) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) - \frac{x^2}{2} + y^2$

a) Finn stasjonære pkt til f og avgjør om de er lokale maxpkt, lokale minpkt. eller sadelpunkter:

ne sjonære pkt=

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+1} - x = 0$$

e ell- ule 0:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+1} + 2y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} = x & (\mathrm{I}) \\[2ex] \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} = -2y & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

eller:

- $x=0,\ y=0$ er en løsning.
- Er $x=0,\ y\neq 0$ mulig? $x=0 \Rightarrow (\mathrm{I})$ OK,

(II): $\dfrac{2y}{y^2+1} = -2y$

$$\Updownarrow (y\neq 0)$$

$$\frac{2}{y^2+1} = -2 \quad \text{Umulig!}$$

Er $y=0,\ x\neq 0$ mulig? $y=0 \Rightarrow (\mathrm{II})$ OK,

(I): $\dfrac{2x}{x^2+1} = x \underset{(x\neq 0)}{\Rightarrow} \dfrac{2}{x^2+1} = 1$

$$x^2+1 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$\underline{x = \pm 1}$$

- Hva hvis $x, y \neq 0$?

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2+1} = 1 \\[2ex] \dfrac{2}{x^2+y^2+1} = -1 \end{cases}$$

Umulig!

$\Rightarrow$ Stasjonære pkt: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$.

Må finne ut om disse er min, max el. sadelpkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 4x^2}{(x^2+y^2+1)^2} - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Litt regning her!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} + 2$$

$$\Downarrow$$

Hessematrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Siden vi har diagonalmatrise er egenverdiene diagonal-elementene $\Rightarrow$ $Hf(0,0)$ har str. pos. egenverdier, så $(0,0)$ er et lokalt minimumspunkt, mens $Hf(1,0)$ og $Hf(-1,0)$ har både pos. og neg. egenverdier, så $(1,0)$ og $(-1,0)$ er sadelpkt'er.

b) Finn: max og min til f på $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Merk: A er lukket og begrenset (inni sirkel) og f er kont, så fra ekstremalverdisetet har f max. og min. pkt.

I polarkoordinater:

$$f(r,\theta) = \ln(r^2+1) - \frac{r^2\cos^2\theta}{2} + r^2\sin^2\theta$$

$$= \ln(r^2+1) + r^2\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

Holder å se på randen av A, dvs. der $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$. Da er

ikke neg. radius!

Dette er nok pga. a) der vi har funnet alle kandidater ubegr. der i indre pkt.

$$f(1,\theta) = \ln(2) - \frac{\cos^2\theta}{2} + \sin^2\theta$$

$$\Downarrow$$

$$f'(\theta) = \cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

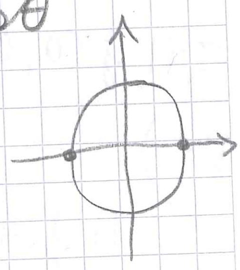
$$= 3\cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\theta = 0 \text{ eller } \sin\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$



I vanlige koordinater er dette punktene:

NB: Fant disse i a) også

$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1).$

Hva er maks og hva er min?

$$f(1,0) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$$

$$f(-1,0) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$$

$$f(0,1) = \ln(2) + 1$$

$$f(0,-1) = \ln(2) + 1$$

Har i tillegg pkt $(0,0)$ fra a);

$$f(0,0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$(0, \pm 1)$ er maksimumspunkter og $(0,0)$ er et minimumspunkt.