Kalkulus.

Rekker (Kap. 12).

DEF: En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad , \quad a_j \in \mathbb{R}. \quad (a_j \in \mathbb{C}).$$

Eks: Geometrisk rekke $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$

delsum $\sum_{j=0}^{m} r^j \underset{r \neq 1}{=} \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$

så at vi har konvergens for $|r|<1$.

DEF: La $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ være en rekke.

De endelige summene $s_m = \sum_{j=0}^{m} a_j$

kalles delsummer.

Vi sier at rekka konvergerer dersom følgen av delsummer konvergerer.

Hvis rekka ikke konvergerer sier vi at den divergerer.

Prop (Divergenstest)

Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerer så har vi $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

Så dersom $\lim_{j\to\infty} a_j \neq 0$, eller ikke eksisterer, så divergerer rekka.

Bevis: Dersom rekka konvergerer har vi

$$\sum_{j=0}^{m} a_j = S_m \xrightarrow[m\to\infty]{} S$$

Gitt $\varepsilon > 0$ så fins $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.a. $|S_m - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $m \geq N_\varepsilon$.

For $m > N_\varepsilon$: $|a_m| = |S_m - S_{m-1}|$

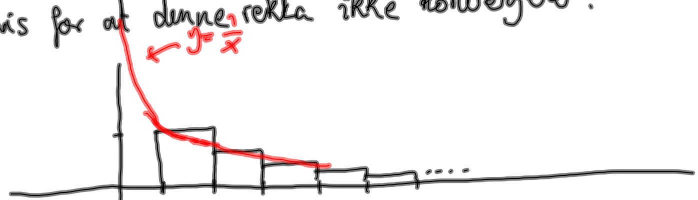
$$= |S_m - S + S - S_{m-1}|$$

$$\leq |S_m - S| + |S - S_{m-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Merk: Det er ikke slik at dersom $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ så konvergerer rekka!

Eks: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Bevis for at denne rekka ikke konvergerer.



Det at $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ skulle konvergere er det som at summen av arealene av boksene skulle konvergere.

Men summen av arealene av boksene må være større en $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} [\ln x]_1^n = \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty.$$

Positive rekker

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ kalles en <u>positiv</u> rekke dersom $a_j \geq 0$ for alle j. Da blir delsummene S_n en voksende følge. En voksende følge konvergerer hviss den er begrenset.

Prop (Integraltest)

La $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv avtagende funksjon. Da konv. rekka $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ hviss $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Setning: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ konvergerer hviss $p > 1$.