Oppgave 1. (For de lite regneglade).

a) Kurven $\mathcal{C}$ er en sirkel med sentrum i origo og radius 2010. Regn ut: $\int_{\mathcal{C}} y\cos(xy)\mathbf{i} + x(\cos(xy)+1)\mathbf{j}\,d\mathbf{r}$.

b) Halvaksene til ellipsen $\mathcal{C}$ har lengdene $\frac{1}{\pi}$ og π. Uten regning, bestem linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}\,d\mathbf{r}$.

c) Området R er avgrenset av kurven $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$. Hva blir $\iint_R \sin(x-y)e^{(x-y)^2}dxdy$?

Oppgave 2. (For de geometriske).

Skisser området vi integrerer over og regn deretter ut. (Enkeltintegraler skal regnes ut som dobbeltintegraler).

$$\text{(i).}\ \int_0^1\int_0^1 \lfloor x+y\rfloor dxdy. \quad \text{(ii).}\ \int_0^1 x(\ln(x+1)-\ln(x))dx. \quad \text{(iii).}\ \int_0^{2010}\int_0^{2010} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy.$$

Oppgave 3. (For de regneglade).

a) Finn en rekke som konvergerer mot $\dfrac{1}{1-xy}$ og bruk dette til å vise at $\zeta(2) = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$.

b) Regn ut integralet $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$, ved f.eks. å substituere $2x = \sqrt{2}(u-v)$ og $2y = \sqrt{2}(u+v)$.

Oppgave 4. (For de som liker derivasjon).

Vi skal nå se på et alternativt bevis for binomialteoremet som verken bruker induksjon eller kombinatorikk. La $k, n \in \{0,1,2,...\}$ og la $k \le n$. Regn ut følgende og bruk det til å bevise binomialteoremet:

$$\text{(i).}\ \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x+y)^n. \quad \text{(ii).}\ \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}x^k y^{n-k}. \quad \text{(iii).}\ \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}x^j y^{n-j},\ \text{der } j \ne k \text{ og } j \le n.$$

Oppgave 4. (For de som liker rekker).

a) Regn ut summen av følgende rekker: $\displaystyle\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}$ og $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

b) Vis at hvis $F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$, da er $\displaystyle\sum_{k=1}^n F(n,k) = G(n,n+1) - G(n,1)$. Regn ut $\displaystyle\sum_{k=1}^n k\cdot k!$.

c) Betrakt $S = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty 2^k$ og $2S = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty 2^{k+1} = 2+4+8+...$ Forsøker vi å regne ut S, får vi:
$S = 2S - S = (2+4+8+16...) - (1+2+4+8+..) = -1$ (!). Hva gikk galt?

Oppgave 5. (For de tøffe).

a) La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på $R = [0,1]\times[0,1]$. Vis følgende ulikhet:

$$\left[\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy\right] + \left[\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx\right] \le \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2 dxdy.$$