Kjente rekker som kan brukes som utgangspunkt for triksing

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad x \in (-1, 1]$$

eks. Finn Taylorrekken til $f(x) = \frac{1}{5+x^2}$ i $a=0$, og vis at den konvergerer mot $f(x)$ for $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Løsn f likner på summen $\frac{1}{1-x}$ av geo. rekke. Presser inn:

$$f(x) = \frac{1}{5+x^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{5}x^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5}x^2\right)} \qquad \text{geo. med } \left(-\frac{1}{5}x^2\right) \text{ for } x$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}x^2\right)^n \qquad \text{satte inn i formelen}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{5^n} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{5^{n+1}}}}$$

Rekken konvergerer mot $f(x)$ for $\left|-\frac{1}{5}x^2\right| < 1$, dvs. $|x| < \sqrt{5}$

Ved unikhet av Taylorrekker er dette Taylorrekken til f i $a=0$. □

eks. Finn Taylorrekken i $a=0$ for funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 8 & \text{for } x \neq 0 \\ 9 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Løsn. Vi har

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin x}{x} + 8 = 9 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Så: $f(x) = 9 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$ for alle $x \neq 0$.

Siden $f(0) = 9$, holder rekkeuttrykket for $x=0$ også. Dermed har vi skrevet $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ som summen av en potensrekke med sentrum 0. Ved unikhet av Taylorrekker må da rekken vår være Taylorrekken for f i $a=0$. $\square$

eks. Anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(n!)^2} \quad \text{for alle } x.$$

Finn rekker for $f''(x)$ og $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ gyldige for alle x.

Løsn. Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)x^{4n}}{(n!)^2} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)4n\,x^{4n-1}}{(n!)^2}$$

Leddvis integrasjon gir

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(n!)^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^{4n+2}}{(4n+2)(n!)^2} \right]_0^x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)(n!)^2} \quad \square$$

$\boxed{\text{Finne summen av potensrekker}}$

1. Absorber faktorer av typen 2^n, 3^n etc. og flytt sentrum av potensrekken til 0 ved å innføre en ny variabel u. Sett "overskytende" potenser utenfor. Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot u^n$$

$$\boxed{u = \frac{x-1}{2}}$$

2. "Plukk opp" eventuelle faktorer av typen n, $n+1$ etc. ved å bruke leddvis derivasjon/integrasjon.

3. Prøv å gjøre rekken du sitter igjen med, om til en av de kjente rekkene.

$\boxed{\text{Finne summen av "vanlige" rekker}}$

Se om du kan oppfatte rekken som en potensrekke med en spesiell verdi for x innsatt. Bruk faktorer av typen 2^n, 3^n etc. til å "bygge opp" x-uttrykket. Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{kan oppfattes som} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot x^n$$

med $x = \frac{1}{2}$ innsatt.

eks. Finn summen av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n}$

Løsn. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\, 2^n} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!}$

$\boxed{u = \frac{x}{2}}$ $= x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$

$\boxed{\text{rekken for } e^u}$ $= x^5 \cdot e^u = \underline{\underline{x^5 e^{x/2}}}$ for alle x. □

eks. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-1}(2n+2)}$$

Løsn. Rekken kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{4^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$$

Denne kan oppfattes som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-1} \quad \text{med } x = \frac{1}{4} \text{ innsatt.}$$

Finner summen av potensrekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-1} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2}$$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x (x^3 + x^5 + x^7 + \dots)\, dx$$

$\boxed{\text{geo. rekke med } a = x^3 \text{ og } r = x^2}$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{x^3}{1-x^2}\, dx$$

Dette integralet kan løses ved substitusjon $u = x^2$ og deretter polynomdivisjon. Sett inn $x = \frac{1}{4}$ etter integrasjonen.

Summen blir $\underline{\underline{32 \ln\left(\frac{16}{15}\right) - 2}}$ □