LH 4.5 Inverse matriser

A $n \times n$ matrise

Def A er *invertibel* hvis det finnes en $n \times n$ matrise B slik at

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n.$$

Hvis A er invertibel kalles B den *inverse matrisen* til A.

Lemma: Den inverse matrisen er entydig, hvis den eksisterer.

Eks Ikke alle matriser er invertible

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ gir } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$$

for alle B.

Hvis A er invertibel skriver vi

$$A^{-1} = B$$

for *den* inverse matrisen.

Hvis A er invertibel er A^{-1} invertibel,

og $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bevis Anta $AB = I_n = BA$, $B = A^{-1}$.

B er invertibel hvis det finnes en C

med $BC = I_n = CB$.

Her kan vi ta $C = A$. Så $B^{-1} = A$.

Hovedresultatet om invertible matriser og likningssystemer

<u>Setning 4.5.4</u> La A være en $n \times n$ matrise.

Følgende utsagn er ekvivalente:

(1) A er invertibel.

$\Updownarrow$

(2) Likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

$\Updownarrow$

(3) A er radekvivalent med identitetsmatrisen $A \sim I_n$.

BEVIS

(1) A er invertibel

$\Downarrow$

(2) $A\vec{x}=\vec{b}$ har en entydig løsning for hver $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ I_n\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$A\vec{x}=\vec{b}$ har (minst) en løsning for hver $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

$[A|b] \sim [C|d]$

$\uparrow$ redusert trappeform

$\Updownarrow$

$C\vec{x}=\vec{d}$ har (minst) en løsning for hver $\vec{d}\in\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

C har et pivotelement i hver rad

$\Updownarrow$ (m=n)

$C=I_n$ (3)

$\Updownarrow$ (m=n)

C har et pivotelement i hver søyle

(ingen fri variable)

Har vist at (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3).

Gjenstår å vise (2) $\Longrightarrow$ (1).

Anta (2): at $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for hver $b \in \mathbb{R}^n$.

<u>Motivasjon</u>: Søker B med $AB = I_n$.

$$B = [\vec{x}_1 | \cdots | \vec{x}_n] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c|c} x_{11} & & x_{n1} \\ & \cdots & \\ x_{n1} & & x_{nn} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_n \end{array}$$

$$AB = [A\vec{x}_1 | \cdots | A\vec{x}_n] = I_n = [\vec{e}_1 | \cdots | \vec{e}_n]$$

Søylene i B skal oppfylle

$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \ldots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bruker at $A\vec{x} = \vec{b}$ har (minst) en løsning for hver $\vec{b}$ i tilfellene $\vec{b} = \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ i

La $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ være slik at

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \dots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

La $B = [\vec{x}_1 | \cdots | \vec{x}_n]$. Da er

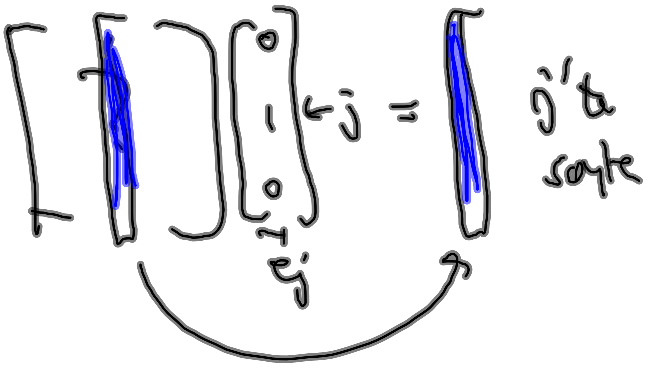
$$AB = [A\vec{x}_1 | \cdots | A\vec{x}_n]$$
$$= [\vec{e}_1 | \cdots | \vec{e}_n] = I_n.$$

Må vise at $\underbrace{BA = I_n}$.

Nok å vise at de j'te søylene er like for hver $1 \le j \le n$:

$$BA\vec{e}_j = I_n\vec{e}_j = \vec{e}_j$$

må vise dette



Skal vise: $\underline{BA\vec{e}_j} = \underline{\vec{e}_j}$ $\quad 1 \le j \le n.$

Ser på likningssystemet

$$A\vec{x} = \underbrace{A\vec{e}_j}_{\text{høyresiden}}$$

Vet at det har (bare) én løsning $\vec{x}$.

$\vec{x} = \vec{e}_j$ er en slik løsning

NB: $\vec{x} = BA\vec{e}_j$ er også en løsning!

$$A\vec{x} = A(BA\vec{e}_j) = \underline{AB}A\vec{e}_j$$

$$= I_n A e_j = A e_j$$

Ved antagelsen i (2) om at $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for $\vec{b} = A\vec{e}_j$ må de to løsningene

$$\vec{e}_j = BA\vec{e}_j$$

være like.

QED.

Merk En $m \times n$ matrise A kan ha en høyreinvers B, dvs en $n \times m$ matrise med

$$AB = I_m \quad (\text{uten at } BA = I_n.)$$

En $m \times n$ matrise A kan også ha en venstreinvers C ($n \times m$ matrise) med $CA = I_n$ (uten at $AC = I_m$).

Hvis A har venstreinvers C og en høyreinvers B er

$$B = I_n B = CAB = CI_m = C$$

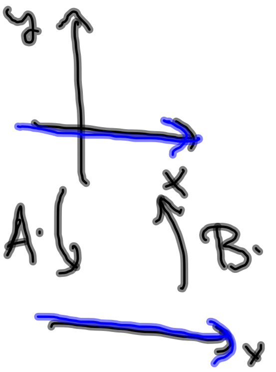
så $B = C$ er en invers og A er invertibel.

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = I_1$$

men $BA = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, shift left, "A\cdot"] & \mathbb{R} \arrow[l, shift left, "B\cdot"] \\
(x,y) \arrow[r, mapsto] & x \\
(x,0) & x \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$



<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Har $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid en entydig løsning?

$\Updownarrow$

Er den reduserte trappeformen til A lik I_3?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2+1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1/3 \\ 3-1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nei

2 pivotel,

Hvordan finne A^{-1} ?

Hvis A er invertibel er $A^{-1} = B$

$$= [\vec{x}_1 | \cdots | \vec{x}_n]$$

der $A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \ldots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$.

Må løse disse n simultane likningssystemene.

$$[A | \vec{e}_1 | \cdots | \vec{e}_n] \sim [\underbrace{C}_{\text{red. trappeform}} | \vec{d}_1 | \cdots | \vec{d}_n]$$

Hvis C ikke har n pivotelementer var ikke A invertibel.

Ellers er $C = I_n$ så

$$[\underline{A} | \vec{e}_1 | \underset{\uparrow_j}{\cdots} | \vec{e}_n] \sim [\underline{I_n} | \underset{\substack{\nwarrow \\ = \vec{x}_1}}{\vec{d}_1} | \underset{\uparrow_j}{\cdots} | \underset{\substack{\uparrow \\ = \vec{x}_n}}{\vec{d}_n}]$$

$A\vec{x}_j = \vec{e}_j$

har samme løsning som ——

$$\vec{x}_j = I_n \vec{x}_j = \vec{d}_j$$

dvs. $\vec{x}_j = \vec{d}_j$

Så vi har en radekvivalens

$$[A | I_n] = [A | \vec{e}_1 | \cdots | \vec{e}_n]$$

$$\sim [I_n | \vec{x}_1 | \cdots | \vec{x}_n] = [I_n | B]$$

der $B = A^{-1}$.

$$\boxed{[A | I_n] \sim [I_n | A^{-1}]}$$

<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ Er A invertibel, og i så fall, hva er A^{-1}?

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \rangle -3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

red.
trappeform
$\neq I_2$

A er ikke invertibel

Eks 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hva er A^{-1}?

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -2 \quad +2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \cdot(-1)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 1/3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \quad +2 \quad -1$$

tre pivotelementer
∴ A er invertibel

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \quad +1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -5/3 & 1/3 & -1 \\ -10/3 & 2/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}]$$