3.6.8 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Deriverer begge sider:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'(x)}{b^2} = 0 \qquad \text{Sett inn } (x_0, y_0)$$

$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0\,y'(x_0)}{b^2} = 0 \Rightarrow \underline{y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}}$$

Tangent: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0 x}{y_0} + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0} + y_0,$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0 x}{y_0} + \frac{b^2}{y_0}\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0 x}{y_0} + \frac{b^2}{y_0}$$

$$y + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0 x}{y_0} = \frac{b^2}{y_0} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1}}$$

3.6.9 $y^2 = 4ax$, ser på (x_0, y_0) | evt: $2yy'(x) = 4a$

$y'(x) = \frac{4a}{2y}$

$\Downarrow$

$y = \pm\sqrt{4ax}$. Anta først $y_0 > 0$, $a > 0$ $(\Rightarrow x_0 > 0)$

$\Rightarrow y_0 = \sqrt{4ax_0} \Rightarrow y_0'(x_0) = \frac{4a}{2\sqrt{4ax_0}} = \frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}$

Tangent: $y - y_0 = \frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}(x - x_0)$ $\rightarrow \frac{4a}{2y_0}$

$y = \frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}(x - x_0) + \sqrt{4ax_0}$

skjæring x-akse: Sett inn $y = 0$

$\frac{2a}{\sqrt{4ax_0}}(x - x_0) + \sqrt{4ax_0} = 0$

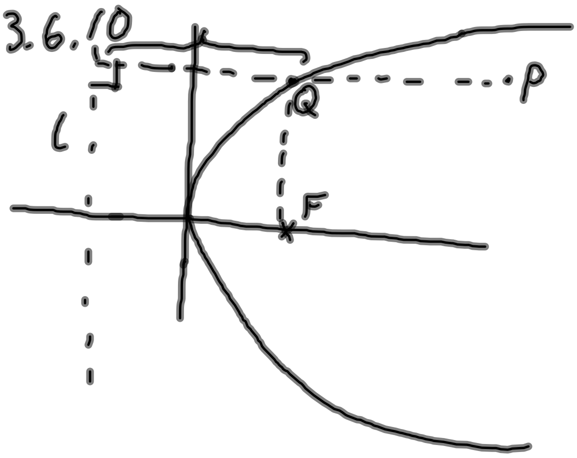
$x - x_0 = -\frac{4ax_0}{2a} = -2x_0$

$x - x_0 = -2x_0 \Rightarrow x = -x_0$

$\Rightarrow \underline{(-x_0, 0)}$ er skjæringspunkt med x-aksen

De andre tilfellene $(a < 0,\ y_0 < 0)$ følger på samme måte

3.6.10



For hvilken Q er

$|PQ| + |QF|$ minst?

$$\|$$

$|PQ| + |QL| \geq |PL|$

med likhet hvis og bare hvis PQ, QL ligger på samme rette linje.

Vi må velge Q slik at den ligger på normalen ned på L.

3.6.6 $x^2+4x+2y-4=0$ $\quad\left(y^2=\pm 4ax : \begin{matrix}\text{venstre}\\ \text{høyre}\end{matrix}\right)$

$x^2+4x+4+2y-4-4=0$

$(x+2)^2+2y-8=0$

$(x+2)^2=-2y+8=-2(y-4)=-4\cdot\frac{1}{2}(y-4)$

parabel med $\underline{\underline{\text{toppunkt } (-2,4)}}$, $\underline{\underline{\text{brennvidde } \frac{1}{2}}}$

hulning nedover

brennpunkt: $(-2,4)+(0,-\frac{1}{2})=\underline{(-2,\frac{7}{2})}$

3.7.1

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$

nivåkurver: $4x^2+3y^2 = c \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{c}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{c}{3}} = 1$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2} = 1$$

Store halvakse: $\sqrt{\frac{c}{3}}$

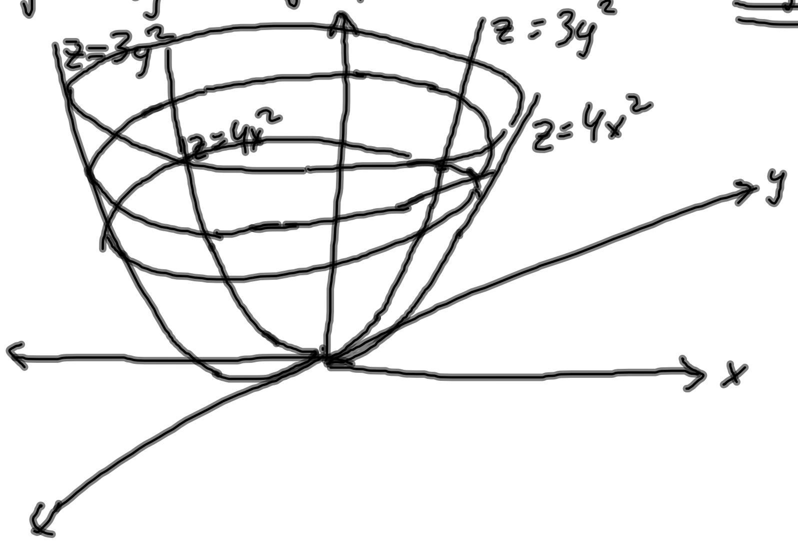
lille halvakse: $\frac{\sqrt{c}}{2}$

$c<0$: Ingen punkter i nivåkurven

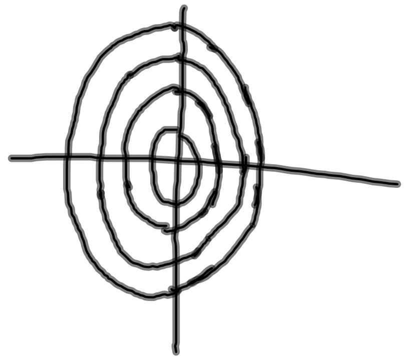
$c=0$: nivåkurven er $(0,0)$

Skjæring med xz-planet: $y=0 \Rightarrow \underline{\underline{4x^2 = c = z}}$

Skjæring med yz-planet: $x=0 \Rightarrow \underline{\underline{3y^2 = c = z}}$

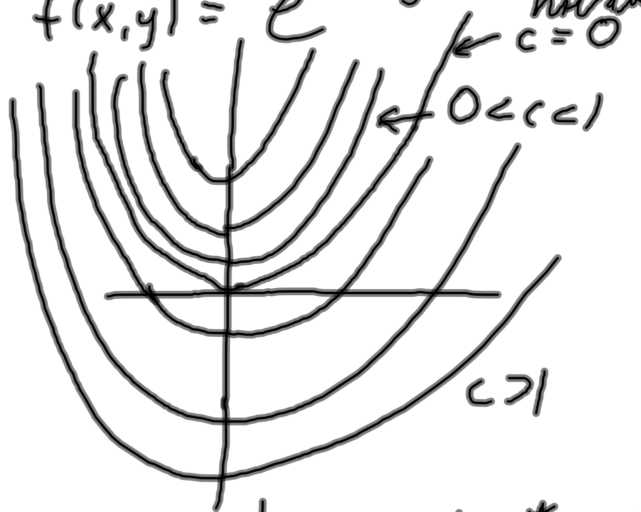


2-dim:



3.7.1 d)

$f(x,y) = e^{x^2-y}$



nivåkurver: $e^{x^2-y} = c$

$x^2 - y = \ln c$

$y = x^2 - \ln c$

$c \le 0$: Ingen punkter

$0<c<1$: $\ln c < 0 \Rightarrow -\ln c > 0$

$c \ge 1$: $\ln c > 0 \Rightarrow -\ln c < 0$

Skjæring med xz-planet: $y=0$

Skjæring med yz-planet: $x=0$

$f(x,y) = e^{x^2-y}$

$y=0 \Rightarrow z = e^{x^2}$

$x=0 \Rightarrow z = e^{-y}$

3.7.2

e) $f(x,y) = \ln(xy) = c \qquad xy = e^c \Rightarrow y = \frac{e^c}{x}$

skjæring ~~med~~ med xz-aksen

$y=0$ er ikke i D_f

$x=0$ er ikke i D_f

3.7.3e)

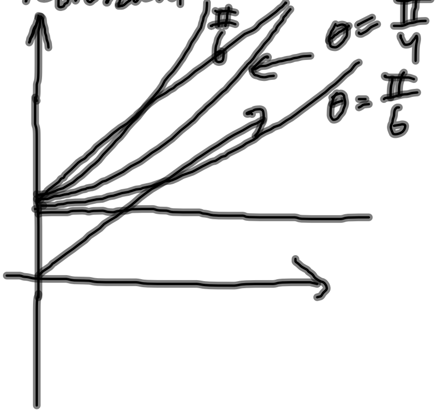
$$f(x,y) = e^{xy} = c \qquad xy = \ln c \qquad y = \frac{\ln c}{x}$$

$$= e^{r\cos\theta\, r\sin\theta} = e^{r^2 \sin\theta \cos\theta}$$

$$= e^{\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta}$$

θ = konstant: Får kurver på formen $z = e^{dr^2}$

r = konstant: Får kurver på formen $z = e^{d \sin 2\theta}$



$\theta = 0 \qquad e^0 = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$: vokser raskest med r her

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $e^0 = 1$