Lineæravbildninger (seksjon 1.9)

En funksjon $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en <u>lineæravbildning</u> dersom:

(i) $\vec{T}(c\vec{u}) = c\vec{T}(\vec{u})$ for alle $c \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\vec{T}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{T}(\vec{u}) + \vec{T}(\vec{v})$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

<u>Eksempel:</u> Anta at A er en $m \times n$-matrise. Hvis $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, så er $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\boxed{A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ - \; - \; - \\ a_{m1}x_1 + \cdots \end{pmatrix}}$$

Definer $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dette er en lineæravbildning fordi

(i) $\vec{T}(c\vec{u}) = A(c\vec{u}) = cA\vec{u} = c\vec{T}(\vec{u})$

(ii) $\vec{T}(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{T}(\vec{u}) + \vec{T}(\vec{v})$

<u>Lemma:</u> Hvis $\vec{T}$ er en lineæravbildning, så er

$$\vec{T}(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n) = c_1\vec{T}(\vec{u}_1) + c_2\vec{T}(\vec{u}_2) + \cdots + c_n\vec{T}(\vec{u}_n)$$

for alle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ og alle $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$.

<u>Bevis:</u> Vi har

$$\vec{T}(\underbrace{c_1\vec{u}_1}_{u} + \underbrace{c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n}_{v}) = \vec{T}(c_1\vec{u}_1) + \vec{T}(c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n)$$

$$= c_1\vec{T}(\vec{u}_1) + \vec{T}(\underbrace{c_2\vec{u}_2}_{u} + \underbrace{\cdots + c_n\vec{u}_n}_{v}) \quad \text{osv.}$$

Setning: Hvis $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning, så finnes det en $m \times n$-matrise A slik at

$$\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Hvis $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, så er den i-te søylen i A lik $\vec{T}(\vec{e}_i)$.

Bevis: Hvis

$$\vec{T}(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad \text{la } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

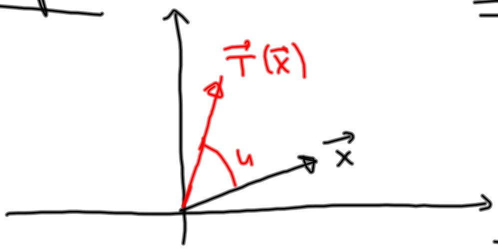
La $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ være vilkårlig vektor. Da er

$$\vec{T}(\vec{x}) = \vec{T}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\vec{T}(\vec{e}_1) + x_2\vec{T}(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\vec{T}(\vec{e}_n)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

som skulle vises.

Eksempel: $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dreier enhver vektor en vinkel u.



$\vec{T}$ er en lineæravbildning:

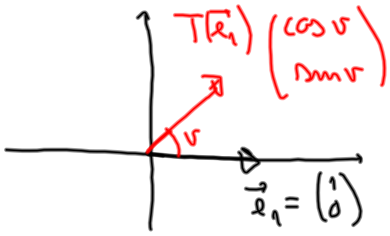
$$\vec{T}(c\vec{u}) = c\vec{T}(\vec{u})$$

$$\vec{T}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{T}(\vec{u})+\vec{T}(\vec{v})$$

Hva er matrisen til $\vec{T}$?

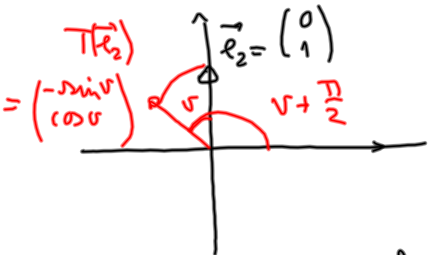
Første søylen $= \vec{T}(\vec{e}_1) = \vec{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

andre søylen $= \vec{T}(\vec{e}_2) = \vec{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\end{pmatrix}, \quad \vec{T}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}$$



Hvis vi dreier vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en vinkel u, får

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos v - y\sin v\\ x\sin v + y\cos v\end{pmatrix}$$

Hva skjer hvis vi først dreier $\vec{x}$ en vinkel u og deretter en vinkel v? To måter å tenke på:

(i) $A_v(A_u\vec{x}) = (A_vA_u)\vec{x}$

(ii) $A_{u+v}\vec{x}$

like for alle x, dvs $A_vA_u = A_{u+v}$

$$A_vA_u = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u\\ \sin u & \cos u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\cos v - \sin u\sin v & \cdots\\ \cos u\sin v + \sin u\cos v & \cdots\end{pmatrix}$$

$$A_{u+v} = \begin{pmatrix}\cos(u+v) & -\sin(u+v)\\ \sin(u+v) & \cos(u+v)\end{pmatrix}$$

$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v$

$\sin(u+v) = \cos u\sin v + \sin u\cos v$

Affinavbildninger (1.10)

Hvis $\vec T$ er en lineæravbildning, så $\vec T(\vec 0)=\vec 0$ (siden $\vec T(\vec 0) = A\vec 0 = \vec 0$). Dette er en svakhet i geometrisk sammenheng.

Definisjon: En funksjon $\vec F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ er en affinavbildning dersom

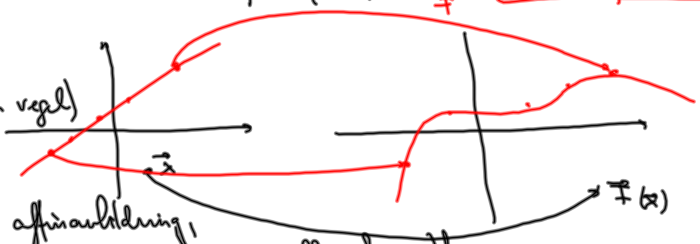
$$\vec F(\vec x) = A\vec x+\vec b$$

der A er en $m\times n$-matrise og $\vec b\in\mathbb{R}^m$

Hvis $\vec b=\vec 0$, har vi en lineæravbildning og hvis $A=I$, så er $\vec F$ en translasjon.

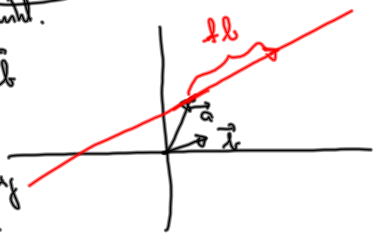
Hva skjer når vi bruker en funksjon på en linje? $\vec F$

Vi får (som regel) en kurve ut.



Hvis $\vec F$ er en affinavbildning, så vil resultatet være en rett linje eller et punkt.

Hva er en rett linje i $\mathbb{R}^n$? $\vec r(t) = \vec a + t\vec b$



Setning: Når vi bruker en affinavbildning på en rett linje blir resultatet enten en rett linje eller et punkt.

Bevis: La affinavbildningen være

$$\vec F(\vec x) = A\vec x+\vec c$$

og linjen

$$\vec r(t) = \vec a + t\vec b$$

Dermed er

$$\vec F(\vec r(t)) = A\vec r(t)+\vec c = A(\vec a+t\vec b)+\vec c = A\vec a + At\vec b+\vec c = \underbrace{A\vec a+\vec c} + t(A\vec b)$$

som er ligningen for linjen gjennom $A\vec a+\vec c$ og i retning $A\vec b$, bortsett fra hvis $A\vec b$ er lik $\vec 0$ for da er $\vec F(\vec r(t))$ konstant lik $A\vec a+\vec c$.

Observasjon: Hvis to linjer er parallelle, så er bildene deres parallelle.

$$\left.\begin{aligned}\vec r_1(t) &= \cancel{\vec b_1+t\vec a} = a_1+t b\\ \vec r_2(t) &= \cancel{\vec b_2+t\vec a} = a_2+t b\end{aligned}\right\}\text{ vektorparallell til bildet } Ab$$