Hvordan beregne trippelintegraler

Gitt et integral

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{over et område } R \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. Få oversikt over integrasjonsområdet R. Tegn figur!

2. Finn et koordinatsystem u, v, w slik at du kan beskrive R ved

$$u \in [a,b], \quad v \in [c(u), d(u)], \quad w \in [r(u,v), s(u,v)]$$

(evt. åpne intervaller), med c, d, r og s kontinuerlige funksjoner.
Går ikke dette, så prøv å dele R opp.

3. Regn ut Jacobideterminanten

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad \text{(uttrykt ved } u, v \text{ og } w\text{)}$$

4. Trippelintegralet er nå lik

$$\int_a^b \left[\int_{c(u)}^{d(u)} \left[\int_{r(u,v)}^{s(u,v)} f(\vec{T}(u,v,w)) \cdot |J| \, dw \right] dv \right] du$$

der $f(\vec{T}(u,v,w))$ betyr at (u,v,w)-uttrykkene skal settes inn for x, y og z i funksjonsuttrykket for f.

Definisjon (Volum, masse og massemiddelpunkt i rommet)

La $R \subseteq \mathbb{R}^3$ være en begrenset mengde.

- Volumet til R er

$$\iiint_R 1 \, dx \, dy \, dz$$

- Hvis $f(x,y,z)$ er kontinuerlig og positiv på R, og vi tolker $f(x,y,z)$ som massetettheten til R, så er massen til R gitt ved

$$\text{Masse}(R) = \iiint_R f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

- Massemiddelpunktet til R har koordinater $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Masse}(R)} \iiint_R x \cdot f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Masse}(R)} \iiint_R y \cdot f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{Massen}(R)} \iiint_R z \cdot f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

Hvorfor kan trippelintegraler regnes ut ved metoden vår?

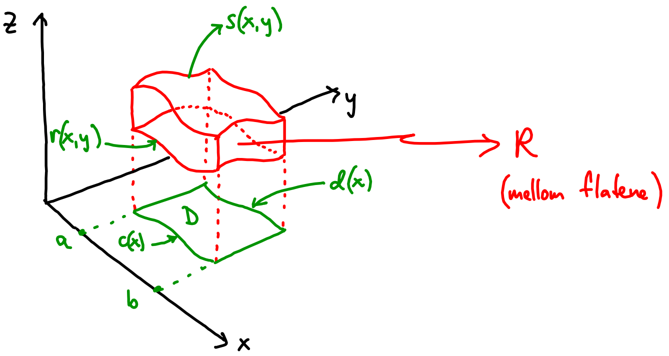
Vi tar utgangspunkt i begrepet volum. Anta at vi skal finne volumet V av området $R \subseteq \mathbb{R}^3$ beskrevet ved

$$z \in [r(x,y), s(x,y)] \quad \text{for} \quad (x,y) \in D,$$

der D er et område i xy-planet gitt ved

$$\begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c(x), d(x)] \end{cases}$$

Figur:



Metoden gir

$$V = \iiint_R 1 \, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} \left[\int_{r(x,y)}^{s(x,y)} 1 \, dz \right] dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} [s(x,y) - r(x,y)] \, dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} s(x,y) \, dy \right] dx - \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} r(x,y) \, dy \right] dx$$

$$= \iint_D s(x,y) \, dx\, dy - \iint_D r(x,y) \, dx\, dy$$

$= (\text{volumet under } s(x,y)) - (\text{volumet under } r(x,y))$

$= \text{volumet mellom } s(x,y) \text{ og } r(x,y)$

$= \underline{\underline{\text{volumet av } R}}$

Metoden for beregning av trippelintegraler $\iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ for funksjoner f som ikke er konstant lik 1 kan tilbakeføres til metoden for dobbeltintegraler på tilsvarende måte. Brukes andre koordinater u, v, w enn standardkoordinatene x, y, z fungerer $|J|$ som lokal forstørrelsesfaktor.

eks. 1 Skal finne $\iiint_R 12x^2yz \, dx\, dy\, dz$

der $R \subseteq \mathbb{R}^3$ er gitt ved $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 2]$, $z \in [0, 1]$.

Løsn. $\iiint_R 12x^2yz \, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 \left[\int_0^1 12x^2yz \, dz \right] dy \right] dx$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 \left[6x^2yz^2 \right]_{z=0}^{z=1} dy \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 \left[6x^2y \cdot 1^2 - 6x^2y \cdot 0^2 \right] dy \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 6x^2y \, dy \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3x^2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3x^2 \cdot 2^2 - 3x^2 \cdot 0^2 \right] dx$$

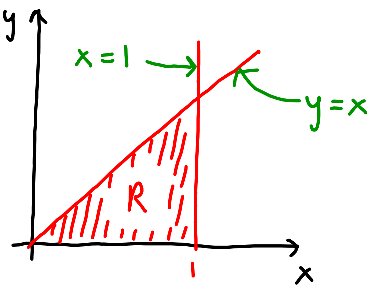
$$= \int_{-1}^{1} 12x^2 \, dx$$

$$= \left[4x^3 \right]_{-1}^{1} = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot (-1)^3 = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

eks. 2 Skal finne $\iiint\limits_R x \, dx\, dy\, dz$

der $R \subseteq \mathbb{R}^3$ er det lukkede området avgrenset av planene $z=0$, $y=0$, $y=x$ og $x=1$, samt flaten $z = xy + 1$.

Løsn.



"Gulvet" i R er planet $z=0$, altså xy-planet.
"Taket" i R er flaten $z = xy + 1$.
"Veggene" er planene $y=0$, $y=x$ og $x=1$.

Så R kan beskrives slik:

$$\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \\ z \in [0, xy+1] \end{cases}$$

Får da

$$\iiint\limits_R 1 \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left[\int_0^x \left[\int_0^{xy+1} x \, dz \right] dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x \left[xz \right]_{z=0}^{z=xy+1} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x x(xy+1)\, dy \right] dx$$

$\boxed{x(xy+1) = x^2y + x}$

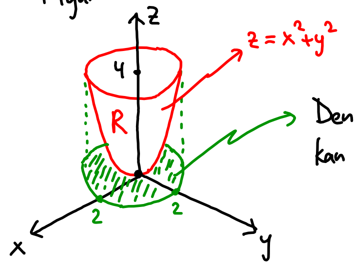
$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2 + xy \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^4 + x^2 \right] dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{10}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{13}{30}}}$$

eks. 3 Skal finne volumet av det lukkede området $R \subseteq \mathbb{R}^3$ begrenset av flaten $z = x^2+y^2$ og planet $z = 4$.

Løsn. Figur:



Den sirkulære "skyggen" av R i xy-planet kan beskrives ved

$$\begin{cases} r \in [0,2] \\ \theta \in [0,2\pi) \end{cases} \quad \text{i polarkoordinater}$$

Flaten $z = x^2+y^2$ kan skrives $z = r^2$

Bruker sylinderkoordinater r, θ, z:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Jacobideterminanten:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot \begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-r\sin\theta)\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \cos\theta\cdot(r\cos\theta) + r\sin\theta\cdot\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{r}$$

Volumet V av R blir dermed

$$V = \iiint_R 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{r^2}^{4} 1 \cdot |J| \, dz \right] d\theta \right] dr$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{r^2}^{4} 1 \cdot r \, dz \right] d\theta \right] dr$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \Big[rz \Big]_{z=r^2}^{z=4} d\theta \right] dr = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (4r - r^3)\, d\theta \right] dr$$

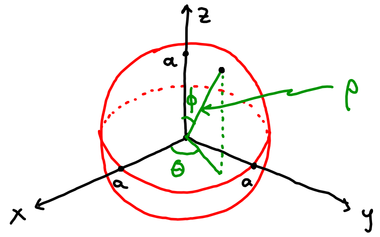
$$= \int_0^2 \Big[(4r-r^3)\cdot\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^2 2\pi(4r - r^3)\, dr$$

$$= \left[4\pi r^2 - \frac{\pi}{2} r^4 \right]_0^2 = 16\pi - \frac{\pi}{2}\cdot 16 = \underline{\underline{8\pi}}$$

eks. 4 Skal finne volumet av en kule med radius a.

Løsn. Vi plasserer kulen med sentrum i origo og bruker kulekoordinater ρ, ϕ, θ:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$



Kulen kan da beskrives ved

$$\rho \in [0,a], \quad \phi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Jacobideterminanten:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin\phi\cos\theta \cdot \begin{vmatrix} \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\rho\cos\phi\cos\theta \cdot \begin{vmatrix} \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\rho\sin\phi\sin\theta \cdot \begin{vmatrix} \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2\sin^3\phi\cos^2\theta + \rho^2\cos^2\phi\sin\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^3\phi\sin^2\theta$$

$$+\rho^2\sin\phi\cos^2\phi\sin^2\theta$$

$$= \rho^2\sin\phi\cos^2\theta\overbrace{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}^{1} + \rho^2\sin\phi\sin^2\theta\overbrace{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}^{1}$$

$$= \rho^2\sin\phi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} = \underline{\rho^2\sin\phi}$$

Så volumet av kulen er

$$V = \iiint_{\text{kulen}} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^a \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} 1\cdot\rho^2\sin\phi\,d\theta\right]d\phi\right]d\rho$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^\pi 2\pi\rho^2\sin\phi\,d\phi\right]d\rho = \int_0^a \left[-2\pi\rho^2\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\rho$$

$$= \int_0^a \left[2\pi\rho^2 - (-2\pi\rho^2\cdot 1)\right]d\rho = 4\pi\int_0^a \rho^2\,d\rho = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi a^3}}$$