MAT1110: Obligatorisk oppgave 2, V-2015
Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Vi har

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \end{pmatrix} = 8\mathbf{v}_1 \,,$$

så $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor med egenverdi 8. Tilsvarende er

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix} = (-5)\mathbf{v}_2 \,,$$

så $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor med egenverdi -5.

b) Vi har

$$A(c\mathbf{v}) = cA(\mathbf{v}) = c(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v})$$

som viser at $c\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ.

c) For å finne egenverdiene og egenvektorene, kjører vi:

```
>> A=[4 6;6 -1];
>> [U,V]=eig(A)

U =

    0.5547   -0.8321
   -0.8321   -0.5547


V =

    -5      0
     0      8
```

Vi ser at egenverdiene -5 og 8 er de samme som vi fant ovenfor. Egenvektorene er vanskeligere å kjenne igjen, men skalere vi dem vi fant i punkt a) slik at de får lengde 1, ser vi at

$$\frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{13}} \approx \begin{pmatrix} 0.8321 \\ 0.5547 \end{pmatrix}$$

og

$$\frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{13}} \approx \begin{pmatrix} 0.5547 \\ -0.8321 \end{pmatrix}$$

som stemmer godt.

d) Vi kjører

```
>> A=[2 -1 3;-1 -2 1;3 1 -2];
>> [U,V]=eig(A)

U =

    0.4317    0.1706   -0.8857
    0.4973   -0.8643    0.0759
   -0.7526   -0.4732   -0.4579


V =

   -4.3816         0         0
         0   -1.2551         0
         0         0    3.6367
```

som gir egenverdier $\lambda_1 = -4.3816$, $\lambda_2 = -1.2551$, $\lambda_3 = 3.6367$ og tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.4317 \\ 0.4973 \\ -0.7526 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.1706 \\ -0.8643 \\ -0.4732 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -0.8857 \\ 0.0759 \\ -0.4579 \end{pmatrix}$$

Kommandoen `>> rref(U)` gir identitetsmatrisen, så egenvektorene danner (i hvert fall i følge MATLAB!) en basis. Det viser seg at når en $n \times n$-matrise har n forskjellige egenverdier, så finnes det alltid en basis av egenvektorer, én for hver egenverdi (setning 4.10.4 i læreboken).

e) Vi kjører

```
>> A=[4 0 1;2 3 2;-1 0 2];


>> [U,V]=eig(A)

U =

         0    0.6708   -0.4802
    1.0000   -0.3162   -0.7340
         0   -0.6708    0.4802


V =

     3     0     0
     0     3     0
     0     0     3
```

MATLAB finner altså tre egenvektorer med egenverdi 3. Kjører vi `>> rref(U)`, får vi

```
ans =

    1.0000         0   -0.9604
         0    1.0000   -0.7158
         0         0         0
```

som viser at egenvektorene *ikke* danner en basis (men de to første er lineært uavhengige). Dette gjenspeiler at når noen egenverdier er like, behøver vi ikke ha en basis av egenvektorer (se avsnitt 4.10.1 i læreboken).

f) Vi kjører

```
>> A=[3 1 0 0;-1 1 0 0;0 0 1 4;0 0 1 4];

>> [U,V]=eig(sym(A))

U =

[  0, 0, -1]
[  0, 0,  1]
[ -4, 1,  0]
[  1, 1,  0]


V =

[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 5, 0, 0]
[ 0, 0, 2, 0]
[ 0, 0, 0, 2]
```

Dette viser at A har egenverdiene 0, 5 og 2, den siste med multiplisitet 2. Den første søylen i U er en egenvektor med egenverdi 0, den andre søylen er en egenvektor med egenverdi 5, den tredje en egenvektor med egenverdi 2. Siden det bare er tre egenvektorer, utgjør de ikke en basis for $\mathbb{R}^4$.

g) Vi kjører

```
>> [U,V]=eig(A)

U =

    0.7071   -0.7071         0         0
   -0.7071    0.7071         0         0
```

```
         0         0   -0.9701   -0.7071
         0         0    0.2425   -0.7071


V =

    2.0000         0         0         0
         0    2.0000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0    5.0000
```

som gir de samme egenverdiene som ovenfor. Kjører vi nå `>> rref(U)`, får vi identitetsmatrisen I_4 som tyder på at egenvektorene utgjør en basis. Dette er mystiske, både ut ifra det vi fikk i punktet ovenfor og ut ifra inspeksjon av U – bortsett fra fortegnet, ser de to første søylene like ut, og kan ikke være lineært uavhengige.

Det som skjer her, er at de numeriske metodene ikke er nøyaktige nok, og at MATLAB derfor tror at de to første søylene i U er lineært uavhengige. Går vi over til langt format, ser vi dette:

```
>> format long
>> U

U =

   0.707106788637128  -0.707106773735967                   0                   0
  -0.707106773735967   0.707106788637128                   0                   0
                   0                   0  -0.970142500145332  -0.707106781186547
                   0                   0   0.242535625036333  -0.707106781186547
```

Dette betyr at vi må være litt forsiktige når vi bruker MATLAB til å sjekke lineær uavhengighet.

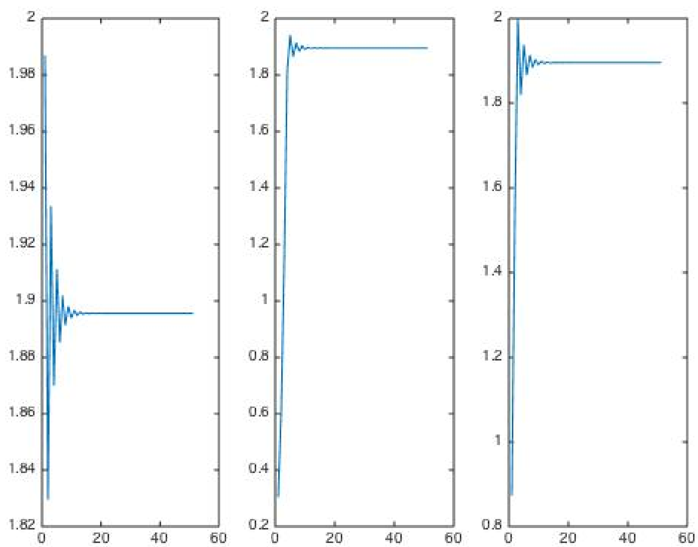
Oppgave 2: a) Vi lager en m-fil:

```
function [ x ] = siniter( a,x,N )
x(1)=x;
for n=1:N;
    x(n+1)=a*sin(x(n));
end
end
```

b) Vi kjører (subplot-kommandoene er ikke nødvendige, de er bare med for ikke å få for mange figurer):

```
>> x=siniter(2,pi*rand,50);
>> subplot(1,3,1)
>> plot(x)
>> x=siniter(2,pi*rand,50);
>> subplot(1,3,2)
>> plot(x)
>> x=siniter(2,pi*rand,50);
>> subplot(1,3,3)
>> plot(x)
```

Resultatet blir:

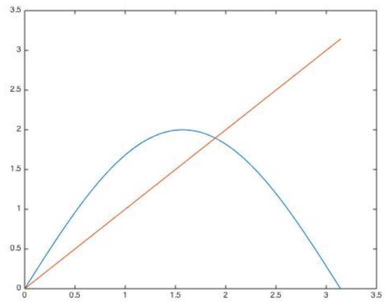


Siden startpunktet velges tilfeldig, vil dine grafer se litt annerledes ut. Det som er felles for alle (med mindre du greier å få valgt $x = 0$ eller $x = \pi$), er at følgen konvergerer mot en verdi som er omtrent 1.895.

c) Kommandoene

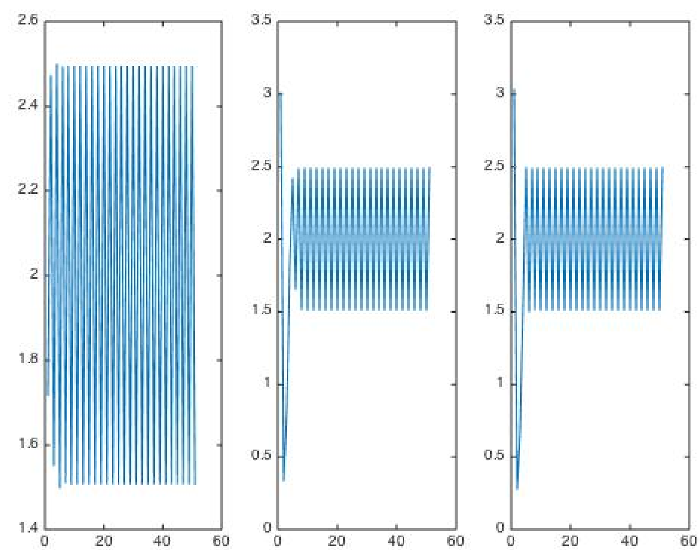
```
>> x=linspace(0,pi,100);
>> y=2*sin(x);
>> plot(x,y)
>> hold on
>> plot(x,x)
```

gir figuren



Kurvene skjærer hverandre i et punkt tilnærmet lik 1.895. Dette punktet er et *tiltrekkende fikspunkt* for funksjonen (dette betyr at $f(x) = x$ og at alle "baner" $\{x_n\}$ som starter nær x, konvergerer mot x – se avsnitt 5.4 i læreboken for nærmere drøfting).

d) Vi kjører akkurat samme kommandosekvens som i punkt b), men med $a = 2.5$ istedenfor $a = 2$. Figuren nedenfor viser resultatet av mine kjøringer:



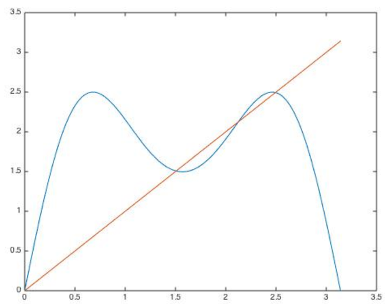
Vi ser at uansett starttilstand, få vi etter hvert en oscillasjon mellom punkter nær henholdsvis 1.506 og 2.495. Vi nærmer oss en *periodisk bane med lengde 2*.

e) Vi plotter $g(x)$ gjennom kommandoene

```
>> x=linspace(0,pi,100);
>> y=2.5*sin(2.5*sin(x));
>> plot(x,y)
```

```
>> hold on
>> plot(x,x)
```

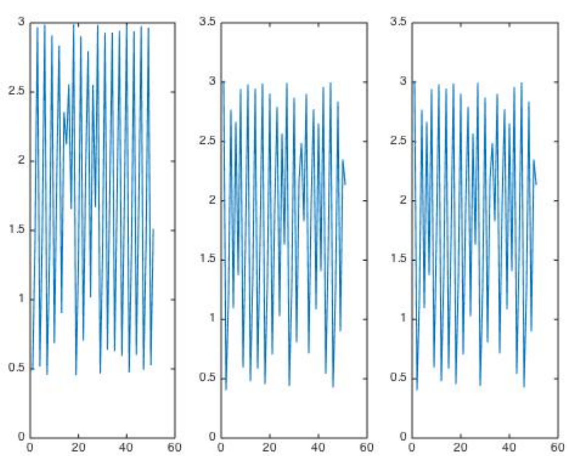
og får resultatet.



Vi ser at g har *to* tiltrekkende fikspunkter nær henholdsvis 1.506 og 2.495. I tillegg har g et tredje fikspunkt nær 2.13, men det er frastøtende og merkes ikke i iterasjonen. Dette tredje fikspunktet er også et (frastøtende) fikspunkt for f (at x er et frastøtende fikspunkt for f, betyr at $f(x) = x$, men at alle "baner" $\{x_n\}$ som starter nær x, beveger seg bort fra x).

Når vi kjører g (dvs. to trinn av f om gangen), vil følgen nærme seg ett av fikspunktene 1.506 og 2.495. Det viser seg at odde iterasjoner av f nærmer seg det ene fikspunktet og like iterasjoner det andre (men hvilket som er hvilket, avhenger av startverdien).

f) Vi gjør de samme kjøringene som i g), men med $a = 3$ istedenfor $a = 2.5$. Mine resultater ble:



Resultatene er nå så kompliserte at det er vanskelig å se et mønster – vi nærmer oss *kaotisk* oppførsel.