Taylor's formel:

$$f(a+y) = f(a) + \nabla f(a)\cdot y + \tfrac{1}{2}(Hf(a)y)\cdot y + \varepsilon(y) \quad ; \text{ der } \frac{|\varepsilon(y)|}{|y|^2} \to 0 \text{ når } y \to 0.$$

$Hf(a)$ symmetrisk $\to$ har m ortonormale egenvektorer r_i $i = 1, \ldots, m$ basis for $\mathbb{R}^m$

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i r_i \qquad |y|^2 = y\cdot y = \sum_{i=1}^{m} c_i r_i \cdot \sum_{j=1}^{m} c_j r_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \qquad Hf(a) r_i = \lambda_i r_i$$

$$(Hf(a)y)\cdot y = \left(Hf(a)\sum_{i=1}^{m} c_i r_i\right)\cdot y = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i r_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} c_j r_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i^2$$

Anta at alle egenverdiene er > 0. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ og a stasjonært; $\nabla f(a) = 0$

Da er $(Hf(a)y)\cdot y = \sum \lambda_i c_i^2 \geq \lambda_1 \sum c_i^2 = \lambda_1 |y|^2$

$$f(a+y) = f(a) + \tfrac{1}{2}(Hf(a)y)\cdot y + \varepsilon(y) \geq f(a) + \tfrac{1}{2}\lambda_1|y|^2 + \varepsilon(y) = f(a) + \tfrac{1}{2}|y|^2\left(\lambda_1 + \frac{2\varepsilon(y)}{|y|^2}\right)$$

Vet at $\frac{\varepsilon(y)}{|y|^2} \to 0$ når $y \to 0$.

Spesielt er

$\left|\frac{2\varepsilon(y)}{|y|}\right| < \frac{\lambda_1}{2}$ for $|y| < r$

$\geq f(a) + \frac{1}{2}|y|^2 \frac{\lambda_1}{2}$ når $|y| < r$.

$\geq f(a)$ når $y < r$

$f(a)$ blir min punkt.

Tilsvarende hvis alle egenverdiene til $Hf(a)$ er < 0 så er $f(a)$ et max punkt.

Hvis a stasjonært punkt, $\nabla f(a) = 0$, og $Hf(a)$ har bare > 0 egenverdier a er lokalt min

Hvis $Hf(a)$ har bare negative egenverdier så er a lokalt max.

Hvis $Hf(a)$ har både positive og negative egenverdier så har vi et sadelpunkt.

I $\mathbb{R}^2$ $f = f(x,y)$

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$ Egenverdier λ_1, λ_2

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(H(f)) = AC - B^2 = D$$

Hvis $D < 0$ (forskjellig fortegn) $\rightarrow$ sadel.

Hvis $D > 0$ (samme fortegn), enten max eller min.

$a = (u,v)$ $\quad x \rightarrow \underbrace{f(x,v)}_{h(x) =}$ $\leftarrow$ Vanlig funksjon av 1 variabel.

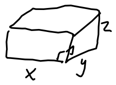
$h(x)$ har stasjonært punkt i $x = u$ $\begin{cases} \rightarrow \text{min hvis } h''(u) > 0 \\ \text{max hvis } h''(u) < 0 \end{cases}$ $\quad h''(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v) = A$

$A > 0$ min

$A < 0$ max

Husk $D = 0$, testen gir ikke svar.

<u>Eksempel:</u>



Ønsker å bygge en kasse med gitt volum M^3, og minst mulig overflate.

Sider x, y, z $\qquad M^3 = xyz \qquad x,y,z > 0$.

$$\text{areal} = 2xy + 2xz + 2yz = 2(xy + xz + yz)$$

Vil finne minimum av $f(x,y,z) = xy + xz + yz$; $z = \frac{M^3}{xy}$

$$f(x,y) = xy + x\frac{M^3}{xy} + y\frac{M^3}{xy} = xy + \frac{M^3}{y} + \frac{M^3}{x} \qquad x,y > 0$$

$$\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{M^3}{x^2},\ x - \frac{M^3}{y^2}\right)$$

For å finne stasjonære punkter, løs $\nabla f = 0$.

$$y - \frac{M^3}{x^2} = 0 \qquad x - \frac{M^3}{y^2} = 0 \qquad \Bigg| \qquad y = \frac{M^3}{x^2} \qquad x - \frac{M^3}{\left(\frac{M^3}{x^2}\right)^2} = 0$$

$$x = \frac{\cancel{M}^3}{\frac{M^{\cancel{6}3}}{x^4}} = \frac{x^4}{M^3} \qquad x > 0; \text{ deler på } x$$

$$1 = \frac{x^3}{M^3} \qquad x = M \qquad y = \frac{M^3}{M^2} = M.$$

Regner ut $Hf(M,M)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\frac{M^3}{x^3} & 1 \\ 1 & 2\frac{M^3}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$Hf(M,M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(Hf(M,M)) = 3 > 0. \quad 2 > 0 \text{ så dette blir lokalt min.}$$

<u>Merk.</u> $z = \frac{M^3}{xy}$ $\qquad z = M$, kassen ~~[illegible]~~ blir kube.

Nytt eksempel:

$f(x,y) = xy e^{x^2-y}$

Finner stasjonære punkter: $\nabla f = 0$ $\quad \nabla f(x,y) = \left(ye^{x^2-y} + 2x^2 y e^{x^2-y},\ xe^{x^2-y} - xye^{x^2-y} \right)$

$ye^{x^2-y} + 2x^2 y e^{x^2-y} = 0 = y(1+2x^2) \Rightarrow y = 0.$

$xe^{x^2-y} - xye^{x^2-y} = 0 = x(1-y) \Rightarrow x = 0.$

$\nabla f(x,y) = \left(e^{x^2-y}(y+2x^2y),\ e^{x^2-y}(x-xy) \right)$

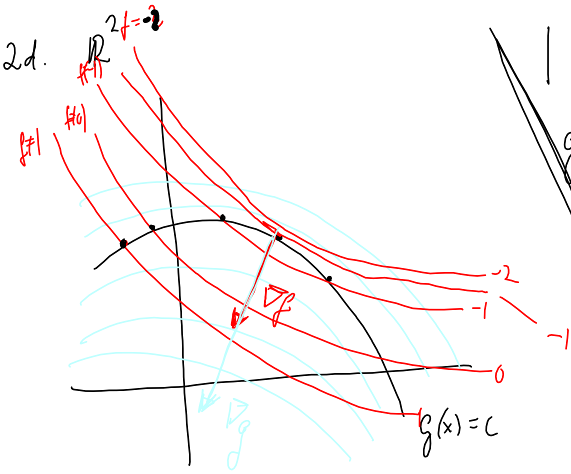
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2-y})(y+2x^2) + 4xy(e^{x^2-y}) & \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2-y})(y+2x^2y) + (1+2x^2)e^{x^2-y} \overset{h(x,y)}{=} \\ h(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2-y})(x-xy) + e^{x^2-y}(-x) \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(Hf(0,0)) = 0 - 1 = -1 < 0$$

(0,0) sadel

Situasjon: Vil minimere $f(x)$ under bitingelsen $g(x) = c$.

I 2d. $\mathbb{R}^2$



I et ekstrempunkt for f på kurven $g(x) = c$ vil ∇f og ∇g være parallelle!

Lagrange's metode

Ønsker å finne stasjonære punkter for $f(x)$ på mengden $g(x) = c$.

$x \in \mathbb{R}^n$, $g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Da kan vi løse:

$$\begin{array}{ll} n \text{ lign.} & \left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = c \end{array} \right. \\ 1 \text{ lign.} & \end{array}$$

λ Lagrange multiplikator.

n (x) $+1$ (λ) ukjente.

Eksempel

Ønsker å finne stasjonære punkter for $f(x,y) = xy$ på sirkelen $x^2+y^2=1$.

$g(x,y) = x^2+y^2 \quad f(x,y) = xy.$

$\nabla f = (y,x)$

$\nabla g = (2x,2y)$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 1 \end{cases} ; \quad \boxed{\begin{matrix} y = 2\lambda x, \; x = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}}$$

Deler: (antar $xy \neq 0$) $\frac{y}{x} = \frac{\cancel{2\lambda} x}{\cancel{2\lambda} y}$

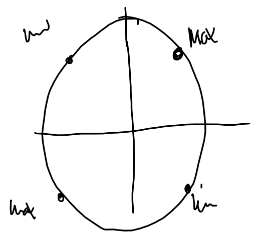
$\Rightarrow \underline{y^2 = x^2}$

$x^2+y^2 = 2x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 muligheter:

	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
f	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$\frac{1}{2}$
	max	min	min	max



<u>Kasseeksempel</u>

minimere $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ under betingelsen $\underbrace{xyz}_{g(x,y,z)} = M^3$ | $x,y,z > 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = M^3 \end{cases}$$

$\nabla f = (y+z,\ x+z,\ x+y) \qquad \nabla g = (yz,\ xz,\ xy)$

$$\left.\begin{aligned} y+z &= \lambda yz \\ x+z &= \lambda xz \\ x+y &= \lambda xy \end{aligned}\right\}$$

$\frac{y+z}{x+z} = \frac{\cancel{\lambda} yz}{\cancel{\lambda} xz} = \frac{y\cancel{z}}{x\cancel{z}} \Rightarrow (y+z)x = y(x+z)\ ;\ \cancel{xy} + xz = \cancel{xy} + yz \rightarrow \underline{x = y}$

$\frac{x+z}{x+y} = \frac{\cancel{\lambda x}z}{\cancel{\lambda x}y} \quad y(\cancel{x+z}) = z(\cancel{x+y}) \quad \underline{z = y} \qquad x = y = z.$

$M^3 = xyz = x^3 \quad \underline{x = M = y = z}$

Flere bibetingelser:

Finn stasjonære punkter for f gitt $\underline{g_1(x)=c_1,\ g_2(x)=c_2 \dots g_k(x)=c_k}$.

$x \in \mathbb{R}^n$.

Algoritme: Finn x og $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ slik at

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x) \\ g_1(x) = c_1 \\ g_2(x) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x) = c_k. \end{cases}$$

$\underline{n+k \text{ ukjente}}$ n ligh.

Typisk eksempel: minimer $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ når $\underbrace{\overset{\text{plan}}{3x+y-z=1} \text{ og } \overset{\text{plan}}{2x-y+z=5}}_{\text{linje}}$.