Kjerneregelen

To former:

Komponentform: $h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\vec g(\vec x))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\vec x) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\vec g(\vec x))\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\vec x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\vec g(\vec x))\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\vec x)$$

Matriseform: $\vec H = \vec F(\vec G(\vec x))$

$$\vec H'(\vec x) = \vec F'(\vec G(\vec x))\vec G'(\vec x)$$

Bevisskisse for matriseformen: Hva er $\vec H'(\vec a)$? Den eneste matrisen slik at

$$\vec H(\vec a+\vec r) - \vec H(\vec a) = \underline{\vec H'(\vec a)\vec r} + \vec\sigma_H(\vec r) \quad \text{der} \quad \frac{|\vec\sigma_H(\vec r)|}{|\vec r|} \to 0 \text{ når } \vec r \to \vec 0.$$

Vet at $\vec G(\vec a+\vec r) - \vec G(\vec a) = \vec G'(\vec a)\vec r + \vec\sigma_G(\vec r)$ → går mot 0 fortere enn $\vec r$.

Hvis $\vec b = \vec G(\vec a)$: $\vec F(\vec b+\vec s) - \vec F(\vec b) = \vec F'(\vec b)\vec s + \vec\sigma_F(\vec s)$ → går mot 0 fortere enn $\vec s$.

Vi har: $\vec H(\vec a+\vec r) - \vec H(\vec a) = \vec F(\vec G(\vec a+\vec r)) - \vec F(\vec G(\vec a))$

$$= \vec F(\underbrace{\vec G(\vec a)}_{\vec b} + \underbrace{\vec G'(\vec a)\vec r + \vec\sigma_G(\vec r)}_{\vec s}) - \vec F(\vec G(\vec a))$$

$$= \cancel{\vec F(\vec G(\vec a))} + \vec F'(\vec G(\vec a))[\vec G'(\vec a)\vec r + \vec\sigma_G(\vec r)] + \vec\sigma_F(\vec s) - \cancel{\vec F(\vec G(\vec a))}$$

$$= \vec F'(\vec G(\vec a))\vec G'(\vec a)\vec r + \underbrace{\vec F'(\vec G(\vec a))\vec\sigma_G(\vec r) + \vec\sigma_F(\vec s)}$$

$$= \underbrace{\vec F'(\vec G(\vec a))\vec G'(\vec a)}_{\vec H'(\vec a)}\vec r + \underbrace{\vec\sigma_H(\vec r)}$$

→ går dette mot 0 raskere enn $\vec r$?