Løsningsforslag: MAT 1110 Obligatorisk oppgave 2, V-12

Oppgave 1

a) Siden f har en annenderivert, må både funksjonen selv og dens deriverte være kontinuerlige, og det sikrer at vi i regningene nedenfor har $\frac{0}{0}$-uttrykk:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2} = f''(a)$$

der vi i den siste overgangen har brukt at den annenderiverte er kontinuerlig.

b) Hvis vi erstatter $x''(t)$ og $y''(t)$ med henholdsvis $\frac{x(t+h)-2x(t)+x(t-h)}{h^2}$ og $\frac{y(t+h)-2y(t)+y(t-h)}{h^2}$ i (1) og (2), og også erstatter likhetstegnet med $\approx$ for å markere den lille feilen vi gjør, får vi ligningene

$$\frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} \approx -18x(t) + 9y(t)$$
$$\frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} \approx 9x(t) - 18y(t) + 27$$

Ganger vi med h^2 og omgrupperer leddene, får vi (med en feil som er liten sammenlignet med h^2)

$$x(t+h) \approx 2x(t) - x(t-h) - 18x(t)h^2 + 9y(t)h^2$$
$$y(t+h) \approx 2y(t) - y(t-h) + 9x(t)h^2 - 18y(t)h^2 + 27h^2$$

Dette betyr at x og y "nesten" tilfredsstiller differensligningen i oppgaveteksten.

Vi må også se på initialbetingelsene. At $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$ tilsvarer åpenbart at $X(1) = 1$ og $Y(1) = 2$. Bruker vi tilnærmingene

$$2 = x'(0) \approx \frac{x(h) - x(0)}{h}$$

$$-1 = y'(0) \approx \frac{y(h) - y(0)}{h}$$

ser vi at $x(h) \approx x(0) + 2h = 1 + 2h$ og $y(h) \approx y(0) - h = 2 - h$ som stemmer godt med initialverdiene $X(2) = 1 + 2h$ og $Y(2) = 2 - h$ til differensligningene.

Løsningene x og y til systemet (1) og (2) er derfor nær ved å tilfredsstille både differensligningene og initialbetingelsene, og det er derfor naturlig å tro at løsningene X og Y til differensligningene er gode tilnærminger til x og y.

c) Programmet kan f.eks. se slik ut.

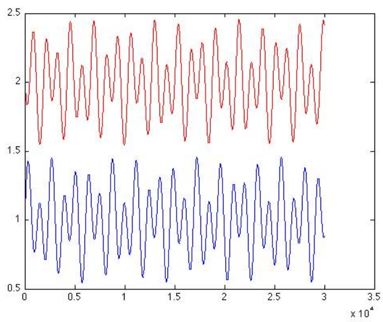
```
function[X,Y] = Oblig2(N)
X=[1,1+2*10^(-3)];
Y=[2,2-10^(-3)];
for n=2:N*10^3
    X(n+1)=2*X(n)-X(n-1)-18*X(n)*10^(-6)+9*Y(n)*10^(-6);
    Y(n+1)=2*Y(n)-Y(n-1)-18*Y(n)*10^(-6)+9*X(n)*10^(-6)+27*10^(-6);
end
```

De to første linjene angir initialverdiene, mens løkken beregner resten av løsningene rekursivt.

d) Kjører vi kommandosekvensen

```
[X,Y]=Oblig2(30);
plot(X)
hold on
plot(Y,'r')
```

får vi figuren nedenfor med Y (øverst) i rødt og X i svart.



Vi har allerede sett at løsningene av differensligningssystemet er gode tilnærmelser til løsningene av det opprinnelige systemet (1)-(2), og siden skrittlengden er 10^{-3}, passer antall iterasjoner med intervallet $[0, 30]$.

Oppgave 2

a) Ligningen får vi ved å sette inn:

$$\mathbf{x}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x(t) + 9y(t) \\ 9x(t) - 18y(t) + 27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}$$

og initialverdien følger direkte fra definisjonen av $\mathbf{x}(t)$.

b) Dette er bare å gange ut:

$$A\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix} = -9\mathbf{a}$$

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} = -27\mathbf{b}$$

c) En basis er en samling vektorer som både er lineært uavhengig og spenner ut hele rommet. Siden matrisen $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ har en trappeform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ som har pivotelementer i alle søyler og alle rader, er begge disse betingelsene oppfylt.

For å skrive vektorene i oppgaven som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, må vi løse ligningene $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{d}$, der $\mathbf{d}$ er hhv. $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Disse ligningene kan vi løse som et simultant ligningssett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 27 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 27 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{27}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Dette betyr at $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{27}{2}\mathbf{a} - \frac{27}{2}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ og $\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b}$.

d) Bruker vi at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er egenvektorer og at $\mathbf{c} = \frac{27}{2}\mathbf{a} - \frac{27}{2}\mathbf{b}$, får vi

$$u''(t)\mathbf{a} + v''(t)\mathbf{b} = \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c} = A(u(t)\mathbf{a} + v(t)\mathbf{b}) + \mathbf{c} =$$

$$= u(t)A\mathbf{a} + v(t)A\mathbf{b} + \mathbf{c} = -9u(t)\mathbf{a} - 27v(t)\mathbf{b} + \frac{27}{2}\mathbf{a} - \frac{27}{2}\mathbf{b} =$$

$$= \left(-9u(t) + \frac{27}{2}\right)\mathbf{a} + \left(-27v(t) - \frac{27}{2}\right)\mathbf{b}$$

Siden $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er lineært uavhengige, kan

$$u''(t)\mathbf{a} + v''(t)\mathbf{b}$$

og

$$\left(-9u(t) + \frac{27}{2}\right)\mathbf{a} + \left(-27v(t) - \frac{27}{2}\right)\mathbf{b}$$

bare være like dersom

$$u''(t) = -9u(t) + \frac{27}{2} \quad \text{og} \quad v''(t) = -27v(t) - \frac{27}{2}$$

og dermed har vi ligningene våre.

Vi må også se på intialbetingelsene. Siden vi både har

$$\mathbf{x}(0) = u(0)\mathbf{a} + v(0)\mathbf{b}$$

og (ifølge punkt c))

$$\mathbf{x}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

må $u(0) = \frac{3}{2}$ og $v(0) = -\frac{1}{2}$. Tilsvarende har vi at siden

$$\mathbf{x}'(0) = u'(0)\mathbf{a} + v'(0)\mathbf{b}$$

og

$$\mathbf{x}'(0) = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b},$$

så må $u'(0) = \frac{1}{2}$ og $v'(0) = \frac{3}{2}$.

e) Ifølge formelen i oppgaveteksten, må u være på formen

$$u(t) = \frac{\frac{27}{2}}{9} + C\sin(\sqrt{9}t) + D\cos(\sqrt{9}t) = \frac{3}{2} + C\sin(3t) + D\cos(3t)$$

Dette gir

$$u'(t) = 3C\cos(3t) - 3D\sin(3t)$$

Initialbetingelsene gir følgende ligninger for C og D:

$$\frac{3}{2} = u(0) = \frac{3}{2} + 3D$$

$$\frac{1}{2} = u'(0) = 3C$$

Dette betyr at $D = 0$, $C = \frac{1}{6}$ og

$$u(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sin(3x)$$

Helt tilsvarende regninger for v gir oss den generelle løsningen

$$v(t) = -\frac{1}{2} + E\sin(3\sqrt{3}t) + F\cos(3\sqrt{3}t)$$

med initialbetingelsene

$$-\frac{1}{2} = v(0) = -\frac{1}{2} + F$$

$$\frac{3}{2} = v'(0) = 3\sqrt{3}E,$$

og vi får

$$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(3\sqrt{3}t)$$

f) Per definisjon er

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u(t)\mathbf{a} + v(t)\mathbf{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ u(t) - v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(3\sqrt{3}t) \\ 2 + \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(3\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

Altså er

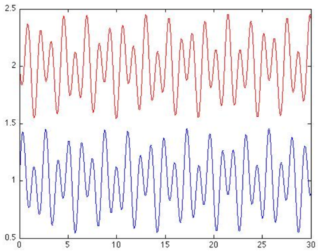
$$x(t) = 1 + \frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(3\sqrt{3}t)$$

$$y(t) = 2 + \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(3\sqrt{3}t)$$

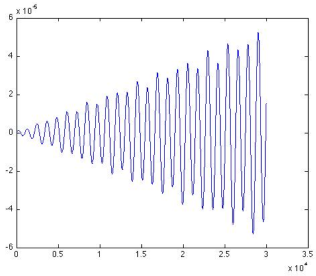
Vi kan plotte disse funksjonene i samme koordinatsystem ved å gi MATLAB-kommandoene:

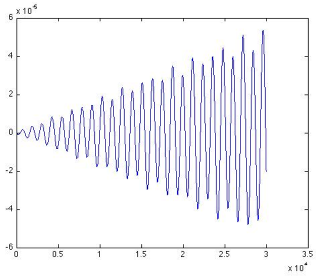
```
t=0:10^(-3):30;
x=1+(1/6)*sin(3*t)+(sqrt(3)/6)*sin(3*sqrt(3)*t);
y=2+(1/6)*sin(3*t)-(sqrt(3)/6)*sin(3*sqrt(3)*t);
plot(t,x)
hold on
plot(t,y,'r')
```

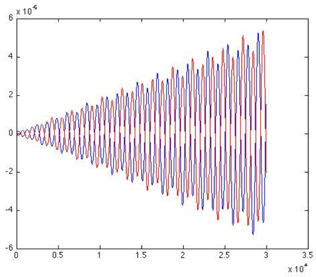
Resultatet ser du nedenfor. (*Kommentar:* Jeg har valgt oppdelingen av t-aksen slik at den passer med skrittlengden i oppgave 1. Det er uten betydning her, men blir nyttig i oppgave 3.)



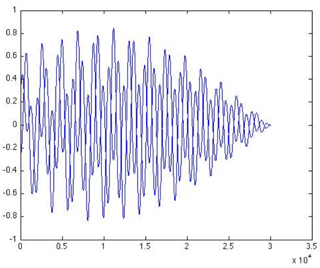
Oppgave 3: Figurene i 1d) og 2f) fremstiller henholdsvis X, Y og x, y, men tidsaksen er forskjellig. Siden vi har valgt samme skrittinndeling (10^{-3}) og intervall ($[0, 30]$) i begge tilfeller, har alle disse vektorene samme antall komponenter, og det går greit å trekke dem fra hverandre. Vi får derfor frem differansene rett og slett ved å skrive `plot(X-x)` og `plot(Y-y)`. Resultatet ser du nedenfor (den første figuren viser $X - x$, den andre $Y - y$ og den tredje viser begge grafene med $Y - y$ i rødt). I alle tilfeller er "feilene" av størrelsesorden 10^{-5}.







Kommentar: Mange har i oppgave 3 fått en figur som ser noe slikt ut:



Dette skyldes sannsynligvis at de har latt den analytiske løsningen løpe over intervallet $[1, 30]$ istedenfor $[0, 30]$, men i mange tilfeller er det umulig å se fra besvarelsen hva som egentlig er gjort. Dette er dårlig føring; det skal fremgå fra besvarelsen hva som faktisk er tastet inn slik at eventuelle feil kan oppdages og rettes. Slike krav gjelder ikke bare på obliger, men generelt i arbeidslivet — faglig arbeid skal dokumenteres på en måte som gjør at resultatene kan etterprøves. Det er bedre å legge ved for mye programkode enn for lite!