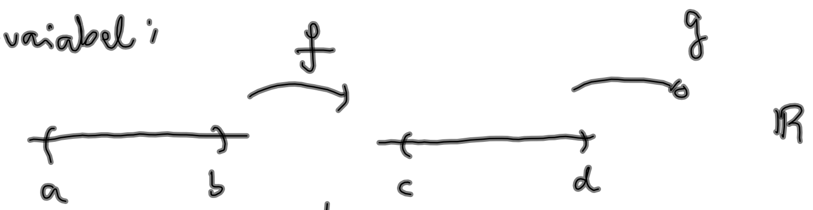
Skifte av variabel i trippelintegralet

Husk en-variabel:



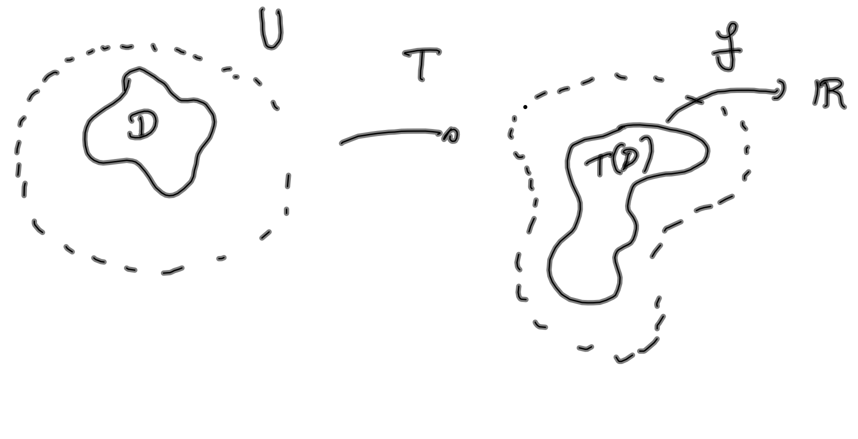
$$\int_c^d g(x)\,dx = \int_a^b g(f(t))\cdot f'(t)\,dt.$$

DEF: En begrenset mengde A i $\mathbb{R}^3$ er Jordan-målbar dersom $\iiint_A 1_A \,dx\,dy\,dz$ eksisterer.

Teorem 6.10.1 (Skifte av variabel)

La U være en åpen begrenset mengde i $\mathbb{R}^3$ og anta at $T: U \to \mathbb{R}^3$ er en kont. injektiv funksjon med kontinuerlige partiellderiverte og s.a. $\det T' \neq 0$ på hele U. Dersom $D \subset U$ er en Jordan-målbar mengde og f er kontinuerlig på $T(D)$ så er

$$\iiint_{T(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(T(u,v,w))\cdot|\det T'(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$



Eks: La D være parallellogrammet utspent av vektorene $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ og $(1,1,2)$, og la $f(x,y,z)=x^2\cdot y\cdot z^2$.

Finn $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

La A være matrisen $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$,

og la $T(u,v,w)=A\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$.

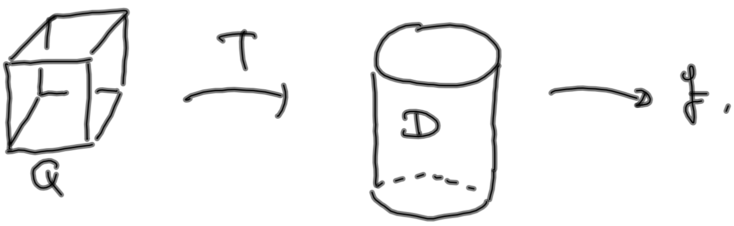
Her er $\det T'(u,v,w)=2$.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q f(T(u,v,w))\cdot 2\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (u+w)^2\cdot(v+w)\cdot 4w^2\,du\,dv\,dw.$$

$=$ Lett.

Integrasjon i sylinderkoordinater.

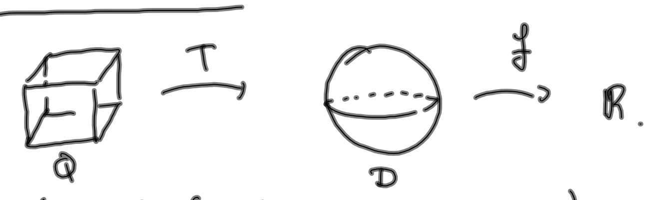


$T(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$\det T'(r,\theta,z)=r$.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q f(T(r,\theta,z))\cdot r\cdot dr\,d\theta\,dz.$$

Integrasjon i kulekoordinater



$$T(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\theta).$$

$$\det T'(\rho,\phi,\theta) = \rho^2 \cdot \sin\phi,$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q f(T(u,v,w)) \cdot \rho^2 \sin\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

$B(0,R)$

Eksempel: Regn ut volumet til kula med radius R.

$$\mathrm{Vol}(B(0,R)) = \iiint_{B(0,R)} 1 \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \; d\rho \cdot d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \rho^2 \sin\phi \; d\rho\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \int_0^\pi \sin\phi \, d\phi = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$$

Eksempel: Regn ut massen til kula med radius 1 der tettheten er gitt ved $x^2+y^2+z^2$.

$$\text{Massen} = \iiint_{B(0,1)} x^2+y^2+z^2 \; dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho^2\sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi)\rho^2 \sin\phi \; d..$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2\phi (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + \rho^2 \cos^2\phi)\, \rho^2 \sin\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \rho^4 \sin\phi \; d\rho\, d\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 2.$$