Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 13/4-16/4

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

April 15, 2010

Oppgave 4.8.1

a)

Bytt om første og andre rad.

b)

Legg til -3 ganger rad 2 til rad 1.

c)

Bytt om første og andre rad.

d)

Legg til $\frac{1}{2}$ ganger rad 2 til rad 3.

e)

Gang rad 1 med 4.

Oppgave 4.8.2

Radreduksjon gir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Her er det brukt tre radoperasjoner. Deres matriser er (i samme rekkefølge)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisene til de tilsvarende inverse radoperasjonene er

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setter vi sammen disse i motsatt rekkefølge får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4.8.3

Vi radreduserer:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \overset{II+I}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \overset{II\leftrightarrow III}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
& \overset{III/4}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \overset{I-2II, I-III}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Setter vi sammen de inverse radoperasjonene i motsatt rekkfølge får vi at $A = E_1E_2E_3E_4E_5$, der

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
E_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
E_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4.9.1

a)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 1 + 2 \times (3+2) - (-1) = 1 + 10 + 1 = 12.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4.9.2

a)

Vi radreduserer:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\overset{III-2II}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = B.$$

Den siste matrisen (B) er triangulær, så determinanten er produktet av diagonalelementene (se teorem 4.9.9). Her blir dette $\det(B) = \frac{9}{5}$. Blant de andre radoperasjonene er det bare operasjonen hvor vi ganger rad to med $\frac{1}{5}$ som forandrer determinanten. Regner vi oss tilbake (ved hjelp av teorem 4.9.9) blir derfor $\frac{9}{5} = \det(B) = \frac{1}{5}\det(A)$, som gir $\det(A) = 9$.

Oppgave 4.9.3

a)

Ekspander langs andre rad:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} &= (-1) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 7 - 6 = 1. \end{aligned}$$

b)

Ekspander langs andre søyle:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= (-3) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3(2-12) = 30. \end{aligned}$$

c)

Vi ekspanderer langs den raden/kolonnen som har flest nuller. Her er dette rad 3:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Begge underdeterminantene ekspanderer vi nå langs tredje søyle (her finner vi en null i begge tilfellene):

$$\begin{aligned} &= (-1)^{1+3} \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad +2\left((-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 4(4-1) + 2(3-2) + 2\left(-2(6-1) + (3-2)\right) = 12 + 2 - 20 + 2 = -4. \end{aligned}$$

Oppgave 4.9.7

rA får vi ved å gange hver rad med r. Ved å gange en rad med r blir determinanten også ganget med r. Siden vi gjør dette n ganger er $\det(rA)$ det samme som r^n ganger det A.

Oppgave 4.9.8

Anta at vi ved induksjon har vist at $\det(A^n) = \det(A)^n$. Vi bruker setning 4.9.14:

$$\det(A^{n+1}) = \det(A^n A) = \det(A^n)\det(A) = \det(A)^n \det(A) = \det(A)^{n+1}.$$

Dermed holder også utsagnet for $n+1$. Induksjonsbeviset er fullført i og med at formelen er opplagt for $n = 1$.

Oppgave 4.9.9

Anta at radene til A er lineært uavhengige. Kall radene for $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$. det finnes da en relasjon

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

der ikke alle x'ene er null. Anta at $x_i \neq 0$. Deler vi med x_i i likningen over får vi en likning på formen

$$y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i + y_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + y_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

der $y_j = \frac{x_j}{x_i}$. I A legger vi derfor y_1 ganger rad 1 til rad i, y_2 ganger rad 2 til rad i, osv. På grunn av likningen over vil da rad i bli $\mathbf{0}$, og da blir også determinanten 0.

Dette følger også fra teorem 4.9.10 og korollar 4.9.16 slik: Radene i A svarer til kolonnene i A^T. Siden $\det(A) = \det(A^T)$ så holder det å vise resultatet når kolonnene i matrisen er lineært avhengige. I så fall er ikke alle søyler pivot-søyler, og dermed er ikke matrisen inverterbar. Da gir teorem 4.9.10 at $\det(A) = 0$.

Oppgave 4.9.10

Anta $U^{-1} = U^T$. Da er $U^T U = I_n$. Tar vi determinanten på begge sider får vi

$$1 = \det(I_n) = \det(U^T U) = \det(U^T)\det(U) = \det(U)\det(U) = \det(U)^2,$$

hvor vi har brukt at $\det(U) = \det(U^T)$ (korollar 4.9.16). Vi ser da at $\det(U) = 1$, eller $\det(U) = -1$.

Oppgave 4.9.11

a)

Jeg viser dette på to måter:

Fra korollar 4.9.16 vet vi at $\det(I_i(\mathbf{x})) = \det(I_i(\mathbf{x})^T)$. $I_i(\mathbf{x})^T$ kan vi få fra identitetsmatrisen ved å legge til multiple av alle andre rader til rad i etter at vi har ganget kolonne i med x_i. denne siste operasjonen forandrer determinanten med x_i, mens ingen av de andre operasjonene forandrer determinanten. Siden $\det(I) = 1$ så blir

$$\det(I_i(\mathbf{x})) = \det(I_i(\mathbf{x})^T) = x_i.$$

Den andre måten å vise dette på er å ekspandere determinanten langs søyle i. Det er lett å se at "underdeterminant" j har søyle j lik $\mathbf{0}$ når $j \neq i$. Disse determinantene blir derfor 0. "Underdeterminant" i er lik I_{n-1}, som gir determinant 1. Determinanten blir derfor

$$\begin{aligned}
&(-1)^{1+i}x_1 \times 0 + \cdots + (-1)^{i-1+i}x_{i-1} \times 0 \\
&+(-1)^{i+i}x_i \times 1 \\
&+(-1)^{i+1+i}x_{i+1} \times 0 + \cdots + (-1)^{n+i}x_n \times 0 \\
&= x_i.
\end{aligned}$$

b)

Det er klart at hvis $j \neq i$, så er søyle j i $AI_i(\mathbf{x})$ identisk med søyle j i $A_i(\mathbf{b})$, som igjen er identisk med søyle j i A. Dette følger direkte fra definisjonen av matrisemultiplikasjon, og siden søyle j i $I_i(\mathbf{x})$ bare har en ener i søyle j (på rad j), med 0 alle andre steder. Vi trenger derfor kun se på søyle i:

- Søyle i i $A_i(\mathbf{b})$ er $\mathbf{b}$ per definisjon.
- Søyle i i $I_i(\mathbf{x})$ er $\mathbf{x}$. Derfor er søyle i i $AI_i(\mathbf{x})$ lik $A\mathbf{x}$, og dette er $\mathbf{b}$ per definisjon.

Dermed har vi vist at de to matrisene er identiske, siden alle søylene er like.

c)

Fra a) og b) har vi at

$$\det(A_i(\mathbf{b})) = \det(AI_i(\mathbf{x})) = \det(A)\det(I_i(\mathbf{x})) = \det(A)x_i.$$

Deler vi med $\det(A)$ på begge sider får vi at $x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$.

d)

Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},\ A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} \det(A) &= -8+3=-5 \\ \det(A_1(\mathbf{b})) &= -16-6=-22 \\ \det(A_1(\mathbf{b})) &= -4-4=-8, \end{aligned}$$

slik at $x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{-22}{-5} = \frac{22}{5}$, $x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$.

Oppgave 4.10.1

a)

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Bruker vi andregradsformelen får vi at $\lambda = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 2\pm 1$. Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = 1$: Vi må løse $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, eller $(I_2 - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Den utvidede matrisen for dette systemet er

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Likningen for den første raden sier at $x = -y$, slik at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\lambda_1 = 1$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for $\lambda_2 = 3$: Vi må løse $A\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_2$, eller $(3I_2 - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Den utvidede matrisen for dette systemet er

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Likningen for den første raden sier at $x = y$, slik at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\lambda_2 = 3$.

b)

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Bruker vi andregradsformelen får vi at $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$. Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = -1$: Vi må løse $A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$, eller

$$\begin{aligned} x + 4y &= -x \\ x + y &= -y. \end{aligned}$$

  Dette kan også skrives

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

  Vi ser at vi kan velge y fritt, og at $x = -2y$. Velger vi $y = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for $\lambda_2 = 3$: Vi må løse $A\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_2$, eller

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3x \\ x + y &= 3y. \end{aligned}$$

  Dette kan også skrives

$$\begin{aligned} -2x + 4y &= 0 \\ x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

  Vi ser at vi kan velge y fritt, og at $x = 2y$. Velger vi $y = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 2) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Bruker vi andregradsformelen får vi at $\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2$. Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = 1$: Matrisen til $I_2 - A$ blir

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vi ser at vi kan velge y fritt, og at $x = -y$. Velger vi $y = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for $\lambda_2 = 5$: Matrisen til $5I_2 - A$ blir

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at vi kan velge y fritt, og at $x = 3y$. Velger vi $y = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 4.10.2

a)

Det karakteristiske polynomet blir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 3 \\ -4 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -4 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)((\lambda-2)^2-4) \\
&= (\lambda-1)\lambda(\lambda-4).
\end{aligned}$$

Vi ser at egenverdiene er $0, 1, 4$.

- Egenvektor for $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
0I - A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

- Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
I - A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

- Egenvektor for $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{aligned} 2I - A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Vi ser at $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

b)

Vi regner ut

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 3(-2\lambda + 4 - 1) - 2 - \lambda \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12. \end{aligned}$$

Her er det fort gjort å sjekke at $\lambda = 2$ er en rot. For å finne de andre røttene kan vi gjøre polynomdivisjon med $\lambda - 2$ (jeg anbefaler å repetere dette, se feks. Kalkulus side 57). Denne polynomdivisjonen gir $\lambda^2 - \lambda - 6$, slik at

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

hvor vi har funnet de to siste røttene ved hjelp formelen for løsning av andregradslikningen. Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = -2$: Vi må løse $(-2I_3 - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Vi ser at y kan velges fritt, $z = 0$, og at $x = -y$. Velger vi $y = 1$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for $\lambda_2 = 2$: Vi må løse $(2I_3 - A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at z kan velges fritt. Setter vi $z = 4$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_3$ for $\lambda_3 = 3$: Vi må løse $(3I_3 - A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at z kan velges fritt. Setter vi $z = 5$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 & -4 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\
&= -4(\lambda - 1) - 4 + (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) + 2(\lambda - 1) \\
&= \lambda^3 - 5\lambda = \lambda(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = -\sqrt{5}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{5}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for $\lambda_1 = -\sqrt{5}$: Vi må løse $(-\sqrt{5}I_3 - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 & 1 & -2 \\ -2 & -\sqrt{5}+2 & -4 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\
&\sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}/2-1 & 2 \\ -\sqrt{5}-1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{II+(\sqrt{5}+1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 5/2-\sqrt{5}/2 & 2\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\
&\sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 5/2-\sqrt{5}/2 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&\overset{III-(5/2-\sqrt{5}/2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{I-(\sqrt{5}/2-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2+\sqrt{5}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ser at z kan velges fritt, og at $x = -(1/2+\sqrt{5}/2)z, y = -(\sqrt{5}+1)z$. Velger vi $z = 1$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -1/2-\sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for $\lambda_2 = 0$: Vi må løse $(-A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Vi ser at z kan velges fritt, og at $x = -3z, y = -z$. Velger vi $z = 1$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Egenvektoren $\mathbf{v}_3$ for $\lambda_3 = \sqrt{5}$: Vi må løse $(\sqrt{5}I_3 - A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Matrisen for dette likningssystemet er

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & 1 & -2 \\ -2 & \sqrt{5}+2 & -4 \\ 0 & -1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}
& \sim & \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5}/2-1 & 2 \\ \sqrt{5}-1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\
& \overset{II-(\sqrt{5}-1)I}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 5/2+\sqrt{5}/2 & -2\sqrt{5} \\ 0 & -1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\
& \sim & \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 5/2+\sqrt{5}/2 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
& \overset{III-(5/2+\sqrt{5}/2)II}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5}/2-1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \overset{I+(\sqrt{5}/2+1)II}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2-\sqrt{5}/2 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ser at z kan velges fritt, og at $x = (-1/2+\sqrt{5}/2)z, y = (-1+\sqrt{5})z$. Velger vi $z = 1$ får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} -1/2+\sqrt{5}/2 \\ -1+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 4.10.4

a)

Det karakteristiske polynomet til A er

$$(\lambda-2)(\lambda+1)-4 = \lambda^2-\lambda-6 = (\lambda+2)(\lambda-3).$$

Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.

- Egenvektor for $\lambda_1 = -2$:

$$
\begin{aligned}
-2I - A &= \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

  Vi ser derfor at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

- Egenvektor for $\lambda_2 = 3$:

$$
\begin{aligned}
3I - A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

  Vi ser derfor at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

For å skrive den gitte vektoren som en lineær kombinasjon av egenvektorer må vi radredusere

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser derfor at vi kan skrive

$$\mathbf{x} = -\frac{11}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{5}\mathbf{v}_2.$$

c)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)((\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}) - \frac{9}{4}) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 + \lambda - 2) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-1).\end{aligned}$$

hvor vi har brukt formelen for løsningen av andregradslikningen. Vi ser at $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

- Egenvektor for $\lambda_1 = -2$: Matrisen til likningssystemet $(-2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Vi ser at z kan velges fritt og at den generelle egenvektoren har formen $\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Velger vi $z = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Egenvektor for $\lambda_2 = -1$: Matrisen til likningssystemet $(-I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 24 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Vi ser at z kan velges fritt, og at den generelle egenvektoren har formen $\begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{6}{5}z \\ z \end{pmatrix}$. Velger vi $z = 5$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Egenvektor for $\lambda_3 = 1$: Matrisen til likningssystemet $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Vi ser at z kan velges fritt, og at den generelle egenvektoren har formen $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Velger vi $z = 1$ får vi egenvektoren $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

For å skrive $\mathbf{x}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene må vi radredusere den utvidede matrisen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan altså skrive

$$\mathbf{x} = -\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_3.$$

Oppgave 4.10.6

Det karakteristiske polynomet til A er

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1).$$

Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

- Egenvektor for $\lambda_1 = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Vi ser derfor at $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ er en egenvektor med lengde 1.

- Egenvektor for $\lambda_2 = 6$:

$$6I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Vi ser derfor at $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ er en egenvektor med lengde 1.

Det følger fra korollar 4.10.9 (her er matrisen vår symmetrisk) at $D = M^T AM$, der

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 4.10.7

Anta λ er en egenverdi for A. Da er

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A^T).$$

Fra dette følger det at λ er en egenverdi for A^T også, slik at de to matrisene har de samme egenverdiene. Det er ingen grunn til at de to matrisene skulle ha de samme egenvektorene: Egenvektorene finner vi ved å løse likningssystemene til matrisene $\lambda I - A$ og $\lambda I - A^T$, og dette er to vidt forskjellige systemer.

Oppgave 4.10.8

Hvis $\mathbf{v}$ er egenvektor for både A og B finnes det tall λ_1, λ_2 slik at $A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}, B\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$. men da er

$$(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{v} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{v},$$

slik at $\mathbf{v}$ også er en egenvektor for $A + B$, med tilhørende egenverdi $\lambda_1 + \lambda_2$.

Oppgave 4.10.9

Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for både A og B finnes det λ_1, λ_2 slik at $A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}$, $B\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$. Men da er

$$AB\mathbf{v} = A\lambda_2\mathbf{v} = \lambda_2 A\mathbf{v} = \lambda_2\lambda_1\mathbf{v}.$$

Dermed er $\mathbf{v}$ en egenvektor for AB og, med tilhørende egenverdi $\lambda_1\lambda_2$.

Matlab-kode

```
% Oppgave 4.9.4 a)
det([7 -3 3 1 -4; 3 2 -1 4 3; 3 0 4 1 3; 4 1 3 -1 5; 1 4 -2 2 0])

% Oppgave 4.9.4 b)
det([2 3 2 1 1; -2 2 1 2 4; 1 4 -4 3 -3; 2 -1 2 1 -2; 3 0 2 -2 4])
```

```
% Oppgave 4.10.3 a)
[V,D]=eig([2 -1 0.5; 3 -2 1; 3 -1 2])

% Oppgave 4.10.3 b)
[V,D]=eig([2 0.4 10; -2.4 7.3 0.05; 4.2 1 -3.2])

% Oppgave 4.10.3 c)
[V,D]=eig([3 -2 -2 4; -5 2 -3 2; -2 2 -8 3; -4 1 6 4])
```

```
% Oppgave 4.10.5 a)
A=[1 -2 4; 0 5 4; 2.5 -3 4];
[V,D]=eig(A)
rref([V [0.3; 2.4; -3.4]])

% Oppgave 4.10.5 b)
A=[2.3 -0.3 1.2 3; 1.2 3 2.4 -1.2; 3.3 -1.2 0.5 7; -2 3.1 -2.1 1.3];
[V,D]=eig(A)
rref([V [-1.3; 2.4; 0.04; 4.1]])
```

Python-kode

```
from numpy import *
from MAT1120lib import *

# Oppgave 4.9.4 a)
print linalg.det([[7,-3,3,1,-4],[3,2,-1,4,3],[3,0,4,1,3],[4,1,3,-1,5],[1,4,-2,2,0]])

# Oppgave 4.9.4 b)
print linalg.det([[2,3,2,1,1],[-2,2,1,2,4],[1,4,-4,3,-3],[2,-1,2,1,-2],[3,0,2,-2,4]])
```

```
from numpy import *
from MAT1120lib import *

# Oppgave 4.10.3 a)
V,D=linalg.eig([[2,-1,0.5],[3,-2,1],[3,-1,2]])
print V
print D

# Oppgave 4.10.3 b)
V,D=linalg.eig([[2,0.4,10],[-2.4,7.3,0.05],[4.2,1,-3.2]])
print V
print D

# Oppgave 4.10.3 c)
V,D=linalg.eig([[3,-2,-2,4],[-5,2,-3,2],[-2,2,-8,3],[-4,1,6,4]])
print V
print D
```

```
from numpy import *
from MAT1120lib import *

# Oppgave 4.10.5 a)
A=matrix([[1,-2,4],[0,5,4],[2.5,-3,4]])
V,D=linalg.eig(A)
print V
print D
print rref(hstack((V,matrix([[0.3],[2.4],[-3.4]]))))

# Oppgave 4.10.5 b)
A=matrix([[2.3,-0.3,1.2,3],[1.2,3,2.4,-1.2],[3.3,-1.2,0.5,7],[-2,3.1,-2.1,1.3]])
V,D=linalg.eig(A)
```

```
print V
print D
print rref(hstack((V,matrix([[-1.3],[2.4],[0.04],[4.1]]))))
```