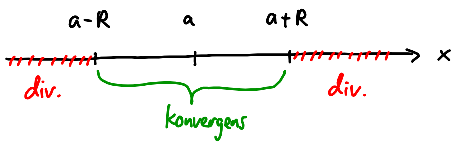
12.5 – 12.8 : Taylor-rekker og potensrekker

En potensrekke er en rekke på formen
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

Avgjøre for hvilke x rekken konvergerer: Prøv forholdstesten.
Vi behandler da x som en konstant.
Vi finner alltid at det fins $R \geq 0$ slik at

- rekken konvergerer absolutt for $|x-a| < R$
- rekken divergerer for $|x-a| > R$

R kalles konvergensradien til potensrekken, og a kalles potensrekkens sentrum.



Tilfellet $R = \infty$ (konvergens for alle x) og tilfellet $R = 0$ (konvergens kun for $x = a$) kan forekomme.
Endepunktene $x = a + R$ og $x = a - R$ må sjekkes "manuelt" ved innsetting.

eks. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \cdot n}$ Finn konvergensområdet (evt. konvergensintervallet) til denne. (Dvs. avgjør for hvilke x den konvergerer.)

Løsn. Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{4^{n+1}\cdot(n+1)} \cdot \frac{4^n \cdot n}{(x-3)^n} \right|$$

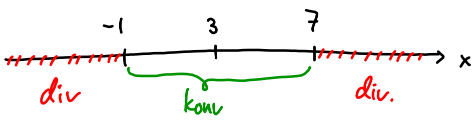
$$= \frac{1}{4} \cdot |x-3| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{1} = \frac{1}{4} \cdot |x-3|$$

Altså konvergens hvis

$$\frac{1}{4} \cdot |x-3| < 1, \quad \text{dvs.} \quad |x-3| < 4.$$

Divergens hvis $|x-3| > 4$. Altså $R = 4$.

Endepunkt: $x = 3 + 4 = 7$
$x = 3 - 4 = -1$



$x=7$ innsatt i rekken gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-3)^n}{4^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(divergent p-rekke)}$$

$x=-1$ innsatt gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-3)^n}{4^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(konv. ved alt. rekke-testen)}$$

Så rekken konvergerer for $x \in [-1, 7)$

$$\boxed{\text{Fire triks for regning med potensrekker}}$$

Kjenner du summen av noen potensrekker, kan du bruke triksene til å finne summen av flere.

1 : Gange rekken med x, x^2, x^3 etc.

eks. Det viser seg at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{for alle } x.$$

Så

$$x^3 e^x = x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^7}{4!} + \dots \quad \text{for alle } x.$$

Regning på summetegnsnivå:

$$x^3 \cdot e^x = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n!}$$

2 Sette inn x^2, $2x^3$, x^6 etc. for x i en rekke

eks. Vi har (geometrisk rekke med $r = x$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

for $-1 < x < 1$. Innsetting av $2x^3$ for x gir

$$\frac{1}{1-(2x^3)} = 1 + (2x^3) + (2x^3)^2 + (2x^3)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (2x^3)^n$$

for $-1 < (2x^3) < 1$, dvs. $-\frac{1}{2} < x^3 < \frac{1}{2}$

dvs. $-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

Konklusjon:

$$\frac{1}{1-2x^3} = 1 + 2x^3 + 4x^6 + 8x^9 + \dots$$

for $-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

3 Leddvis derivasjon og integrasjon

Hvis du har en rekke for $f(x)$ gyldig på $U = (a-R, a+R)$, så får du en rekke for $f'(x)$ på U ved å derivere leddvis. Du kan også integrere leddvis innenfor U, både bestemt og ubestemt.

eks. Vet at $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \qquad x \in (-1, 1)$

Deriverer:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\right)'$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad \text{for } x \in (-1, 1)$$

På summetegnsnivå:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \left(n=0 \text{ borte fordi } \frac{d}{dx}(1) = 0\right)$$

eks. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ for $x \in (-1, 1)$

(antar vi vet dette: Geometrisk rekke med $r = -x$.)

Integrerer ubestemt:

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots\right) dx$$

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Innsetting av $x = 0$ gir $\ln 1 = C + 0$, dvs. $C = 0$.

Konklusjon:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad \text{for } x \in (-1, 1)$$

4 Addere og subtrahere rekker

Gitt rekker for $f(x)$ og $g(x)$, kan vi finne rekker for $f(x) + g(x)$ og $f(x) - g(x)$ ved å addere/subtrahere leddvis. Rekkene for $f(x) + g(x)$ og $f(x) - g(x)$ blir gyldige for alle x der rekkene for $f(x)$ og $g(x)$ begge er gyldige.

eks.
$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\right) + \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots\right)$$
$$= 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \dots \quad \text{for } x \in (-1, 1).$$

Unikhet av Taylor-rekker

Hvis vi har en potensrekke med sentrum a og sum f(x), dvs.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

på et intervall rundt a, så er dette Taylor-rekken til f(x) i a.
Altså kan alle potensrekketriksene våre brukes til å finne Taylor-rekker.

Bevis Antakelsen er at

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

Innsetting av $x = a$ gir $f(a) = c_0 + 0$, så $c_0 = f(a)$.

Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = c_1 \cdot 1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

Innsetting av $x = a$ gir $f'(a) = c_1$

Ny leddvis derivasjon:

$$f''(x) = 2c_2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x-a) + 4 \cdot 3 \cdot c_4(x-a)^2 + \dots$$

Innsetting av $x = a$ gir $f''(a) = 2c_2$, dvs. $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$

Ny leddvis derivasjon:

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4(x-a)^1 + \dots$$

Innsetting av $x = a$ gir $f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot c_3$, dvs. $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}$

Og så videre. Vi ser at koeffisientene c_n må stemme med dem vi har i Taylor-rekken

$$f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Dvs. dette er Taylor-rekken. □

Altså kan de fire triksene våre brukes til å finne Taylor-rekker!

Konvergens av berømte Taylor-rekker

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{alle } x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{alle } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{alle } x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad x \in (-1,1]$$

Bevis (Delvis)

- Rekken for $\ln(1+x)$ fikk vi ved triks 3 sist
- Rekken for $\frac{1}{1-x}$ er geometrisk
- Rekken for $f(x) = \sin x$: Har $a = 0$

Restledd:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \right|$$

$$= |f^{(n+1)}(c)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(c)$ er enten $\sin c$ eller $\cos c$

$$\leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

(fakultet dominerer potens).

$\square$

eks. Anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(n!)^2} \quad \text{for alle } x.$$

Finn rekker for $f'(x)$ og $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ gyldige for alle x.

Løsn. Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)\,x^{4n}}{(n!)^2}$$

Leddvis integrasjon:

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(n!)^2} \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^{4n+2}}{(4n+2)\cdot(n!)^2} \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)\cdot(n!)^2} \quad \square$$

Finne summen av potensrekker

1. Absorber faktorer av typen 2^n, 3^n etc. og flytt sentrum av potensrekken til 0 ved å innføre ny variabel u. Sett "ekstra" potenser utenfor.

eks. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$\boxed{u = \frac{x-1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot u^n$$

2. "Plukk opp" eventuelle faktorer n, n^2 etc. ved ledduis derivasjon/integrasjon.

3. Prøv å gjøre rekken du sitter igjen med, om til en av de berømte.

Finne summen av vanlige rekker

Prøv å skrive rekken som en potensrekke med en spesiell verdi av x innsatt. Bruk 2^n, 3^n etc. til å "lage" x^n.

eks. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

kan oppfattes som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot x^n$ med $x = \frac{1}{2}$ innsatt.

---

eks. Finn summen av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n}$

Løsn. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 2^n}$$

$$= x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$\boxed{u = \frac{x}{2}}$

$$= x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

$\boxed{\text{Berømt rekke for } e^u}$

$$= x^5 \cdot e^u = \underline{\underline{x^5 e^{x/2}}}$$ for alle x. □

eks. Finn summen av $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-1}(2n+2)}$

Løsn. Rekken kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$$

Dette kan oppfattes som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-1} \quad \text{med } x = \frac{1}{4} \text{ innsatt.}$$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2}$$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x x^{2n+1} \, dx \right) = \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(x^3 + x^5 + x^7 + \dots \right) dx$$

geo. rekke med $a = x^3$ og $r = x^2$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{x^3}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{1-t^2} \, dt$$

$= \text{etc.}$ (Regn ut integralet, f.eks. ved subst. $u = t^2$).

Sett til slutt inn $x = \frac{1}{4}$. Summen blir $\underline{\underline{32 \ln\left(\frac{16}{15}\right) - 2}}$