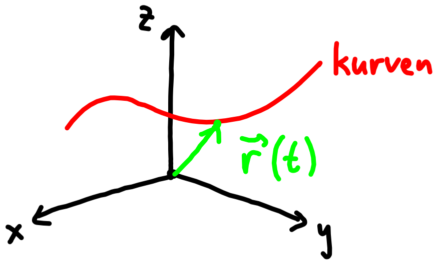
3.1 Parametriserte kurver (og flater fra 3.9)

Definisjon 3.1.3 (og litt til)

En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ der $I \subseteq \mathbb{R}$ er et intervall.
Vi skriver ofte

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$



Hastighetsvektor:
$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$
Fart:
$v(t) = |\vec{r}\,'(t)|$

Akselerasjonsvektor: $\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t)$
Baneakselerasjon: $a(t) = v'(t)$

<u>eks. 1</u>

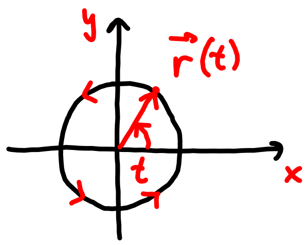
$\vec{r}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ ved

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$v(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$

$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = (-\cos t, -\sin t)$



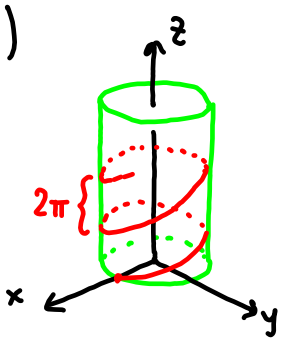
<u>eks. 2</u>

$\vec{r}: [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ ved

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

gir

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ $\square$

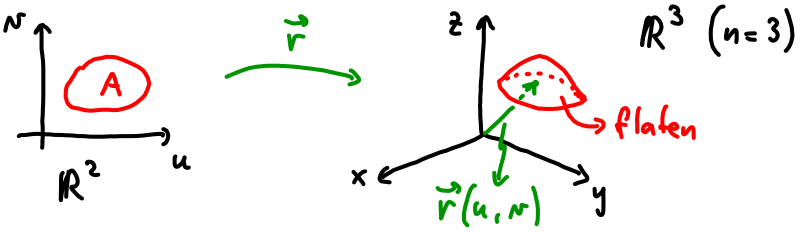


Merk derivasjonsregler i setning 3.1.10 (s. 166)

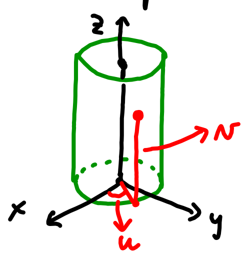
Parametriserte flater (fra 3.9)

En parametrisert flate i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon $\vec{r}: A \to \mathbb{R}^n$ der $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Vi skriver ofte

$$\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$$



eks. Finne parametrisering av sylinderen $x^2+y^2=1$ i $\mathbb{R}^3$.

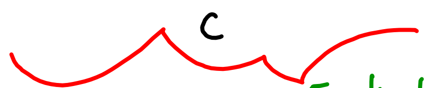


$$\begin{cases} u \in [0, 2\pi) \\ v \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$\vec{r}(u,v) = (\cos u,\, \sin u,\, v) \qquad \square$$

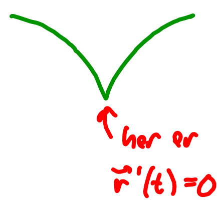
3.3 Linjeintegraler for skalarfelt

En kontinuerlig kurveparametrisering $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kalles stykkevis glatt hvis $\vec{r}\,'(t)$ er kontinuerlig på $[a,b]$ bortsett fra evt. i et endelig antall punkter.



← knekkpunkt der $\vec{r}\,'(t)$ er diskontinuerlig (kan også skje hvis $\vec{r}\,'(t)=0$)

eks. $x(t) = t^3$ $\quad t \in [-1, 1]$
$y(t) = t^2$



Tegne kurven i Matlab:

```
>> t = linspace(-1, 1, 100);
>> x = t.^3;
>> y = t.^2;
>> plot(x,y)          >> axis equal
```

$\square$

Definisjon 3.3.1 (og litt til)

La $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ være en stykkevis glatt kurveparametrisering av en kurve C, og la f være et skalarfelt av n variable som er kontinuerlig i alle punkter $\vec{r}(t)$ for $t\in[a,b]$.

Linjeintegralet av f langs C er da

$$\int_C f\,ds = \int_C f(x_1,\dots,x_n)\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\cdot|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Spesialtilfelle: $\int_C 1\,ds$ kalles buelengden til C.

eks. La $C\subseteq\mathbb{R}^3$ være skjæringskurven mellom flaten

$$x = 2\sqrt{y^2+z^2}$$

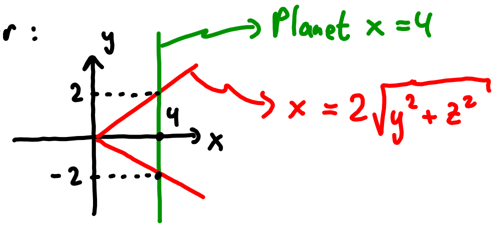
og planet $x=4$, for $z\geq 0$. Finn linjeintegralet av $f(x,y,z)=xy^2z$ langs C, og buelengden til C.

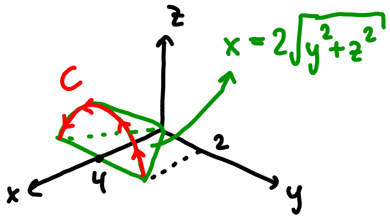
Løsn. Tegner figurer:

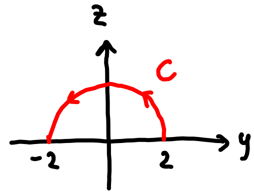
$z=0$ gir

$x = 2\sqrt{y^2}$

$= 2\cdot|y|$







Parametrisering av C:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases} \quad \text{for } t\in[0,\pi]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{0^2+4\sin^2 t+4\cos^2 t} = \sqrt{4\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}} = 2$$

Altså:

$$\int_C f\,ds = \int_0^{\pi} f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x,y,z) \\ &= xy^2z \end{aligned}} \qquad = \int_0^{\pi} f(4, 2\cos t, 2\sin t) \cdot 2\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 4 \cdot (2\cos t)^2 \cdot (2\sin t) \cdot 2\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u = \cos t \\ &\frac{du}{dt} = -\sin t \\ &du = -\sin t\,dt \\ &t = 0 \text{ gir } u = 1 \\ &t = \pi \text{ gir } u = -1 \end{aligned}} \qquad = 64 \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot \sin t\,dt$$

$$= 64 \int_1^{-1} u^2(-du) = 64 \int_{-1}^{1} u^2\,du = \underline{\underline{\frac{128}{3}}}$$

Buelengden til C:

$$\int_C 1\,ds = \int_0^{\pi} 1 \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{\pi} 1 \cdot 2\,dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

(ikke overraskende)