Lagranges multiplikatormetode

$W \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ åpen delmengde

$f, g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ to ganger kontinuerlig deriverbare

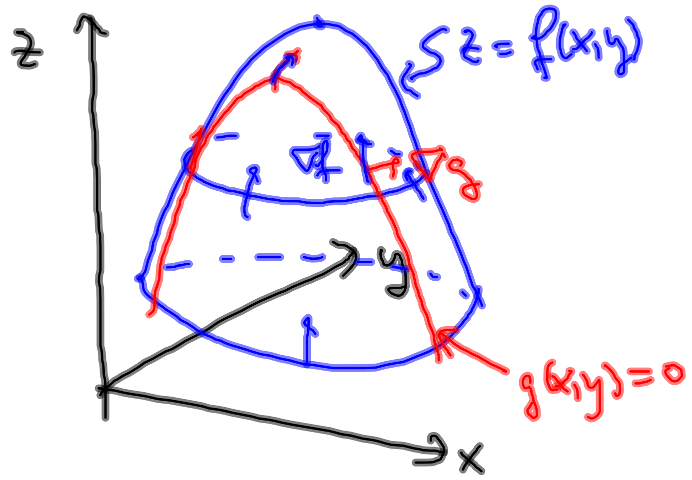
$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m, p_{m+1})$ er et lokalt maksimumspunkt (eller et lokalt minimumspunkt) for

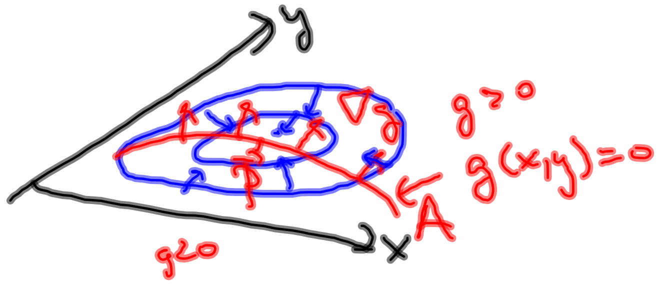
$f|A : A \longrightarrow \mathbb{R}$

der $A = \{ \vec{x} \in W \mid g(\vec{x}) = 0 \}$.

Da er enten $\nabla g(\vec{p}) = \vec{0}$, eller det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\vec{p}) = \lambda \nabla g(\vec{p}).$$





Bevis (vha implisitt funksjonsteorem)

Hvis $\nabla g(\vec{p}) = \vec{0}$ er det ingen ting å bevise.

Hvis $\nabla g(\vec{p}) \neq \vec{0}$ er $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{p}) \neq 0$ for en $1 \leq i \leq m+1$.

Uten tap av generalitet, for å holde notasjonen enkel, antar vi at $i = m+1$

så $\frac{\partial g}{\partial x_{m+1}}(\vec{p}) \neq 0$. Skriver $y = x_{m+1}$

så $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m, y) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Da er $\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{p}) \neq 0$, så ved det implisitte funksjonsteoremet kan vi lokalt løse likningen

$$g(\vec{x}) = g(x_1, \ldots, x_m, y) = 0$$

for y som en funksjon av $x_1, \ldots, x_m$:

det finnes en åpen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ med

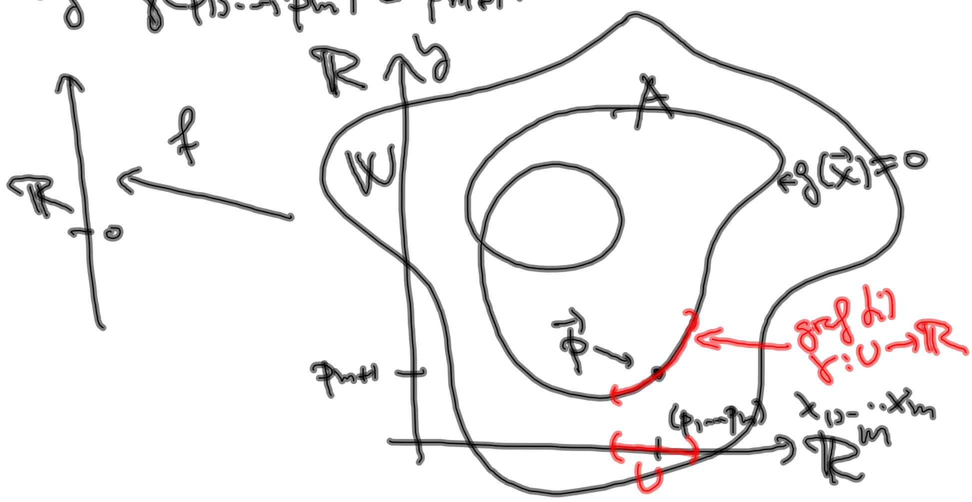
$$(p_1, \ldots, p_m) \in U$$

og en $\gamma : U \to \mathbb{R}$ med

$$\boxed{g(x_1, \ldots, x_m, \gamma(x_1, \ldots, x_m)) = 0}$$

for $(x_1, \ldots, x_m) \in U$

og $\gamma(p_1, \ldots, p_m) = p_{m+1}$.



Siden $f|A : A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum i $\vec{p}$ må den sammensatte funksjonen $h : U \to \mathbb{R}$

$$h(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, \gamma(x_1, \dots, x_m))$$

ha et lokalt maksimum i $(p_1, \dots, p_m)$.

Da må $\nabla h(p_1, \dots, p_m) = \vec{0}$;

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_m) = 0 \qquad \text{for } 1 \le i \le m$$

$$\| $$

$$\underset{(\vec{p})}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} + \underset{(\vec{p})}{\frac{\partial f}{\partial y}} \underset{(p_1, \dots, p_m)}{\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}$$

og

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{p}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{p}) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_m)$$

Har
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p})\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(p_1,\dots,p_m) = 0\\ \text{og}\quad &\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{p}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{p})\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(p_1,\dots,p_m) = 0.\end{aligned}\right\}$$

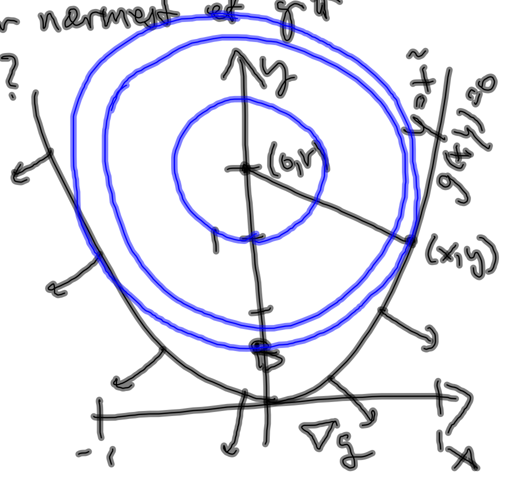
Så
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p}) = -\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\partial g/\partial x_i}{\partial g/\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{p}) \quad \text{for } 1 \le i \le m$$

La
$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) \Big/ \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{p}) \in \mathbb{R}$$

Da er
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p}) = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{p}) \quad \text{for } 1\le i\le m\\ \text{og}\quad &\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{p}).\end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\nabla f(\vec{p}) = \lambda \nabla g(\vec{p})}$$

<u>Eks</u> Hvilket punkt på parabelen $y = x^2$ (brennvidde $1/4$) ligger nærmest et gitt punkt $(0,r)$ på aksen?



$f(x,y) = |(x,y)-(0,r)|^2$

$= x^2 + (y-r)^2$

$g(x,y) = x^2 - y = 0$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2(y-r))$

$\nabla g(x,y) = (2x, -1) \neq \vec{0}$.

I et lokalt minimum (x,y) for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y)=0$ må

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

for en $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 2(y-r) = \lambda \cdot (-1) \\ y = x^2 \end{cases}$$

$x=0$ eller $\lambda = 1$

$y=0$

$2(y-r) = -1$

$y - r = -\frac{1}{2}$

$y = r - \frac{1}{2}$

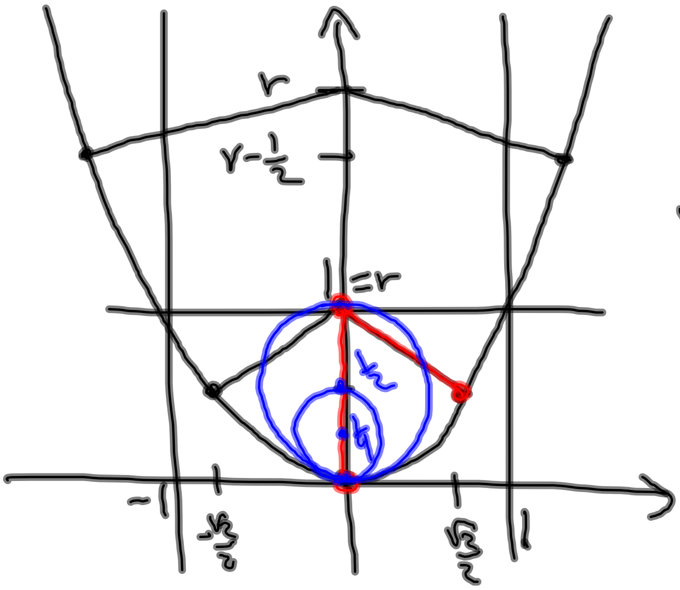
$x = \pm\sqrt{r - \frac{1}{2}}$

Hvis $0 \le r < \frac{1}{2}$ er $(x,y) = (0,0)$ det eneste mulige lokale ekstrempunktet.

Hvis $r \geq \frac{1}{2}$ er

$(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (\pm\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2})$

de mulige lokale ekstrempunktene.



For $r > \frac{1}{2}$ er avstanden fra (x,y) til $(0,r)$ lik

$\sqrt{f(x,y)} =$

$\sqrt{f(\pm\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2})}$

$\sqrt{r-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^2}$

$=\sqrt{r-\frac{1}{4}}$

og $\sqrt{r-\frac{1}{4}} \leq r$ for $r \geq \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$r-\frac{1}{4} \leq r^2$

$\Updownarrow$

$0 \leq (r-\frac{1}{2})^2$

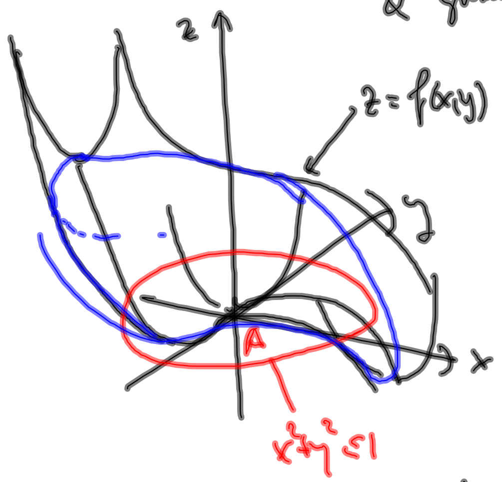
<u>Eks 5.10.3</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

på $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

lukket og begrenset

ekstremverdisetningen: f har globalt maksimum & globalt minimum.



Leter først etter stasjonære punkter $(\nabla f(x,y) = \vec{0})$ i det <u>indre av</u> A. $(x^2+y^2<1)$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2) = (0,0)$$

$$\iff x = 0 \text{ og } y = 0$$

$$\iff (x,y) = (0,0).$$

Står igjen med å finne ekstrempunktene for $f(x,y)$ på <u>randen til</u> A, ∂A, dvs der

$$x^2+y^2 = 1.$$

$$\iff g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0.$$

Ved Lagranges multiplikatormetode må

$$\left(\nabla g(x,y) = \vec{0}\right)$$

eller

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \text{for en } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq \vec{0}$ for

Må løse: $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x & (1) \\ -3y^2 = \lambda \cdot 2y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) Gir $x = 0$ eller $\lambda = 1$.

$x=0$: (3) $y = \pm 1$, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

$\lambda = 1$: $2y = -3y^2$, så $y = 0$ eller $y = -\frac{2}{3}$.

$y=0$: (3) $x = \pm 1$

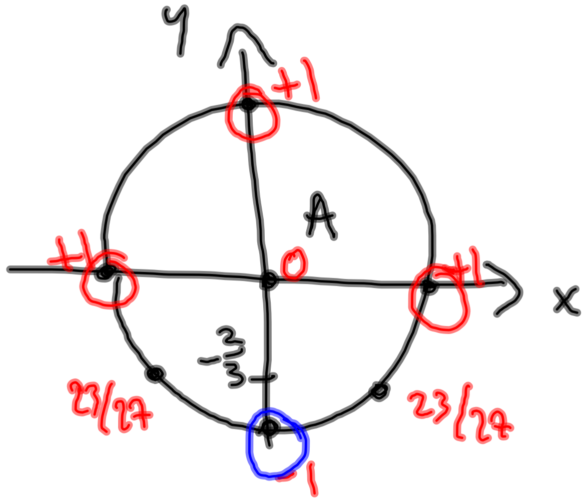
$y=-\frac{2}{3}$: (3) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$(x,y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ eller $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$f(\pm 1, 0) = 1$

$f(0, \pm 1) = \pm 1$

$f\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9} + \frac{8}{27} = \underline{\underline{\frac{23}{27}}}$



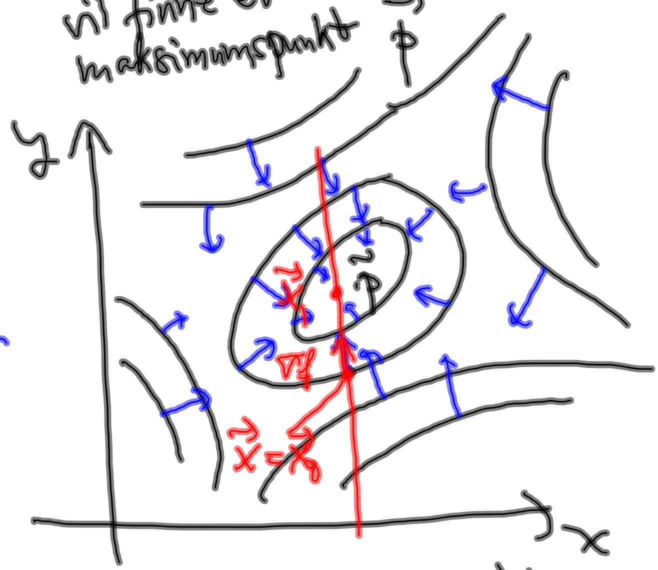
LH 5.11 Gradientmetoden

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

vil finne et maksimumspunkt $\vec{p}$

nivåkurver $f(x,y)=c$

gradientvektorer $\nabla f(x,y)$



Gitt en tilnærmet løsning $\vec{x}_0$ (nær $\vec{p}$)

leter vi etter en forbedret løsning

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$$

der $t > 0$

Ser på

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t \cdot \nabla f(\vec{x}_0))$$

og leter etter minste positive t med ($=t_0$)

$$g'(t) = 0.$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + t_0 \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

Fortsett med

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + t_1 \nabla f(\vec{x}_1)$$

osv.