# Prøveeksamen i MAT 1110, våren 2006

**Oppgave 1:** I denne oppgaven er $C$ matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & a^2+3a & -3a \end{bmatrix}$$

der $a$ er et reelt tall.

a) Bruk elementære radoperasjoner til å redusere $C$ til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+3a-4 & 3-3a \end{bmatrix}$$

b) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & a^2+3a \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3a \end{bmatrix}$ slik at $C$ er den utvidede matrisen $C = [A, \mathbf{b}]$. For hvilke verdier av $a$ har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ henholdsvis én, ingen og uendelig mange løsninger?

c) Finn en basis for søylerommet til $C$ når $a = -4$ og en basis for nullrommet til $C$ når $a = 1$.

**Oppgave 2:** a) Finn konvergensområdet til rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ og $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ for alle $x$ i konvergensområdet. Vis at $f'(x) = g(x)$ og $g'(x) = f(x)$.

c) Skriv opp potensrekkene til $f(x) + g(x)$ og $f(x) - g(x)$, og finn et endelig uttrykk for hver av disse funksjonene (dvs. uttrykk som ikke inneholder uendelige summer). Bruk dette til å finne endelige uttrykk for $f(x)$ og $g(x)$.

**Oppgave 3:** $R$ er området i rommet avgrenset av flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$.

a) Vis at integralet $I = \iiint_R y \, dV$ er lik

$$\iint_S (6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy) \, dA$$

der $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Regn ut $I$.

c) $C$ er skjæringskurven mellom flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$, og den er orientert mot klokken sett ovenfra. Vis at $C$ har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + (1 - 4\cos t)\,\mathbf{k}$$

og regn ut kurveintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$.

**Oppgave 4:** I denne oppgaven er

$$F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{for } (x, y) \neq (0, 0).$$

Vis at $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Regn ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$, og der $C$ er enhetssirkelen orientert mot klokken. Er vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$ konservativt? Kommenter.