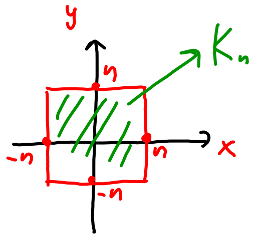
Uegentlige integraler i planet (6.1)

$$K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq n\}$$



Definisjon (6.8.1)

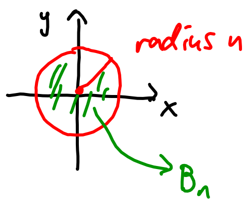
La $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være slik at $A \cap K_n$ er Jordan-målbar for alle $n \in \mathbb{N}$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en ikke-negativ, kontinuerlig funksjon. Vi definerer

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{A \cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

hvis grenseverdien fins. Vi sier da at det uegentlige integralet til venstre konvergerer

Setning 6.8.3

Kan erstatte K_n med $B(\vec{0}, n)$ (sirkelskiver med radius n og sentrum i origo i definisjonen ovenfor)



Definisjon 6.8.5

Hvis f har negative verdier, definerer vi et uekte integral av f over A ved

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f_+(x,y)\,dx\,dy - \iint_A f_-(x,y)\,dx\,dy$$

gitt at de to integralene til høyre konvergerer. Her er

$$f_+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{hvis } f(x,y) > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f_-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & \text{hvis } f(x,y) < 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

eks. 6.8.4

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{B(\vec{0},n)} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$$

Polarkoordinater:
$r \in [0,n]$
$\theta \in [0, 2\pi)$
beskrivelse av $B(\vec{0},n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} \cdot \underset{|J|}{r}\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-r^2/2} \cdot r\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \Big[-e^{-r^2/2} \Big]_{r=0}^{r=n}$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \Big[-\underbrace{e^{-n^2/2}}_{\to 0} - \left(-e^0\right) \Big]$$

$$= 2\pi \cdot \left(-(-1)\right) = \underline{\underline{2\pi}} \qquad (*)$$

Samtidig er

$$\iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \int_{-n}^{n} \left[\int_{-n}^{n} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx \right] dy$$

$$= \int_{-n}^{n} e^{-y^2/2} \left[\int_{-n}^{n} e^{-x^2/2}\,dx \right] dy$$

$$= \left[\int_{-n}^{n} e^{-x^2/2}\,dx \right] \cdot \left[\int_{-n}^{n} e^{-y^2/2}\,dy \right]$$

like

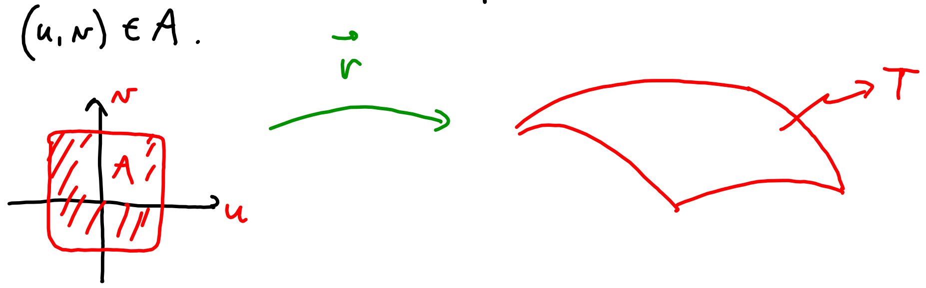
Lar vi nå $n \to \infty$ og sammenlikner med $(*)$, ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}, \quad \text{altså} \quad \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1}$$

Eksempel på et uegentlig integral der integranden går mot ∞:
Eks. 6.8.6 i boken.

Flateintegraler (6.4.3 og 6.4.4)

La $T \subseteq \mathbb{R}^3$ være en flate parametrisert ved $\vec{r}(u,v)$ for $(u,v) \in A$.



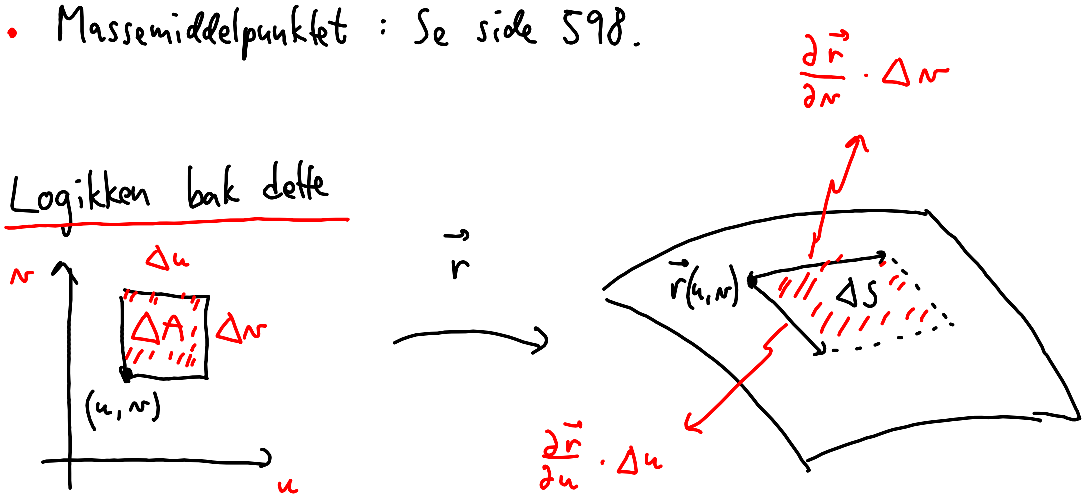
La f være en kontinuerlig skalarfunksjon definert på T. Da er flateintegralet til f over T definert ved

$$\iint_T f(x,y,z)\,dS \overset{\text{def}}{=} \iint_A f(\vec{r}(u,v)) \cdot \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

Med arealet av T menes $\iint_T 1\,dS$

- Hvis $f(x,y,z)$ måler massetetthet langs T, kan $\iint_T f(x,y,z)\,dS$ tolkes som massen til T.
- Massemiddelpunktet: Se side 598.

Logikken bak dette

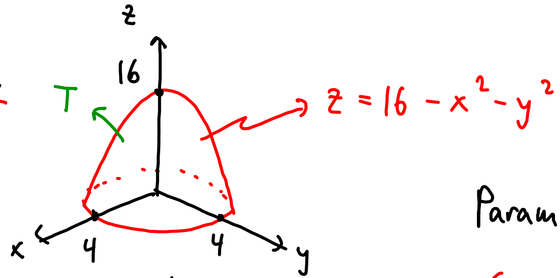


$$\Delta S \approx \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

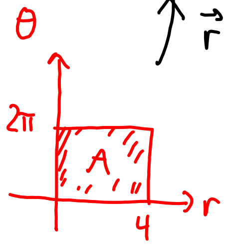
eks. La T være den delen av flaten $z = 16 - x^2 - y^2$ som oppfyller $z \geq 0$. Skal finne

$$\iint_T xy \, dS$$

Løsn.



$\vec{r} = (x, y, z)$



Parametrisering av T:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 16 - (x^2+y^2) = 16 - r^2 \end{cases}$$

for $\begin{cases} r \in [0, 4] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left| \left(2r^2\cos\theta, \; -2r^2\sin\theta, \; \overbrace{r\cos^2\theta + r\sin^2\theta}^{r}\right) \right|$$

$$= \sqrt{\underbrace{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta}_{4r^4} + r^2}$$

$$= \sqrt{r^2(4r^2+1)} = r\sqrt{4r^2+1}$$

Så

$$\iint_T xy \, dS = \int_0^4 \left[\int_0^{2\pi} \overbrace{(r\cos\theta)}^{x} \cdot \overbrace{(r\sin\theta)}^{y} \cdot \overbrace{r\sqrt{4r^2+1}}^{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|} \, d\theta \right] dr$$

$$= \int_0^4 \left[\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \cdot r^3\sqrt{4r^2+1} \, d\theta \right] dr$$

$= \underline{\text{etc.}} = \underline{0}$