MAT 1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 22. februar 2018, klokken 14:30 i Devilry (https://devilry.ifi.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal bestå av:

- én felles PDF-fil som besvarer oppgavene 1, 3 og 4
- en kodefil i Matlab eller Python som besvarer oppgave 2.

Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal innehold navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist
Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1

Vi studerer en koloni av den sjeldne kaninrasen *Alterba Retull*, og vi deler hunnkaninene inn i tre aldersgrupper: Unge, voksne og gamle. Vi antar at hver hunnkanin får 9 unger i løpet av sin tid i voksengruppen, mens unge og gamle kaniner ikke får unger. Vi regner tiden i sesonger $t = n$, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Alle hunnkaniner som er unge ved tid $t = n$ er voksne ved tid $t = n+1$, og alle som er voksne ved tid $t = n$, er gamle ved tid $t = n+1$. Alle hunnkaniner som er gamle ved tid $t = n$, er døde ved tid $t = n+1$. Alle hunnkaniner lever altså i tre sesonger.

a) Begrunn at $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ der $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) Finn egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ og tilhørende egenvektorer for *A*. Hvis tilstanden en sesong er på formen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

for $k \neq 0$, hva er tilstanden neste sesong?

c) Løs matriselikningen $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$. Er matrisen *A* inverterbar?

d) Finn en basis for $\mathbf{R}^3$ bestående av egenvektorer for *A* og en matrise *M* slik at

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

e) Anta at det ved tid $t = 0$ er kun 18 unge hunnkaniner i kolonien, altså ingen voksne eller gamle hunnkaniner. Finn x_n, y_n og z_n uttrykt ved *n*.

Oppgave 2

I denne oppgaven er det ikke lov å bruke ferdige Matlab- eller Python-kommandoer, for eksempel eig(M), det(M) eller rref(M), programmene skal gjøre beregningene fra grunnen av.

a) Skriv et Matlab-program eller et Python-program som tar fire tall *a*, *b*, *c*, *d* som inndata, og som returnerer egenverdiene til matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b) Utvid programmet fra a) slik at det også returnerer en egenvektor til en av egenverdiene for matrisen. Legg ved kjøringer av programmet ditt som kommentarer i kodefilen din for disse fire matrisene: $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3

La *C* være den lukkede skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 4$ og planet $z = y + 3$ i $\mathbf{R}^3$.

a) Finn en parametrisering av *C* som går i positiv omløpsretning (mot klokken) i forhold til *xy*-planet.

b) Finn linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ i positiv omløpsretning, der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + x\ \mathbf{k}.$$

c) Avgjør om $\mathbf{F}$ er konservativt.

Oppgave 4

Det var en gang et samfunn med snille biller og slemme biller. La x_n og y_n være henholdsvis antall snille og slemme biller ved tid $t = n$, der tiden måles i uker. Hvis de lever under gode forhold, førtidobler begge typene biller sitt antall på en uke. Men nå lever de snille og de slemme sammen. De snille påvirkes positivt av dette, og vi antar derfor at

$$x_{n+1} = 40x_n + y_n$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$, der korreksjonsleddet til høyre skyldes at snille biller liker å ha andre biller i nærheten av seg. De slemme billene misliker derimot dette, og vi antar derfor at

$$y_{n+1} = 40y_n - x_n$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$. I uke 0 er det hele 80 slemme og kun 2 snille biller.

a) Begrunn at vi for $n = 0, 1, 2, \dots$ har
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ der } M = \begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen *M*. (Hint: De blir komplekse.)

c) Skriv startvektoren
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix}$$
som en lineærkombinasjon av egenvektorer for matrisen *M*, og bruk dette til å vise at
$$y_n = (40+i)^{n+1} + (40-i)^{n+1} \quad \text{for } n \ge 0 .$$

d) Vis at uttrykket for y_n fra c) kan skrives om til
$$y_n = 2 \cdot 1601^{(n+1)/2} \cos[(n+1)\theta], \quad \text{der vi har } \theta = \arccos\sqrt{\frac{1600}{1601}} .$$
Bruk dette til å beregne hvor mange uker det tar før de slemme billene er utryddet.

SLUTT