Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 1-5/2

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

February 4, 2010

Oppgave 3.1.2

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(\mathbf{t}) &= (\cos t, t\sin t) \\
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \sin t + t\cos t) \\
v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} \\
&= \sqrt{2\sin^2 t + t\sin(2t) + t^2\cos^2 t} \\
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, 2\cos t - t\sin t) \\
a(t) &= v'(t) = \frac{4\sin t\cos t + 2t\cos(2t) + \sin(2t) + 2t\cos^2 t - 2t^2\sin t\cos t}{2\sqrt{2\sin^2 t + t\sin(2t) + t^2\cos^2 t}} \\
&= \frac{2\sin(2t) + 2t\cos(2t) + \sin(2t) + 2t\cos^2 t - t^2\sin(2t)}{2\sqrt{2\sin^2 t + t\sin(2t) + t^2\cos^2 t}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(3-t^2)\sin(2t) + t(\cos(2t) + \cos^2 t)}{\sqrt{2\sin^2 t + t\sin(2t) + t^2\cos^2 t}}
\end{aligned}
$$

Det er her en liten feil i det første leddet i telleren i fasiten.

Oppgave 3.1.3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (t, e^{-t}, \sin t) \\
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (1, -e^{-t}, \cos t) \\
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (0, e^{-t}, -\sin t).
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.1.8

Vi har $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, der $t \in [0, 10]$. Vi har at

$$
\begin{aligned}
L(0,10) &= \int_0^{10} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\
&= \int_0^{10} \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt \\
&= \frac{1}{18}\int_0^{10} 18t\sqrt{9t^2+4}dt \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}(9t^2+4)^{3/2}\right]_0^{10} \\
&= \frac{1}{27}\left[(9t^2+4)^{3/2}\right]_0^{10} = \frac{904^{3/2} - 8}{27}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.1.10

Vi har at $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t)$.

a)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t) \\
v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\cos^2 t} = 2 \\
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (-2\cos t, -\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t)
\end{aligned}$$

b)

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} v(t)dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

c)

En kule med sentrum i origo er beskrevet ved at $x^2+y^2+z^2 = r^2$, der r er kuleradien. Vi har at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\cos^2 t + 2\sin 2t + 2\sin^2 t = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4 = 2^2,$$

og derfor ligger kurven på en kule om origo med radius 2.

d)

Vi har at

$$y - z = \sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\sin t = 0,$$

og derfor ligger kurven i det gitte planet.

e)

Kurven beskriver en sirkel med radius 2, på grunn av c), d), og det faktum at skjæringen mellom en kule med senter i origo og et plan gjennom origo er en sirkel med samme radius som kula.

Oppgave 3.1.17

$\mathbf{r}_1(t)$ er sporet til bakhjulet, $\mathbf{r}_2(t)$ er sporet til forhjulet.

a)

Siden fartsretningen til bakhjulet alltid er retningen mot forhjulet, så vil $\mathbf{v}_1(t)$ ha samme retning som $\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$. Siden sistnevnte har lengde 1 (fra oppgaveteksten), så er denne en enhetsvektor i fartsretningen, som også er definisjonen på $\mathbf{T}_1(t)$. Altså er $\mathbf{T}_1(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$, slik at $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t)$.

b)

Vi antar at $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$, og får da at

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1(t) &= (1, \cos t) \\
v(t) &= \sqrt{1+\cos^2 t} \\
\mathbf{T}_1(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right) \\
\mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right).
\end{aligned}$$

d)

Sykkelen kjører fra venstre mot høyre, siden plottet faller sammen med det vi tegnet i c).

Oppgave 3.1.21

Vi antar at $\mathbf{a}(t) = k(t)\mathbf{r}(t)$.

a)

Ved å bruke setning 3.1.4 får vi at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) &= \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}'(t) \\
&= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) \\
&= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + k(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)) \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Her har vi brukt alle regnereglene for vektorproduktet, samt at vektorproduktet av to parallelle vektorer alltid er $\mathbf{0}$.

b)

På grunn av a) så må den deriverte av hver komponent i $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ også være 0. Men da er hver komponent i $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ en konstant. Men da er også $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ konstant.

c)

Planet som inneholder $\mathbf{0}$, $\mathbf{r}(0)$, og $\mathbf{v}(t)$ er unikt identifisert ved at det har normalvektor $\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$, og går gjennom $\mathbf{0}$. Å vise at $\mathbf{r}(t)$ ligger i dette planet blir da det samme som å vise at $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)) = 0$ (siden planet består av alle punkter som står normalt på normalvektoren). Dette er tilfellet siden

$$\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)) = \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = 0,$$

hvor vi har brukt det vi viste i b), samt at vektorproduktet $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ står normalt på $\mathbf{r}(t)$.

Oppgave 3.2.1

Vi har funksjonen $f(x, y) = x^2y^3$, og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 3t).$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (2t, 3) \\ \bigtriangledown f &= (2xy^3, 3x^2y^2) \\ \bigtriangledown f(\mathbf{r}(t)) &= (54t^5, 27t^6). \end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\begin{aligned} g'(t) &= \bigtriangledown f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (54t^5, 27t^6) \cdot (2t, 3) \\ &= 108t^6 + 81t^6 = 189t^6. \end{aligned}$$

Oppgave 3.2.4

Vi har funksjonen $f(x, y, t) = ty^2 \ln(x^2 + 1)$, og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^3, 3t + 1).$$

Her ser vi i stedet på kurven

$$\mathbf{s}(t) = (t^3, 3t + 1, t).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'(t) &= (3t^2, 3, 1) \\ \bigtriangledown f &= \left(\frac{2xty^2}{x^2+1}, 2ty\ln(x^2+1), y^2\ln(x^2+1)\right) \\ \bigtriangledown f(\mathbf{s}(t)) &= \left(\frac{2t^4(3t+1)^2}{t^6+1}, 2t(3t+1)\ln(t^6+1), (3t+1)^2\ln(t^6+1)\right). \end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\begin{aligned} g'(t) &= \bigtriangledown f(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) \\ &= \frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1} + 6t(3t+1)\ln(t^6+1) + (3t+1)^2\ln(t^6+1) \\ &= \frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1} + (3t+1)(9t+1)\ln(t^6+1). \end{aligned}$$

Oppgave 3.2.7

Vi har temperaturfunksjonen $f(x, y, t) = 20 + 2t - x^2 + y^2$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (3t - \frac{t^2}{4}, 2t + \frac{t^2}{8}, t)$. Vi får at

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f &= (-2x, 2y, 2) \\ \bigtriangledown f(\mathbf{r}(t)) &= (-6t + \frac{t^2}{2}, 4t + \frac{t^2}{4}, 2) \\ \bigtriangledown f(\mathbf{r}(1)) &= (-11/2, 17/4, 2) \\ \mathbf{r}'(t) &= (3 - \frac{t}{2}, 2 + \frac{t}{4}, 1) \\ \mathbf{r}'(1) &= (5/2, 9/4, 1) \end{aligned}$$

Hvis $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ får vi dermed

$$\begin{aligned} g'(1) &= \bigtriangledown f(\mathbf{r}(1)) \cdot \mathbf{r}'(1) \\ &= (-11/2, 17/4, 2) \cdot (5/2, 9/4, 1) \\ &= -55/4 + 153/16 + 2 = \frac{-220+153+32}{16} = -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

Siden dette er mindre enn null, så er temperaturen avtagende langs kurven nær 1.

Oppgave 3.3.1

vi har $f(x,y) = x$ og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$$

Vi har

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t)) &= \sin t \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (\cos t, -\sin t) \\ v(t) &= 1 \\ f(\mathbf{r}(t))v(t) &= \sin t. \end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.$$

Oppgave 3.3.2

Vi har $f(x,y) = xy$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (3t, 4t)$ med $0 \leq t \leq 2$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (3,4) \\ v(t) &= 5 \\ f(\mathbf{r}(t)) &= 3t \times 4t = 12t^2. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^2 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt = \int_0^2 60t^2 dt = \left[20t^3\right]_0^2 = 160.$$

Oppgave 3.3.4

Vi har $f(x,y,z) = xz$, og kurven $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t)$ med $0 \leq t \leq 1$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (6t^2, 6\sqrt{2}t, 6) \\ v(t) &= \sqrt{36t^4 + 72t^2 + 36} = 6(t^2+1) \\ f(\mathbf{r}(t)) &= 12t^4 \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt \\ &= \int_0^1 12t^4 6(t^2+1)dt \\ &= \int_0^1 (72t^6 + 72t^4)dt \\ &= \left[\frac{72}{7}t^7 + \frac{72}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{72}{7} + \frac{72}{5} = \frac{864}{35} \end{aligned}$$

Matlab-kode

```
% Oppgave  3.1.5 a)
t=linspace(0,6*pi,100);
plot(t.*cos(t),t.*sin(t));

% Oppgave  3.1.5 b)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot(5*cos(t),3*sin(t));

% Oppgave  3.1.5 c)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot(sin(2*t).*cos(t),sin(2*t).*sin(t));

% Oppgave 3.1.5 d)
t=linspace(0,6*pi,100);
plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),t);

% Oppgave 3.1.5 e)
t=linspace(-20,20,400);
plot3(t,sin(t),cos(t));
```

```
% Oppgave 3.1.10e)
t=linspace(0,2*pi,100);
plot3(2*cos(t),sqrt(2)*sin(t),sqrt(2)*sin(t));
```

```
% Oppgave 3.1.17c)
t = 0:0.05:10;
plot(t,sin(t),'k-',t + 1./sqrt(1+cos(t).^2),sin(t) + cos(t)./sqrt(1+cos(t).^2),'k+');
legend('bakhjul','forhjul');
axis('equal');
```

```
% Oppgave 5.1
r=linspace(-2,2,100);
s=linspace(-2,2,100);
[x,y]=meshgrid(r,s);
f=(x.^2) .* (y.^2);
g=sin(x)./(y.^2)+x.^2;
h=sin(exp(x+y));

mesh(x,y,f);
figure(2)
mesh(x,y,g);
figure(3)
mesh(x,y,h);
```

```
% Oppgave 5.2
t=linspace(0,50,1000);
x1=t;
```

```
y1=t.^2;
z1=sin(t);
x2=sin(t).^2;
y2=cos(t).^2;
z2=exp(-t);
plot3(x1,y1,z1)
figure(2)
plot3(x2,y2,z2)
```

Python-kode

```
# Oppgave 3.1.5 a)
t=linspace(0,6*pi,100)
plot(t*cos(t),t*sin(t))

# Oppgave 3.1.5 b)
t=linspace(0,2*pi,100)
figure(2)
plot(5*cos(t),3*sin(t))

# Oppgave 3.1.5 c)
t=linspace(0,2*pi,100)
figure(3)
plot(sin(2*t)*cos(t),sin(2*t)*sin(t))

# Oppgave 3.1.5 d)
t=linspace(0,6*pi,100);
figure(4)
plot3(t*cos(t),t*sin(t),t);

# Oppgave 3.1.5 e)
t=linspace(-20,20,400);
figure(5)
plot3(t,sin(t),cos(t));
```

```
# Oppgave 3.1.10e)
t=linspace(0,2*pi,100)
figure(4)
plot3(2*cos(t),sqrt(2)*sin(t),sqrt(2)*sin(t))
```

```
# Oppgave 3.1.17c)
t = linspace(0,10,200)
figure(5)
plot(t,sin(t),'k-',t + 1./sqrt(1+cos(t)**2),sin(t) + cos(t)/sqrt(1+cos(t)**2),'k+')
legend('bakhjul','forhjul')
axis('equal')
```

```
# Oppgave 5.1
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

r=arange(-5,5,0.05,float)
s=arange(-5,5,0.05,float)
x,y=meshgrid(r,s,sparse=False,indexing='ij')
f=(x**2)*(y**2)
g=sin(x)/(y**2) + x**2
h=sin(exp(x+y))
mesh(x,y,f)
figure(2)
mesh(x,y,g)
figure(3)
mesh(x,y,h)
```

```
# Oppgave 5.2
t=linspace(0,50,1000)
x1=t
y1=t**2
z1=sin(t)
x2=sin(t)**2
y2=cos(t)**2
z2=exp(-t)
plot3(x1,y1,z1)
figure(2)
plot3(x2,y2,z2)
```