Cauchy-følger (etterslep)

Skal vise: Enhver Cauchy-følge er konvergent

Bevis A. Cauchy-følger er begrenset

Velg $\varepsilon = 1$ (gjerne noe annet). Fra nr N

så vil $|\bar{x}_n - \bar{x}_k| < 1$ $\quad n,k \geq N \quad n > k$

$$\Rightarrow |\bar{x}_n| = |\underline{\bar{x}_N} + \underline{\bar{x}_n - \bar{x}_N}| \leq |\bar{x}_N| + |\bar{x}_n - \bar{x}_N| < |\bar{x}_N| + 1 = M$$

B. Følgen har en konvergent delfølge $\{x_{n_i}\} \to \bar{x}$

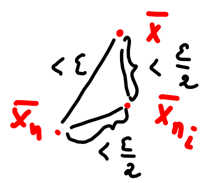
C. Opprinnelige følgen konvergerer mot $\bar{x}$

Gitt $\varepsilon > 0$. Da $\exists N$ slik at $|\bar{x}_n - \bar{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n,k \geq N$

B. gir $\exists\, n_i \geq N$ og slik at $|\bar{x}_{n_i} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |\bar{x}_n - \bar{x}| = |\bar{x}_n - \bar{x}_{n_i} + \bar{x}_{n_i} - \bar{x}|$$

$$\leq |\bar{x}_n - \bar{x}_{n_i}| + |x_{n_i} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



Iterasjon

Def $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : A \to \mathbb{R}^m$. $\bar{x} \in A$ er et FIKSPUNKT for F dersom $F(\bar{x}) = \bar{x}$

Def $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : A \to A$. F kalles en KONTRAKSJON dersom $\exists\ 0 < K < 1$ (kontraksjonsfaktor) slik at

$$|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| \leq K \cdot |\bar{x} - \bar{y}| \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in A$$

Lemma: $F : A \to A$ kontraksjon faktor: K. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A$ og $n \in \mathbb{N}$, så gil

$$|F^n(\bar{x}) - F^n(\bar{y})| \leq K^n |\bar{x} - \bar{y}|$$

Banachs fixpunktsteorem

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : A \to A$ kontraksjon, K

1) F har nøyaktig ett fixpunkt $\bar{x}$ i A
2) $\forall \bar{x}_0 \in A$ $\{\bar{x}_n = F^n(\bar{x}_0)\} \longrightarrow \bar{x}$ og

$$|\bar{x}_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \quad \forall n$$

Bevis: A. F kan ha max ett fixpunkt

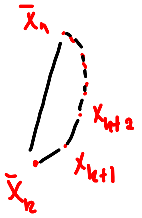
Anta to, $\bar{x}, \bar{y}$, dvs $F(\bar{x}) = \bar{x}$, $F(\bar{y}) = \bar{y}$.

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |F(\bar{x}) - F(\bar{y})| \leq K|\bar{x} - \bar{y}|, \quad K < 1 \qquad \text{Motsigelse}$$

B $\{\bar{x}_n\}$ er Cauchy $\forall$ startpunkter $\bar{x}_0$

OBS, skal være n-1

$$n > k \qquad |\bar{x}_n - \bar{x}_k| = |\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_{n-2} + \cdots + \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k|$$



$$\leq |\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}| + |\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-2}| + \cdots + |\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k|$$

$$\leq K^n|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| + K^{n-1}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| + \cdots + K^{k+1}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|$$

$$= (K^n + K^{n-1} + \cdots + K^{k+1})|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|$$

$$= K^{k+1} \cdot \frac{1}{1-K}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \longrightarrow 0$$

C. Grensepunktet er et fixpunkt

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(\bar{x}_n) = F(\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n) = F(\bar{x})$$

D.

$$|x_n - x_k| \leq \frac{K^{k+1}}{1-K}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \qquad n > k$$

$$\Rightarrow |\bar{x} - \bar{x}_k| \leq \frac{K^{k+1}}{1-K}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|$$

Newtons metode i flere variable

Eks

$$3x^2y + 2e^{z+x} = 0$$
$$2z^2\cos(xy^2+z) + e^x = 0$$
$$y^3(y^2+z) = 0$$

Løs!

Linearisering:

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$T_{\bar{x}_0}F(\bar{x}) = F(\bar{x}_0) + F'(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)$$

$T_{\bar{x}_0}F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ affine (linear opp til translasjon)

Def (Newtons metode)

$F: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$

deriverbar

$\bar{x}_0 \in A$ (startpunkt)

Newtons metode gir oss en følge

$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$

der $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - F'(\bar{x}_n)^{-1} \cdot F(\bar{x}_n)$

Motivasjon:
$$G(\bar{x}) = \bar{x} - F'(\bar{x})^{-1} \cdot F(\bar{x})$$

Newtons metode er fikspunktsiterasjon av G.

Kantorovitsj teorem (Konvergens av Newtons metode)

$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$

deriverbar

åpen, konveks delmengde av $\mathbb{R}^m$

$\bar{x}_0 \in U$

1) $\exists M ; \ |F'(\bar{x}) - F'(\bar{y})| \leq M \cdot |\bar{x} - \bar{y}| \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$

(oppfylt for to ganger deriverbare fcn. C^2)

2) $F'(\bar{x}_0)$ er invertibel $|F'(\bar{x}_0)^{-1}| \leq K$

3) $\overline{B}\left(\bar{x}_0, \frac{1}{KM}\right) \subseteq U$

lukket

4) Hvis $|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| = \left|F'(\bar{x}_0)^{-1} \cdot F(\bar{x}_0)\right| \leq \frac{1}{2KM}$ så er $F'(\bar{x})$ inverterbar $\forall \bar{x} \in B\left(\bar{x}_0, \frac{1}{KM}\right)$

Da konverger Newtons metode $\{\bar{x}_i\} \to \bar{x}$.