Løsningsforslag prøveeksamen

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

May 28, 2008

Oppgave 1

Vi kan finne den inverse matrisen og samtidig løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å radredusere

$$
\begin{aligned}
[A \quad I_3 \quad \mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & -7/2 & 2 & -15/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Fra den den radreduserte matrisen ser vi at

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7/2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ og } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15/2 \\ 4 \\ 5/2 \end{pmatrix}.
$$

$\mathbf{x}$ kunne vi også regnet ut her ved

$$
\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 & -7/2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/2 \\ 4 \\ 5/2 \end{pmatrix}.
$$

Oppgave 2

Hvis vi redefinerer funksjonen litt til $f(x, y, z) = xy^2e^z + z + 4$ (bare lagt til et konstantledd) kan vi bruke teorem 5.6.3 (implisitt funksjonsteorem) direkte. Vi har da at

$$f(-1,2,0) = -4+4 = 0.$$

Vi regner ut

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^z,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^z,\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy^2 e^z + 1.$$

Spesielt får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,0) = 4,\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,0) = -4,\ \frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) = -3.$$

Siden $\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) \neq 0$ sier implisitt funksjonsteorem at det finnes en funksjon $z = g(x,y)$ i en omegn om $(-1,2)$ slik at $g(-1,2) = 0$ og $f(x,y,g(x,y)) = 0$. Videre er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{-4}{-3} = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3

Hvis vektorfeltet har en potensialfunksjon ϕ (d.v.s $\mathbf{F} = \bigtriangledown\phi$) vet vi at $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ er uavhengig av parametriseringen $\mathcal{C}$, og gitt ved $\phi(2,1) - \phi(0,0)$ (siden $\mathcal{C}$ starter i $(0,0)$ og ender i $(2,1)$). Vi løser

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= 2xy^3 - 2e^{-2x} \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= 3x^2y^2 + \cos(\pi y) + 3
\end{aligned}$$

og får

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= x^2y^3 + e^{-2x} + C(y) \\
\phi(x,y) &= x^2y^3 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi y) + 3y + D(x).
\end{aligned}$$

Vi ser fra dette at

$$\phi(x,y) = x^2y^3 + e^{-2x} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi y) + 3y$$

er en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$. Vi regner ut

$$\phi(2,1) - \phi(0,0) = 4 + e^{-4} + 3 - 1 = 6 + e^{-4}.$$

Oppgave 4

Vi skriver $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$ som

$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 9 + 16,$$

som også kan skrives $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$, eller $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$. Dette er en ellipse med sentrum i $(1, -2)$ og med halvakser $a = 2$ og $b = 3$. Siden $a < b$ er brennvidden $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, og brennpunktene er $(1, -2-\sqrt{5})$, $(1, -2+\sqrt{5})$.

b) Vi vet at enhver kontinuerlig funksjon antar en største og en minste verdi på en lukket, begrenset delemengde. Derfor antar f en største og en minste verdi på K. Vi kan bruke Lagranges multiplikatormetode til å finne disse. Vi setter

$$g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

og regner ut

$$\bigtriangledown f(x.y) = (2, 1), \ \bigtriangledown g(x, y) = (18x - 18, 8y + 16).$$

Vi ser at eneste mulighet for at $\bigtriangledown g(x, y) = 0$ er at $x = 1, y = -2$. Dette punktet ligger ikke på K (det er jo sentrum i ellipsen), slik at vi får ingen kandidater til ekstremalpunkter ved å løse $\bigtriangledown g(x, y) = 0$.

La oss forsøke å løse ligningen

$$\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g,$$

som svarer til

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda(18x - 18) \\ 1 &= \lambda(8y + 16). \end{aligned}$$

Vi ser at $18x - 18 = 2(8y + 16) = 16y + 32$, eller $9x = 8y + 25$. Skriv initialbetingelsen som

$$81x^2 + 36y^2 - 162x + 144y - 99 = 0$$

(har ganget opp med 9 for å unngå å jobbe med brøker). Setter vi inn $9x = 8y + 25$ får vi

$$(8y + 25)^2 + 36y^2 - 18(8y + 25) + 144y - 99 = 100y^2 + 400y + 76 = 0,$$

som også kan skrives $25y^2 + 100y + 19 = 0$. Løser vi denne finner vi at

$$y = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 - 1900}}{50} = \frac{-100 \pm 90}{50} = -2 \pm \frac{9}{5}.$$

For $y = -2 + \frac{9}{5} = -\frac{1}{5}$ får vi $x = \frac{8}{9}y + \frac{25}{9} = -\frac{8}{45} + \frac{25}{9} = \frac{117}{45} = \frac{13}{5}$.

For $y = -2 - \frac{9}{5} = -\frac{19}{5}$ får vi $x = -\frac{152}{45} + \frac{125}{45} = -\frac{27}{45} = -\frac{3}{5}$.

De to kandidatene vi har fått er altså $(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5})$ og $(-\frac{3}{5}, -\frac{19}{5})$ Regner vi ut $f(x, y)$ i det første punktet får vi $\frac{26-1}{5} = 5$. Regner vi ut $f(x, y)$ i det andre punktet får vi $\frac{-6-19}{5} = -5$. Derfor er $(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5})$ et maksimumspunkt, mens $(-\frac{3}{5}, -\frac{19}{5})$ er et minimumspunkt.

Oppgave 5

Matlab-koden beskriver en flate gitt ved $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Denne har partielle deriverte

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y.\end{aligned}$$

Når vi regner ut arelaet av en flate trenger vi

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

der vi har satt inn de partielle deriverte. Fra Matlab-koden ser vi også at området vi ser på er beskrevet i polarkoordinater ved $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Arealet av flaten kan derfor skrives (R er området begrenset ved $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$)

$$\begin{aligned}\int\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA &= \int\int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8}\frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{3/2} - 1) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).\end{aligned}$$

Oppgave 6

Den karakteristiske ligningen for å finne egenverdiene er

$$(\lambda - 1.3)(\lambda - 1) + 0.02 = 0,$$

som gir $\lambda^2 - 2.3\lambda + 1.32 = 0$. Løser vi denne får vi

$$\lambda = \frac{2.3 \pm \sqrt{5.29 - 5.28}}{2} = \frac{2.3 \pm 0.1}{2}.$$

Vi ser derfor at egenverdiene blir $\lambda_1 = 1.1$ og $\lambda_2 = 1.2$.

For å finne egenvektoren $\mathbf{v}_1$ for λ_1 må vi løse $(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Vi må derfor radredusere

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hvis $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ må derfor $x = y$, slik at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

Tilsvarende går det for å finne egenvektoren $\mathbf{v}_2$ for λ_2:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hvis $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ må derfor $x = 2y$, slik at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

b) Vi forsøker skrive $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi kan gjøre dette samtidig ved å radredusere

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fra de to siste kolonnene i den radreduserte matrisen ser vi at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

c) Vi viser ved induksjon at hvis $f(x) = \lambda x + k$ og $x_{n+1} = f(x_n)$, så er

$$x_n = \lambda^n \left(x_0 - \frac{k}{1-\lambda} \right) + \frac{k}{1-\lambda}.$$

Dette er opplagt riktig for $n = 0$. Anta vi har vist at det er riktig for $1, ..., n$. Da er

$$\begin{aligned} x_{n+1} = f(x_n) &= f\left(\lambda^n \left(x_0 - \frac{k}{1-\lambda} \right) + \frac{k}{1-\lambda} \right) \\ &= \lambda \left(\lambda^n \left(x_0 - \frac{k}{1-\lambda} \right) + \frac{k}{1-\lambda} \right) + k \\ &= \lambda^{n+1} \left(x_0 - \frac{k}{1-\lambda} \right) + \frac{\lambda k}{1-\lambda} + k \\ &= \lambda^{n+1} \left(x_0 - \frac{k}{1-\lambda} \right) + \frac{k}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

som viser ut utsagnet holder for $n + 1$ også. Utsagnet holder derfor for alle n.

d) Legg først merke til at hvis $\mathbf{r}_n = x\mathbf{v}_i$, $\mathbf{b} = k\mathbf{v}_i$ (der $\mathbf{v}_i$ er egenvektorene fra b)), så ville vi hatt

$$\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n + \mathbf{b} = A(x\mathbf{v}_i) + k\mathbf{v}_i = (\lambda_i x + k)\mathbf{v}_i = f_{\lambda_i,k}(x)\mathbf{v}_i,$$

der vi har parametrisert funksjonen f fra c) med verdiene λ og k. Dette betyr at hvis $\mathbf{r}_0$ og $\mathbf{b}$ er parallelle med samme egenvektor, så vil alle $\mathbf{r}_n$ være parallelle med samme egenvektor.

La $\mathbf{r}_0$ og $\mathbf{b}$ være definert som i oppgaveteksten. I b) skrev vi disse som en sum av egenvektorene til A. Vi skriver

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= A\mathbf{r}_0 + \mathbf{b}\\ &= A\left(-2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\right) + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\\ &= A(-2\mathbf{v}_1) + 2\mathbf{v}_1 + A(2\mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_2\\ &= f_{\lambda_1,2}(-2)\mathbf{v}_1 + f_{\lambda_2,1}(2)\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Med andre ord, overgangen fra $\mathbf{r}_0$ til $\mathbf{r}_1$ svarer til overgangen fra

$$-2\mathbf{v}_0 + 2\mathbf{v}_1 \text{ til } f_{\lambda_1,2}(-2)\mathbf{v}_1 + f_{\lambda_2,1}(2)\mathbf{v}_2$$

Hvis vi definerer x_n, y_n, slik at $x_{n+1} = f_{\lambda_1,2}(x_n), y_{n+1} = f_{\lambda_2,1}(y_n)$, og $x_0 = -2, y_0 = 2$ ser vi ved å iterere det ovenstående at

$$\mathbf{r}_n = x_n\mathbf{v}_1 + y_n\mathbf{v}_2.$$

Bruker vi resultatet fra c) får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_n &= \left(1.1^n\left(-2 - \frac{2}{1-1.1}\right) + \frac{2}{1-1.1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(1.2^n\left(2 - \frac{1}{1-1.2}\right) + \frac{1}{1-1.2}\right)\mathbf{v}_2\\ &= \left(18 \times 1.1^n - 20\right)\mathbf{v}_1 + \left(7 \times 1.2^n - 5\right)\mathbf{v}_2\\ &= \begin{pmatrix} 18 \times 1.1^n - 20 + 14 \times 1.2^n - 10 \\ 18 \times 1.1^n - 20 + 7 \times 1.2^n - 5 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 18 \times 1.1^n + 14 \times 1.2^n - 30 \\ 18 \times 1.1^n + 7 \times 1.2^n - 25 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$