Oppgave 4.1.1

Vi skal løse likningssystemet

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 3 \\ 2x & +3y & -3z & = & -1 \\ -x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Gang den første likningen med -2 og legg resultatet til den andre likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ -x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Legg den første likningen til den tredje likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ & 4y & +2z & = & 4 \end{array}$$

Gang den andre likningen med 4 og legg resultatet til den tredje likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ & & -2z & = & -24 \end{array}$$

Den siste likningen sier at $z = 12$. Den andre og den første gir deretter

$$\begin{aligned} y &= 7 - z = -5 \\ x &= -2y + z + 3 = 10 + 12 + 3 = 25. \end{aligned}$$

$(x, y, z) = (25, -5, 12)$ er derfor en entydig løsning av likningssystemet.

Oppgave 4.1.4

Vi skriver systemet på matriseform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad & \overset{II+I}{\sim} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \\ & \overset{III+3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ & \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fra den siste likningen ser vi at systemet ikke har noen løsninger.

Oppgave 4.2.1

Alle matrisene bortsett fra C og F er på trappeform.

Oppgave 4.2.2

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4.2.5

Vi radreduserer den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Siden den siste søylen er en pivot-søyle, så er det klart at likningssystemet ikke har noen løsning.

Oppgave 4.2.9

a)

Vi har at

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}
&\overset{IV-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{III+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{IV-1/3III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{III/3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

Det gitte likningssystemet har matrisen fra a) som koeffisientmatrise. Fra trappeformen ser vi at systemet har uendelig mange løsninger. u kan velges fritt, og

$$
\begin{aligned}
z &= -u+2 \\
y &= -z-u+3 = u-2-u+3 = 1 \\
x &= -2y-2u+5 = -2-2u+5 = 3-2u.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4.3.1

A, B, D, E er på redusert trappeform.

Oppgave 4.3.2

a)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{II-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4.3.4

Den reduserte trappeformen til koeffisientmatrisen til likningssystemet er identitetsmatrisen i dette tilfellet, som lett kan sjekkes ved hjelp av Matlab. Derfor har systemet en unik løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3.

Matlab-kode

```
% Oppgave 4.3.3 a)
rref([1 3 -2 2 3; 0 2 -3 4 6; -2 3 1 -4 5; 0 -2 -1 -2 8; 2 3 1 0 -1])

% Oppgave 4.3.3 b)
rref([0.25 0.5 1.5 0.75; 1 0.55 0.7 0.25; -0.25 3 0.75 -0.1])

% Oppgave 4.3.3 c)
rref([1 2 0.5 3 -1 2; 2 0.5 -1 -1 2 3; 1 1 1 2 3 4; 2 -1 2 3 -2 0])
```

```
% Oppgave 4.3.4
rref([1 2 1; 2 4 3; -1 3 2])
```

Python-kode

```
from numpy import *
from MAT1120lib import rref

# Oppgave 4.3.3 a)
print rref([[1,3,-2,2,3],[0,2,-3,4,6],[-2,3,1,-4,5],[0,-2,-1,-2,8],[2,3,1,0,-1]])

# Oppgave 4.3.3 b)
print rref([[0.25,0.5,1.5,0.75],[1,0.55,0.7,0.25],[-0.25,3,0.75,-0.1]])

# Oppgave 4.3.3 c)
print rref([[1,2,0.5,3,-1,2],[2,0.5,-1,-1,2,3],[1,1,1,2,3,4],[2,-1,2,3,-2,0]])
```

```
from numpy import *
from MAT1120lib import rref

# Oppgave 4.3.4
print rref([[1,2,1],[2,4,3],[-1,3,2]])
```