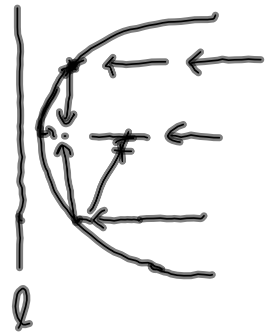
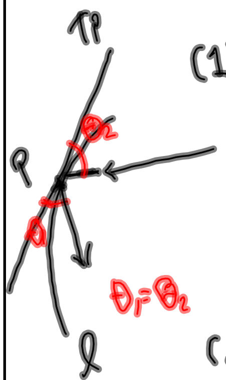
Parabler fortsatt.



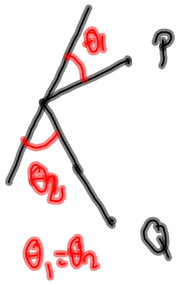
Speilingsegenskap for parabel:

Dersom en lysstråle sendes mot parabelen langs en horisontal linje fra høyre mot venstre, så reflekteres strålen mot brennpunktet.

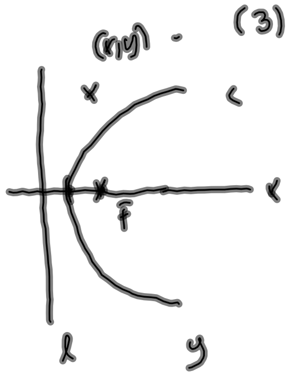
Bevis: Trenge noen prinsipper:



(1) Når en lysstråle reflekteres i et punkt p på en krum linje vi innfallsvinkel og utfallsvinkel være lik m.h.p. tangenten i punktet p.



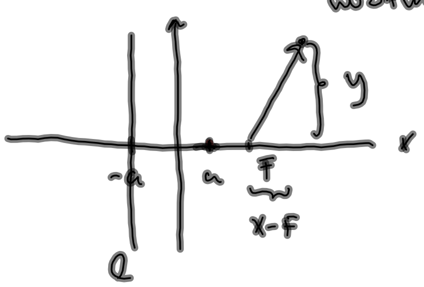
(2) Dersom P og Q er to punkter utenfor en linje l i planet, da er den korteste veien fra P til Q via l langs de to linjene med samme infalls- og utfallsvinkel.



(3) Dersom (x,y) er et punkt som ligger til venstre for parabelen, da er avstanden fra (x,y) til l mindre enn avstanden til F.

Argument: avstand til l: $\underline{x+a} = f(x)$

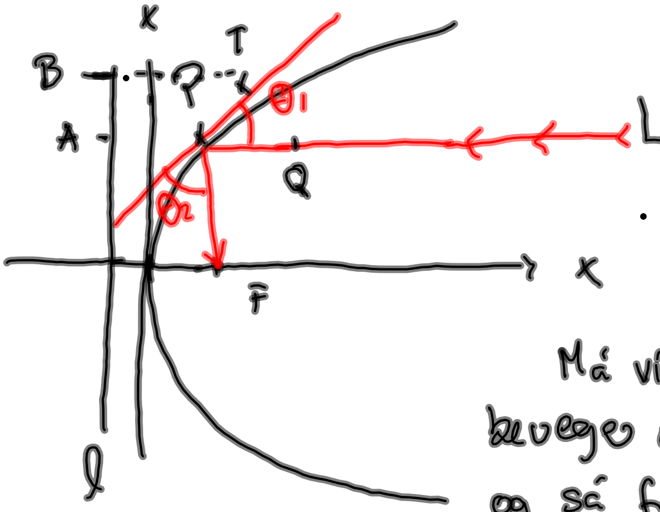
avstand til F: $\sqrt{(x-F)^2+y^2} = g(x)$.



$f'(x) = 1$

$$g'(x) = \frac{(x-F)}{\sqrt{(x-F)^2+y^2}} \leq 1$$

Så dersom avstanden fra (x,y) til l
er større eller lik avstanden fra (x,y) til F,
så vi punktet P på parabelen som ligger
på den horisontale linja gjennom (x,y)
tilfredsstille avstand$((x,y),l) > $ avstand$((x,y),F)$,
hvilket er meningsløst.



- strålen tar den veien s.a. $\theta_1 = \theta_2$.
- Velg et punkt Q på L s.a. $|QP| = |PF|$.

Må vise at dersom vi beveger oss fra Q til P og så fra P til F, så er det den korteste veien fra Q til F via tangenten.

Velg et annet punkt T på tangenten. Vi ser på avstanden fra Q til T og fra T til F:

Vil vise: $|QT| + |TF| > |QP| + |PF|$.

$$= |QA|.$$

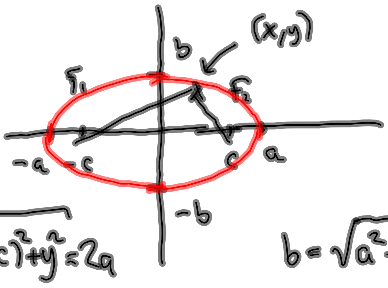
$$|QT| + |TF| \overset{(3)}{>} |QT| + |TB| > |QA|$$

Ellipser

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

DEF: La F_1 og F_2 være to punkter i planet og $2a$ $2a > |F_1F_2|$. Ellipsen i planet med brennpunkter F_1 og F_2 og store halvakse a, er mengden av punkter P s.a. $|F_1P| + |F_2P| = 2a$.

Tegning:



Velg x-akse til å være linjen gjennom F_1 og F_2 og origo midtpunktet.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

Kaller b lille halvakse.
Kaller c for brennvidden.

Setning 3.6.3 Ligningen $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ fremstiller ellipsen med sentrum origo og halvakser a, b. Dersom $a>b$ er brennpunktene $(\sqrt{a^2-b^2},0)$ og $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, og dersom $b>a$ så er brennpunkten $(0,\sqrt{b^2-a^2})$ og $(0,-\sqrt{b^2-a^2})$.

Bevis:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

(Må: (1) Må kvitte oss med rotuttrykk
(2) Må kvitte oss med c, ved å bruke $c^2=a^2-b^2$.)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Kvadrerer

feb 12-09:02

$$\Leftrightarrow \quad (x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+cx = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Kvadrere

$$\Leftrightarrow \quad (a^2+cx)^2 = a^2\left((x+c)^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+\cancel{2a^2cx}+(cx)^2 = a^2(x^2+\cancel{2xc}+c^2+y^2).$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+c^2x^2 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

bruk $c^2=a^2-b^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Kan også se på ellipser med sentr i et generelt punkt $p=(m,n)$.

Får ligning:
$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2+\left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1.$$

Eksempel: Gitt ligning $2x^2-4x+y^2-6y+9=0$, (*)

Vis at ligningen definerer en ellipse og finn halvakser, senter, brennvidde og brennpunkter.

Løsning:
$$(*) \Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2-2+(y-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2+(y-3)^2=2$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+\left(\frac{y-3}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Har ellipse med:

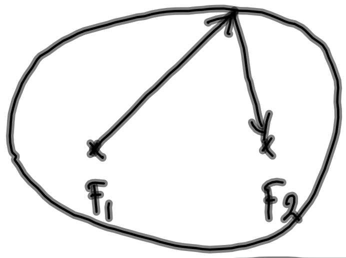
Senter : $(1,3)$

Halvakser : $a=1$ og $b=\sqrt{2}$.

Brennvidden : $\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2-1}=1$.

Brennpunkter : $(1,4)$ og $(1,2)$

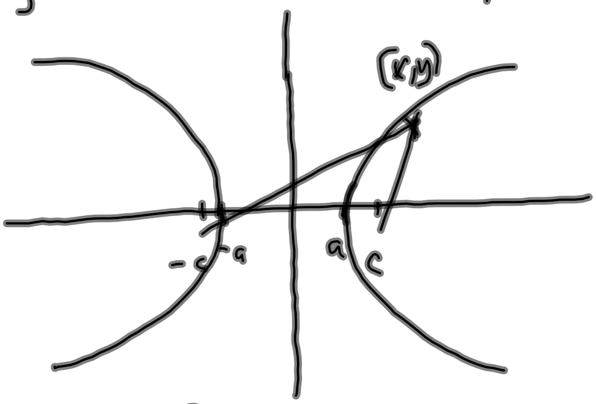
Parametrisering av ellipse: $(a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Evt: $(m + a\cos t, n + b\sin t)$.



Hyperbler:

La F_1 og F_2 være to forskellige punkter i planet. Vi er nå interessert i alle punkter P s.a. $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ for en konstant a.

Velg koordinater s.a. $F_1 = -c$ og $F_2 = c$ for $c > 0$.



Må ha $2a \leq |F_1F_2| = 2c$.

Krever $2a < 2c$.

Setning 3.6.5 Ligningen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ fremstiller en hyperbel med halvakse a og brennpunkter $(-c, 0)$ og $(c, 0)$, der $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bevis: Velg (x,y) på parabelen. Anta $x > 0$.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad \ldots \quad \blacksquare$$