Eksamen 2015

(1) Stasjonære punkter: $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, dvs. alle de partiellderiverte er null i et stasjonært punkt.

a) $f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$

$\nabla f(x,y) = (4xy + 2y,\ 2x^2 + 2x + 2y) = (0,0)$

$\text{I} \quad 4xy + 2y = 0 \iff y(2x+1) = 0$

$\text{II} \quad 2x^2 + 2x + 2y = 0 \iff x^2 + x + y = 0$

i) $2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\text{II}: \quad (-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2}) + y = 0$

$y = \frac{1}{4}$

$\left.\right\} \quad (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4})$

ii) $y = 0$

$\text{II} \quad x^2 + x + 0 = 0$

$x(x+1) = 0$

$x = 0 \lor x = -1$

$\left.\right\} \quad (0,0)$ og $(-1,0)$

b) Annenderiverttesten: Hessematrisen $Hf(x) = (\nabla f)'(x) \overset{\text{2-dim}}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

i) Hvis $D > 0$ og $A > 0$
$\Rightarrow x$ lokalt minimum.

ii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$
$\Rightarrow x$ lokalt max

iii) Hvis $D < 0$
$\Rightarrow x$ sadelpunkt.

iv) Dersom $D = 0$, kan vi ikke bestemme noe.

$$Hf(x) = ((4xy + 2y,\ 2x^2 + 2x + 2y))'$$
$$= \begin{pmatrix} 4y & 4x+2 \\ 4x+2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tre punkter:

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$: $D = \begin{vmatrix} 4 \cdot \frac{1}{4} & 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \\ 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Lokalt min

$(0,0)$: $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

sadelpunkt

$(-1,0)$: $D = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

sadelpunkt

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n 2^n} \rightarrow a_n = \frac{(x-2)^n}{n 2^n}$

Forholdstesten: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\cancel{(x-2)^{n+1}}}{(n+1)\,\cancel{2^{n+1}}}}{\frac{\cancel{(x-2)^n}}{n\,\cancel{2^n}}} = \frac{n(x-2)}{2(n+1)}$

$= \frac{\frac{1}{n}\cdot n(x-2)}{\frac{1}{n}\cdot 2(n+1)} = \frac{(x-2)}{2(1+\frac{1}{n})}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}|x-2| < 1$

krever for konvergens

$\Rightarrow \quad x \in (0,4)$

Må teste grensene;

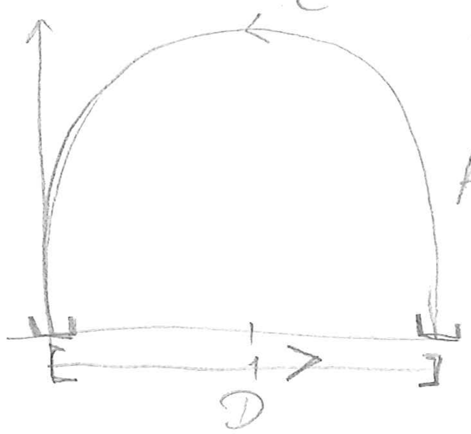
$x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{2^n}}{n \cancel{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

alternerende der $|a_n| \searrow 0 \Rightarrow$ konvergent

$x=4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ divergerer

(integraltesten)

③ Korollar til Greens teorem: $\mathcal{K}$ enkel, lukket kurve (mot klokka) med stykkevis glatt parametrisering $\vec{r}$, der R er området avgrenset av $\mathcal{K}$. Da er



$$\text{Areal}(R) = \int_{\mathcal{K}} x\,dy$$

(Bruk Greens teorem på $F(x,y) = (0,x)$)

a) (Kap. 3)

Derfor for $K = C$ "+" D har vi

$$A = \int_K x\,dy = \int_C x\,dy + \int_D x\,dy$$

b) I) parametrisering for C: $\vec{r}_1(t) = (1+\cos t,\ t(\pi - t))$, $t \in [0,\pi]$

II) parametrisering for D: $\vec{r}_2(t) = (t, 0)$, $t \in [0,2]$

II) $x = t$, $y = 0 \Rightarrow dy = 0 \cdot dt \Rightarrow \int_D x\,dy = \int_0^2 t \cdot 0\,dt = \underline{0}$

I) $x = 1+\cos t$, $y = t(\pi - t) \Rightarrow dy = (\pi - 2t)dt \Rightarrow \int_C x\,dy = \int_0^\pi (1+\cos t)(\pi - 2t)\,dt$

$$A = \int_0^\pi \underbrace{(1+\cos t)}_{v'}\underbrace{(\pi - 2t)}_{u}\,dt \overset{\text{delvis}}{=} \Big[\underbrace{(t+\sin t)}_{v}\underbrace{(\pi - 2t)}_{u}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(t+\sin t)}_{v}\underbrace{(-2)}_{u'}\,dt$$

$$= -\pi^2 + 2\Big[\tfrac{1}{2}t^2 - \cos t\Big]_0^\pi$$

$$= -\pi^2 + \pi^2 + 4 = \underline{\underline{4}}$$

4 a) 2 flater: I) $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$

II) $z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$

Når møtes disse flatene? (for hvilke (x,y)-verdier er z-verdien [høyden] like?)

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

$$2x^2 + 4x (+\ 2\ ) + 2y^2 = 6(+\ 2\ )$$

$$2(x^2 + 2x + 1) + 2y^2 = 8$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

$\Rightarrow$ Flatene skjærer hverandre over sirkelen med sentrum i $(-1,0)$ og radius. Inni denne disken vil flaten (II) ligge over (I) [Husk $y = x^2$ $\cup$, $y = -x^2$ $\cap$]

$$\Rightarrow V = \iint_D [z]_{z = x^2 + 2x + y^2 - 4y}^{z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y} \, dx\,dy = 2\iint_D (3 - x^2 - 2x - y^2)\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 2^2\}$$

b) $V = 2\iint_D 4 - \underbrace{[(x+1)^2 + y^2]}_{r^2} \, dx\,dy$

Polar: $x + 1 = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$= 2\int_0^2\int_0^{2\pi} (4 - r^2) r \, d\theta\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^2 4r - r^3 \, dr = \ldots = \underline{16\pi}$$

⑤ a) $A_n\vec{v}_1 = n\vec{v}_1$ åpenbart, n er egenverdi

La $\vec{u} \neq \vec{0}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 0$. ~~$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$~~

~~Fra spektralteoremet har vi at det finnes en ortogonal basis av egenvektorer til A_n som inneholder $\vec{v}_1$. $\vec{u}$ må kunne skrives som en lineærkombinasjon av $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$.~~

Altså: $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = u_1 + \dots + u_n = 0$

Da vil:
$$A_n\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 + \dots + u_n \\ \vdots \\ u_1 + \dots + u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = 0\vec{u}$$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ egenvektor med egenverdi 0.

Fra spektralteoremet kan vi finne en ortogonal basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ av egenvektorer til A_n. Fra det over vil $A_n\vec{v}_2 = A_n\vec{v}_3 = \dots = A_n\vec{v}_n = 0$

$\Rightarrow$ 2 egenverdier: 0 med multiplisitet $(n-1)$ og n med m. 1.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Skal konstruere: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 0$

3 krav: $v_2^{(1)} + v_2^{(2)} + v_2^{(3)} = 0$, $v_3^{(1)} + v_3^{(2)} + v_3^{(3)} = 0$

og $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$

Strategi: prøve oss frem. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ åpenbar

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

c) La $A_n\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow A_n(a)\vec{u} = [(a-1)I_n + A_n]\vec{u}$

$$= (a-1)\vec{u} + A_n\vec{u}$$

$$= (a-1)\vec{u} + \lambda\vec{u}$$

$$= [(a-1)+\lambda]\vec{u}$$

λ kan være n eller 0, så $A_n(a)$ har egenverdier

$(a-1)+0 = \underline{a-1}$ og $\underline{(a-1)+n}$

$\uparrow$ mult. $(n-1)$ $\uparrow$ mult. 1