MAT1110, vår 2015: Løsningsforslag til obligatorisk oppgave 1

Oppgave 1: a) Siden funksjonen tar verdier i $\mathbb{R}$, er Jacobi-matrisen det samme som gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (-2x, -2y)$$

Dette gir

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(1,1) = (-2,-2)$$

Lineariseringen blir dermed

$$T_{\mathbf{a}}(x,y) = \nabla f(1,1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f(1,1)$$

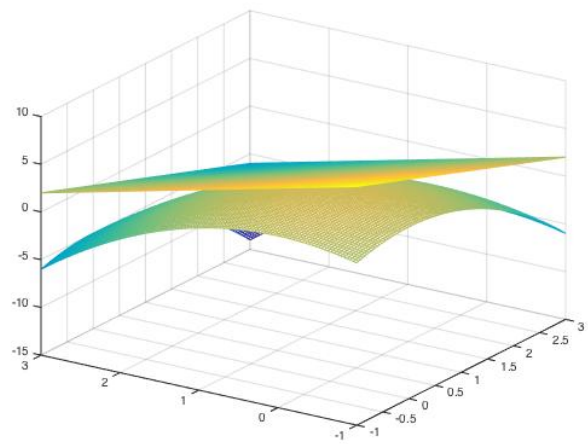
$$= (-2,-2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + 2 = -2(x-1) - 2(y-1) + 2 = -2x - 2y + 6$$

Dette er ligningen til planet $z = -2x - 2y + 6$ som går gjennom $(1,1,2)$ og har normalvektor $(-2,-2,1)$.

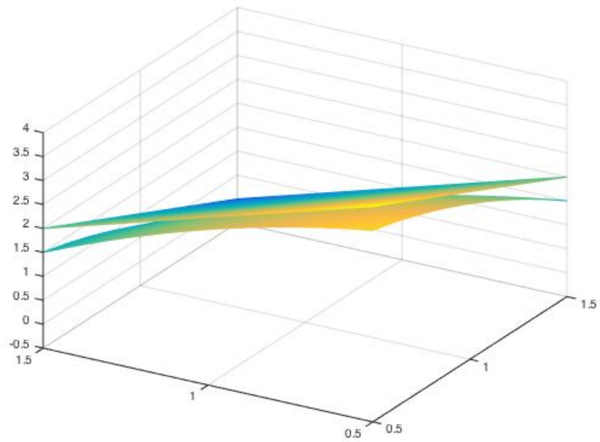
b) Hvis vi gir kommandoene

```
>> x=linspace(-1,3,100);
>> y=linspace(-1,3,100);
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
>> z=4-x.^2-y.^2;
>> u=-2*x-2*y+6;
>> mesh(x,y,z)
>> hold on
>> mesh(x,y,u)
```

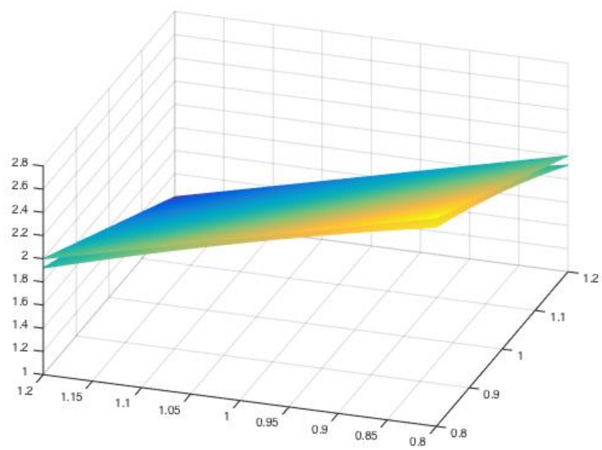
plotter MATLAB de to grafene. Roterer vi litt på figuren, får vi dette bildet:



c) Gjentar vi operasjonen ovenfor med vinduet $[0.5, 1.5] \times [0.5, 1.5]$, får vi figuren nedenfor



mens vi med vinduet $[0.8, 1.2] \times [0.8, 1.2]$, får:



Poenget er å vise hvordan lineariseringen tilnærmer funksjonen bedre og bedre jo mer vi zoomer inn på punktet **a**.

Oppgave 2: a) Siden x-koordinaten er $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$ og y-koordinaten er $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$, får vi

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\,\mathbf{i} + f(\theta)\sin\theta\,\mathbf{j}$$

b) Vi bruker produktregelen:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)\,\mathbf{i} + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)\,\mathbf{j}$$

Dette gir

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{f'(\theta)^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)\cos\theta f(\theta)\sin\theta + f(\theta)^2\sin^2\theta + f'(\theta)^2\sin^2\theta + 2f'(\theta)\sin\theta f(\theta)\cos\theta + f(\theta)^2\cos^2\theta}$$

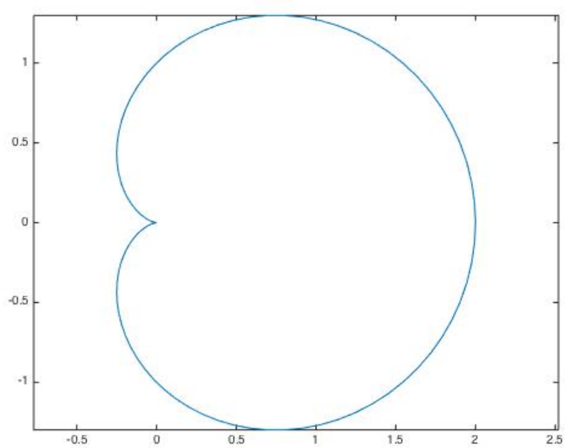
$$= \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}$$

der vi har brukt at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

c) Vi gir kommandoene

```
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> x=(1+cos(t)).*cos(t);
>> x=(1+cos(t)).*sin(t);
>> plot(x,y)
>> axis('equal')
```

og får figuren nedenfor



d) Bruker formlene i b):

$$\mathbf{v}(\theta) = \mathbf{r}'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)\,\mathbf{i} + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)\,\mathbf{j} =$$

$$= (-\sin\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta)\,\mathbf{i} + (-\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta)\,\mathbf{j}$$

$$= -(\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\,\mathbf{i} + (\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)\,\mathbf{j}$$

og

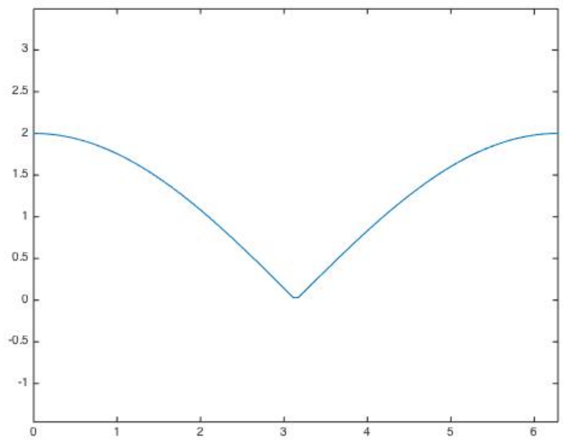
$$v(t) = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}$$

der vi igjen har brukt at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

e) For å plotte $v(\theta)$, kan vi skrive:

```
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> x=sqrt(2+2*cos(t));
>> plot(t,x)
>> axis('equal')
```

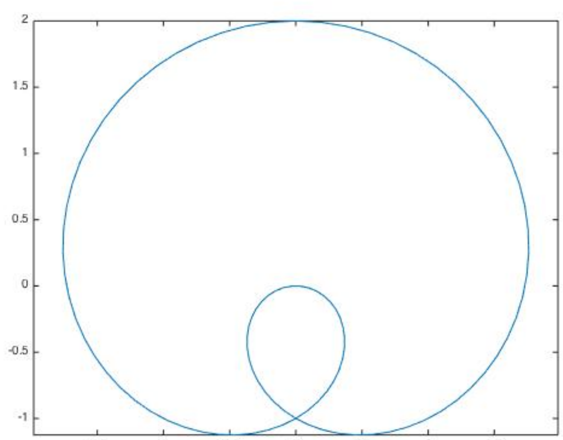
som gir denne figuren:



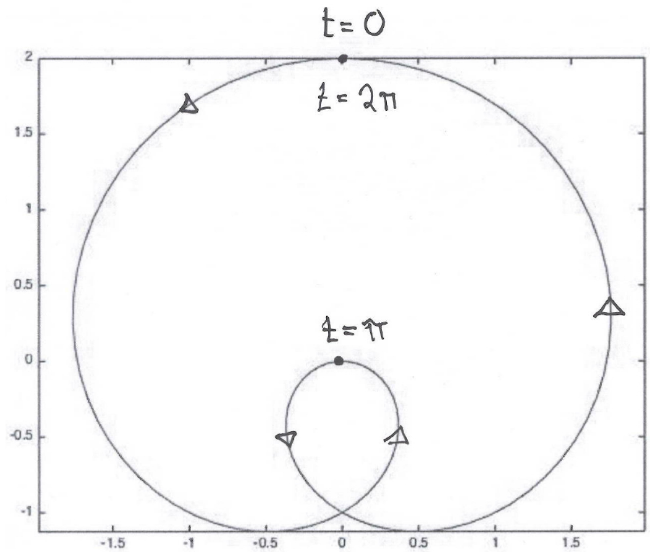
For å plotte $\mathbf{v}(t)$ kan vi bruke

```
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> x=sin(t)-2*cos(t).*sin(t);
>> y=cos(t)+(cos(t)).^2-(sin(t)).^2;
>> plot(x,y)
>> axis('equal')
```

som gir:



Figuren nedenfor viser hvordan kurven gjennomløpes:



f) Vi har

$$L = \int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\sin^2\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta$$

Siden kurven er symmetrisk om y-aksen, gir dette

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta$$

siden $\sin\theta \geq 0$ når $\theta \in [0,\pi]$.

g) Innfører vi $u = 1-\cos\theta$ som ny variabel i integralet ovenfor, får vi $du = \sin\theta\,d\theta$ og grenser $u(0) = 1-\cos 0 = 0$ og $u(\pi) = 1-(-1) = 2$. Dermed blir

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{2}\left[2\sqrt{u}\right]_0^2 = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2\sqrt{0}) = 8$$