5.) $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

a) $\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{9})^2$

$= \lambda^2 - \lambda - \frac{19}{324} = (\lambda + \frac{1}{18})(\lambda - \frac{19}{18})$

↓

2. grad formel

$\vec{v_1}$: $-\frac{1}{18} I - A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{v_2}$: $\frac{19}{18} I - A = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) x_n = # modtagelige efter 10n år

x_{n+1} = — " — 10(n+1)år = immune

u/ 10n år og nå modtagelige

$\frac{4}{9} y_n$

+ modtagelige efter 10n år

$\frac{7}{18} x_n$

+ nye modtagelige (fødsel og invandring)

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} (x_n + y_n) = \frac{1}{9} x_n + \frac{1}{9} y_n$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{4}{9}y_n + \frac{7}{18}x_n + \frac{1}{9}x_n + \frac{1}{9}y_n$$

$$= \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{9}y_n$$

---

immune etter $10(n+1)$ år $= y_{n+1}$

= immune etter $10n$ år + mottakelige etter $10n$, nå immune

$\frac{4}{9}y_n$ $\quad$ $\frac{1}{2}x_n$

+ nye immune (fødsel & innvandring)

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(x_n + y_n) = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{18}y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{4}{9}y_n + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{18}y_n$$

$$= \frac{5}{9}x_n + \frac{1}{2}y_n$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

---

c) Skriver $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ som lineær komb. av egenvektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \\ -3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \end{bmatrix}$$
