Oppgaver - Uke 1

Oppgave 1

a) Hvis $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ er et heltallspolynom, og r er et heltall slik at $P(r) = 0$, så må r dele a_0. (Hvorfor er det slik?) Bruk dette til å finne faktoriseringen til $x^3 - 8x^2 + 33x - 42$.

b) Videre, dersom $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ er et rasjonalt tall slik at $P(r) = 0$, må p dele a_0 og q dele a_n. (Hvorfor er det slik?) Bruk dette til å finne faktoriseringen til $2x^3 + x^2 + x - 1$.

c) Kan $x^3 + x + 1$ faktoriseres til et produkt av to polynomer?

Oppgave 2

Løs likningen $x^3 - 6x + 9 = 0$ med Cardano's metode.

Oppgave 3

Gitt to reelle tall x, y slik at $x + y = 14$ og $xy = 3$. Hva er da $x^3 + y^3$?
Hint: Tenk symmetriske polynomer her.

Oppgave 4 (Litt vanskeligere)

Gitt at $a < b$ og $c < d$, løs likningsystemet

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + d^2 \\ a + b + c + d &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 5 (For de tøffe)

Finnes et polynom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ slik at $P(n)$ er et primtall for alle heltall n?