Elementære matriser.

De matriser som tilsvarer en radoperasjon:

- gange en rad med et tall $\neq 0$.
- bytte to rader
- multiplisere en rad med s og legge til en annen rad.

---

gange med tall $\neq 0$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \overset{2\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\7&8&9\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2\cdot1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

Generellt: gang i-te rad med s

$$E = \begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&0\\&&s&&\\0&&&1&\\&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ i-te søyle.

Bytte to rader.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\sim} \begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

Generellt:
Bytt rad i og rad j

$$E = \begin{array}{c} \\ i\\ \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&&1&\\&0&&&\\&0&1&&\\&0&&0&\\&1&&0\;1&\\&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}$$
$\qquad\qquad i \qquad j$

– Gange rad med s og legge til en annen rad.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \overset{\text{I}+2\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix}9&12&15\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&12&15\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

rad $i \to$ rad i + s rad j

$$\text{rad } i \to \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&s\\&&&\ddots\;1\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ kolonne j

Observasjon: Alle radoperasjoner kan reverseres.
$\Rightarrow$ Alle elementærmatriser kan inverteres.

Hvis $A \sim B$ $\qquad B = E_k \cdots E_2 E_1 A \qquad E_i$ elementære.

$$E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} B = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \underbrace{E_k^{-1} E_k}_{I} E_{k-1} \cdots E_1 A$$
$$= A$$

Hvis B er på redusert trappeform, B $n\times n$ matrise

A inverterbar $B = I$.

$\Updownarrow$

$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$

Transponert: bytte rader og kolonner skriver E^T

E er elementær $\to E^T$ elementær.

gange en rad med s $\quad E = E^T \qquad E = \begin{pmatrix}1&&0\\&s&\\0&&1\end{pmatrix} \quad E^T = \begin{pmatrix}1&&0\\&s&\\0&&1\end{pmatrix}$

bytte rad i med rad j $\quad E = E^T \leftarrow$ bytte rad j med rad i

rad $i \to$ rad i + s rad j

$$E = \begin{pmatrix}1&&&\\&1&s&\\&&1&\\&&&\ddots\;1\end{pmatrix} \qquad E^T = \begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\ s&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$\qquad\qquad \uparrow j \qquad\qquad \uparrow i$

rad $j \to$ rad j + s rad i

Determinanter.

det : $n\times n$ matriser $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&&a_{2n}\\\vdots&&&&\\a_{n1}&&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&&a_{2n}\\&&&\\a_{n1}&&&a_{nn}\end{vmatrix} := a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{32}&&&\\\vdots&&&\\a_{n2}&&&a_{nn}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&&a_{2n}\\&&&\\a_{n1}&a_{n3}&&a_{nn}\end{vmatrix} + $$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\det(A_{1j})$$

minorer.

; A_{1j} er den $(n-1)\times(n-1)$ matrisen vi får hvis vi fjerner rad 1 og søyle j fra A

Hvis A er 1×1 matrise $A = (a_{11})$.

$\det(A) = a_{11}$. $\qquad \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) = ad - bc$.

A $n\times n$ matrise.

Lemma

Hvis A har en rad med bare 0, så er $\det(A) = 0$

Bevis

Ok. for 1×1 matriser.

A: Første rad er null: $a_{1j} = 0$ for $j = 1, \ldots, n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \underset{=0}{a_{1j}}(-1)^{j+1}\det(A_{1j}) = 0.$$

B. En annen rad er null.

$\Rightarrow A_{1j}$ har en rad null for alle $j = 1, \ldots, n$. $\quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\det(A_{1j})}}$

A_{1j} $(n-1)\times(n-1)$ så induksjonshyp $\Rightarrow \det(A_{1j}) = 0$ $\qquad 0$.

Hvis A har en søyle med bare 0, så er $\det(A) = 0$.

A kalles øvre triangulær $\quad a_{ij} = 0 \quad i > j$. $\quad$ (nedre triangulær)

$$\begin{pmatrix}\diagdown&\\0&\diagdown\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}\diagdown&0\\&\diagdown\end{pmatrix}$$

Lemma

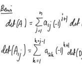
A er øvre (nedre) triangulær så er $\det(A) = a_{11}\, a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$

Bevis.

$n = 1$ $\quad \det(A) = a_{11}$ ok.

Anta ok. for $(n-1)\times(n-1)$ matriser.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\det(A_{1j}) = a_{11}(-1)^2\det(A_{11}) = a_{11}\underbrace{a_{22}\cdots a_{nn}}_{\det(A_{11})}$$



A_{11} – triangulær

A_{12} – søyle med 0

A_{1j} – "–

Lemma

Vi får B ved å gange en rad i A med s. Da er $\det(B) = s\det(A)$

Bevis

Ok. for $n = 1$.

Anta ok. for $(n-1)\times(n-1)$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\det(A_{1j}) = \begin{cases} \text{første rad ganges med } s & \det(B) = \sum_{j=1}^{n} s\, a_{1j}(-1)^{j+1}\det(A_{1j}) = s\det(A). \\ \text{ellers} & \det(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\det(B_{1j}) \end{cases}$$

$\det(B_{1j}) = s\det(A_{1j})$ pr. hypotese

$$\det(B) = \sum a_{1j}(-1)^{j+1}\, s\, \det(A_{1j})$$

Lemma

Hvis vi får B ved å bytte de to første radene i A, $\det(B) = -\det(A)$.

Bevis

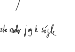
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\det(A_{1j})$$

$$\det(A_{1j}) = \sum_{k=1}^{k=j-1} a_{2k}(-1)^{k+1}\det(D_{jk}) + \sum_{k=j+1}^{n} a_{2k}(-1)^{k}\det(D_{jk})$$

a_{2k}

D_{jk} er A fjernet 2 første rader j og k søyle

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} a_{1j}a_{2k}(-1)^{k+j+2}\det(D_{kj})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{a_{1j}a_{2k}(-1)^{k+j+1}\det(D_{jk})}_{z_{jk}}$$



$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} z_{jk}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} \qquad = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} z_{jk}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} a_{1j}a_{2k}(-1)^{2+k+j}\det(D_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} a_{1j}a_{2k}(-1)^{k+j+1}\det(D_{kj})$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} a_{1k}a_{2j}(-1)^{j+k+1}\det(D_{jk})$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{2+k+j}\det(D_{kj})(a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j}) \qquad \overset{\shortparallel}{D_{kj}}$$

Fra denne ser vi at om vi bytter rad 1 og 2 så bytter vi a_{1j} med a_{2j} og omvendt. $\det(A) \to -\det(A)$.

$A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$

$B = \begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix} \quad \det(B) = cb - da = -\det(A)$.

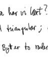
Lemma

Får B ved å bytte to naborader i A, $\det(B) = -\det(A)$.

Bevis:

Ok. hvis vi bytter rad 1 og 2.

Hvis ikke bruk induksjon!



Hva har vi lært?

V ① A triangulær; $\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$

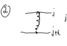
V ② Bytter to rader "$\det \to -\det$"

V ③ Ganger en rad med s, "$\det \to s\det$"

④ Legge til et multiplum av en rad "det uendret".

---

②



k bytter ned, $k-1$ bytter oppover $2k-1$ bytter totalt.

$$\det \to \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{(-1)^{2k-1}}}\det$$