Setning 4.2.6:
Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på trappeform.

Bevis: Systematisering av det vi gjorde i går:
1. velg en rad med en ikke-null lengst til venstre, flytt denne øverst.
2. Null ut elementer under denne ikke-nullen, i radene under.
3. Gjenta dette for radene 2, 3, ...

(sier at vi radreduserer matrisen)

Basisvariable: variable fra pivotsøyler.

Frie variable: variable fra ikke-pivotsøyler.

Matrisene fra i går på trappeform:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ søyle 1–3 er pivotsøyler
ingen frie variable

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ søyle 1–2 er pivotsøyler
x, y er basisvariable
z er fri variable.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ søyle 1–2 er pivotsøyler
x, y basisvariable
z fri variabel
ingen løsninger når siste søyle er en pivotsøyle.

Setning 4.2.8 (Vi ser på den utvidete matrisen)

(i) Dersom siste søyle er pivotsøyle, så er det ingen løsninger.

Dersom siste søyle ikke er en pivotsøyle:

(ii) Hvis alle andre søyler er pivotsøyler: Er da nøyaktig en løsning.

(iii) Minst en annen søyle som ikke er pivotsøyle: Uendelig mange løsninger.

Bevis: (i): svarer til at $0 = 1$, umulig.

(ii): ingen frie variable $\Rightarrow$ kun en løsning.

(iii): Har da frie variable.

Korollar 4.2.9: Entydig løsning $\Leftrightarrow$ alle søyler unntatt siste er pivotsøyler.

Setning 4.2.10

Anta at A kan radreduseres til trappematrisen D.

inkluderer nå ikke høyresiden.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Systemet har løsning for alle valg av høyresider $(b_1, \ldots, b_m)$ hvis og bare hvis alle radene i D har pivotelementer.

Bevis: A ble radredusert til D

Anvend samme radoperasjoner på

$$\underset{\text{utv. matrise}}{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\phantom{a_{11} \cdots a_{mn}}}_{A} \quad \underbrace{}_{\vec{b}} \qquad \underbrace{\phantom{d_{11} \cdots d_{mn}}}_{D}$$

Hvis D har pivotelement i hver rad, så kan ikke siste søyle i den nye matrisen være en pivotsøyle $\Rightarrow$ systemet har løsning(er) (setning 4.2.8)

Hvis D ikke har pivotelement i hver rad: velg første rad (i) med bare nuller, velg $\tilde{b}_i = 1$. Da er siste søyle i den nye matrisen en pivotsøyle. Gjør vi de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge, så finner vi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ som gjør at systemet ikke har løsninger

Hvis $m > n$: ikke plass til et pivotelement i hver rad.

$\Rightarrow$ finnes rader uten pivotelementer

$\Rightarrow$ finnes i $m \times n$ systemer som ikke har løsning

Hvis A er kvadratisk: pivotelementene nå alle være på diagonalen, for at skal være pivotelemente i hver rad

$\Rightarrow$ har løsning(er)

Korollar 4.2.11 Vi har entydig løsning for alle høyresider $b_1, \ldots, b_m$ hvis og bare hvis vi har pivotelementer i alle rader og søyler.

$\Rightarrow$ A må være kvadratisk

Eksempel: Har

$$\begin{aligned} y + z &= b_1 \\ x - y + 2z &= b_2 \\ 3x + y + z &= b_3 \end{aligned}$$

en løsning for alle høyresider?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ har vi tidligere radredusert til $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

som har pivotelement i hver rad og hver søyle, så systemet har en entydig løsning for alle høyresider.

Sek. 4.3 Redusert trappeform.

Def. 4.3.1: A sies å være på redusert trappeform hvis A er på trappeform, og alle elementene i pivotsøylene er 0 (unntatt selve pivotelementene)

på red. trappeform: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ikke på red. trappeform: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bringer på redusert trappeform ved først å bringe på trappeform, og så eliminerer tall over pivotelementene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-1)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+(-2)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Setning 4.3.4 og 4.3.5

Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på redusert trappeform. Denne matrisen er entydig.

Et likningssystem har en entydig løsning for alle valg av høyresider $\vec{b}$ hvis og bare hvis den reduserte trappeformen til matrisen er identitetsmatrisen.

(Hvis vi har pivotelementer i alle rader/søyler: Da står pivotelementene på diagonalen, og da blir alltid den reduserte trappeformen lik identitetsmatrisen)

4.4 Matriselikninger: Likninger på formen $A\vec{x} = \vec{b}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

svarer til

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Hvis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er søylevektorer i $\mathbb{R}^m$, så skriver vi også $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Vi skriver $B = (A, \vec{b})$ for den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Setning 4.4.1: (omformulering av setn. 4.2.8)

vi har en av følgende:

(i) ingen løsninger: Siste søyle i trappeformen til $(A, \vec{b})$ er pivot.

eller

(ii) en løsning: alle andre søyler i trappeformen til $(A, \vec{b})$ er pivotsøyler

(iii) uendelig mange løsninger: en annen søyle —"— er ikke en pivotsøyle.

setn. 4.4.3

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning for alle høyresider $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle radene i trappeformen til A har pivotelementer.

entydig: alle rader/søyler har pivotelementer.

Setning 4.4.5: Anta at $\vec{x}_p$ løser $A\vec{x}=\vec{b}$ $(A\vec{x}_p=\vec{b})$

Da er alle andre løsninger $\vec{x}$ av $A\vec{x}=\vec{b}$

på formen $\vec{x}=\vec{x}_p+\vec{x}_h$, der $A\vec{x}_h=\vec{0}$

Bevis: anta $\vec{x}=\vec{x}_p+\vec{x}_h$, der $A\vec{x}_p=\vec{b}$, $A\vec{x}_h=\vec{0}$

Da er $A\vec{x}=A(\vec{x}_p+\vec{x}_h)=A\vec{x}_p+A\vec{x}_h=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x}$ er også en løsning.

Omvendt: hvis $A\vec{x}=\vec{b}$ så kan vi skrive $\vec{x}=\vec{x}_p+\underbrace{\vec{x}-\vec{x}_p}_{\vec{x}_h}$

Da er $A(\vec{x}-\vec{x}_p)=A\vec{x}-A\vec{x}_p=\vec{b}-\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{x}_h=\vec{x}-x_p$ løser

den homogene likningen, og $\vec{x}=\vec{x}_p+\vec{x}_h$.