3.5 Priniterte oppgaver:
2, 4, 9, 11

3.5

2) Kriterium

$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ vektorfelt i

$\mathbb{R}^n$, F er konservativt hvis

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{for alle } i, j$$

og området enkeltsammenhengende

så er F konservativt.

3.5 2

$$F(x,y) = 2xe^y\vec{i} + (x^2e^y + x)\vec{j}$$
$$= F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xe^y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xe^y + 1$$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$ så F er <u>ikke</u>

konservativt

3.5.4

$$F(x,y,z) = (y^2 z + z)\vec{i} + (2xyz - 2)\vec{j} + (xy^2 + x)\vec{k}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2yz$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y^2 + 1, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = y^2 + 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2xy, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2xy$$

F er altså konservativt.

3.5.4 forts

Skal finne φ slik at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = \vec{F}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 = y^2 z + z$$

$$\varphi = \int (y^2 z + z)\,dx = y^2 z x + z x + h(y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yzx + \frac{\partial h}{\partial y} = F_2 = 2xyz - 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2, \quad h = -2y + g(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2 x + x + g'(z) = F_3 = xy^2 + x$$

Kan ta $g = 0$

$$\varphi(x,y,z) = y^2 z x + z x - 2y$$

3.5.9

Merk at om $\vec{F}$ er konservativt

dvs $\vec{F} = \nabla\varphi$ og C er kurve

fra p, til q så er $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(q) - \varphi(p)$

(3.5.1). Spesielt om C er lukket dvs. $p = q$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

3.5.9 forts.

C sirkel med sentrum i $(1,-1)$ og radius 5. $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

$$\vec{F}(x,y) = y^2 e^{xy^2}\vec{i} + (2xye^{xy^2}+1)\vec{j}$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

Siden $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ så er $\vec{F}$ konservativt, og siden C er lukket blir da $\int_C \vec{F}\cdot dr = \underline{\underline{0}}$

3.5.11

C er skjæringskurve mellom

$x^2+y^2+z^2=25$, og planet

$x-2y+3z=1$, C er en sirkel

$$F = ze^{xz+y}\vec{i} + (e^{xz+y}+2z)\vec{j}$$
$$(xe^{xz+y}+2y)\vec{k}, \quad \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$$

Er F konservativt?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = ze^{xz+y}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = ze^{xz+y}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = e^{xz+y} + zxe^{xz+y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = e^{xz+y} + xze^{xz+y}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = xe^{xz+y}+2, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = xe^{xz+y}+2$$

Ser altså at $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$

for alle i og j $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$

Dvs. F er konservativt og

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ siden C er lukket.