Løsningsforslag for flervariabel analyse med lineær algebra

Øyvind Ryan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

18. februar 2015

Innhold

Forord **v**

Kapittel 3 **1**
Seksjon 3.1 . . . 1
Seksjon 3.2 . . . 6
Seksjon 3.3 . . . 8
Seksjon 3.4 . . . 12
Seksjon 3.5 . . . 17
Seksjon 3.6 . . . 23
Seksjon 3.7 . . . 27
Seksjon 3.8 . . . 35
Seksjon 3.9 . . . 37

Kapittel 6 **41**
Seksjon 6.1 . . . 41
Seksjon 6.2 . . . 47
Seksjon 6.3 . . . 52
Seksjon 6.4 . . . 56
Seksjon 6.5 . . . 61
Seksjon 6.6 . . . 66
Seksjon 6.7 . . . 67
Seksjon 6.8 . . . 73
Seksjon 6.9 . . . 75
Seksjon 6.10 . . . 79
Seksjon 6.11 . . . 84
Seksjon 6.12 . . . 87
Seksjon 6.13 . . . 92
Seksjon 6.14 . . . 93
Seksjon 6.15 . . . 97

Forord

Dette heftet inneholder løsningsforslag til utvalgte oppgaver i boka "Flervariabel analyse med lineær algebra", og skal dekke alle seksjoner i denne. Det er ment som en følgebok til læreboka, ikke som en egen pensumbok. Heftet har utviklet seg over de årene jeg har hatt plenumsregningene i kurset MAT1110 ved Universitetet i Oslo. Det meste av læreboka er pensum i MAT1110, mens første del av boka er pensum i kurset MAT1100. Oppgavevalgene gjenspeiler de som er blitt gitt i MAT1100 og MAT1110 de siste årene.

De nevnte kursene ved Universitetet i Oslo er ganske regnekrevende. Bakgrunnen for heftet er tilbakemeldinger fra studenter som mener løsningsforslag er veldig nyttige å ha ved siden av pensum, som en guide i oppgaveløsning. Selvfølgelig er det viktig at studenter prøver å løse oppgavene på egenhånd og, men et presist og enklest mulig løsningsforslag kan være gull verdt, både når man står fast på oppgaver, og når man skal kryssjekke det man har gjort.

I dette heftet finnes også stoff relatert til oppgavene, som læreboka ikke går så dypt inn på da teorien har mest fokus der. Heftet går for eksempel enda mer i detaljer enn læreboka når det gjelder å sette opp uoppstilte problemer på en slik måte at de lar seg løse. Heftet forklarer også gjennom mange oppgaver hvordan man skal komme i gang på de fleste typer oppgaver, og hvordan man skal formulere seg. Det er også fokus på regneknep som ikke alltid kommer så godt frem i læreboka. Flere av oppgavene kan løses på mer enn en måte, og i flere tilfeller blir mer enn en fremgangsmåte vist. De vanlige regnefeilene blir også gått gjennom. Noen deler av læreboka har erfaringsmessig vist seg vanskeligere enn andre, og mye plass er derfor dedikert til disse delene. Dette gjelder blant annet regnetrening og geometrisk forståelse knyttet til integrasjon i flere variable. Kapitlene og seksjonene er nummerert på samme måte som i læreboka. Oppgaveteksten gjentas kun der dette er praktisk, og det er derfor lurt å ha læreboka foran seg når man bruker heftet i forbindelse med en oppgave.

Læreboka er bygget opp med en del kodeeksempler blandet inn i stoffet der dette er relevant. Dette gjøres også i dette heftet, og det er flere oppgaver som inneholder programmering. Alle kodeeksemplene er i Matlab. Mye av regningen kan også bekreftes ved hjelp av en symbolsk verktøypakke i Matlab, og dette blir demonstrert flere steder. Alle figurene i heftet er også generert med Matlab.Ved Universitetet i Oslo er det også en strategisk satsing på Python som et gjennomgående språk i begynnerkursene. Matlabkoden er derfor også oversatt til Python, og kan finnes på heftets webside. Den strategiske satsingen på Python er en del av "Computers in Science Education"-prosjektet (CSE) ved Universitetet i Oslo, et prosjekt der beregninger søkes integrert tverrfaglig i undervisningen helt fra første semester av på universitetet. Beregninger er her ment i en vid forstand, som omfatter både programmering, forskjellige språk, algoritmeforståelse, og numeriske metoder. Vi kommer tilbake til flere av disse senere i heftet.

På heftets webside kan du også finne all Matlab-kode som er listet opp i heftet, sammen med all kode som er brukt til å generere figurene.

Bruk av boken i undervisning

Med dette heftet har studentene en guide til hvordan alle typer oppgaver i læreboka kan løses, og det kan jo være en god støtte når man står fast på enkelte oppgaver. Heftet egner seg definitivt best som en oppslagsbok - bruk den parallelt med at du løser konkrete oppgaver, og slå opp etterhvert som du står fast. Ikke les boka fra perm til perm, det er ikke det som er meningen! Og jobb med en oppgave i læreboka parallelt med at du bruker heftet, med læreboka oppe! Studenter bør også være klar over at man lærer mest av å prøve hardt på oppgavene på egen hånd først, før man rådfører seg med løsningsforslagene. Så, studenter, prøv alltid å regne gjennom først! Det kan være lurt at man hver uke også gir noen oppgaver som ikke blir løst i heftet. Dette vil hindre at studentene blir passive i den forstand at de bare rådfører seg med heftet.

Som enhver annen bok inneholder nok også denne enkelte trykkfeil, som skal bli rettet opp i neste utgave. Vi tar imot all hjelp vi kan få til å finne feil, eller å finne oppgaver der forklaringer og utregninger er litt mangelfulle. Hvis du finner en trykkfeil foreslår vi at du først sjekker om denne allerede er ført opp på den oppdaterte trykkfeillista på heftets webside. Hvis den ikke er der bør du sende en email til adressen oppgitt på heftets webside.

Takk

Flere personer har bidratt i forbindelse med utformingen av innholdet i dette heftet. Studentene i MAT1110 har blant annet gitt tilbakemeldinger på første versjon av løsningsforslagene. Spesielt har dette bidratt til å detaljere en del oppgaver videre der første versjon var for kortfattet, og tilbakemeldinger fra studenter kommer helt sikkert til å fortsette de neste årene og, slik at neste utgave kan bli enda bedre. Magnus Bugge og Magnus Pedersen Lohne har oversatt mye av koden som finnes i dette heftet til Python. En stor takk også til Tom Lindstrøm for å ha gitt innspill til utformingen av dette heftet, samt utvalget av oppgaver. Jeg retter også en takk til arbeidskollegene mine på CSE-prosjektet, som har inspirert meg til å jobbe med utviklingen av nytt kursmateriell.

Blindern, 18. september 2014

Øyvind Ryan

Kapittel 6

Seksjon 6.1

Oppgave 1.

a).

$$\begin{aligned}\int\int_R xydxdy &= \int_2^4 \left[\int_1^2 xydx\right] dy = \int_2^4 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_1^2 dy \\ &= \int_2^4 \left(2y - \frac{1}{2}y\right) dy = \int_2^4 \frac{3}{2}ydy \\ &= \left[\frac{3}{4}y^2\right]_2^4 = 12 - 3 = 9.\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}&\int\int_R (x + \sin y)dxdy \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^1 (x + \sin y)dx\right] dy = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x\sin y\right]_0^1 dy \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sin y\right) dy = \left[\frac{1}{2}y - \cos y\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 1 + 1 = 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

d).

$$\begin{aligned}&\int\int_R x\cos(xy)dxdy \\ &= \int_1^2 \left[\int_\pi^{2\pi} x\cos(xy)dy\right] dx = \int_1^2 [\sin(xy)]_\pi^{2\pi} dx \\ &= \int_1^2 (\sin(2\pi x) - \sin(\pi x))dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

e).

$$
\begin{aligned}
&\int\int_R xye^{x^2y}dxdy \\
&= \int_0^2\left[\int_1^2 xye^{x^2y}dy\right]dx = \int_1^2\left[\int_0^2 xye^{x^2y}dx\right]dy \\
&= \int_1^2\left[\frac{1}{2}e^{x^2y}\right]_0^2 dy = \int_1^2\left(\frac{1}{2}e^{4y}-\frac{1}{2}\right)dy = \left[\frac{1}{8}e^{4y}-\frac{1}{2}y\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}e^8 - 1 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}e^8 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

f).

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \ln(xy)dxdy &= \int_1^e\left[\int_1^e \ln(xy)dx\right]dy \\
&= \int_1^e\left[\int_1^e \ln x + \ln y dx\right]dy \\
&= \int_1^e\left([x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx + [x\ln y]_1^e\right)dy \\
&= \int_1^e (e - e + 1 + (e-1)\ln y)\,dy \\
&= \int_1^e (1 + (e-1)\ln y)\,dy \\
&= [y]_1^e + (e-1)\,[y\ln y]_1^e - (e-1)\int_1^e dy \\
&= e - 1 + e(e-1) - (e-1)^2 \\
&= (e-1)(1+e-e+1) = 2(e-1).
\end{aligned}
$$

g). Setter vi først $u = x\sqrt{y}$ og $du = \sqrt{y}dx$ i det innerste integralet får vi

$$
\int \frac{1}{1+x^2y}dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}(1+u^2)}du = y^{-1/2}\arctan u = y^{-1/2}\arctan(x\sqrt{y}).
$$

Dermed blir integralet

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{1+x^2y}dxdy &= \int_0^1\left[\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2y}dx\right]dy \\
&= \int_0^1 \left[y^{-1/2}\arctan(x\sqrt{y})\right]_1^{\sqrt{3}} dy \\
&= \int_0^1 y^{-1/2}(\arctan(\sqrt{3y}) - \arctan(\sqrt{y}))dy.
\end{aligned}
$$

Bruker vi her substitusjonen $u = \sqrt{y}$ får vi at $du = \frac{1}{2}y^{-1/2}dy$, og dermed

$$
\int_0^1 y^{-1/2}(\arctan(\sqrt{3y}) - \arctan(\sqrt{y}))dy = 2\int_0^1 (\arctan(\sqrt{3}u) - \arctan u)du.
$$

Her kan vi fortsette med delvis integrasjon:

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^1 (\arctan(\sqrt{3}u) - \arctan u)du \\
&= 2\Big[u(\arctan(\sqrt{3}u) - \arctan u)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}u}{1+3u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right) du \\
&= 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) - 2\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\ln(1+3u^2) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^1 \\
&= 2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) - 2\frac{\sqrt{3}}{6}\ln 4 + 2\frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \frac{\pi}{6} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ln 2.
\end{aligned}
$$

Integralet blir kanskje litt enklere hvis vi bytter om integrasjonsrekkefølgen (teorem 6.1.7). Vi får da

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{1+x^2y}dxdy &= \int_1^{\sqrt{3}}\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y}dy\right]dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{\ln(1+x^2y)}{x^2}\right]_0^1 dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x}dx \\
&= -\frac{\ln 4}{\sqrt{3}} + \ln 2 + [2\arctan x]_1^{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{2\sqrt{3}\ln 2}{3} + \ln 2 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\
&= \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ln 2 + \frac{\pi}{6},
\end{aligned}
$$

der vi har brukt delvis integrasjon.

Oppgave 2. Bruker vi metoden fra læreboka blir koden som følger.

```
% Oppgave 6.1.2
% a)
% Integraler kan regnes ut på flere måter i Matlab.
% De fire eksemplene nedenfor returnerer alle samme svar
dblquad( @(x,y)x.*y ,1,2,2,4) % Ved hjelp av anonym funksjon
dblquad('x.*y',1,2,2,4)       % Samme som over, men enklere syntaks.
f=inline('x.*y');
dblquad(f,1,2,2,4)            % Ved hjelp av linjefunksjon

% Symbolsk kan vi regne ut integralet slik
syms x y
uttrykk1=int('x*y','x',1,2)
uttrykk2=int(uttrykk1,'y',2,4)
```

```
eval(uttrykk2)

% b)
dblquad(@(x,y)x+sin(y),0,1,0,pi)

% c)
dblquad(@(x,y)x.^2.*exp(y),-1,1,0,1)

% d)
dblquad(@(x,y)x.*cos(x.*y),1,2,pi,2*pi)

% e)
dblquad(@(x,y)x.*y.*exp((x.^2).*y),0,2,1,2)

% f)
dblquad(@(x,y)log(x.*y),1,exp(1),1,exp(1))

% g)
dblquad(@(x,y)1./(1+(x.^2).*y),1,sqrt(3),0,1)
```

Legg merke til at integralene også kan regnes ut ved hjelp av Symbolic Math Toolbox i Matlab. Dette er gjort her for a). For a) er det også vist flere alternative uttrykk for å regne ut det samme integralet.

Oppgave 3. Det er dessverre ganske omstendelig å løse denne oppgaven, da vi først må definere delepunkter, rektangler, maksimum, og minimum for hele tre forskjellige partisjoner.

- La Π_1 ha delepunkter (x_{1i}, y_{1j}) $(0 \leq i \leq n_1,\ 0 \leq j \leq m_1)$ der $a = x_{10} \leq \cdots \leq x_{1n_1} = b$, $c = y_{10} \leq \cdots \leq y_{1m_1} = d$,
- kall de tilsvarende rektanglene for R_{1ij},
- sett $m_{1ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{1ij}\}$, $M_{1ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{1ij}\}$.

Videre,

- la Π_2 ha delepunkter (x_{2i}, y_{2j}) $(0 \leq i \leq n_2, 0 \leq j \leq m_2)$ der $a = x_{20} \leq \cdots \leq x_{2n_2} = b$, og $c = y_{20} \leq \cdots \leq y_{2m_2} = d$,
- kall de tilsvarende rektanglene for R_{2ij},
- sett $m_{2ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{2ij}\}$, $M_{2ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{2ij}\}$.

La og Π være partisjonen som inneholder alle delepunktene til Π_1 og Π_2, og

- la Π ha delepunkter (x_i, y_j) $(0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ der $a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b$, og $c = y_0 \leq \cdots \leq y_m = d$,
- kall de tilsvarende rektanglene for R_{ij},
- sett $m_{ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ij}\}$, $M_{ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ij}\}$.

Det er klart at hvert rektangel R_{1ij} kan skrives som en union av endelig mange R_{ij}, det vil si
$$R_{1ij} = R_{i_1j_1} \cup \cdots \cup R_{i_kj_k}.$$
Da er $R_{1ij} = |R_{i_1j_1}| + \cdots + |R_{i_kj_k}|$, og siden $m_{1ij} \leq m_{i_rj_r}$ for alle r, så har vi
$$m_{1ij}|R_{1ij}| = \sum_{r=1}^{k} m_{1ij}|R_{i_kj_k}| \leq \sum_{r=1}^{k} m_{i_rj_r}|R_{i_kj_k}|.$$
Summerer vi over alle i, j ovenfor får vi
$$N(\Pi_1) = \sum_{ij} m_{1ij}|R_{1ij}| \leq \sum m_{ij}|R_{ij|}| = N(\Pi).$$
Dette er den første ulikheten vi skulle vise. Den andre, $N(\Pi) \leq \text{Ø}(\Pi)$, vet vi allerede, siden minimum m_{ij} alltid er mindre enn maksimum M_{ij}.

Den siste ulikheten følger på en helt tilsvarende måte: Hvert rektangel R_{2ij} kan skrives som en union av endelig mange R_{ij}, det vil si
$$R_{2ij} = R_{i_1j_1} \cup \cdots \cup R_{i_kj_k}.$$
Da er $R_{2ij} = |R_{i_1j_1}| + \cdots + |R_{i_kj_k}|$, og siden $M_{2ij} \geq M_{i_rj_r}$ for alle r, så har vi
$$M_{2ij}|R_{2ij}| = \sum_{r=1}^{k} M_{2ij}|R_{i_kj_k}| \geq \sum_{r=1}^{k} M_{i_rj_r}|R_{i_kj_k}|.$$
Summerer vi over alle i, j ovenfor får vi
$$\text{Ø}(\Pi_2) = \sum_{ij} M_{2ij}|R_{2ij}| \geq \sum M_{ij}|R_{ij|}| = \text{Ø}(\Pi),$$
som er det vi skulle vise.

Oppgave 4. Anta f er integrerbar over R. Da finnes det to partisjoner Π_1, Π_2 slik at
$$\begin{aligned} N(\Pi_1) &\geq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2} &=& \int_R f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2} \\ \text{Ø}(\Pi_2) &\leq \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} &=& \int_R f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$
Fra Oppgave 6.1.3 vet vi at det finnes en partisjon Π slik at $N(\Pi_1) \leq N(\Pi) \leq \text{Ø}(\Pi) \leq \text{Ø}(\Pi_2)$. Men da er
$$\begin{aligned} \text{Ø}(\Pi) - N(\Pi) &\leq \text{Ø}(\Pi_2) - N(\Pi_1) \\ &\leq \int_R f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} - (\int_R f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$
som var det vi skulle vise. Den andre veien, hvis $\text{Ø}(\Pi) - N(\Pi) \leq \epsilon$ så vil $\text{Ø}(\Pi) \leq N(\Pi) + \epsilon$. Da vil også
$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \text{Ø}(\Pi) \leq N(\Pi) + \epsilon \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \epsilon.$$

Altså har vi at

$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \epsilon.$$

Siden dette gjelder for alle ϵ, så har vi at

$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy.$$

Siden også

$$\underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy,$$

så har vi at

$$\underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy = \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy,$$

og derfor er f integrerbar.

Oppgave 7. La $m = \min_{(x,y)\in R} f(x,y)$, $M = \max_{(x,y)\in R} f(x,y)$. Det er da klart at

$$m|R| \leq \int\int_R f(x,y)dxdy \leq M|R|, \tag{0.0.1}$$

slik at $m \leq \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|} \leq M$. La videre (x_m, y_m), (x_M, y_M) være minimum og maksimum for f, det vil si at $f(x_m, y_m) = m$, $f(x_M, y_M) = M$ (vi vet at enhver kontinuerlig funksjon definert på et lukket og begrenset område antar både maksimum og minimum).

Vi skal bruke skjæringssetningen (Setning 5.2.1 i Kalkulus) til å vise at vi kan finne $(\bar{x}, \bar{y})$ slik at $f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$. Siden skjæringssetningen er formulert kun for funksjoner i en variabel, så blir vi her nødt til å bruke den på en litt spesiell måte. Anta først at $x_m < x_M$, $y_m < y_M$, og at $f(x_M, y_m) < \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$. Bruk av skjæringssetningen på funksjonen $g(y) = f(x_M, y)$ $(y_m < y < y_M)$ gir da at (siden $g(y_m) < \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|} < g(y_M)$) det finnes en $\bar{y}$ slik at $f(x_M, \bar{y}) = \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$, slik at vi i tillegg kan sette $\bar{x} = x_M$, og vi har funnet $(\bar{x}, \bar{y})$ slik vi skulle. Hvis vi i stedet har at $f(x_M, y_m) > \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$, så kan vi i stedet bruke skjæringssetningen på funksjonen $h(x) = f(x, y_m)$ $(x_m < x < x_M)$ til å utlede at det finnes en $\bar{x}$ slik at $f(\bar{x}, y_m) = \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$ (siden $h(x_m) < \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|} < h(x_M)$). Med andre ord, også i dette tilfellet ser vi at det finnes et slikt punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ (her setter vi $\bar{y} = y_m$). Så lenge $x_m < x_M$, $y_m < y_M$ klarer vi derfor alltid finne et slikt punkt $(\bar{x}, \bar{y})$. De andre tilfellene der vi ikke har at $x_m < x_M$, $y_m < y_M$ følger på en helt tilsvarende måte (her vil også skjæringssetningen kunne bli anvendt på en funksjon som har mindre verdi i høyre endepunkt).

Argumentasjonen ovenfor kan i seg selv tas som et bevis for en flerdimensjonal variant av skjæringssetningen, der et intervall erstattes med et rektangel (skjæringssetningen er ikke formulert slik i læreboka). Oppgaven kan jo løses veldig elegant hvis vi allerede hadde bevist en slik generalisering av skjæringssetningen, siden vi startet med å vise at $m \leq \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|} \leq M$.

Seksjon 6.2

Oppgave 1.

a).

$$\int\int_R x^2 y dx dy$$
$$= \int_0^2 \left[\int_0^x x^2 y dy\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^4 dx = \left[\frac{1}{10}x^5\right]_0^2 = \frac{16}{5}.$$

b).

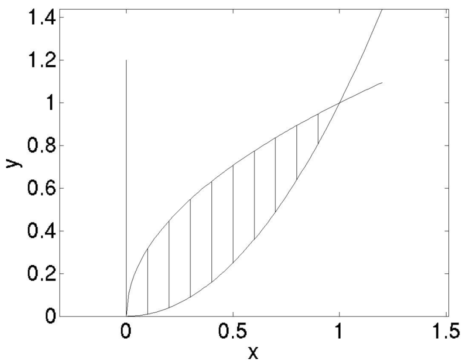
$$\begin{aligned}
\int\int_R (x+2xy)dxdy &= \int_0^3 \left[\int_x^{2x+1} (x+2xy)dy\right] dx \\
&= \int_0^3 \left[xy + xy^2\right]_x^{2x+1} dx \\
&= \int_0^3 \left(x(2x+1) + x(2x+1)^2 - x^2 - x^3\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(2x^2 + x + 4x^3 + 4x^2 + x - x^2 - x^3\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(3x^3 + 5x^2 + 2x\right) dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + x^2\right]_0^3 = \frac{243}{4} + 45 + 9 = \frac{459}{4}.
\end{aligned}$$

c).

$$\int\int_R y dx dy$$
$$= \int_1^2 \left[\int_y^{y^2} y dx\right] dy = \int_1^2 [xy]_y^{y^2} dx = \int_1^2 \left(y^3 - y^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{15}{4} - \frac{7}{3} = \frac{45-28}{12} = \frac{17}{12}.$$

d).

$$\begin{aligned}
\int\int_R x\cos y dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sin y} x \cos y dx\right] dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}x^2\cos y\right]_0^{\sin y} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2 y \cos y dy \\
&= \left[\frac{1}{6}\sin^3 y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$



Figur 5: Integrasjonsområdet i Oppgave 6.2.1f).

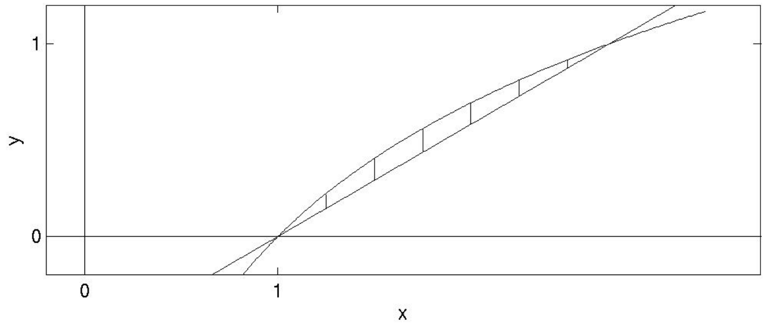
f). Skjæringspunktene mellom $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$ er $(0,0)$ og $(1,1)$. For $0 \le x \le 1$ er $x^2 \le \sqrt{x}$, som vist i Figur 5. Derfor får vi

$$\begin{aligned}\int\int_R x^2 y dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y dy\right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^6\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{14}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{14} = \frac{7-4}{56} = \frac{3}{56}.\end{aligned}$$

h). Her kan vi bruke at $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ fra formelsamlingen. Vi kan også gjøre substitusjonen $u = \arcsin y$, eller $y = \sin u$: Vi ser da at $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{|\cos u|} = \frac{1}{\cos u}$, der vi kunne fjerne absoluttverditegnet på grunn av de spesielle integralgrensene her. Videre er $dy = \cos u du$, slik at

$$\begin{aligned}&\int\int_R \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy\right] dx = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^x \frac{\cos u}{\cos u} du\right] dx = \int_0^{\pi/2} x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

i). I denne oppgaven er ikke integralgrensene gitt, slik at vi må finne disse ved regning først. Kurvene $y = \ln x$ og $y = \frac{x-1}{e-1}$ skjærer hverandre i $x = 1$ og $x = e$, og det er klart at for $1 \le x \le e$ så ligger kurven $y = \ln x$ øverst, siden denne er konkav (den vender den hule siden ned, siden $f''(x) < 0$)). Dette er også tegnet i Figur 6. Integralet blir derfor



Figur 6: Integrasjonsområdet i Oppgave 6.2.1i).

$$
\begin{aligned}
\int\int_R xdxdy &= \int_1^e \left[\int_{\frac{x-1}{e-1}}^{\ln x} xdy\right] dx = \int_1^e \left(x\ln x - \frac{x(x-1)}{e-1}\right) dx \\
&= \int_1^e x\ln xdx - \frac{1}{e-1}\int_1^e \left(x^2-x\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e - \frac{1}{e-1}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} - \frac{2e^3-3e^2+1}{6(e-1)} \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} - \frac{2e^3-2e^2-e^2+1}{6(e-1)} \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{6}(e+1) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)e^2 + \frac{1}{6}e + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}e^2 + \frac{1}{6}e + \frac{5}{12}.
\end{aligned}
$$

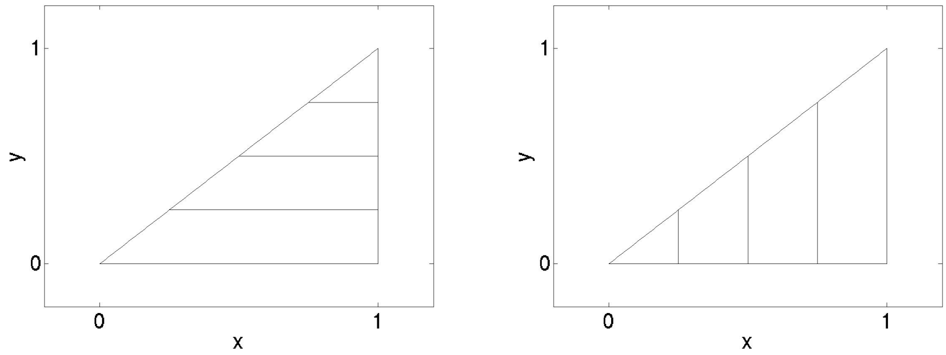
Oppgave 2. Koden blir

```
% Oppgave 6.2.2 a)
dblquad(@(x,y)(x.^2).*y .*(y<=x) ,0,2,0,2)

% Symbolsk utregning:
syms x y
uttrykk1=int('x^2*y','y',0,x);
uttrykk2=int(uttrykk1,'x',0,2);
eval(uttrykk2)

% Oppgave 6.2.2 b)
dblquad(@(x,y)(x+2*x.*y).*(x<=y).*(y<=(2*x+1)),0,3,0,7)

% Oppgave 6.2.2 c)
dblquad(@(x,y)y.*(y<=x).*(x<=y.^2),1,4,1,2)

% Oppgave 6.2.2 d)
dblquad(@(x,y)(x.*cos(y)).*(x<=sin(y)),0,1,0,pi/2)

% Oppgave 6.2.2 e)
dblquad(@(x,y)exp(x.^2).*(y<=x),0,1,0,1)

% Oppgave 6.2.2 f)
dblquad(@(x,y)(x.^2).*y.*(y<=sqrt(x)).*(x.^2<=y),0,1,0,1)

% Oppgave 6.2.2 g)
dblquad(@(x,y)x.*cos(x+y).*(y<=x),0,pi,0,pi)

% Oppgave 6.2.2 h)
dblquad(@(x,y)(y<=sin(x))./sqrt(1-y.^2),0,pi/2,0,1)
pi^2/8

% Oppgave 6.2.2 i)
dblquad(@(x,y)x.*(((x-1)./(exp(1)-1))<=y).*(y<=log(x)),1,exp(1),0,1)
```

Oppgave 1 kan også verifiseres ved hjelp av Symbolic Math Toolbox i Matlab, selv om integralgrensene ikke er konstante nå. Dette er gjort ovenfor for den første deloppgaven.

Oppgave 3. Når man skriver om et område fra type I til type II eller omvendt, er det viktigste at man først lager en god tegning av området. Skal man skrive om til et type II-integral bør du velge en vilkårlig y innenfor integrasjonsområdet, og tegne en horisontal strek med y lik denne verdien. Nedre integralgrense finner du da ved å lese av skjæringen med integrasjonsområdet som er lengst til venstre (minst x-verdi), øvre integralgrense ved å lese av skjæringen med integrasjonsområdet som er lengst til høyre (størst x-verdi). Både nedre og øvre integralgrense blir funksjoner i y, siden den horisontale streken ble valgt vilkårlig.

a). Området vi integrerer over, $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ og } y \leq x \leq 1\}$, er av type II. Ved opptegningen av området i Figur 7 ser vi fort at det også er av type I, og at det kan skrives på formen $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq x\}$. Vi får derfor



(a) Området tegnet som type II (b) Området tegnet som type I

Figur 7: Integrasjonsområdet i Oppgave 6.2.3a).

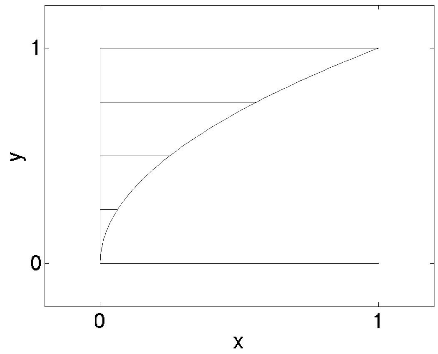
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2}dx\right] dy &= \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right] dx \\
&= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1).
\end{aligned}
$$

Skal man skrive om til et type I-integral bør du velge en vilkårlig x innenfor integrasjonsområdet, og tegne en vertikal strek med x lik denne verdien. Nedre integralgrense finner du da ved å lese av den nederste skjæringen med integrasjonsområdet (minst y-verdi), øvre integralgrense ved å lese av den øverste skjæringen med integrasjonsområdet (størst y-verdi). Både nedre og øvre integralgrense blir funksjoner i x, siden den vertikale streken ble valgt vilkårlig.

b). Området vi integrerer over, $R = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ og } x \le y \le \frac{\pi}{2}\}$, er av type I. Ved opptegning av området ser vi fort at det også er av type II, da det kan skrives på formen $R = \{(x,y) : 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \text{ og } 0 \le x \le y\}$.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \left[\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dy\right] dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx\right] dy = \int_0^{\pi/2} \left[x\frac{\sin y}{y}\right]_0^y dy = \int_0^{\pi/2} \sin y dy \\
&= [-\cos y]_0^{\pi/2} = 1.
\end{aligned}
$$

c). Området vi integrerer over, $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \text{ og } \sqrt{x} \le y \le 1\}$, er av type I. Ved opptegning av området ser vi fort at det også er av type II, da det kan skrives på formen $R = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \text{ og } 0 \le x \le y^2\}$ (har her brukt at $y = \sqrt{x}$ svarer til at $x = y^2$). Vi har tegnet opp området som type II i Figur 8. Vi får derfor



Figur 8: Integrasjonsområdet i Oppgave 6.2.3c).

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y^2}}\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y^2}}\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[y^2 e^{\frac{x}{y^2}}\right]_0^{y^2} dy \\
&= \int_0^1 \left(y^2 e - y^2\right) dy = \int_0^1 (e-1)y^2 dy = \left[\frac{1}{3}(e-1)y^3\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.
\end{aligned}$$

Seksjon 6.3

Oppgave 1.

a).

- Første kvadrant svarer i polarkoordinater til at $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,
- området innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 9$ svarer til at $0 \leq r \leq 3$.

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}
&\int\int_R xy^2 dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 xy^2 r dr\right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 r^4 \cos\theta \sin^2\theta dr\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{5} r^5 \cos\theta \sin^2\theta\right]_0^3 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{243}{5} \cos\theta \sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{243}{5} \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{81}{5}.
\end{aligned}$$

b).

- Området i første kvadrant svarer i polarkoordinater til at $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,
- området innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ svarer til at og $0 \leq r \leq 5$,
- området mellom linjene $y = 0$ og $y = x$ begrenser området ytterligere til $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}\int\int_R (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^5 (x^2+y^2)rdr\right]d\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^5 r^3 dr\right]d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^5 d\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{625}{4}d\theta = \frac{625\pi}{16}.\end{aligned}$$

e). Vi observerer at

- tredje kvadrant svarer i polarkoordinater til at $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$,
- linjen $y = \sqrt{3}x$ danner vinkel $\frac{\pi}{3}$ med x-aksen, og delen av denne som ligger i tredje kvadrant danner derfor en vinkel $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ med x-aksen,
- linjen $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ danner vinkel $\frac{\pi}{6}$ med x-aksen. og delen av denne som ligger i tredje kvadrant danner derfor en vinkel $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ med x-aksen.
- området innenfor $x^2 + y^2 = 1$ svarer til at $0 \leq r \leq 1$.

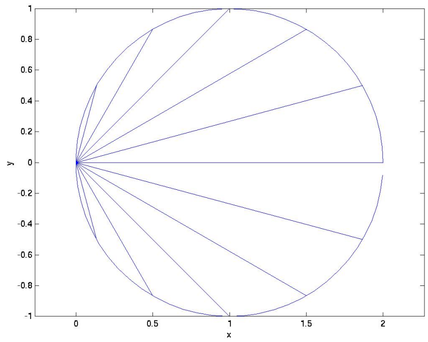
Derfor blir integralet

$$\begin{aligned}&\int\int_R (x^2-y^2)dxdy \\ &= \int_{7\pi/6}^{4\pi/3}\left[\int_0^1 (x^2-y^2)rdr\right]d\theta = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3}\left[\int_0^1 r^3(\cos^2\theta - \sin^2\theta)dr\right]d\theta \\ &= \int_{7\pi/6}^{4\pi/3}\left[\frac{1}{4}r^4\cos(2\theta)\right]_0^1 d\theta = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3}\frac{1}{4}\cos(2\theta)d\theta = \left[\frac{1}{8}\sin(2\theta)\right]_{7\pi/6}^{4\pi/3} \\ &= \frac{1}{8}(\sin(8\pi/3) - \sin(7\pi/3)) = \frac{1}{8}(\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2) = 0.\end{aligned}$$

f). Området i første kvadrant innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ svarer til at $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ og $0 \leq r \leq 1$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}&\int\int_R \sqrt{2-x^2-y^2}dxdy \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 \sqrt{2-r^2}rdr\right]d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)d\theta = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

g). $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ betyr i polarkoordinater at $r^2 - 2r\cos\theta + 1 \leq 1$, som er det samme som at $r \leq 2\cos\theta$. Sirkelen er tegnet opp i Figur 9. Vi ser at sirkelen ligger i første og fjerde



Figur 9: Integrasjonsområdet i Oppgave 6.3.1g).

kvadrant, slik at $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Det er videre klart fra figuren at sirkelen består av alle punkter som ligger på linjer på formen $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $0 \leq r \leq 2\cos\theta$. Derfor er grensene til området vårt $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 2\cos\theta$, og integralet blir derfor

$$
\begin{aligned}
&\int\int_R (x^2+y^2)^{3/2} dxdy \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} (x^2+y^2)^{3/2} r dr \right] d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^4 r dr \right] d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{32}{5} \cos^5\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{32}{5} (1-\sin^2\theta)^2 \cos\theta d\theta \\
&= \frac{32}{5} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^2 du = \frac{32}{5} \int_{-1}^{1} (u^4 - 2u^2 + 1) du \\
&= \frac{32}{5} \left[\frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + u \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{64}{5} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{64}{5} \frac{3-10+15}{15} = \frac{64}{5} \frac{8}{15} = \frac{512}{75},
\end{aligned}
$$

der vi har gjort subsitusjonen $u = \sin\theta$.

Oppgave 2. Koden blir

```
% Oppgave 6.3.2 a)
dblquad(@(r,theta)(r.^4).*cos(theta).*(sin(theta).^2),0,3,0,pi/2)

% Oppgave 6.3.2 b)
dblquad(@(r,theta)(r.^3),0,5,0,pi/4)

% Oppgave 6.3.2 c)
dblquad(@(r,theta)r.*exp(r.^2),1,4,0,2*pi)

% Oppgave 6.3.2 d)
dblquad(@(r,theta)r.^3.*sin(theta).*cos(theta),0,1,0,pi/4)
```

```
% Oppgave 6.3.2 e)
dblquad(@(x,y)(x.^2-y.^2).*(x.^2+y.^2<=1) ...
            .*(y >= sqrt(3).*x).*(y <= sqrt(3).*x./3) ,-1,0,-1,0)

% Oppgave 6.3.2 f)
dblquad(@(r,theta)r.*sqrt(2-(r.*cos(theta)).^2-(r.*sin(theta)).^2)...
            ,0,1,0,pi/2)

% Oppgave 6.3.2 g)
dblquad(@(x,y)(x.^2+y.^2).^(3/2) .* ((x-1).^2 +y.^2 <= 1) ,0,2,-1,1)
```

Oppgave 3.

a). Sirkelskiven med sentrum i $(0,1)$ og radius 1 svarer til at $x^2+(y-1)^2 \leq 1$, som i polarkoordinater blir

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 1)^2 &\leq 1 \\ r^2 &\leq 2r\sin\theta \\ r &\leq 2\sin\theta. \end{aligned}$$

Vi ser ved opptegning at sirkelen er helt inneholdt i første og andre kvadrant, slik at $0 \leq \theta \leq \pi$. Fra tegningen ser vi at området er beskrevet i polarkoordinater ved $r \leq 2\sin\theta$, slik at det gitte integralet blir

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr\right] d\theta.$$

b). Vi får at

$$\begin{aligned} &\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^{2\sin\theta} r^2 dr\right] d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\sin\theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{8}{3}\sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[-\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\right]_0^\pi \\ &= \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{4}{3} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Oppgave 4. Setter vi inn grensene for integrasjonsområdet blir arealet lik

$$|A| = \int_\alpha^\beta \int_0^{r(\theta)} 1 r dr d\theta = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{r(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r(\theta)^2 d\theta,$$

der vi har regnet ut det innerste integralet. Hvis $r(\theta) = \sin(2\theta)$ får vi

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(1-\cos(4\theta))d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}(\pi/2) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Seksjon 6.4

Oppgave 1.

a).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[\int_0^1 (x+y^2)dy\right] dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_0^2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

d). Grafen $z = \sqrt{32 - 2x^2 - 2y^2} = \sqrt{32 - 2r^2}$ skjærer xy-planet for $r = 4$. Volumet kan derfor regnes ut ved hjelp av sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 \sqrt{32-2r^2} r dr\right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(32-2r^2)^{3/2}\right]_0^4 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} 32^{3/2} d\theta = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Oppgave 2. Trekanten med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$, og $(1,1)$ er beskrevet ved $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$. Massemiddelpunktet blir dermed

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int\int_A xf(x,y)dxdy}{\int\int_A f(x,y)dxdy} = \frac{\int_0^1 \int_0^x x^2 dydx}{\int_0^1 \int_0^x xdydx} \\ &= \frac{\int_0^1 \left[x^2 y\right]_0^x dx}{\int_0^1 \left[xy\right]_0^x dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4} \\ \bar{y} &= \frac{\int_0^1 \int_0^x xydydx}{1/3} \\ &= 3\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^x dx = 3\int_0^1 \frac{1}{2}x^3 dx = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Massemiddelpunktet er derfor $(\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$.

Oppgave 5. Flaten $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ har partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Arealet er derfor

$$\begin{aligned} &\int\int_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \sqrt{1+4r^2} r dr\right] d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{34\sqrt{17}}{3} - \frac{2}{3}\right) d\theta = \frac{\pi}{4}\frac{34\sqrt{17}-2}{3} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1), \end{aligned}$$

der vi har brukt at området A lar seg beskrive i polarkoordinater ved $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$.

Oppgave 7. Vi setter opp flateintegralet i kartesiske koordinater, for til slutt å skifte til polarkoordinater (du kunne alternativt bruke polarkoordinater hele veien, men da må du også regne ut $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|$, og sette denne inn i flateintegralet). Flaten er beskrevet ved $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$. Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

La oss så finne grensene til integrasjonsområdet i polarkoordinater. Sirkelen $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{4}$ betyr i polarkoordinater at

$$\begin{aligned}
\left(r\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+r^2\sin^2\theta &\leq \frac{1}{4} \\
r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-r\cos\theta+\frac{1}{4} &\leq \frac{1}{4} \\
r^2 &\leq r\cos\theta \\
r &\leq \cos\theta.
\end{aligned}$$

Vi ser også ved opptegning at sirkelen er helt inneholdt i første og fjerde kvadrant. I polarkoordinater er dette området beskrevet ved at $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Fra opptegning av området ser vi derfor at grensene for området blir $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq \cos\theta$, og flateintegralet for arealet blir dermed

$$\begin{aligned}
&\int\int_A \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}rdr\right]d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdr\right]d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos\theta}d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\theta|)\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}1d\theta - \int_{-\pi/2}^{0}|\sin\theta|d\theta - \int_0^{\pi/2}|\sin\theta|d\theta \\
&= \pi - \int_{-\pi/2}^{0}|\sin\theta|d\theta - \int_0^{\pi/2}|\sin\theta|d\theta.
\end{aligned}$$

Det er her lett å gå i den fellen å fjerne absoluttverditegnet rundt $\sin\theta$! Legg imidlertid merke til at

- $\sin\theta < 0$ for $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$, slik at $|\sin\theta| = -\sin\theta$ da,

- $\sin\theta > 0$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$, slik at $|\sin\theta| = \sin\theta$ da.

Dette er grunnen til at vi har splittet opp integralet fra $-\pi/2$ til $\pi/2$ over. Vi får nå videre

$$\begin{aligned}
&= \pi + \int_{-\pi/2}^{0} \sin\theta d\theta - \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \\
&= \pi + [-\cos\theta]_{-\pi/2}^{0} - [-\cos\theta]_{0}^{\pi/2} \\
&= \pi - 1 - 1 = \pi - 2.
\end{aligned}$$

Oppgave 10. Sylinderflaten T er gitt ved $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0, y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$. Denne er parametrisert ved $\mathbf{r}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z)$, med $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq 1$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} &= (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \\
\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| &= 2.
\end{aligned}$$

Flateintegralet blir dermed

$$\begin{aligned}
&\int\int_T xyz^2 dxdydz \\
&= \int\int_T xyz^2 \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| dzd\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 8z^2 \sin\theta\cos\theta dz\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 4z^2 \sin(2\theta) dz\right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{4}{3} z^3 \sin(2\theta)\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{3} \sin(2\theta) d\theta = \left[-\frac{2}{3}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 11. Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} &= (-3\sin u\cos v, -3\sin u\sin v, 3\cos u) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= (-(5 + 3\cos u)\sin v, (5 + 3\cos u)\cos v, 0) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= (-3(5 + 3\cos u)\cos u\cos v, \\
&\quad -3(5 + 3\cos u)\cos u\sin v, \\
&\quad -3(5 + 3\cos u)\sin u\cos^2 v - 3(5 + 3\cos u)\sin u\sin^2 v) \\
&= (-3(5 + 3\cos u)\cos u\cos v, -3(5 + 3\cos u)\cos u\sin v, -3(5 + 3\cos u)\sin u) \\
\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{9(5 + 3\cos u)^2\cos^2 u\cos^2 v + 9(5 + 3\cos u)^2\cos^2 u\sin^2 v + 9(5 + 3\cos u)^2\sin^2 u} \\
&= 3(5 + 3\cos u)\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u} \\
&= 3(5 + 3\cos u).
\end{aligned}$$

Disse utregningene ble også gjort mer generelt i Eksempel 3. Vi får derfor

$$\begin{aligned}
\int\int_T z^2 dS &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} z^2\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\right] dv \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 9\sin^2 u \times 3(5+3\cos u)du\right] dv \\
&= 135\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2 u du\right] dv + 81\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2 u\cos u du\right] dv \\
&= 135\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(2u))du\right] dv + 81\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\sin^3 u\right]_0^{2\pi} dv \\
&= 135\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin(2u)\right]_0^{2\pi} dv + 0 \\
&= 135\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}2\pi dv = 270\pi^2.
\end{aligned}$$

Oppgave 16.

a). Kurven $x^2-2x+y^2=0$ blir i polarkoordinater $r=2\cos\theta$. Kulen er beskrevet med $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}=\pm\sqrt{4-r^2}$. Volumet blir dermed

$$\begin{aligned}
&2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-r^2}r dr\right] d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}(4-4\cos^2\theta)^{3/2}\right) d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}|\sin\theta|^3\right) d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}d\theta + 2\int_{-\pi/2}^{0}\frac{8}{3}\sin\theta^3 d\theta - 2\int_0^{\pi/2}\frac{8}{3}\sin\theta^3 d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3} + 2\int_{-\pi/2}^{0}\frac{8}{3}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta - 2\int_0^{\pi/2}\frac{8}{3}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3}+\frac{16}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{-\pi/2}^{0} - \frac{16}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{16\pi}{3}+\frac{16}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{16\pi}{3}-\frac{32}{3}+\frac{32}{9} = \frac{16\pi}{3}-\frac{64}{9} = \frac{16}{9}(3\pi-4).
\end{aligned}$$

b). Hvis $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

Arealet blir

$$
\begin{aligned}
& 2\int\int_A \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy \\
= \quad & 2\int\int_A \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}dr\right]d\theta \\
= \quad & 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4-4\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)d\theta \\
= \quad & 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-4|\sin\theta|)\,d\theta \\
= \quad & 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4d\theta+2\int_{-\pi/2}^{0}4\sin\theta d\theta-2\int_0^{\pi/2}4\sin\theta d\theta \\
= \quad & 8\pi+2\left[-4\cos\theta\right]_{-\pi/2}^{0}-2\left[-4\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\
= \quad & 8\pi-8-8=8\pi-16.
\end{aligned}
$$

Oppgave 18.

a). Vi finner skjæringen mellom paraboloiden og planet først.

$$
\begin{aligned}
2x+4y+4 &= x^2+y^2 \\
x^2-2x+1+y^2-4y+4 &= 1+4+4 \\
(x-1)^2+(y-2)^2 &= 3^2.
\end{aligned}
$$

Det er klart at dette gir en sirkel med sentrum i (1,2) med radius 3. Det er klart at planet ligger ovenfor paraboloiden og over denne sirkelen, sett ovenfra. Volumet må da bli

$$\int\int_D(2x+4y+4-x^2-y^2)dxdy,$$

som er det uttrykket vi skulle frem til.

b). Gjør variabelskiftet

$$u=x-1, v=y-2.$$

Området vårt er da beskrevet ved at $u^2+v^2\leq 9$, eller $0\leq r\leq 3$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ i polarkoordinater. Vi regner ut at Jacobideterminanten blir 1, slik at integralet også kan skrives

$$
\begin{aligned}
& \int\int_D(2x+4y+4-x^2-y^2)dxdy \\
= \quad & \int\int_E(2(u+1)+4(v+2)+4-(u+1)^2-(v+2)^2)dudv \\
= \quad & \int\int_E(9-u^2-v^2)dudv.
\end{aligned}
$$

der E er sirkelen om origo med radius 3. I polarkoordinater blir dette integralet

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^3(9-r^2)rdr\right]d\theta = 2\pi\left[\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^3 = 2\pi\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)=\frac{81\pi}{2}.$$

Seksjon 6.5

Oppgave 1.

a). Vi skal regne ut $\int_{\mathcal{C}}(x^2+y)dx + x^2ydy$. Vi regner ut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 1.$$

Greens teorem gir dermed

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}(x^2+y)dx + x^2ydy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 (2xy-1)dx\right] dy = \int_0^2 \left[x^2y - x\right]_0^2 dy = \int_0^2 (4y-2)dy \\
&= [2y^2 - 2y]_0^2 = 8 - 4 = 4.
\end{aligned}$$

b). Vi skal regne ut $\int_{\mathcal{C}}(x^2y^3)dx + x^3y^2dy$. Vi regner ut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 0.$$

Linjeintegralet må derfor bli 0.

c). Vi skal regne ut $\int_{\mathcal{C}}(x^2y+y)dx + (xy+x)dy$. Vi regner ut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y + 1 - x^2 - 1 = y - x^2.$$

Det er videre klart at integralgrensene kan skrives $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x+1$. Greens teorem gir dermed

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}(x^2y+y)dx + (xy+x)dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{x+1} (y-x^2)dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - x^2y\right]_0^{x+1} dx \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{2}(x+1)^2 - x^3 - x^2)dx = \left[\frac{1}{6}(x+1)^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{16-3-4-2}{12} = \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

d). Vi skal regne ut $\int_{\mathcal{C}}(x^2y + xe^x)dx + (xy^3 + e^{\sin y})dy$. Vi regner ut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^3 - x^2.$$

Det er videre klart at punktene $(-1,2)$ og $(2,4)$ ligger på parabelen, og at linjestykket ligger ovenfor parabelen. Parabelen blir dermed nedre integralgrense og linjestykket blir øvre, slik at Greens teorem gir

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}(x^2y+xe^x)dx+(xy^3+e^{\sin y})dy \\
&= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}(y^3-x^2)dydx = \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{4}y^4-x^2y\right]_{x^2}^{x+2}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{4}(x+2)^4-x^3-2x^2-\frac{1}{4}x^8+x^4\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{20}(x+2)^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{36}x^9+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{20}4^5-\frac{1}{4}2^4-\frac{2}{3}2^3-\frac{1}{36}2^9+\frac{1}{5}2^5-\frac{1}{20}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{36}+\frac{1}{5} \\
&= \frac{256}{5}-4-\frac{16}{3}-\frac{128}{9}+\frac{32}{5}-\frac{1}{20}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{36}+\frac{1}{5} \\
&= \frac{256+32+1}{5}+\frac{-1-24+9-192-512}{36}-4-\frac{1}{20} \\
&= \frac{289}{5}-\frac{720}{36}-4-\frac{1}{20}=\frac{289}{5}-24-\frac{1}{20} \\
&= \frac{1156-1}{20}-24=\frac{231}{4}-\frac{96}{4}=\frac{135}{4}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2. Skisserer vi kurven ser vi at orienteringen er mot klokka, slik at vi kan bruke Greens teorem direkte. Vi setter $P(x,y)=0$ og $Q(x,y)=x$ i Greens teorem og får

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}} xdy = \int_0^{2\pi} t\sin t(2\pi-2t)dt \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} t\sin t - 2\int_0^{2\pi} t^2\sin tdt \\
&= 2\pi\left[-t\cos t+\int\cos tdt\right]_0^{2\pi} - 2\left[-t^2\cos t+\int 2t\cos tdt\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi\left[-t\cos t+\sin t\right]_0^{2\pi} - 2\left[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\right]_0^{2\pi} \\
&= -4\pi^2-2(-4\pi^2+2)+4=4\pi^2
\end{aligned}$$

```
% Oppgave 6.5.2
t=linspace(0,2*pi,100);
x=t.*sin(t);
y=2*pi*t-t.^2;
plot(x,y)
```

Det er ikke alltid opplagt hvilken orientering en kurve har, og det er kanskje ikke så greit å se med hjelp av MATLAB heller, siden MATLAB ikke indikerer tilhørende t-verdier på kurven. En enkel måte å bestemme orienteringen som fungerer i mange tilfeller kan være ved å regne ut fartsvektoren i startpunktet og i sluttpunktet på kurven. Tegner vi opp disse to vektorene som startretning og sluttretning blir det oftest klart hva orienteringen må bli, når man samholder det med tegningen fra MATLAB.

Oppgave 3. I dette tilfellet vil vi kunne skjønne hva orienteringen må bli ved å regne ut fartsvektoren i startpunktet 0 og i sluttpunktet $\frac{\pi}{2}$. Vi får først at $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2\cos(2t), \cos t - t\sin t)$, og deretter $\mathbf{v}(0) = (2, 1)$ og $\mathbf{v}(\frac{\pi}{2}) = (-2, -\frac{\pi}{2})$. Tegner vi opp disse to vektorene som startretning og sluttretning er det klart at orienteringen må bli positiv. Vi kan derfor bruke Greens teorem direkte. Setter vi etter vi $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$ får vi derfor

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}} xdy = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)(\cos t - t\sin t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\sin t\cos^2 t - 2t\sin^2 \cos t)dt \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} - 2\left[\frac{t}{3}\sin^3 t - \int \frac{1}{3}\sin^3 tdt\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3} - 2\left[\frac{t}{3}\sin^3 t - \int \frac{1}{3}(1-\cos^2 t)\sin tdt\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3} - 2\left[\frac{t}{3}\sin^3 t - \frac{1}{3}(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3} - 2(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) = \frac{4}{3} - \frac{2}{9} - \frac{\pi}{3} = \frac{10}{9} - \frac{\pi}{3} = \frac{10 - 3\pi}{9}.
\end{aligned}$$

```
% Oppgave 6.5.3
t=linspace(0,pi/2,100);
plot( sin(2*t) , t.*cos(t) );
axis equal;
```

Oppgave 4. Vi setter $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$ i Greens teorem og får

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{C}} xdy \\
&= \int_0^{2\pi} a\cos^3 tb3\sin^2 t\cos tdt = \int_0^{2\pi} 3ab\cos^4 t\sin^2 tdt \\
&= \frac{3}{4}ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t4\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3}{4}ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\sin^2(2t)dt \\
&= \frac{3}{8}ab\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt + \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\cos(2t)dt\right) \\
&= \frac{3}{8}ab\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(4t))dt + \left[\frac{1}{6}\sin^3(2t)\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{3}{16}ab\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{16}ab2\pi = \frac{3\pi ab}{8}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5. Denne oppgaven er enda et eksempel på at det kan være vanskelig å avgjøre orienteringen til en kurve. Her skal vi benytte oss av et annet tricks: Av og til kan man nemlig se på fortegnet til $\begin{vmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}(t) \end{vmatrix}$, der vi setter inn komponentene til $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{a}(t)$ inn i første og andre rad, respektive. Hvis denne er positiv for alle t, så er orienteringen positiv. Hvis den er negativ for alle t, så er orienteringen negativ (hvis fortegnet ikke er det samme for alle t, så kan vi ikke trekke noen slutning om orienteringen uten å tegne kurven). Grunnen til dette er at den nevnte determinanten er lik z-komponenten til $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)$, når vi tenker på de som vektorer i rommet. Hvis vinkelen mellom $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{a}(t)$ alltid er mindre enn π, så dreier kurven alltid mot venstre for fartsretningen, og orienteringen blir positiv. Hvis vinkelen alltid er større enn π, så dreier kurven alltid mot høyre for fartretningen, og orienteringen blir negativ. Til slutt trenger vi bare legge merke til at fortegnet til $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)$ beskriver om den gitte vinkelen er større eller mindre enn π (siden sin til mellomliggende vinkel kommer inn i vektorproduktet). I denne oppgaven har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (1-2t, 1-3t^2) \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (-2, -6t), \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2t & 1-3t^2 \\ -2 & -6t \end{vmatrix} &= (1-2t)(-6t) + 2(1-3t^2) \\ &= 6t^2 - 6t + 2 = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \end{aligned}$$

slik at orienteringen er positiv, slik at vi kan bruke Greens teorem direkte.

Vi setter $\mathbf{F}(x,y) = (0, \frac{x^2}{2})$. Ved opptegning av kurven, eller ved resonnementet over, ser vi at orienteringen er mot klokka. Greens teorem gir oss da

$$\begin{aligned} \int\int_R x dx dy &= \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_C Q dy \\ &= \int_0^1 \frac{(t-t^2)^2}{2}(1-3t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)(-3t^2+1)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (-3t^6 + 6t^5 - 2t^4 - 2t^3 + t^2)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{7}t^7 + t^6 - \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{7} + 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-15-14}{35} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-174+175}{210}\right) = \frac{1}{420}. \end{aligned}$$

Oppgave 7. Vi har

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xy + \ln(x^2+1) \\ Q(x,y) &= 4x + e^{y^2} + 3\arctan y. \end{aligned}$$

Vi regner ut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - x,$$

slik at

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy &= \int\int_D (4-x)dxdy = \int_0^\pi \left[\int_0^1 (4 - r\cos\theta)rdr\right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[2r^2 - \frac{1}{3}r^3\cos\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^\pi (2 - \frac{1}{3}\cos\theta)d\theta \\ &= \left[2\theta - \frac{1}{3}\sin\theta\right]_0^\pi = 2\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 8.

a). Kurven $\mathcal{C}$ er sammensatt av kurvene $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$, der $\mathcal{C}_1$ følger parabelen, $\mathcal{C}_2$ følger langs x-aksen. Vi parametriserer $\mathcal{C}_1$ med $\mathbf{r}_1(x) = (x, 1-x^2)$, der x går fra 1 til -1. Vi får da

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}_1} -ydx + x^2dy \\ &= \int_1^{-1} (-(1-x^2) + x^2(-2x))dx = \int_1^{-1} (-2x^3 + x^2 - 1)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vi parametriserer $\mathcal{C}_2$ med $\mathbf{r}_2(x) = (x, 0)$, der x går fra -1 til 1. Vi får da

$$\int_{\mathcal{C}_2} -ydx + x^2dy = \int_{-1}^1 (0 + x^2 \times 0)dx = 0.$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} -ydx + x^2dy &= \int_{\mathcal{C}_1} -ydx + x^2dy + \int_{\mathcal{C}_2} -ydx + x^2dy \\ &= \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

b). Med $P(x,y) = -y$ og $Q(x,y) = x^2$ får vi at $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, og $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$. Parabelen $y = 1-x^2$ skjærer x-aksen for $x = -1$ og $x = 1$. Vi får dermed

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}} -ydx + x^2dy \\ &= \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{1-x^2} (2x+1)dy\right] dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x+1)(1-x^2)dx = \int_{-1}^1 (2x - 2x^3 + 1 - x^2)dx \\ &= \left[x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Oppgave 12.

a). Vi fullfører kvadratene og får

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y &= 11 \\ 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 &= 11 \\ 9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 &= 36 \\ \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} &= 1. \end{aligned}$$

Vi ser derfor at ellipsen har sentrum $(1, -2)$, store halvakse 3 og lille halvakse 2.

b). Vi regner ut

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} &= \frac{(1 + 2\cos t - 1)^2}{2^2} + \frac{(-2 + 3\sin t + 2)^2}{3^2} \\ &= \frac{(2\cos t)^2}{2^2} + \frac{(3\sin t)^2}{3^2} \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \end{aligned}$$

som viser at $\mathbf{r}(t)$ ligger på ellipsen. Det er også klart at $\mathbf{r}(t)$ må dekke hele ellipsen, siden $\mathbf{r}(t)$ vil bevege seg et helt omløp mot klokka når t går fra 0 til 2π. Vi har at

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((-2 + 3\sin t)^2(-2\sin t) + (1 + 2\cos t)(3\cos t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-18\sin^3 t + 24\sin^2 t - 8\sin t + 3\cos t + 6\cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (24\sin^2 t + 6\cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} (6 + 18\sin^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (6 + 9(1 - \cos(2t)))dt = \int_0^{2\pi} (15 - 9\cos(2t))dt \\ &= 30\pi. \end{aligned}$$

c). Vi ser at

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y.$$

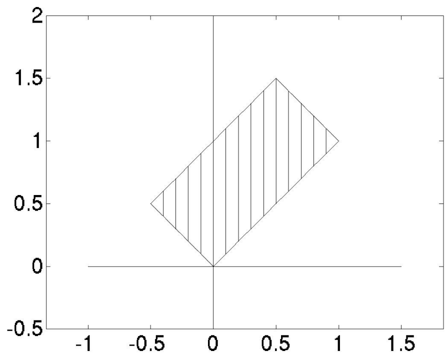
Vi har derfor at

$$\int\int_R (1 - 2y) dxdy = 30\pi$$

på grunn av Greens teorem og utregningen i b).

Seksjon 6.6

Oppgave 1. Gitt $\epsilon > 0$. Hvis A_i har innhold null, så finnes det n_i rektangler $R_{i1}, ..., R_{in_i}$ som i definisjon 6.6.2, slik at $A_i \subset R_{i1} \cup \cdots \cup R_{in_i}$, og summen av arealene til $R_{i1}, ..., R_{in_i}$ er mindre enn $\frac{\epsilon}{m}$. Da er $\{R_{ij}\}_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i}$ et sett rektangler som inneholder $A_1 \cup \cdots \cup A_m$, og summen av arealene til disse er $\le \epsilon$. Dette viser at $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ har innhold null.



Figur 10: Området i Oppgave 6.7.1a).

Seksjon 6.7

Utregningen av flere av integralene nedenfor med Matlab krever at vi først regner ut et rektangel som hele integrasjonsområdet ligger innenfor, siden `dblquad` bare aksepterer rektangler som integrasjonsområder. Vi har demonstrert dette i flere oppgaver nedenfor hvordan dette avgrensende rektanglet regnes ut. I praksis gjør det ikke noe om området man integrerer over er enda større, så lenge man setter funksjonen man integrerer over til å være 0 utenfor det faktiske integrasjonsområdet.

Oppgave 1.

a). Området bestemt ved ulikhetene $x \leq y \leq x+1$ og $-x \leq y \leq -x+2$ er tegnet opp i Figur 10. Ulikhetene kan skrives om til $0 \leq y-x \leq 1$, og $0 \leq y+x \leq 2$, som gir at $0 \leq u \leq 1$, og $0 \leq v \leq 2$ etter variabelskiftet $u = y-x$, $v = y+x$. Vi regner raskt ut at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Vi har da at $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$, og $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}
&\int\int_A x^2 dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 du\right] dv = \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{(v-u)^2}{8} du\right] dv \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\int_0^1 \left(v^2 - 2uv + u^2\right) du\right] dv = \frac{1}{8}\int_0^2 \left[uv^2 - u^2 v + \frac{1}{3}u^3\right]_0^1 dv \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 \left(v^2 - v + \frac{1}{3}\right) dv = \frac{1}{8}\left[\frac{v^3}{3} - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

For å regne ut integralet med Matlab må vi først finne skjæringen mellom de fire linjene som definerer området:

- Skjæring mellom $y = x$ og $y = -x$: $(x, y) = (0, 0)$.
- Skjæring mellom $y = x$ og $y = -x + 2$: $(x, y) = (1, 1)$.
- Skjæring mellom $y = x + 1$ og $y = -x$: $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Skjæring mellom $y = x + 1$ og $y = -x + 2$: $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Integrasjonsområdet ligger derfor innenfor rektangelet $-\frac{1}{2} \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{3}{2}$, som angir integralgrensene som er brukt i kallet på `dblquad` i Matlab.

b). Tegner vi opp området ser vi at det er bestemt ved at $0 \le y \le 1$, og $y \le x \le y + 3$. Disse ulikhetene kan skrives om til $0 \le y \le 1$, og $0 \le x - y \le 3$, som gir at $0 \le v \le 1$, og $0 \le u \le 3$ etter variabelskiftet $u = x - y$, $v = y$. Vi regner raskt ut at

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}
&\int\int_A x dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^3 x du\right] dv = \int_0^1 \left[\int_0^3 (u + v) du\right] dv \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u^2 + uv\right]_0^3 dv = \int_0^1 (\frac{9}{2} + 3v) dv = \left[\frac{9}{2}v + \frac{3}{2}v^2\right]_0^1 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6.
\end{aligned}$$

c). Tegner vi opp området ser vi at det er bestemt ved at $\frac{x}{2} \le y \le \frac{x}{2} + 2$, og $2x - 2 \le y \le 2x$. Disse ulikhetene kan skrives om til $0 \le y - \frac{x}{2} \le 2$, og $-2 \le y - 2x \le 0$, som gir at $0 \le u \le 2$, og $-2 \le v \le 0$ etter variabelskiftet $u = y - \frac{x}{2}$, $v = y - 2x$. Vi regner raskt ut at

$$\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}
&\int\int_A xy dx dy \\
&= \int_{-2}^0 \left[\int_0^2 xy \left|\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\right| du\right] dv = \int_{-2}^0 \left[\int_0^2 \frac{2}{3}(u - v)\frac{1}{3}(4u - v)\frac{2}{3} du\right] dv \\
&= \frac{4}{27} \int_{-2}^0 \left[\int_0^2 (4u^2 - 5uv + v^2) du\right] dv = \frac{4}{27} \int_{-2}^0 \left[\frac{4}{3}u^3 - \frac{5}{2}u^2 v + v^2 u\right]_0^2 dv \\
&= \frac{4}{27} \int_{-2}^0 \left(\frac{32}{3} - 10v + 2v^2\right) dv = \frac{4}{27} \left[\frac{32}{3}v - 5v^2 + \frac{2}{3}v^3\right]_{-2}^0 \\
&= \frac{4}{27}\left(\frac{64}{3} + 20 + \frac{16}{3}\right) = \frac{4}{27}\frac{140}{3} = \frac{560}{81}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2. Koden blir

```
% Oppgave 6.7.2 a)
dblquad(@(x,y)x.^2.*(x<=y).*(y<=x+1).*(-x<=y).*(y<=-x+2),-0.5,1,0,1.5)

% Oppgave 6.7.2 b)
dblquad(@(x,y)x.*(y<=x).*(x-3<=y),0,4,0,1)

% Oppgave 6.7.2 c)
dblquad(@(x,y)x.*y.*(y<=2*x).*(y<=(x/2)+2).*(2*x-2<=y).*(x/2<=y),...
        0,8/3,0,10/3)
```

Oppgave 3.

a). Tegner vi opp området ser vi at det er beskrevet ved at $-1 \leq x+2y \leq 3, y+1 \leq x \leq y+4$, der den siste ulikheten kan skrives om til $1 \leq x-y \leq 4$, som gir at $-1 \leq u \leq 3$, og $1 \leq v \leq 4$ etter variabelskiftet $u = x + 2y$, $v = x - y$. Vi regner raskt ut at

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Derfor blir $\left|\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right| = \frac{1}{3}$. Integralet blir derfor

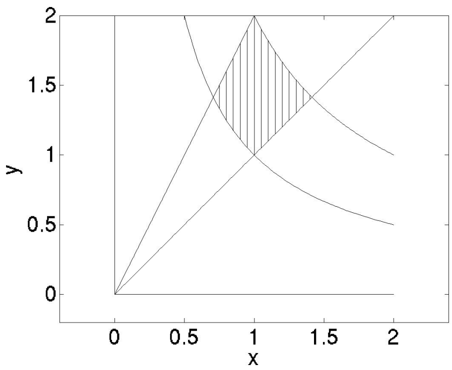
$$\begin{aligned}
&\int\int_R xydxdy \\
&= \int_{-1}^{3}\left[\int_1^4 xy\left|\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right|dv\right]du = \int_{-1}^{3}\left[\int_1^4 \frac{1}{3}(u+2v)\frac{1}{3}(u-v)\frac{1}{3}dv\right]du \\
&= \frac{1}{27}\int_{-1}^{3}\left[\int_1^4 (u^2+uv-2v^2)dv\right]du = \frac{1}{27}\int_{-1}^{3}\left[u^2v+\frac{1}{2}uv^2-\frac{2}{3}v^3\right]_1^4 du \\
&= \frac{1}{27}\int_{-1}^{3}\left(3u^2+\frac{15}{2}u-42\right)du = \frac{1}{27}\left[u^3+\frac{15}{4}u^2-42u\right]_{-1}^{3} \\
&= \frac{1}{27}(28+30-168) = -\frac{110}{27}.
\end{aligned}$$

Vi har her invertert likningene $u = x + 2y$, $v = x - y$ til $y = \frac{u-v}{3}$, $x = \frac{u+2v}{3}$, og satt disse inn i integranden xy. For å beregne integralet med Matlab kan vi først finne skjæringen mellom de fire linjene som definerer området:

- Skjæring mellom $x + 2y = -1$ og $x - y = 1$: $(x, y) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
- Skjæring mellom $x + 2y = -1$ og $x - y = 4$: $(x, y) = (\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$.
- Skjæring mellom $x + 2y = 3$ og $x - y = 1$: $(x, y) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.
- Skjæring mellom $x + 2y = 3$ og $x - y = 4$: $(x, y) = (\frac{11}{3}, -\frac{1}{3})$.

Integrasjonsområdet ligger derfor innenfor rektangelet $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}$, $-\frac{5}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}$, som angir integralgrensene som er brukt i kallet på `dblquad` i Matlab.

c). Området er beskrevet ved ulikhetene $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}$, $x \leq y \leq 2x$, og er tegnet opp i Figur 11. Ulikhetene kan skrives om til $1 \leq xy \leq 2$, $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$, som gir at $1 \leq u \leq 2$, og



Figur 11: Området i Oppgave 6.7.3c)

$1 \leq v \leq 2$ etter variabelskiftet $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$. Vi regner raskt ut at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Derfor blir $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v}$. Ved å gange sammen likningene for u og v ser vi raskt at $uv = y^2$, slik at integranden også kan skrives $y^2 - yx = uv - u$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}
&\int\int_R (y^2 - yx)dxdy \\
&= \int_1^2 \left[\int_1^2 (y^2 - yx)\frac{1}{2v}dv\right] du = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{uv - u}{2v}dv\right] du \\
&= \int_1^2 \left[\int_1^2 \left(\frac{u}{2} - \frac{u}{2v}\right) dv\right] du = \int_1^2 \left[\frac{u}{2}(v - \ln v)\right]_1^2 du \\
&= \int_1^2 \frac{u}{2}(1 - \ln 2)du = \left[\frac{u^2}{4}(1 - \ln 2)\right]_1^2 = \frac{3}{4}(1 - \ln 2).
\end{aligned}$$

Oppgave 4. Koden blir

```
% Oppgave 6.7.3 a)
dblquad(@(x,y)x.*y.*(x+2*y>=-1).*(x+2*y<=3).*(x-y>=1).*(x-y<=4),...
        1/3,11/3,-5/3,2/3)

% Oppgave 6.7.3 b)
dblquad(@(x,y)(x.^2 - y.^2).*exp(x+y).*(-x<=y).*(x<=y).*(y<=x+2)...
        .*(y<=-x+2),-1,1,0,2)

% Oppgave 6.7.3 c)
dblquad(@(x,y)(y.^2 - y.*x).*(x<=y).*((1./x)<=y).*(y<=2*x).*(y<=(2./x)),...
        (1/sqrt(2)),sqrt(2),1,2)
```

Oppgave 5.

a). Området er beskrevet ved at $x \leq y \leq x+5$, $-x+2 \leq y \leq -x+4$, som også kan skrives $0 \leq y-x \leq 5$, $2 \leq y+x \leq 4$, eller $0 \leq u \leq 5$, $2 \leq v \leq 4$ etter variabelskiftet $u = y-x$, $v = y+x$. Vi får så at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Derfor blir $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned} \int\int_A \frac{e^{x-y}}{x+y}dxdy &= \int_0^5 \left[\int_2^4 \frac{e^{-u}}{2v}dv\right] du = \int_0^5 \left[\frac{1}{2}e^{-u}\ln v\right]_2^4 du \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2}e^{-u}(\ln 4 - \ln 2)du = \int_0^5 \frac{1}{2}e^{-u}\ln 2du \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-u}\ln 2\right]_0^5 = -\frac{1}{2}e^{-5}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2(1-e^{-5}). \end{aligned}$$

b). Området er beskrevet ved at $x \leq y \leq 2x$, $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}$, som også kan skrives $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$, $1 \leq xy \leq 3$, eller $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$ etter variabelskiftet $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$. Vi får så at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\frac{2y}{x} = -2u.$$

Derfor blir $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2u}$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned} \int\int_A xydxdy &= \int_1^2 \left[\int_1^3 \frac{v}{2u}dv\right] du \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{4u}v^2\right]_1^3 du = \int_1^2 \frac{2}{u}du = [2\ln u]_1^2 = 2\ln 2. \end{aligned}$$

Oppgave 6. Koden blir

```
% Oppgave 6.7.6 a)
dblquad(@(x,y)(x<=y).*(y<=x+5).*(-x+2<=y).*(y<=-x+4).*exp(x-y)./(x+y)...
        ,-1.5,2,1,4.5)

% Oppgave 6.7.6 b)
dblquad(@(x,y)x.*y.*(x<=y).*((1./x)<=y).*(y<=2*x).*(y<=(3./x)),0,2,0,5)

% Oppgave 6.7.6 c)
dblquad(@(x,y)y.*((x./2)<=y).*((1./x.^2)<=y).*(y<=2*x)...
        .*(y<=(2./x.^2)),(2^(-1/3)),(4^(1/3)),((2^(1/3))/2),2)

% Oppgave 6.7.6 d)
dblquad(@(x,y)(3*x-2*y).*(x/2<=y).*((3*x-5)<=y)...
        .*(y<=3*x).*(y<=((x/2)+ 5/2)),0,3,0,4)
```

```
% Oppgave 6.7.6 e)
dblquad(@(x,y)x.*((x-1).^2<=y).*(x.^2<=y).*(y<=x.^2+4)...
        .*(y<=(x-1).^2+4),-3/2,5/2,0,17/4)
```

Oppgave 8.

a). Vi kan begrense oss til verdier $u > 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

- Første kvadrant av xy-planet svarer til at $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.
- $y = 2x$ svarer til at $2u \sin v = 2u \cos v$, slik at $v = \frac{\pi}{4}$ eller $v = \frac{5\pi}{4}$. Her er det bare den første vi er interessert i.
- Ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ svarer til at $u^2 \cos^2 v + \frac{4u^2 \sin^2 v}{4} = u^2 = 1$, slik at $u = 1$ eller $u = -1$. Området innenfor ellipsen ser vi derfor er beskrevet ved at $0 \leq u \leq 1$.

Vi ser at området vårt, D, er beskrevet ved at $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{4}$. La så $\mathbf{T}(u,v) = (u \cos v, 2u \sin v)$. Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ 2 \sin v & 2u \cos v \end{pmatrix} \\
|\det \mathbf{T}'(u,v)| &= |2u \cos^2 v + 2u \sin^2 v| = 2u.
\end{aligned}$$

Arealet blir derfor

$$\begin{aligned}
\int\int_R dxdy &= \int\int_{\mathbf{T}(D)} dxdy \\
& \int\int_D |\det \mathbf{T}'(u,v)| dudv = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^1 |\det \mathbf{T}'(u,v)| du \right] dv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^1 2udu \right] dv = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[u^2 \right]_0^1 dv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

b). Flaten $z = x^2 + \frac{y^2}{2} = u^2 \cos^2 v + 2u^2 \sin^2 v = u^2(1 + \sin^2 v)$ kan parametriseres ved hjelp av u og v ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (u \cos v, 2u \sin v, u^2(1 + \sin^2 v))$$

Vi får da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial u} &= (\cos v, 2 \sin v, 2u(1 + \sin^2 v)) \\
\frac{\partial r}{\partial v} &= (-u \sin v, 2u \cos v, 2u^2 \sin v \cos v) \\
\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} &= (-4u^2 \cos v, -4u^2 \sin v, 2u) \\
\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| &= \sqrt{16u^4 + 4u^2} = 2u\sqrt{4u^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Arealet av flaten er gitt ved

$$
\begin{aligned}
&\int\int_D \left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^1 2u\sqrt{4u^2+1}du\right]dv = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{6}(4u^2+1)^{3/2}\right]_0^1 dv \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(5^{3/2}-1)dv = \frac{1}{6}\frac{\pi}{4}(5\sqrt{5}-1) = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{24}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 9. Området kan beskrives ved ulikhetene $1 \le \frac{y}{x} \le 2$, $1 \le x+y \le 3$. Setter vi derfor $u = \frac{y}{x}$, $v = x+y$ får vi at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) &= -\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Vi får derfor

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{x+y}{x^2}dxdy &= \int_1^3\left[\int_1^2 \frac{x+y}{x^2}\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|du\right]dv \\
&= \int_1^3\left[\int_1^2 \frac{v}{x^2}\left|\frac{1}{-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}}\right|du\right]dv = \int_1^3\left[\int_1^2 \frac{v}{|-y-x|}du\right]dv \\
&= \int_1^3\left[\int_1^2 \frac{v}{|v|}du\right]dv = \int_1^3\left[\int_1^2 du\right]dv = 2.
\end{aligned}
$$

Seksjon 6.8

Oppgave 1. Området mellom x-aksen og linjen $y = x$ i første kvadrant er beskrevet i polarkoordinater ved $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Vi får derfor

$$
\begin{aligned}
&\int\int_A e^{-x^2-y^2}dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\int_{A\cap B(0,n)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int\int_{A\cap B(0,n)} e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^n e^{-r^2}rdr\right]d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n^2}\right)d\theta = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n^2}\right) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 2.

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\int_{B(0,n)} \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n \frac{r}{1+r^2} dr\right] d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^n d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(1+n^2) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi \ln(1+n^2) = \infty.
\end{aligned}
$$

Derfor divergerer integralet.

Oppgave 4. Det er klart at $f(x,y) = xy$ er en positiv funksjon på A, siden A er inneholdt i første kvadrant. Siden

$$A \cap K_n = \{(x,y) | \frac{1}{n} \le x \le n, 0 \le y \le \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y) | 0 \le x \le \frac{1}{n}, 0 \le y \le n\}$$

så splitter vi integralet i to biter:

$$
\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int\int_{A\cap K_n} xydxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \left[\int_0^n xydx\right] dy + \int_{\frac{1}{n}}^n \left[\int_0^{\frac{1}{x}} xydy\right] dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^n dx + \int_{\frac{1}{n}}^n \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{\frac{1}{x}} dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2}xn^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{2x} dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{n^2}{4}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{n}}^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{n})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \ln n\right) = \infty.
\end{aligned}
$$

Integralet konvergerer derfor ikke på A.

Oppgave 5. Det er her lurt å integrere med tanke på x først, siden integralgrensene da blir enklest. Definerer vi $A_n = \{(x,y) | 0 \le y \le n, 0 \le x \le \sqrt{y}\}$ får vi at

$$
\begin{aligned}
&\int_A \frac{x}{1+y^4} dydx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\int_{A_n} \frac{x}{1+y^4} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^4} dx\right] dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[\frac{x^2}{2(1+y^4)}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{y}{2(1+y^4)} dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4}\arctan(y^2)\right]_0^n = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \arctan(n^2) = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6. For $p \neq 1$ har vi at

$$\begin{aligned}
\int\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy &= \lim_{n\to\infty}\int\int_{A\cap B(0,n)} \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[\int_1^n \frac{1}{r^{2p}}rdr\right]d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[\int_1^n r^{1-2p}dr\right]d\theta.
\end{aligned}$$

For $p \neq 1$ får vi videre

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2-2p}r^{2-2p}\right]_1^n d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2-2p}n^{2-2p}-\frac{1}{2-2p}\right)d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-p}\left(n^{2-2p}-1\right).
\end{aligned}$$

Det er klart at denne konvergerer mot $\frac{\pi}{p-1}$ hvis $p > 1$, og divergerer hvis $p < 1$. Hvis $p = 1$ får vi i stedet

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}[\ln r]_1^n d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\ln n d\theta = \lim_{n\to\infty} 2\pi\ln n.$$

Det er klart at dette divergerer. Integralet konvergerer med andre ord kun når $p > 1$.

Seksjon 6.9

Oppgave 1.

a).

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A xyzdxdydz \\
&= \int_0^1\left[\int_0^1\left[\int_0^1 xyzdx\right]dy\right]dz = \int_0^1\left[\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2yz\right]_0^1 dy\right]dz \\
&= \int_0^1\left[\int_0^1\frac{1}{2}yzdy\right]dz = \int_0^1\left[\frac{1}{4}y^2z\right]_0^1 dz = \int_0^1\frac{1}{4}zdz = \left[\frac{1}{8}z^2\right]_0^1 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A (x+ye^z)dxdydz \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^1\left[\int_1^2 (x+ye^z)dz\right]dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 [xz+ye^z]_1^2\,dy\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 \big(x+y(e^2-e)\big)\,dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{1}{2}(e^2-e)y^2\right]_0^1 dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}(e^2-e)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(e^2-e)x\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(e^2-e)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(e^2-e) = e^2-e.
\end{aligned}$$

Oppgave 2.

a).

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A (xy+z)dxdydz \\
&= \int_0^1\left[\int_0^2\left[\int_0^{x^2y} (xy+z)dz\right]dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^2\left[xyz+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{x^2y} dy\right]dx \\
&= \int_0^1\left[\int_0^2\left(x^3y^2+\frac{1}{2}x^4y^2\right)dy\right]dx = \int_0^1\left[\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{1}{2}x^4\right)y^3\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1\left(\frac{8}{3}x^3+\frac{4}{3}x^4\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{15}x^5\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}+\frac{4}{15} = \frac{10+4}{15} = \frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A zdxdydz \\
&= \int_0^2\left[\int_0^{\sqrt{x}}\left[\int_{-y^2}^{xy} zdz\right]dy\right]dx = \int_0^2\left[\int_0^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{-y^2}^{xy} dy\right]dx \\
&= \int_0^2\left[\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}y^4\right)dy\right]dx = \int_0^2\left[\frac{1}{6}x^2y^3-\frac{1}{10}y^5\right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^2\left(\frac{1}{6}x^{7/2}-\frac{1}{10}x^{5/2}\right)dx = \left[\frac{1}{27}x^{9/2}-\frac{1}{35}x^{7/2}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{27}2^{9/2}-\frac{1}{35}2^{7/2} = \frac{16\sqrt{2}}{27}-\frac{8\sqrt{2}}{35} = 8\sqrt{2}\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{35}\right) = \frac{344\sqrt{2}}{945}.
\end{aligned}$$

c).

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_A (x+y)z dx dy dz \\
&= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} \left[\int_0^4 (x+y)z dz\right] dx\right] dy = \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} \left[\frac{1}{2}(x+y)z^2\right]_0^4 dx\right] dy \\
&= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} 8(x+y)dx\right] dy = \int_0^4 \left[4x^2+8xy\right]_0^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left(4y+8y^{3/2}\right) dy = \left[2y^2+\frac{16}{5}y^{5/2}\right]_0^4 \\
&= 32+\frac{16}{5}32 = 32\frac{21}{5} = \frac{672}{5}.
\end{aligned}
$$

d). Vi finner først skjæringslinjene til planet $3x+2y-z=6$ med xy-planet. Setter vi $z=0$ får vi linjen $3x+2y=6$, eller $y=-\frac{3}{2}x+3$. Denne skjærer x-aksen i $x=2$ Sammen med x-aksen og y-aksen avgrenser denne linjen et område i første kvadrant, og det er derfor klart at området som blir avgrenset i xy-planet er beskrevet ved at $0\leq y\leq -\frac{3}{2}x+3$. I det avgrensede området er det klart at planet $3x+2y-z=6$ (eller $z=3x+2y-6$) ligger under xy-planet (sett for eksempel inn $x=y=0$, da får vi $z=-6$), slik at integralet kan skrives

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2\int_0^{-\frac{3}{2}x+3}\int_{3x+2y-6}^0 (3y^2-3z)dz dy dx \\
&= \int_0^2\int_0^{-\frac{3}{2}x+3}\left[3y^2z-\frac{3}{2}z^2\right]_{3x+2y-6}^0 dy dx \\
&= \int_0^2\int_0^{-\frac{3}{2}x+3}\left(-3y^2(3x+2y-6)+\frac{3}{2}(3x+2y-6)^2\right) dy dx.
\end{aligned}
$$

Her kan man godt fortsette med å gange ut, integrere, og sette inn grensene. Dette vil føre frem, men man vil måtte regne ut mange potenser av $-\frac{3}{2}x+3$ på denne måten. Et alternativ som vil spare en del regning er å beholde $3x+2y-6$ i uttrykket over (dette innsatt $y=-\frac{3}{2}x+3$ gir jo 0, det er det som er poenget!), og heller bruke delvis integrasjon på det første leddet (to ganger). Vi kan også bruke at en antiderivert til $3x+2y-6$ er

$\frac{1}{2}(3x+2y-6)^2$, og får da

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left(\left[-\frac{3}{4}y^2(3x+2y-6)^2 \right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} + \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} \frac{3}{2}y(3x+2y-6)^2 dy \right) dx \\
&\quad + \int_0^2 \left[\frac{1}{4}(3x+2y-6)^3 \right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{4}y(3x+2y-6)^3 \right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} - \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} \frac{1}{4}(3x+2y-6)^3 dy \right) dx \\
&\quad - \int_0^2 \frac{1}{4}(3x-6)^3 dx \\
&= \int_0^2 \left(-\left[\frac{1}{32}(3x+2y-6)^4 \right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} - \frac{1}{4}(3x-6)^3 \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{32}(3x-6)^4 - \frac{1}{4}(3x-6)^3 \right) dx = \left[\frac{1}{480}(3x-6)^5 - \frac{1}{48}(3x-6)^4 \right]_0^2 \\
&= -\frac{(-6)^5}{480} + \frac{(-6)^4}{48} = \frac{6^5}{480} + \frac{6^4}{48} = \frac{3^4}{5} + 3^3 = \frac{81}{5} + 27 = \frac{216}{5}.
\end{aligned}
$$

Det ble jo uansett en del regning her, men med denne metoden slapp vi i det minste å gange ut potensene av $3x+2y-6$ og $3x-6$!

e). Pyramiden kan beskrives ved $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$, $0 \leq z \leq 1-x-y$. Vi får

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_A xydxdydz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xydz \right] dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} [xyz]_0^{1-x-y} dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (xy - x^2y - xy^2)dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(1-x)^3 - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3 dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6}\frac{10-20+15-4}{20} = \frac{1}{120}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3. Koden blir

```
% Oppgave 6.9.3 a)
triplequad(@(x,y,z)(x.*y.*z),0,1,0,1,0,1)
```

```
% Oppgave 6.9.3 b)
triplequad(@(x,y,z)(x+y.*exp(z)),-1,1,0,1,1,2)

% Oppgave 6.9.3 c)
triplequad(@(x,y,z)(z.*y.*cos(x.*y)),1,2,pi,2*pi,0,1)

% Oppgave 6.9.3 d)
triplequad(@(x,y,z)(x+y+z),0,1,0,2,0,3)

% Oppgave 6.9.3 e)
triplequad(@(x,y,z)(sqrt(y)-3*z),2,3,0,1,-1,1)
```

Oppgave 4. Koden blir

```
% Oppgave 6.9.4 a)
triplequad(@(x,y,z)(x.*y + z).*(z<=((x.^2).*y)),0,1,0,2,0,2)

% Oppgave 6.9.4 b)
triplequad(@(x,y,z)z.*(y<=sqrt(x)).*(-(y.^2)<=z).*(z<=(x.*y)),...
           0,2,0,sqrt(2),0,2*sqrt(2))

% Oppgave 6.9.4 c)
triplequad(@(x,y,z)(x+y).*z.*(x<=sqrt(y)),0,2,0,4,0,4)

% Oppgave 6.9.4 d)
triplequad(@(x,y,z)(3*y.^2 - 3*z).*(3*x+2*y-6<=z).*(y<=(-3.0/2.0)*x+3),...
           0,2,0,3,0,-6)

% Oppgave 6.9.4 e)
triplequad(@(x,y,z)(x.*y).*(z<=-x-y+1).*(y<=-x+1),0,1,0,1,0,1)
```

Seksjon 6.10

Oppgave 1.

a). $0 \le x, y \le 1$ betyr i sylinderkoordinater $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. $x^2 + y^2 \le 9$ betyr $r \le 3$.

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_A x dx dy dz \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 \left[\int_0^2 r^2 \cos\theta dz \right] dr \right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 2r^2 \cos\theta dr \right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^3 d\theta = \int_0^{\pi/2} 18 \cos\theta d\theta = [18 \sin\theta]_0^{\pi/2} = 18.
\end{aligned}
$$

b).

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A xydxdydz\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_0^{4-r(\cos\theta+\sin\theta)} r^3\sin\theta\cos\theta dz\right]dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \left[zr^3\sin\theta\cos\theta\right]_0^{4-r(\cos\theta+\sin\theta)}dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (4-r(\cos\theta+\sin\theta))r^3\sin\theta\cos\theta dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \left(2r^3\sin(2\theta)-r^4(\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)\right)dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^4\sin(2\theta)-\frac{1}{5}r^5(\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)\right]_0^1 d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)-\frac{1}{5}(\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)\right)d\theta\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\sin^3\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\right]_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

siden $\sin\theta$ og $\cos\theta$ er periodiske med periode 2π.

Oppgave 2.

a). Vi setter inn $x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = \rho^2\sin^2\phi$, og Jacobideterminanten $\rho^2\sin\phi$ og får

$$\begin{aligned}
\int\int\int_A (x^2+y^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_0^1 \rho^2\sin^2\phi\rho^2\sin\phi d\rho\right]d\phi\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_0^1 \rho^4\sin^3\phi d\rho\right]d\phi\right]r\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{5}\rho^5\sin^3\phi\right]_0^1 d\phi\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{5}\sin^3\phi d\phi\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{5}(1-\cos^2\phi)\sin\phi d\phi\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{5}(-\cos\phi+\frac{1}{15}\cos^3\phi)\right]_0^{\pi}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{4}{15}d\theta = \frac{8\pi}{15}.
\end{aligned}$$

b). $0\le x,y\le 1$ betyr i kulekoordinater at $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. $x^2+y^2+z^2\le 1$ betyr at $\rho\le 1$.

Kombinert med $z \geq \frac{1}{2}$ betyr dette at $\frac{1}{2\cos\phi} \leq \rho \leq 1$. Vi får derfor

$$\begin{aligned}
\int\int\int_A xdxdydz &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 \rho\sin\phi\cos\theta\rho^2\sin\phi d\rho\right]d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 \rho^3\sin^2\phi\cos\theta d\rho\right]d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\frac{1}{4}\rho^4\sin^2\phi\cos\theta\right]_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/3}\cos\theta\left(\frac{1}{4}\sin^2\phi - \frac{1}{64}\frac{\sin^2\phi}{\cos^4\phi}\right)d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/3}\cos\theta\left(\frac{1}{8}(1-\cos(2\phi)) - \frac{1}{64}\frac{\tan^2\phi}{\cos^2\phi}\right)d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\cos\theta\left(\frac{1}{8}\phi - \frac{1}{16}\sin(2\phi) - \frac{1}{196}\tan^3\phi\right)\right]_0^{\pi/3}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} - \frac{3\sqrt{3}}{196}\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\frac{\pi}{24} - \frac{3\sqrt{3}}{64}\right)d\theta = \frac{\pi}{24} - \frac{3\sqrt{3}}{64},
\end{aligned}$$

hvor substitusjonen $u = \tan\phi$ ($du = \frac{d\phi}{\cos^2\phi}$) ble brukt.

Oppgave 3.

a). Vi finner først skjæringspunktene mellom paraboloiden og kuleflaten:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \iff r^2 = \sqrt{2 - r^2} \iff r^4 = 2 - r^2.$$

Dette gir en andregradslikning i r^2, som har løsning $r^2 = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$. Eneste positive løsning her er $r^2 = 1$, som gir $r = 1$. Vi får derfor (området er beskrevet ved $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq r \leq 1$, og kuleflaten ligger øverst)

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A zdxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} zrdz\right]dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\frac{1}{2}z^2r\right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\frac{1}{2}(2-r^2)r - \frac{1}{2}r^5\right)dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(-\frac{1}{2}r^5 - \frac{1}{2}r^3 + r\right)dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{12}r^6 - \frac{1}{8}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{-2-3+12}{24}d\theta = \frac{7\pi}{12}.
\end{aligned}$$

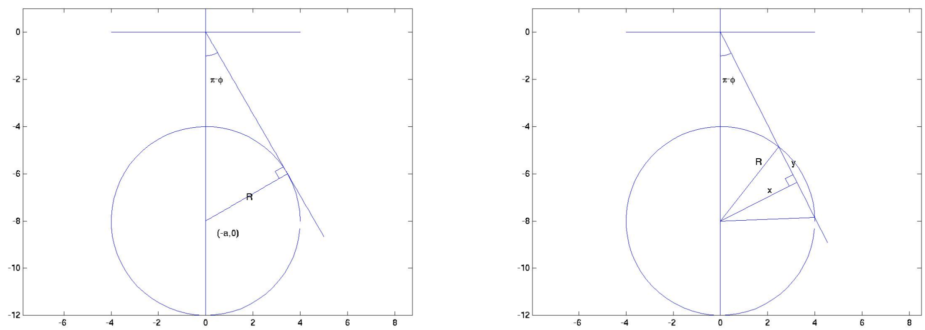
b).

$$\begin{aligned}
\int\int\int_A x dx dy dz &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left[\int_{r^2}^4 r^2\cos\theta dz\right]dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left[r^2\cos\theta z\right]_{r^2}^4 dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left(4r^2\cos\theta - r^4\cos\theta\right)dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{5}r^5\cos\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)\cos\theta d\theta \\
&= 32\int_0^{2\pi}\frac{2}{15}\cos\theta d\theta = \frac{64}{15}\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

e). Likningen $x^2 - 2x + y^2 = 1$ kan skrives $(x-1)^2 + y^2 = 2$, som er en sirkel med sentrum i $(1,0)$ med radius $\sqrt{2}$. Vi setter $u = x-1, v = y, w = z$, og ser umiddelbart at Jacobideterminanten blir 1. Lar vi D være den delen av sylinderen $u^2+v^2 = 2$ som ligger mellom planene $z = 0$ og $z = 2$ får vi

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_A (x^2+y^2)dx dy dz \\
&= \int\int\int_D ((u+1)^2+v^2)du dv \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_0^2 ((u+1)^2+v^2)r dz\right]dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_0^2 ((r\cos\theta+1)^2+r^2\sin^2\theta)r dz\right]dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_0^2 (r^3+2r^2\cos\theta+r)dz\right]dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}(2r^3+4r^2\cos\theta+2r)dr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^4+\frac{4}{3}r^3\cos\theta+r^2\right]_0^{\sqrt{2}}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(2+\frac{4}{3}2\sqrt{2}\cos\theta+2\right)d\theta = \left[4\theta+\frac{8}{3}\sqrt{2}\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 6. Vi kan her gjøre som i eksempel 4. Etter bytting til kulekoordinater, og etter substitusjonen $u = \rho^2 - 2a\rho\cos\phi + a^2$, får vi denne gangen etter å ha integrert med tank



(a) Vi kan finne den største verdien ϕ kan ha, siden for denne ϕ vil $\pi - \phi$ være vinkel i en rettvinklet trekant der vi vet to av sidene

(b) Vi kan finne øvre og nedre grense for ρ fra denne figuren

Figur 12: Illustrasjon av hvordan man kan finne integralgrensene i kulekoordinater i Oppgave 6.10.7

på θ først og deretter ρ

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_0^R \left[\frac{\rho}{a} \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos\phi + a^2} \right]_0^\pi d\phi \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{a}((a+\rho) - (a-\rho))d\phi = 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{a} 2\rho d\phi \\
&= \frac{4\pi}{a} \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3a}.
\end{aligned}
$$

I Seksjon 6.10 nevnes også at det kan lønne seg av og til å bruke translaterte kulekoordinater i tilfeller som dette. La oss vise at det er mulig å komme fram på denne måten også. Det vil vise seg at vi nå må bruke et geometrisk resonnement for å finne de nye integralgrensene. Vi gjør først variabelskiftet $u = x$, $v = y$, $w = z - a$. Jacobideterminanten for dette variabelskiftet er 1, og integranden blir nå $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$. A blir transformert til en kule med sentrum i $(0, 0, -a)$ i (u, v, w)-planet. La oss sette opp grensene for dette området i kulekoordinater. Det er klart at $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det er også klart fra Figur 12(a) at ϕ går fra $\pi - \arcsin\left(\frac{R}{a}\right)$ til π. Videre, for en gitt ϕ er det klart at vi kan finne grensene for ρ fra Figur 12(b). Først ser vi at $\frac{x}{a} = \sin(\pi - \phi) = \sin(\phi)$ slik at $x = a\sin\phi$, der x er angitt på figuren. Videre ser vi da at $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \sin^2\phi}$ der y også er angitt på figuren, slik at ρ vil gå fra $-a\cos(\pi - \phi) - \sqrt{R^2 - \sin^2\phi}$ til $-a\cos(\pi - \phi) + \sqrt{R^2 - \sin^2\phi}$, som kan skrives om til

$$
-a\cos(\phi) - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2(\phi)} \leq \rho \leq -a\cos(\phi) + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2(\phi)}.
$$

Integralet kan dermed skrives

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}\int_{-a\cos(\phi)-\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}}^{-a\cos(\phi)+\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}}\frac{1}{\rho}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\sin\phi\right]_{-a\cos(\phi)-\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}}^{-a\cos(\phi)+\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}}d\phi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}\frac{1}{2}\left(-a\cos(\phi)+\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}\right)^2\sin\phi d\phi d\theta\\
&\quad -\int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}\frac{1}{2}\left(-a\cos(\phi)-\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}\right)^2\sin\phi d\phi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}-2a\cos\phi\sqrt{R^2-a^2\sin^2(\phi)}\sin\phi d\phi d\theta\\
&= \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(R^2-a^2\sin^2(\phi))^{3/2}\right]_{\pi-\arcsin\left(\frac{R}{a}\right)}^{\pi}d\theta\\
&= \frac{2}{3a}\int_0^{2\pi}R^3d\theta = \frac{4\pi R^3}{3a},
\end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonen $u = R^2 - a^2\sin^2(\phi)$.

Seksjon 6.11

Oppgave 1.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left[\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}r\,dz\right]dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R 2r\sqrt{R^2-r^2}dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

Oppgave 2. Trekanten med de tre hjørnene kan beskrives ved $0 \le y \le \frac{1}{2}$, og $y \le x \le 1-y$. Vi får derfor

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{1/2}\left[\int_y^{1-y}\left[\int_0^{e^{x+y}}1dz\right]dx\right]dy = \int_0^{1/2}\left[\int_y^{1-y}e^{x+y}dx\right]dy\\
&= \int_0^{1/2}\left[e^{x+y}\right]_y^{1-y}dy = \int_0^{1/2}\left(e-e^{2y}\right)dy = \left[ey-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{1/2}dy\\
&= \frac{1}{2}e-\frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3. Kjegleflaten $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ sier i kulekoordinater at

$$\begin{aligned}\rho\cos\phi &= z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = \sqrt{\frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{3}} \\ &= \frac{\rho\sin\phi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Med andre ord er $\tan\phi = \sqrt{3}$, og dermed er $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumet blir dermed

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^R \rho^2\sin\phi d\rho\right]d\phi\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}R^3\sin\phi d\phi\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}R^3\cos\phi\right]_0^{\pi/3}d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{6}R^3\right)d\theta = 2\pi\frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

Oppgave 5. Jacobimatrisen til variabelskiftet $(u,v,w) = \mathbf{T}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$ blir $\mathbf{T}'(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$, og Jacobideterminanten blir $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{abc}$, slik at $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$. Volumet til området vårt blir derfor , etter variabelskiftet,

$$\int\int\int_V \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = abc\int\int\int_V dudvdw,$$

der V er kula $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Vi vet at volumet av denne kula er $\frac{4}{3}\pi$ (som vi kunne vise på nytt her ved å bruke kulekoordinater). Volumet av ellipsoiden blir derfor $\frac{4}{3}\pi abc$.

Oppgave 6.

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_0^1 \frac{r}{r^2+z^2}dz\right]dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_0^1 \frac{r}{r^2+z^2}dr\right]dz\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\frac{1}{2}\ln(r^2+z^2)\right]_0^1 dz\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \frac{1}{2}(\ln(1+z^2)-\ln(z^2))dz\right]d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \ln(1+z^{-2})dz\right]d\theta = \pi\int_0^1 \ln(1+z^{-2})dz \\ &= \pi\left[z\ln(1+z^{-2}) + 2\int\frac{z^{-2}}{1+z^{-2}}dz\right]_0^1 = \pi\ln 2 + 2\pi\int_0^1\frac{1}{1+z^2}dz \\ &= \pi\ln 2 + 2\pi\left[\arctan z\right]_0^1 = \pi\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Oppgave 9. Skjæringen mellom paraboloiden (venstre ulikhet) og kula (høyre ulikhet) får vi ved å løse

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ r^2 &= \sqrt{2 - r^2} \\ r^4 &= 2 - r^2 \\ r^4 + r^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

som gir $r = 1$ som eneste mulige løsning. Det er videre klart at for $r < 1$ er ulikheten i oppgaven oppfylt. Volumet er da gitt ved trippelintegralet

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r dz \right] dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(r^3 - r\sqrt{2 - r^2} \right) dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{3}(2 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) d\theta = \left(\frac{7}{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

Oppgave 11.

a). Skjæringen mellom de to flatene finner vi ved å løse $6 - x^2 - y^2 = x^2 - 4x + y^2$, som koker ned til at $2x^2 - 4x + 2y^2 = 6$. Fullfører vi kvadratene finner vi at $2(x-1)^2 + 2y^2 = 8$, eller $(x - 1)^2 + y^2 = 4$. Med andre ord avgrenses området $S = \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ av de to flatene. I dette området er det lett å sjekke at $z = 6 - x^2 - y^2$ ligger øverst (sjekk for eksempel ved å sette inn $(x, y) = (0, 0)$, som ligger i S). Derfor blir integralet

$$\begin{aligned} \int\int\int_R ydzdxdy &= \int\int_S \left[\int_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} ydz \right] dxdy \\ &= \int\int_S [yz]_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} \, dxdy \\ &= \int\int_S \left(6y - yx^2 - y^3 - yx^2 + 4xy - y^3 \right) dxdy \\ &= \int\int_S \left(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy \right) dxdy. \end{aligned}$$

b). Vi regner ut integralet ved å sette $u = x - 1$, $v = y$ (Jacobideterminanten blir da 1). Setter vi $D = \{u^2 + v^2 \leq 4\}$ får vi

$$\begin{aligned} &\int\int_S \left(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy \right) dxdy \\ &= \int\int_D \left(6v - 2(u + 1)^2 v - 2v^3 + 4(u + 1)v \right) dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left(8v - 2v(u^2 + v^2) \right) rdr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left(8r^2 \sin\theta - 2r^4 \sin\theta \right) rdr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3} r^3 \sin\theta - \frac{2}{5} r^5 \sin\theta \right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} 2^3 - \frac{2}{5} 2^5 \right) \sin\theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

c). Med parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2\sin t, 1 - 4\cos t).$$

av C regner vi ut at

$$\begin{aligned}
6 - x^2 - y^2 &= 6 - (1 + 2\cos t)^2 - 4\sin^2 t \\
&= 6 - 1 - 4\cos t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z \\
x^2 - 4x + y^2 &= (1 + 2\cos t)^2 - 4(1 + 2\cos t) + 4\sin^2 t \\
&= 1 + 4\cos t + 4\cos^2 t - 4 - 8\cos t + 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z.
\end{aligned}$$

Dermed er det klart at den parametriserte kurven ligger langs skjæringskurven mellom de to kurvene. Siden skjæringskurven er lukket, og den parametriserte kurven beskriver en lukket kurve som ikke skjærer seg selv, så er det klart at den parametriserte kurven inneholder hele skjæringskurven. Setter vi $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ får vi at

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (1 - 4\cos t, 2\sin t, 1 + 2\cos t) \\
\mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t, 4\sin t),
\end{aligned}$$

og dermed får vi

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8\cos t \sin t - 2\sin t + 4\sin t \cos t + 4\sin t + 8\sin t \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (20\cos t \sin t + 2\sin t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (10\sin 2t + 2\sin t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Seksjon 6.12

Oppgave 1. Den delen av flaten som ligger over xy-planet er beskrevet ved $0 \leq r \leq 2$. Vi parametriserer flaten først med kartesiske koordinater, og får

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} &= (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1) \\
&= (2x, 2y, 1) \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) &= (x, y, 4 - x^2 - y^2) \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) &= 2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2 \\
&= x^2 + y^2 + 4.
\end{aligned}$$

Vi ser og at parametriseringen her gir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ med positiv z-komponent. Går vi over til polarkoordinater får vi dermed

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int\int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dxdy \\
&= \int\int_A (x^2 + y^2 + 4) dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (r^2+4) r dr \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + 2r^2 \right]_0^2 d\theta = 2\pi(4+8) = 24\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 4. Den øvre del av kuleflaten kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (3\cos\theta\sin\phi, 3\sin\theta\sin\phi, 3\cos\phi),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},$$

der vi har brukt kulekoordinater. Siden flaten vår er en del av flaten fra eksempel 2 får vi også her

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(9\sin^2\phi\cos\theta, 9\sin^2\phi\sin\theta, 9\sin\phi\cos\phi\right).$$

z-komponenten ser vi her at er positiv på integrasjonsområdet. Videre er $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta)) = (3\cos\theta\sin\phi, 3\sin\theta\sin\phi, 0)$, og flateintegralet vårt blir

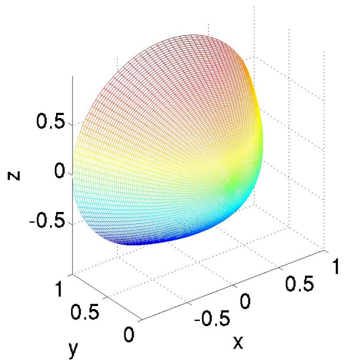
$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \left(27\cos^2\theta\sin^3\phi + 27\sin^2\theta\sin^3\phi\right) d\phi \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} 27\sin^3\phi d\phi \right] d\theta \\
&= -27 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\phi)(-\sin\phi) d\phi \right] d\theta \\
&= -27 \int_0^{2\pi} \left[\cos\phi - \frac{1}{3}\cos^3\phi \right]_0^{\pi/2} d\theta \\
&= -27 \int_0^{2\pi} \left(-1 + \frac{1}{3} \right) d\phi = 36\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 5. Overflaten til området kan splittes opp i to deler. Den ene flaten, T_1, består av punkter som løser $y = x^2 + z^2$, som kan tenkes på som en del av en paraboloide lagt på siden. Det er klart at denne kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}_1(x,z) = (x, x^2+z^2, z),\ x^2 + z^2 \le 1.$$

Denne er tegnet opp i Figur 13. Vi ser at

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = (2x, -1, 2z).$$



Figur 13: Flaten T_1 i Oppgave 6.12.5

Vi ser at i origo peker enhetsnormalen her ut av V, som er riktig retning ifølge oppgaven. Vi ser og at $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(x,z)) = (0, x^2+z^2, -z)$, slik at

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(x,z)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y}\right)\\ = \quad &(0, x^2+z^2, -z) \cdot (2x, -1, 2z) = -x^2 - z^2 - 2z^2 = -x^2 - 3z^2,\end{aligned}$$

slik at

$$\int_{T_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{T_1} (-x^2 - 3z^2) dx dz.$$

Skifter vi til polarkoordinater $x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ (vi har byttet om x, y, og z samtidig) ser vi at området beskrives ved $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, slik at integralet blir

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 -r^3(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) dr\right] d\theta\\ = \quad &-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) d\theta = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2\theta) d\theta\\ = \quad &-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (2 - \cos(2\theta)) d\theta = -\frac{1}{4} 4\pi = -\pi.\end{aligned}$$

Den andre flaten, T_2, består av punkter i planet $y = 1$, og denne kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}_2(x,z) = (x, 1, z),\ x^2 + z^2 \leq 1,$$

og enkel regning gir at

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} = (0, -1, 0),$$

og det er lett å se at denne peker inn i V, slik at vi må skifte fortegn på normalvektoren. Videre får vi $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(x,z)) = (0, 1, -z)$, slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(x,z)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y}\right) = (0, 1, -z) \cdot (0, -1, 0) = -1,$$

slik at

$$\int_{T_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{T_1} (-1) dx dz = \pi,$$

siden sirkelen med radius 1 har areal π.

Summen av de to bidragene blir

$$\int_{T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{T_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{T_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -\pi + \pi = 0.$$

Oppgave 12.

a). Med $\mathbf{s}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, f(r,\theta))$ får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial r} &= \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{\partial f}{\partial r}\right) \\
\frac{\partial s}{\partial \theta} &= \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\
\frac{\partial s}{\partial r} \times \frac{\partial s}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{\partial f}{\partial r} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}, -\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}, r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) \\
&= \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}, -\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right), r\right),
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

b). Siden tredjekomponenten i det fundamentale vektorprodukter er r, og denne er ≥ 0 i den gitte parametriseringen, så ser vi at normalvektoren har ønsket retning. Med den gitte flaten kan vi sette $f(r,\theta) = r^2\theta$. Setter vi inn $\frac{\partial f}{\partial r} = 2r\theta$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = r^2$ i formelen fra a) for det fundamentale vektorproduktet, får vi

$$\frac{\partial s}{\partial r} \times \frac{\partial s}{\partial \theta} = \left(r^2\sin\theta - 2r^2\theta\cos\theta, -\left(r^2\cos\theta + 2r^2\theta\sin\theta\right), r\right).$$

Videre har vi at $\mathbf{F}(\mathbf{s}(r,\theta)) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r^2\theta)$, slik at

$$\begin{aligned}
&\int_T \mathbf{F}(\mathbf{s}(r,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \times \frac{\partial s}{\partial \theta}\right)(r,\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 \left(r^3(-\sin^2\theta + 2\theta\cos\theta\sin\theta) - r^3(\cos^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta) + r^3\theta\right) dr\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 (-r^3 + r^3\theta) dr\right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4}r^4(-1+\theta)\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(-1+\theta) d\theta = \frac{1}{4}\left[-\theta + \frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{\pi^2 - 4\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Oppgave 15.

a). La $(s,t) \in B$. og la $\mathbf{r}_2(s,t) = P$. Siden $\mathbf{r}_1$ er injektiv, og en parametrisering av den samme flaten, så finnes det et unikt punkt $(s_1, t_1) \in A$ slik at $\mathbf{r}_1(s_1, t_1) = P$. Definer $\mathbf{T} : B \to A$ ved å sette $\mathbf{T}(s,t) = (s_1, t_1)$. Men da er $\mathbf{r}_1(\mathbf{T}(s,t)) = \mathbf{r}_1(s_1,t_1) = P = \mathbf{r}_2(s,t)$. Siden $\mathbf{r}_1$ er injektiv kan vi også skrive $\mathbf{T}(s,t) = (\mathbf{r}_1)^{-1}(\mathbf{r}_2(s,t))$, eller $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1)^{-1}\mathbf{r}_2$. Med da er det klart at $\mathbf{T}$ har en invers (den er en sammensetning av injektive funksjoner), og at $\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{r}_2)^{-1}\mathbf{r}_1$.

b). Vi lar $\mathbf{T}(s,t) = (U(s,t), V(s,t))$. Ved kjerneregelen har vi at

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{T})'(s,t) = \mathbf{r}_1'(U(s,t), V(s,t))\mathbf{T}'(s,t).$$

Fra a) vet vi at dette også er $\mathbf{r}_2'(s,t)$, slik at $\mathbf{r}_2'(s,t) = \mathbf{r}_1'(U(s,t), V(s,t))\mathbf{T}'(s,t)$. Dette kan også skrives

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}(U(s,t),V(s,t)) & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(U(s,t),V(s,t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial U}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial V}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial V}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

der $\mathbf{T}'(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial U}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial V}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial V}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix}$. Sammenligner vi søylene på venstre og høyre side etter at vi har ganget sammen matrisene på høyre side ser vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}(U(s,t),V(s,t))\frac{\partial U}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(U(s,t),V(s,t))\frac{\partial V}{\partial s}(s,t) \\
\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}(U(s,t),V(s,t))\frac{\partial U}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(U(s,t),V(s,t))\frac{\partial V}{\partial t}(s,t).
\end{aligned}$$

Tar vi vektorproduktet av disse to får vi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t}\right)(s,t) \\
&= \frac{\partial U}{\partial s}(s,t)\frac{\partial V}{\partial t}(s,t)\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(U(s,t),V(s,t)) \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial s}(s,t)\frac{\partial U}{\partial t}(s,t)\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}\right)(U(s,t),V(s,t)) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial s}(s,t)\frac{\partial V}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial V}{\partial s}(s,t)\frac{\partial U}{\partial t}(s,t)\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(U(s,t),V(s,t)) \\
&= \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(U(s,t),V(s,t)),
\end{aligned}$$

der vi har brukt at

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v} = \mathbf{0},$$

d.v.s. at vektorproduktet av to parallelle vektorer er $\mathbf{0}$. Det var dette vi skulle vise.

c). Vi har at

$$
\begin{aligned}
\int_{T_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(u,v)dudv \\
\int_{T_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_B \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial t}\right)(s,t)dsdt \\
&= \int_B \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(U(s,t),V(s,t))\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}dsdt \\
&= \pm\int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial v}\right)(u,v)dudv,
\end{aligned}
$$

der vi i siste overgang har gjort et variabelskifte fra (s,t) til (u,v). Fortegnet blir $+$ hvis $\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}$ er positiv, $-$ hvis negativ, siden vi i flerdimensjonale variabelskifter tar absoluttverdien av Jacobideterminanten. Dette viser at de to flateintegralene er like opp til fortegn, og at $\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}$ gir oss valget av fortegn. Siden fortegnet til $\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}$ gir oss fortegnet til flateintegralet, så beskriver det også orienteringen til kurven, siden fortegnet også endres ved at vi bytter normalvektor fra $\mathbf{n}$ til $-\mathbf{n}$.

Seksjon 6.13

Oppgave 1.

b). Her blir $P(x,y,z)=x^2$, $Q(x,y,z)=4xy^3$, $R(x,y,z)=xy^2$, og de partielle deriverte blir

$$
\begin{array}{ccc}
\frac{\partial P}{\partial x}=2x & \frac{\partial P}{\partial y}=0 & \frac{\partial P}{\partial z}=0 \\
\frac{\partial Q}{\partial x}=4y^3 & \frac{\partial Q}{\partial y}=12xy^2 & \frac{\partial Q}{\partial z}=0 \\
\frac{\partial R}{\partial x}=y^2 & \frac{\partial R}{\partial y}=2xy & \frac{\partial R}{\partial z}=0.
\end{array}
$$

Vi får nå at

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \\
&= 2x+12xy^2 \\
\mathrm{curl}\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \left(2xy,-y^2,4y^3\right).
\end{aligned}
$$

Oppgave 2.

c). Vi regner ut at $\frac{\partial P}{\partial x}=e^{2z}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=e^{2z}$, $\frac{\partial R}{\partial z}=-2e^{2z}$, og

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=e^{2z}+e^{2z}-2e^{2z}=0.$$

For å finne et vektorfelt $\mathbf{G}$ slik at $\mathbf{F} = \mathrm{curl} G$ må vi løse likningene

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = xe^{2z}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = ye^{2z}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2e^{2z},$$

der vi har kalt komponentfunksjonene til $\mathbf{G}$ for P, Q, R. Vi prøver oss frem med å sette $R(x, y, z) = 0$. De to første likningene gir da

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= -\frac{1}{2}xe^{2z} + f(x,y) \\ P(x,y,z) &= \frac{1}{2}ye^{2z} + g(x,y). \end{aligned}$$

velger vi $f(x, y) = g(x, y) = 0$ og setter inn i den siste likningen får vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{2z} - e^{2z} = -2e^{2z},$$

som viser at den siste likningen også blir oppfylt. Vi kan dermed velge

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}ye^{2z}, -\frac{1}{2}xe^{2z}, 0\right).$$

Seksjon 6.14

Oppgave 2. Med $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^2)$ får vi $\mathrm{div}\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2z$. Divergensteoremet gir

$$\begin{aligned}
&\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \\
&= \int\int\int_V (3x^2+3y^2+2z)dxdydz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi}(3\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + 3\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + 2\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\theta\right]d\phi\right]d\rho \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi}(3\rho^2\sin^2\phi + 2\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\theta\right]d\phi\right]d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\left[\int_0^{\pi/2}(3\rho^4\sin^3\phi + \rho^3\sin(2\phi))d\phi\right]d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\left[\rho^4(\cos^3\phi - 3\cos\phi) - \frac{1}{2}\rho^3\cos(2\phi)\right]_0^{\pi/2}d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1(2\rho^4+\rho^3)d\rho = 2\pi\left[\frac{2}{5}\rho^5 + \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{13}{10}\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 5. Vi ser at div$\mathbf{F} = 2 - 2y + 3z^2$, og divergensteoremet gir

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int\int\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}dxdydz \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}(2-2y+3z^2)dz\right]dy\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left[2z-2zy+z^3\right]_{-1}^{1}dy\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}(6-4y)dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[6y-2y^2\right]_{-1}^{1}dx = 24.
\end{aligned}$$

Oppgave 7.

a). La $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 4\}$ være T projisert ned i xy-planet. Da er

$$\begin{aligned}
A &= \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}rdr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{17}{12}\sqrt{17}-\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).
\end{aligned}$$

b). Volumet V som avgrenses av flaten T og xy-planet er gitt ved

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left[\int_0^{4-x^2-y^2} rdz\right]dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(4-x^2-y^2)rdr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(4r-r^3)dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}4d\theta = 8\pi.
\end{aligned}$$

c). På T ser vi at enhetsnormalen med positiv z-komponent peker ut av V. Volumet avgrenses også av flaten D, der enhetsnormalen blir $(0,0,-1)$. Flateintegralet over D blir derfor

$$\int_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_D (z^2-8z)dS = 0$$

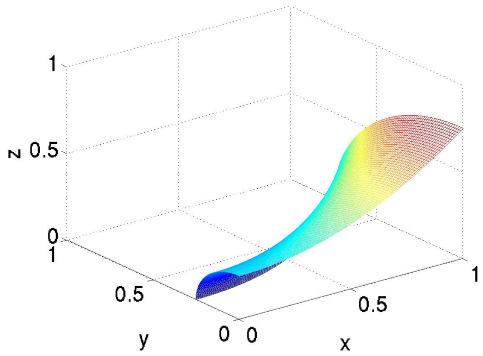
siden $z = 0$ på D. Siden div$\mathbf{F} = 4z - 2z - 2z + 8 = 8$ så gir divergensteoremet at

$$\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int\int\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}dxdydz - \int_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = 8V = 64\pi.$$

Oppgave 9.

a). Flaten S har parametriseringen

$$\mathbf{r}(x,\theta) = \left(x, \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin\theta\right).$$



Figur 14: Flaten T i Oppgave 6.14.9

Her har vi brukt sylinderkoordinater, men vi har byttet om på x, y, og z. Flaten T svarer til at vi begrenser parametriseringen til $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Flaten er tegnet opp i Figur 14. Vi får nå

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= (1, x\cos\theta, x\sin\theta) \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \left(0, -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin\theta, \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\theta\right) \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \left(x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right), -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\theta, -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin\theta\right) \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,\theta)) &= \left(x, \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Tar vi skalarproduktet av de to siste vektorene får vi

$$x^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}.$$

Vi ser og at $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ har positiv x-komponent, mens vi i oppgaven skulle ha negativ x-komponent. Vi må derfor ta et ekstra fortegnsskift når vi regner ut flateintegralet, og får dermed

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= -\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 \left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{16}\right)dx\right]d\theta = -\int_0^{\pi/2}\left[\frac{x^5}{20}-\frac{1}{16}x\right]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{16}\right) = \frac{\pi}{160}.
\end{aligned}$$

b). Hvis vi skal bruke divergensteoremet, så bør normalvektoren peke ut av det avgrensede området, og da må x-komponenten i $\mathbf{n}$ være negativ. Dette stemmer overens med normalvektoren spesifisert i a), slik at vi ikke må gjøre noe fortegnsskifte når vi bruker divergensteoremet.

Sammen med flatene $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $z = 0$ avgrenser T et område i rommet.

- Hvis $x = 0$ er $\mathbf{F}(0, y, z) = (0, y, z)$ og $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$. Dermed blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, slik at flateintegralet over dette planet blir 0.

- Hvis $x = 1$ er $\mathbf{F}(1, y, z) = (1, y, z)$ og $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Dermed blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 1$, slik at flateintegralet over dette planet blir lik arealet av skjæringsflaten. Skjæringsflaten er en kvartsirkel med radius $\frac{3}{4}$ (siden $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ ligger på grafen som blir dreid rundt x-aksen), som dermed har areal $\frac{1}{4}\frac{9\pi}{16} = \frac{9\pi}{64}$.

- Hvis $y = 0$ er $\mathbf{F}(x, 0, z) = (x, 0, z)$ og $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$. Dermed blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, slik at flateintegralet over dette planet blir 0.

- Hvis $z = 0$ er $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x, y, 0)$ og $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. Dermed blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, slik at flateintegralet over dette planet også blir 0.

Vi har at div$\mathbf{F} = 3$, slik at

$$\begin{aligned}
\text{div}\mathbf{F} &= 3\int\int\int_V dxdydz = 3\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}} rdr\right]d\theta\right]dx \\
&= 3\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 d\theta\right]dx = \frac{3\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 dx \\
&= \frac{3\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}\right)dx = \frac{3\pi}{4}\left[\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{16}x\right]_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right) = \frac{47}{320}\pi.
\end{aligned}$$

Divergensteoremet gir nå at

$$\frac{47}{320}\pi = \int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \frac{9\pi}{64},$$

slik at

$$\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \frac{47}{320}\pi - \frac{9\pi}{64} = \frac{47-45}{320}\pi = \frac{\pi}{160}.$$

Oppgave 12.

a). Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} &= \left(-\sqrt{1+z^2}\sin\theta, \sqrt{1+z^2}\cos\theta, 0\right) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\theta, 1\right) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, -z\right).
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| dz\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \sqrt{1+z^2+z^2}dz\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \sqrt{1+2z^2}dz\right] d\theta = \sqrt{2}\pi\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+u^2}du \\
&= \sqrt{2}\pi\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}\pi\left(3\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{2}+3)\right) = \pi\left(6+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}+3)\right),
\end{aligned}$$

der vi har brukt hintet i oppgaven til å regne ut $\int \sqrt{1+u^2}du$.

c). Vi ser at $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ har negativ z-komponent på flaten, slik at vi ikke trenger skifte fortegn på normalvektoren. Vi regner ut

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta,z))\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \\
&= \left(z\sqrt{1+z^2}\cos\theta, z\sqrt{1+z^2}\sin\theta, -z^2\right)\cdot\left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, -z\right) \\
&= z(1+z^2)\cos^2\theta + z(1+z^2)\sin^2\theta + z^3 \\
&= z(1+z^2)+z^3 = 2z^3+z.
\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (2z^3+z)dz\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{2}z^2)\right]_0^2 \\
&= \int_0^{2\pi} 10 = 20\pi.
\end{aligned}$$

Seksjon 6.15

Oppgave 1. Skjæringskurven mellom paraboloiden og planet finner vi ved å løse

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 2x+2y+2 \\
x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 2+1+1 \\
(x-1)^2+(y-1)^2 &= 4.
\end{aligned}$$

Skjæringskurven er altså en sirkel med radius 2 om $(1,1)$. Denne kan parametriseres med (translaterte) polarkoordinater ved

$$\begin{aligned}
t(\theta) &= (1+2\cos\theta, 1+2\sin\theta, 2(1+2\cos\theta)+2(1+2\sin\theta)+2) \\
&= (1+2\cos\theta, 1+2\sin\theta, 4(\cos\theta+\sin\theta)+6).
\end{aligned}$$

En parametrisering av flaten T denne omkranser blir da

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (1+r\cos\theta, 1+r\sin\theta, 2r(\cos\theta+\sin\theta)+6),\ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Det fundamentale vektorproduktet blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2(\cos\theta+\sin\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 2r(-\sin\theta+\cos\theta) \end{vmatrix} \\ &= (-2r,-2r,r).\end{aligned}$$

Siden z-komponenten er positiv så har vi den orienteringen som kreves i oppgaven. Vi regner ut at

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 0 & z^2 \end{vmatrix} = (0,0,-x),$$

slik at

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) = (0,0,-1-r\cos\theta).$$

Bruker vi Stokes' teorem får vi nå

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r}(r,\theta))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right)(r,\theta)drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(-r-r^2\cos\theta)dr\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3\cos\theta\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-2-\frac{8}{3}\cos\theta\right)d\theta = -4\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 8. Skjæringen mellom paraboloiden og xy-planet er en sirkel om origo med radius 1, som har parametriseringen $\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ i polarkoordinater, og derivert $\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Kurven parametrisert slik ser vi først at gir riktig orientering. Vi regner ut

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = (\sin\theta, 0, \cos\theta).$$

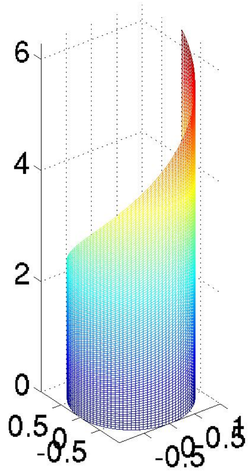
Bruker vi Stokes' teorem får vi

$$\begin{aligned}&\int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \\ &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta))\cdot\mathbf{r}'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(\sin\theta,0,\cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0) \\ &= -\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2(\theta))d\theta = -\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 12. Flaten T er tegnet opp i Figur 15

a). Vi regner først ut

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & u \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = (t\cos t, t\sin t, 0),$$



Figur 15: Flaten T i Oppgave 6.15.12.

slik at $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = t$. Arealet til T blir dermed

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| du\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 t du\right] dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.$$

b). Vi regner ut at $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, slik at flaten er en del av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$. Kurven $\mathcal{C}$ det er snakk om får vi ved å sette $u = 1$, slik at parametriseringen av $\mathcal{C}$ blir $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

c). La oss først finne lengden på $\mathcal{C}$. Vi har $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, og $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. Buelengden til $\mathcal{C}$ blir dermed

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Randkurven E er sirkelen om origo med radius 1 i xy-planet, som har omkrets 2π, og L er linjestykket fra $(1, 0, 0)$ til $(1, 0, 2\pi)$, som har lengde 2π. Den totale lengden på randkurven til T blir dermed

$$2\sqrt{2}\pi + 2\pi + 2\pi = 2\pi(\sqrt{2} + 2).$$

d).

$$\text{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z & -ye^z & e^z \end{vmatrix} = (ye^z, xe^z, 0),$$

slik at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t, u)) = (\sin t e^{tu}, \cos t e^{tu}, 0)$ Det fundamentale vektorproduktet regnet vi ut i a) til å være $= (t \cos t, t \sin t, 0)$, slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t, u)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)(t, u) = (\sin t e^{tu}, \cos t e^{tu}, 0) \cdot (t \cos t, t \sin t, 0) = t e^{tu} \sin(2t).$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned}\int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 te^{tu}\sin(2t)du\right]dt \\ &= \int_0^{2\pi}(e^t-1)\sin(2t)dt = \int_0^{2\pi} e^t\sin(2t)dt \\ &= \left[e^t\sin(2t)\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} e^t\cos(2t)dt \\ &= -2\left[e^t\cos(2t)\right]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} e^t\sin(2t)dt.\end{aligned}$$

De siste likningene sier at $5\int_0^{2\pi} e^t\sin(2t)dt = -2\left[e^t\cos(2t)\right]_0^{2\pi} = -2(e^{2\pi}-1)$, slik at $\int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = -\frac{2}{5}(e^{2\pi}-1)$.

e). Ved Stokes' teorem har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS - \int_E \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

På sirkelen E er $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (x,-y,1) = (\cos t,-\sin t,1)$, og kurven selv er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t,\sin t,0)$, slik at $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t,\cos t,0)$, og vi får dermed

$$\int_E \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}(\cos t,-\sin t,1)\cdot(-\sin t,\cos t,0)dt = 0.$$

På linjestykket L er $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) = (e^{2\pi u},0,e^{2\pi u})$, der u går fra 0 til 1, og $\mathbf{r}(u)) = (1,0,2\pi u)$, slik at $\mathbf{r}'(u) = (0,0,2\pi)$, og vi får dermed

$$\int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (e^{2\pi u},0,e^{2\pi u})\cdot(0,0,2\pi)dt = \int_0^1 2\pi e^{2\pi u} = e^{2\pi}-1.$$

Dermed blir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{2}{5}(e^{2\pi}-1) - e^{2\pi} + 1 = \frac{7}{5}(1-e^{2\pi}).$$

Oppgave 14.

a). Hvis $\mathbf{F} = \bigtriangledown\phi$ så må

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y + f(y,z) = zy + g(x,z) = xz + yz + h(x,y).$$

Vi ser fort at de to første ikke er forenlige.

Hvis $\mathbf{F} = \mathrm{curl}(\mathbf{G})$ så er $\mathrm{div}\mathbf{F} = \mathrm{div}(\mathrm{curl}(\mathbf{G})) = 0$, men dette er ikke oppfylt siden $\mathrm{div}\mathbf{F} = y$.

b). Ved divergensteoremet har vi at

$$\begin{aligned}\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int\int\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}dxdydz = \int_0^4\left[\int_0^4\left[\int_0^{4-x} ydz\right]dx\right]dy \\ &= \int_0^4\left[\int_0^4(4y-xy)dx\right]dy = \int_0^4 8ydy = 64.\end{aligned}$$

c). Flaten er parametrisert ved $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 4-x)$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$. Vi regner ut at

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1).$$

Velger vi derfor normalvektoren til å ha fortegn med positiv z-komponent trenger vi ikke å endre fortegn når vi bruker Stokes' teorem. Videre er curl$\mathbf{F} = (0, -1. - x)$, og Stokes teorem gir

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_T \text{curl}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^4 \left[\int_0^4 (0, -1, -x) \cdot (1, 0, 1) dx \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[\int_0^4 -x dx \right] dy = \int_0^4 -8 dy = -32. \end{aligned}$$

Oppgave 17.

a). Senteret i sylinderen regner vi fort ut at blir $(1, 0)$, og radien blir 1. Området kan derfor parametriseres ved $x = 1 + r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, der vi har brukt (translaterte) polarkoordinater. Volumet blir derfor

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 ((1 + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (r + 2r^2\cos\theta + r^3) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

b). Vi regner ut

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{F} &= 1 \\ \text{curl}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x-1 & y+z \end{vmatrix} = (1, 0, 2). \end{aligned}$$

c). Hvis (x, y, z) ligger både på paraboloiden og på sylinderen så har vi

$$z = x^2 + y^2 = 2x,$$

der den siste likheten følger av likningen $x^2 - 2x + y^2 = 0$ for sylinderen.

d). Enhetsnormalen på T med positiv z-komponent peker bort fra volumet som avgrenses, slik at vi ikke trenger skifte fortegn på denne når vi skal bruke divergensteoremet. Tre flater avgrenser volumet V. Den ene er flaten T, som ligger på paraboloiden. Den andre er "grunnflaten" D, som er sirkelskiven med radius 1 om $(1, 0)$. Her blir det fundamentale vektorproduktet $(0, 0, r)$, som peker motsatt vei i forhold til vektoren som peker ut av området Videre er $\mathbf{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r\sin\theta)$, slik at

$$\begin{aligned}\int_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (-r\sin\theta, r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(0,0,r)dr\right]d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2\sin\theta dr\right]d\theta = 0.\end{aligned}$$

Den tredje flaten er sideflaten E, som er parametrisert ved $\mathbf{r}(\theta,z) = (1+\cos\theta, \sin\theta, z)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 2(1+\cos\theta)$. Her blir det fundamentale vektorproduktet

$$(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\times(0,0,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

og $\mathbf{F}(\mathbf{r}(r,z)) = (-\sin\theta, \cos\theta, z+\sin\theta)$. Vi ser at skalarproduktet av disse to vektorene blir 0, slik at $\int_E \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = 0$. Alt i alt har vi da fra divergensteoremet at

$$\begin{aligned}\int_D \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}dS &= \int\int\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}dxdydz - \int_D \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS - \int_D \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS \\ &= \mathrm{Vol}(V) - 0 - 0 = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

e). Fra Stokes teorem har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_T \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = 0,$$

siden $\mathrm{curl}\mathbf{F} = 0$.