi kan også integrere leddvis innenfor U, både bestemt og ubestemt.

eks. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad x \in (-1, 1)$$

Derivasjon:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right)' \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \qquad x \in (-1, 1)$$

Regning på summetegnsnivå

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \left(n=0 \text{ borte}, \ \frac{d}{dx}(1) = 0\right)$$

eks. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad x \in (-1, 1)$$

(geo. rekke med $r = -x$)

Integrerer:

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\right) dx$$

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Innsetting av $x = 0$ avslører at $\ln 1 = C + 0$, dvs. $C = 0$

Så

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \quad \text{for } x \in (-1,1)$$

Triks 4: Addisjon og subtraksjon av potensrekker

Gitt rekker for $f(x)$ og $g(x)$, finner vi rekker for $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ ved å addere/subtrahere leddvis. De nye rekkene får sum $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ for alle x der rekkene for $f(x)$ og $g(x)$ er gyldige.

eks.

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x} = (1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)$$
$$+(1-x+x^2-x^3+x^4-\dots)$$
$$= 2+0+2x^2+0+2x^4+0+\dots$$
$$= 2+2x^2+2x^4+\dots \quad \text{for } (-1<x<1)$$

Unikhet av Taylorrekker

Hvis vi har en potensrekke med sentrum a og sum $f(x)$, dvs.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

på et intervall rundt a, så er dette Taylorrekken til $f(x)$ i a. Altså kan alle potensrekketriksene våre brukes til å finne Taylorrekker.

Bevis Antakelsen er at

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

Innsetting av $x=a$ gir $f(a) = c_0 + 0$, så $c_0 = f(a)$.

Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = c_1 \cdot 1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$$

Innsetting av $x=a$ gir $f'(a) = c_1 + 0$, så $c_1 = f'(a)$

Leddvis derivasjon:

$$f''(x) = 2c_2 \cdot 1 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + \dots$$

Innsetting av $x=a$ gir $f''(a) = 2c_2 + 0$, så

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

Og så videre. Vi ser at koeffisientene c_n må stemme med Taylorrekken. □