MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-12

Innleveringsfrist: *Torsdag 23. februar, kl.14.30, i 7. etasje Niels Henrik Abels hus. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Se forøvrig*

http://www.mn.uio.no/math/studier/obligerv12.html

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk forside og husk å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%.*

Alle delspørsmål (punktene a), b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha tastet inn alle programmene og selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringene. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Det er anledning til å bruke Python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende Python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med Python-spørsmål.

Oppgave: I denne oppgaven skal vi se på vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 2y \\ x + y^3 \end{pmatrix}$$

Vi skriver $u = x^3 - 2y$ og $v = x + y^3$, slik at

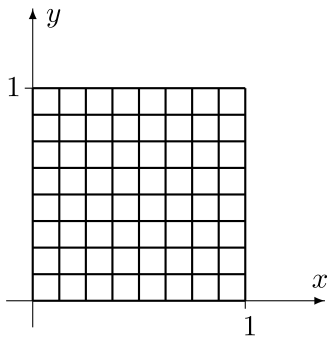
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x,y)$$

a) Regn ut Jacobi-matrisen $\mathbf{F}'(x, y)$.

b) Vis at lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ til $\mathbf{F}$ i punktet $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er gitt ved

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x - 2y - \frac{1}{4} \\ x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

På figuren nedenfor er enhetskvadratet delt opp i 8-ganger-8 like store ruter. Vi kaller dette rutemønsteret for S_8. Det tilsvarende mønstret vi får ved å dele opp i K-ganger-K ruter, kaller vi S_K. Når vi bruker $\mathbf{F}$ på punktene i S_K, fremkommer det et (krumt) rutenett $\mathbf{F}(S_K)$ i (u, v)-planet.



c) Programmet nedenfor tegner $\mathbf{F}(S_K)$. Forklar hvordan det fungerer, og bruk det til å tegne $\mathbf{F}(S_8)$.

```
function [u,v,w,z] = Oblig1(K)
%  Parameteren a styrer hvilken vannrett og loddrett linje man
%  tegner bildet av. Variablene u og v beskriver bildet av de
%  loddrette linjene, mens variablene w og z beskriver bildet
%  av de vannrette linjene.
for m=1:K+1
    a=(m-1)/K;
    for n=1:1001
        t(n)=(n-1)*0.001;
        u(n)=a^3-2*t(n);
        v(n)=a+t(n)^3;
        w(n)=t(n)^3-2*a;
        z(n)=t(n)+a^3;
    end
    plot(u,v)
    axis('equal')
    hold on
    plot(w,z,'r')
end
hold off
end
```

d) Bruk MATLAB til å tegne $\mathbf{F}(S_K)$ for $K = 2, 10, 40, 100$. I hvert tilfelle skal du zoome inn på punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ slik at du får et bildeutsnitt som viser de fire rutene med hjørner i dette punktet og ikke så mye annet. Print figurene du får, og sammenlign utseendet til rutene for de forskjellige K-verdiene. (Det kan være lurt å bruke kommandoen `subplot(m,n,p)` for å slippe å skrive ut for mange ganger).

e) Modifiser progammet ovenfor slik at det tegner $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_K)$ istedenfor $\mathbf{F}(S_K)$. Bruk svart farge (kode 'k') på denne figuren. Vis resultatet for $K = 8$. Tegn $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_8)$ og $\mathbf{F}(S_8)$ i samme figur.

f) Tegn $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(S_K)$ og $\mathbf{F}(S_K)$ i samme figur for $K = 2, 10, 40, 100$. I hvert tilfelle zoom inn på punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ slik at du får et bildeutsnitt som viser rutene med hjørner i dette punktet og ikke så mye annet. Print ut og kommenter det du ser.

g) Anslå arealet til de fire rutene i $\mathbf{F}(S_{100})$ som har hjørner i punktet $\mathbf{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

OBS: Du behøver ikke skrive ut figurene i farger. Det er nok at du markerer hvilke kurver som har de forskjellige fargene.

LYKKE TIL!