MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-06

Innleveringsfrist: *Fredag 31. mars, 2006, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk å skrive navn på besvarelsen!** *Se forøvrig*

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h04/Obliger.xml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 50% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye,* bortsett fra oppgave 2 som teller tredobbelt. *Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB (eventuelt Octave), må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Oppgavesettet består av fire oppgaver som kan gjøres uavhengig av hverandre.

Oppgave 1: a) Forklar hvordan MATLAB-kommandoen `>> plot` kan brukes til å tegne en parametrisert kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad \text{for } t \in [a, b]$$

i planet. Bruk kommandoen til å plotte

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} \qquad \text{for } t \in [0, 2\pi]$$

b) Kommandoen `>> plot3` fungerer på samme måte som `>> plot`, men tegner forbindelseslinjer mellom 3-dimensjonale punkter istedenfor 2-dimensjonale (tast `>> help plot3` for nærmere informasjon). Forklar hvordan `>> plot3` kan brukes til å tegne en parametrisert kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \text{for } t \in [a, b]$$

i rommet. Bruk kommandoen til å plotte

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \qquad \text{for } t \in [0, 2\pi]$$

c) Vis at kurven i b) ligger på flaten $z = x^2 + y^2$. Plott flaten og kurven i samme koordinatssystem. NB: For å se kurven på flaten, kan det være nødvendig å tegne den med tykk strek. Du kan justere tykkelsen med kommandoen `LineWidth`.

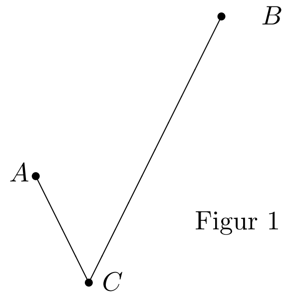
Prøv først `>> plot3(x,y,z,'LineWidth',2)` og juster tykkelsen ved å endre 2-tallet (du kan godt bruke desimaltall).

Oppgave 2 (teller som tre punkter): Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

der $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$.

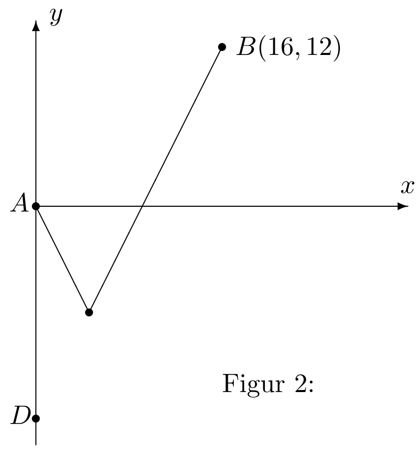
Oppgave 3: Endene til et 34 meter langt tau er festet i to punkter A og B. Avstanden fra A til B er 20 meter. Et lodd er festet til et punkt C på tauet. Loddet trekker tauet stramt slik at det danner to rette linjestykker AC og CB (se figur 1)



Figur 1

a) Forklar at punktet C ligger på en ellipse med brennpunkter i A og B og med store halvakse 17 meter. Hva er den andre halvaksen?

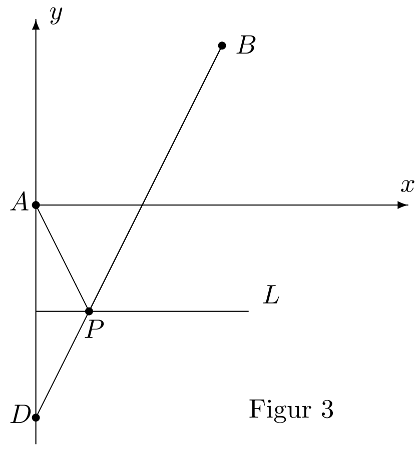
Hvis loddet får gli fritt langs tauet, vil det falle til ro i det laveste punktet på ellipsen. I resten av oppgaven skal vi arbeide for å finne dette punktet. I figur 2 har vi lagt punktene inn i et koordinatsystem slik at A har koordinatene $(0, 0)$ og B har koordinatene $(16, 12)$.



Figur 2:

b) Punktet D ligger på den negative y-aksen en taulengde (= 34 meter) fra B. Finn koordinatene til D.

Linjen L er parallell med x-aksen og ligger like langt fra A som fra D. Denne linjen skjærer linjestykket DB i et punkt P (se figur 3).



Figur 3

c) Vis at P ligger på ellipsen.

d) Vis at ingen andre punkter på L ligger på ellipsen. Hvorfor betyr dette at P er det laveste punktet på ellipsen?

e) Finn koordinatene til P.

Oppgave 4: I denne oppgaven er $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ en lineæravbildning.

a) La $L = \{\mathbf{a} + t\mathbf{r} \mid t \in \mathbf{R}\}$ være en rett linje i planet. Vis at bildet av L (dvs. mengden $T[L] = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \text{ ligger på } L\}$) enten er en rett linje eller et punkt. Når er bildet et punkt?

b) La K være kvadratet med hjørner i

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x+h \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y+h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x+h \\ y+h \end{bmatrix}$$

der $h > 0$. Vis at bildet av K (dvs. mengden $T[K] = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \text{ ligger i } K\}$) enten er et parallellogram, et linjestykke eller et punkt.

c) Vis at arealet til $T[K]$ er $|\det(A)|h^2$, der $\det(A)$ er determinanten til matrisen til T ($\det(A)$ måler altså hvor mye T forstørrer eller forminsker arealet).