5.7 Omvendte og implisitte funksjoner

- $V_{\vec{F}} = \{ \vec{F}(\vec{x}) : \vec{x} \in D_{\vec{F}} \}$ verdimengden til $\vec{F}$
- $\vec{F} : D_{\vec{F}} \to V_{\vec{F}}$ kalles <u>injektiv</u> hvis det til hver $\vec{y} \in V_{\vec{F}}$ bare fins én $\vec{x} \in D_{\vec{F}}$ slik at $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})$. I så fall har $\vec{F}$ den <u>omvendte</u> funksjonen $\vec{F}^{-1} : V_{\vec{F}} \to D_{\vec{F}}$ definert ved
$$\vec{F}^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} \iff \vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$$
- Hvis $U_0 \subseteq D_{\vec{F}}$, så kalles funksjonen vi får fra $\vec{F}$ ved å innskrenke definisjonsområdet $D_{\vec{F}}$ til U_0, for <u>restriksjonen</u> av $\vec{F}$ til U_0.
- En mengde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ kalles en <u>omegn</u> om $\vec{x}$ dersom $\vec{x}$ er et indre punkt i A.

<u>Omvendt funksjonsteorem</u> (5.7.2, litt annerledes formulert)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen

$\vec{F} : U \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlige partiellderiverte

$\vec{a} \in U$, Jacobimatrisen $\vec{F}'(\vec{a})$ inverterbar

<u>Da har vi:</u>

Det fins en omegn U_0 om $\vec{a}$ og en omegn V_0 om $\vec{F}(\vec{a})$ slik at restriksjonen $\vec{F} : U_0 \to V_0$ har en omvendt funksjon $\vec{G} : V_0 \to U_0$ som er deriverbar på V_0. Jacobimatrisene oppfyller
$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = [\vec{F}'(\vec{x})]^{-1} \quad \text{for alle } \vec{x} \in U_0$$

Utledning av selve formelen.

$$\vec{G}(\vec{F}(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{gir (kjerneregelen)}$$
$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) \cdot \vec{F}'(\vec{x}) = I_m$$
$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) \cdot \underbrace{\vec{F}'(\vec{x}) \cdot [\vec{F}'(\vec{x})]^{-1}}_{I_m} = I_m \cdot [\vec{F}'(\vec{x})]^{-1}$$
$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = [\vec{F}'(\vec{x})]^{-1} \quad \square$$

eks. Vis at $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x + 5 \\ 2x + 5y \end{pmatrix}$

har en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $(5,0)$ slik at $\vec{G}(5,0) = (0,0)$.

Finn den deriverte til $\vec{G}$ i punktet $(5,0)$.

Løsn. Vi har $\vec{F}(0,0) = (5,0)$

$$\vec{F}\,' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{så}$$

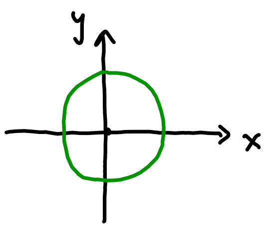
$$\vec{F}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(inverterbar)}$$

Fra omvent funksjonsteoremet følger at $\vec{F}$ har en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $(5,0)$ slik at $\vec{G}(5,0) = (0,0)$. Videre er

$$\vec{G}\,'(5,0) = \left[\vec{F}\,'(0,0)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}}. \quad \square$$

Implisitt definerte funksjoner

eks. $x^2 + y^2 = 1$ gir $y = \pm\sqrt{1-x^2}$



Kan velge $y(x) = \sqrt{1-x^2}$

Kan si at likningen $f(x,y) = 0$ definerer y implisitt som funksjon av x, hvis vi døper $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Implisitt funksjonsteorem (5.7.4)

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ åpen

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ kontinuerlige partiellderiverte, $f(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\vec{x}}, y)$

$(\vec{a}, b) = (a_1, \ldots, a_m, b) \in \mathcal{U}$ slik at

$$f(\vec{a}, b) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$$

Da har vi:

Det fins en omegn $\mathcal{U}_0$ om $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at for hver $\vec{x} \in \mathcal{U}_0$ fins et entydig bestemt tall $g(\vec{x})$ som oppfyller

$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$$

Funksjonen $g : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$ er deriverbar.

Bevis La $\vec{F} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ ved $\vec{F}(\vec{x}, y) = (\vec{x}, f(\vec{x}, y))$

Da har vi

$$\det(\vec{F}') = 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ i punktet } (\vec{a}, b).$$

fordi

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ved omvendt funksjonsteoremet kan vi restriktere $\vec{F}$ til en omegn om $(\vec{a}, b)$ der $\vec{F}$ har en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert på en omegn V om punktet

$$\vec{F}(\vec{a}, b) = (\vec{a}, f(\vec{a}, b)) = (\vec{a}, 0).$$

$\vec{G}$ må være på formen

$$\vec{G}(\vec{x}, z) = (\vec{x}, h(\vec{x}, z))$$

der $h : V \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige partielle deriverte.

La $\mathcal{U}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : (\vec{x}, 0) \in V\}$, og la

$$g(\vec{x}) = h(\vec{x}, 0) \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathcal{U}_0.$$

Hvis da $\vec{x} \in \mathcal{U}_0$ og $y \in \mathbb{R}$, har vi

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, y) = 0 &\iff \vec{F}(\vec{x}, y) = (\vec{x}, 0) \\ &\iff \vec{G}(\vec{x}, 0) = (\vec{x}, y) \\ &\iff h(\vec{x}, 0) = y \\ &\iff g(\vec{x}) = y. \quad \square \end{aligned}$$

eks. (Implisitt derivasjon)

En funksjon $z(x,y)$ tilfredsstiller likningen

$$x^2y^2z^3 = 2xz$$

Finn $\frac{\partial z}{\partial x}$

Løsn. Implisitt derivasjon mhp x :

$$2xy^2z^3 + x^2y^2 \cdot 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2z + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$x^2y^2 \cdot 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} = 2z - 2xy^2z^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z - 2xy^2z^3}{3x^2y^2z^2 - 2x}$$

nevneren

Kobling til teoremet :

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^3 - 2xz = 0$$

$z(x,y) = g(x,y)$ gir $f(x,y,g(x,y)) = 0$

Merk at : $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^2z^2 - 2x$