4.6.11

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er lin. avh siden begge søyler er pivotsøyler. De er dermed også en basis siden en basis for $\mathbb{R}^2$ alltid har to elementer.

b) $\vec{e}_1 = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ utvidet matrise $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ , $\vec{e}_2 = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$ kan løses samtidig ved å radredusere $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_1,x_2} & \underbrace{-\frac{1}{2}}_{y_1,y_2} \end{pmatrix}$

Derfor: $\underline{\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 \quad , \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2}$

c) $T(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$ , $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$

Følger fra setning 4.6.13, og at $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er en basis

$\downarrow$

For enhver basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ for $\mathbb{R}^n$, og vektorer $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ finnes en unik $T$ slik at $T(\vec{v}_1) = \vec{y}_1, \dots, T(\vec{v}_n) = \vec{y}_n$

d) $$T(\vec{e}_1) = T\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{v}_2\right) = \tfrac{1}{2}T(\vec{v}_1) + \tfrac{1}{2}T(\vec{v}_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,2\vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}(-\vec{v}_2) = \vec{v}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{v}_2$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{v}_2\right) = \tfrac{1}{2}T(\vec{v}_1) - \tfrac{1}{2}T(\vec{v}_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,2\vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{v}_2$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matrisen til $T = [\,T(e_1)\ \ T(e_2)\,] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4.8.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{II \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan skrive: $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = E_3 E_2 E_1 A$$

$$\Downarrow$$

$$E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = A$$

4.9.7

Vi skal vise at $\det(rA) = r^n \det A$

$rA$ får vi ved å gange hver rad i matrisen med $r$

Ved å gange en rad i matrisen med $r$ blir også determinanten ganget opp med $r$

Siden vi gjør dette $n$ ganger får vi derfor

$\det(rA) = r^n \det A$.

$$A \underset{E_1}{\overset{\text{gang rad 1 med } r}{\sim}} A_1 \underset{E_2}{\overset{\text{rad}_2 \text{ med } r}{\sim}} A_2 \sim \dots \sim rA$$

$$rA = E_n \cdots E_2 E_1 A \Rightarrow \det(rA) = \det(E_n) \cdots \det(E_1) \det A$$
$$= r \cdots r \det A = r^n \det A$$

4.9.8 $\det(A^n) = (\det(A))^n$ ?

Holder opplagt for $n=1$

Anta vi har vist at $\det(A^k) = (\det A)^k$

Skal også vise at $\det(A^{k+1}) = (\det A)^{k+1}$

$$\det(A^{k+1}) = \det(A^k A) = \det(A^k)\det A = (\det A)^k \det A$$
$$= (\det A)^{k+1}$$, som fullfører induksjonsbeviset.

4.9.1 b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) + 3 \cdot 1$$

$$= -8 + 3 = \underline{\underline{-5}}$$

4.9.2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_1, E_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}II}{\underset{E_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-2II}{\underset{E_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = B \Rightarrow \det B = \frac{9}{5}$$

$$B = E_4 E_3 E_2 E_1 A$$

$$\det B = \det E_4 \det E_3 \det E_2 \det E_1 \det A$$

$$\frac{9}{5} = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 \det A \Rightarrow \underline{\underline{\det A = 9}}$$

4.8.1

a) En matrise er elementær hvis den fremkommer ved å gjøre en radoperasjon på identitetsmatrisen $I$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ får dere ved å bytte om rad 1 og 2 i $I$

b) : $I - 3II$

4.8.3

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&3\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\sim}\cdots\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim}\cdots\overset{\frac{1}{4}\mathrm{III}}{\sim}\cdots\overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\sim}\cdots\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim}I_3$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$E_4=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4.6.2

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utvidet matrise: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Derfor er $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

4.6.3 b)

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \end{array} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

her har ikke alle radene pivotelementer, og søylene vil derfor ikke utspenne hele $\mathbb{R}^3$ (Setning 4.6.2)

4.6.7 c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tredje søyle er ikke en pivotsøyle, derfor er vektorene <u>ikke</u> lineært uavhengige.

4.6.8

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

siden søyle 1 og 3 er pivotsøyler, så danner disse en lineært uavhengig delmengde.

4.6.9 d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle søyler er pivotsøyler, så vektorene danner basis for $\mathbb{R}^3$.