Oppgave 5.10.11

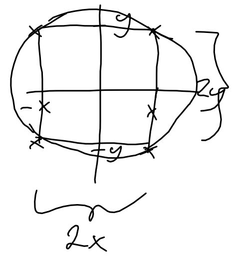
Vi skal innskrive en boks i ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$ sider parallelle med aksene.

Anta at (x,y,z) er et av hjørnene i boksen.

Vi anta at (x,y,z) ligger på ellipsoiden.

de andre hjørnene i boksen $(\pm x, \pm y, \pm z)$



Volum $= (2x)(2y)(2z) = 8xyz$

Vi skal altså: maksimere $8xyz$ $(f(x,y,z))$

under betingelsen $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$g(x,y,z)=b$

Vi må først finne punkter der $\nabla g = \vec{0}$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x=y=z=0$, men dette oppfyller ikke $g(x,y,z)=1$

$\Rightarrow$ Ingen kandidater når $\nabla g = \vec{0}$

Vi må også se på: $\nabla f = \lambda \nabla g$ $f(x,y,z)=8xyz$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

gang opp med x

med z

gang med y

$$\left.\begin{aligned} 8xyz &= \lambda\frac{2x^2}{a^2} \\ 8xyz &= \lambda\frac{2y^2}{b^2} \\ 8xyz &= \lambda\frac{2z^2}{c^2} \end{aligned}\right\}$$ alle like $\Rightarrow \lambda\frac{2x^2}{a^2} = \lambda\frac{2y^2}{b^2} = \lambda\frac{2z^2}{c^2}$

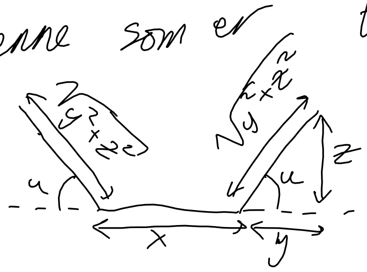
$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ (siden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$)

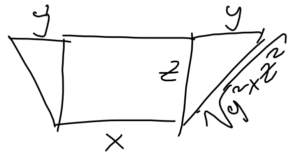
$\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

Størst mulig volum: $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\frac{8abc}{3\sqrt{3}}}$

5.10.13

renne som er b cm bred, brettes symmetrisk





arealet av tverrsnittet: $xz + 2\cdot\frac{1}{2}yz = xz+yz = f(x,y,z)$

betingelse: $\underbrace{x + 2\sqrt{y^2+z^2}}_{g(x,y,z)} = b$ ser at $\nabla g \neq \vec{O}$

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} z \\ z \\ x+y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \frac{2z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix}$

like $\Rightarrow 1 = \frac{2y}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$\Updownarrow$

$2y = \sqrt{y^2+z^2}$

$\Downarrow$

$4y^2 = y^2+z^2 \Rightarrow 3y^2 = z^2$

$\Rightarrow z = \sqrt{3}y \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$

første likning $\Rightarrow \lambda = z$

3 likning: $x+y = \lambda\frac{2z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{6y^2}{2y} = 3y$

$x+y = 3y \Rightarrow x = 2y$

Lengden av siderenna er $\sqrt{y^2+z^2} = 2y$

Derfor bør renna brettes i tre like lange deler