Kap. 4 Lineær algebra i $\mathbb{R}^n$

sek. 4.1 Hvordan løser vi generelle ligningssystemer på en systematisk måte. Gauss-eliminasjon.

Andre ting vi kommer til: invertere matriser, Determinanter, Egenvektor / egenverdier

Ide bak Gauss-eliminasjon:
Omformer i flere steg et ligningssystem til et enklere et.
Eliminerer variable i ligningene under
1. eliminerer x fra likning 2, 3, 4, ...
2. eliminerer y fra 3, 4, 5, ...
3. eliminere z fra likning 4, 5, 6, ...

Eksempel
$$\begin{aligned} (I)&\quad y+z=5 \\ II&\quad x-y+2z=5 \\ (III)&\quad 3x+y+z=8 \end{aligned}$$

Bytt om (I) og (II):
$$\begin{aligned} x-y+2z&=5 \\ y+z&=5 \\ 3x+y+z&=8 \end{aligned}$$

(III) + (-3) I
$$\begin{aligned} x-y+2z&=5 \\ y+z&=5 \\ 4y-5z&=-7 \end{aligned}$$
ferdig med steg 1

III + (-4) II
$$\begin{aligned} x-y+2z&=5 \\ y+z&=5 \\ -9z&=-27 \end{aligned}$$
ferdig med steg 2

I Gauss-eliminasjon vil vi også ha en <u>ener</u> på første plassen der det ikke er 0:

III $\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$
$$\begin{aligned} 1x-y+2z&=5 \\ 0x\ \ y+z&=5 \\ 0x\ 0\cdot y\ \ z&=3 \end{aligned}$$

Dette kalles for en trappeform. (skal ha ledende enere, og nuller under de ledende enerne.

Lett å løse likningssystemet når det er på trappeform:
Fra siste likning: $z=\underline{3}$
fra andre likning: $y+z=5 \Rightarrow y=5-z=2$
fra første likning: $x-y+2z=5 \Rightarrow x=y-2z+5=2-6+5=1$
Løsning: $\underline{x=1,\ y=2,\ z=3}$

<u>Alle</u> likningssystemer kan reduseres til trappeform.
Har brukt tre typer operasjoner:
1. Bytte om to likninger
2. Gange en likning med et tall $\neq 0$
3. Legge til et multiplum av en likning til en annen.

Disse operasjonene endrer ikke på løsningene til systemet.

La oss se på:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & x+y+z &= 3 \\ &(\mathrm{II}) & x-y-z &= 3 \\ &(\mathrm{III}) & y+z &= 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{II}+(-1)\mathrm{I}$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -2y-2z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -2y-2z &= 0 \\ 0 &= 0 \longrightarrow \text{kan droppes} \end{aligned}$$

$(-\frac{1}{2})\cdot\mathrm{II}$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ y+z &= 0 \end{aligned}$$

Uendelig mange løsninger: Kan velge z vilkårlig, og da vil $\underline{y=-z}$, $x=-y-z+3=\underline{3}$ være en løsning

$$x + y + z = 3$$
$$x - y - z = 3$$
$$y + z = 1$$

---

som over: $x + y + z = 3$

$II + (-1)I$ $\quad -2y - 2z = 3$

$y + z = 1$

$III + (\frac{1}{2})II$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2y - 2z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Her er det ingen løsninger.

Hvorfor alltid 0, 1, eller uendelig mange løsninger?

La oss se på

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Dette beskriver skjæringen mellom tre plan i rommet.

Skjæringen mellom de to første kan bli:

1. Ingenting (parallelle og forskjellige)
2. Hele planet (like)
3. En rett linje

skjæring av disse med det tredje planet (likning 3):

1. Ingenting.
2. Ingenting / hele planet eller rett linje
3. Ingenting, en rett linje, eller ett punkt

Ser at det alltid er enten 0, 1, eller uendelig mange løsninger.

Vil skrive
$$\begin{aligned} y+z &= 5 \\ x-y+2z &= 5 \\ 3x+y+z &= 8 \end{aligned}$$
på matriseform.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ kalles for koeffisientmatrisen til systemet.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ er høyresiden i systemet.

$(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ kalles for den utvidede matrisen til systemet.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ en $m \times n$ matrise, koeffisientmatrisen for et system av m likninger med n ukjente.

Radoperasjoner: Tre typer:
(i): Bytte om to rader
(ii): Gange en rad med et tall $\neq 0$
(iii): Legge til et multiplum av en rad til en annen.

Definisjon 4.2.1 Vi sier at A og B er radekvivalente ($A \sim B$) hvis det finnes en sekvens av radoperasjoner som forandler A til B.

Første systemet vi så på:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + (-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + (-4)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{9})III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Kan forvandle B tilbake til A ved å gjøre inverse radoperasjoner i motsatt rekkefølge:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{(-9)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + 4II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + 3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Def 4.2.4

En matrise er på trappeform hvis:

(i) en rad består enten av bare nuller, eller så er første ikke-null en ener

(ii) Enhver rad som ikke bare er nuller, begynner med minst en null mer enn raden over.

Første ikke-null i en rad kalles for et pivot-element, og tilhørende søyle kalles en pivotsøyle.

Matriser på trappeform: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ikke på trappeform: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$