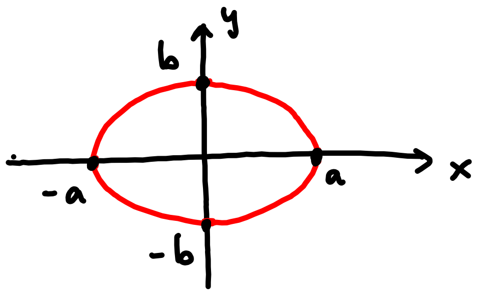
3.6 Kjeglesnitt

Likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

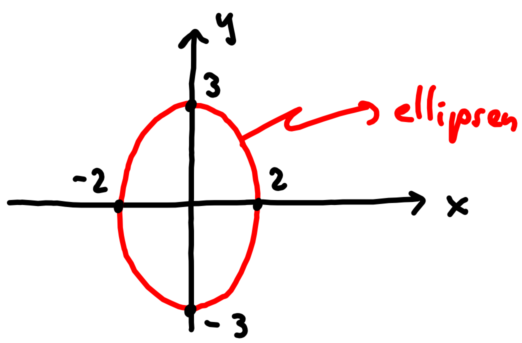
er standardlikningen for en ellipse med halvakser a og b.



eks. Tegne ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $(a = 2,\ b = 3)$

Skjæring med y-aksen $(x = 0)$: $\frac{y^2}{9} = 1$, $y = \pm 3$

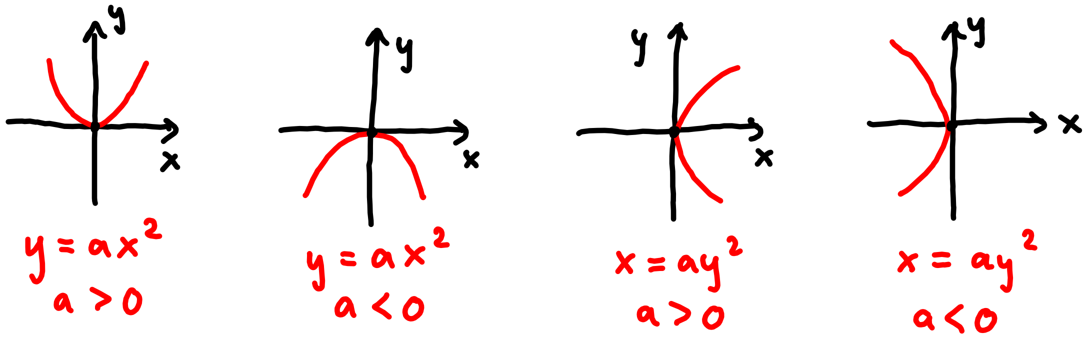
— " — x-aksen $(y = 0)$: $\frac{x^2}{4} = 1$, $x = \pm 2$



Likningene

$$y = ax^2 \quad \text{og} \quad x = ay^2 \qquad (a \neq 0)$$

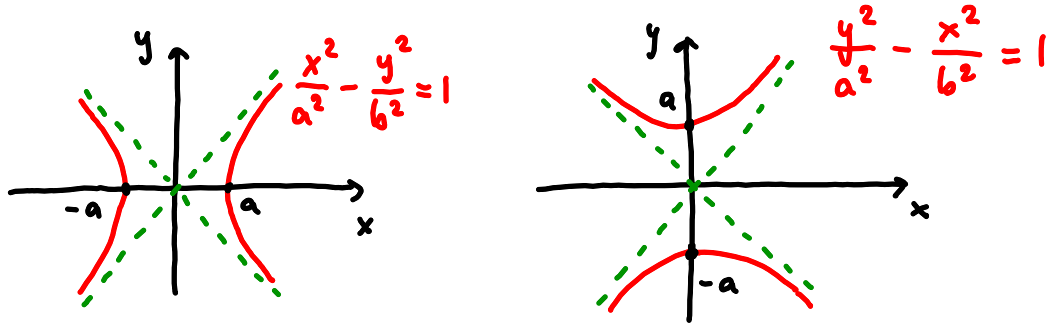
er standardlikningene for <u>parabler</u>.



Likningene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

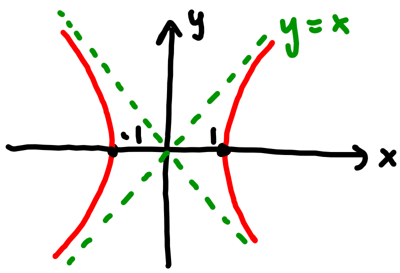
er standardlikningene for <u>hyperbler</u>.



<u>eks.</u> Tegn hyperbelen $x^2 - y^2 = 1$

<u>Løsn.</u> $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

$y(x) = \sqrt{x^2-1}$ ikke def. for $x \in (-1,1)$ og $y(-1) = y(1) = 0$

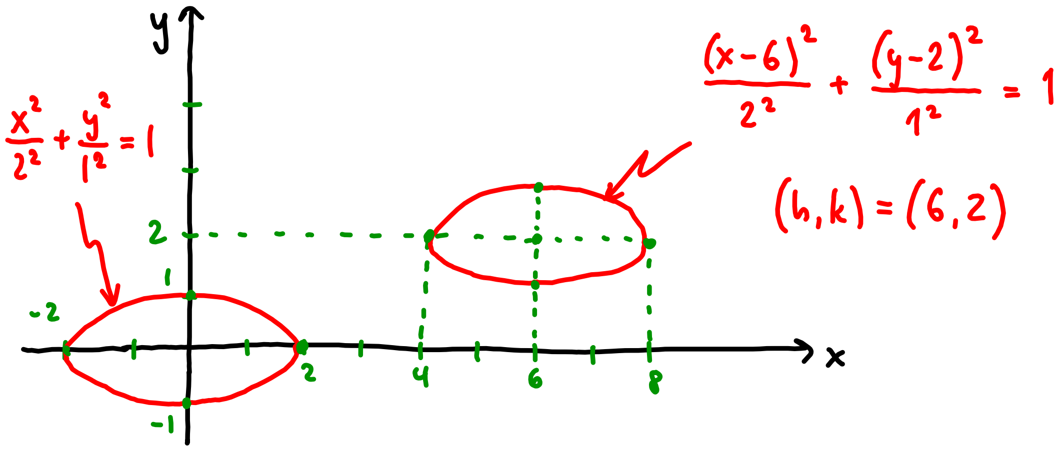


Har også $y(-x) = y(x)$, så symmetrisk om y-aksen

Skrå asymptote $y = x$ når $x \to \infty$ (Mat 1100 - metode) □

Translaterte kjeglesnitt

$$\left.\begin{array}{l} x \to x-h \\ y \to y-k \end{array}\right\}$$ gir at (h,k) spiller rollen til $(0,0)$



Translaterne utgaver av standardlikningene våre

Ellipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\quad a>b$ (bytt navn ellers)

Parabel: $y-k=a(x-h)^2$ og $x-h=a(y-k)^2$

Hyperbel: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ og $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

Klassifikasjon av kjeglesnitt

Gitt likning

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Finne ut hvilket kjeglesnitt: Utvid til fullstendig kvadrat i x og y

eks. $x^2+9y^2-6x+18y+9=0$ Hvilket kjeglesnitt?

Løsn. $(x^2-6x+9)+9(y^2+2y+1)+9=9+9$

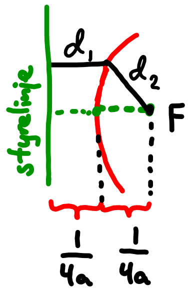
$$(x-3)^2+9(y+1)^2=9$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{1^2}=1$$

Ellipse med sentrum $(h,k)=(3,-1)$ og halvakser 3 og 1.

Geometriske egenskaper ved kjeglesnittene (ref. standardlikninger)

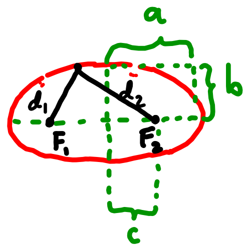
Parabel:



$d_1 = d_2$

F : Brennpunkter

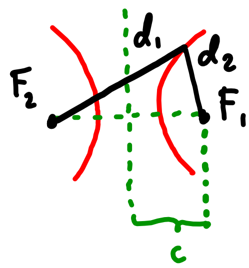
Ellipse:



$a^2 = b^2 + c^2$

$d_1 + d_2 = \text{konst.}$

Hyperbel:

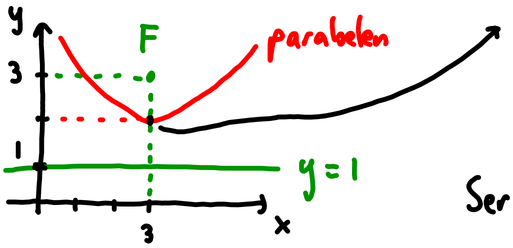


$a^2 + b^2 = c^2$

$|d_1 - d_2| = \text{konst.}$

eks. 1 En parabel har brennpunkt $(3,3)$ og styrelinje $y=1$. Finn likningen.

Løsn.



$(h,k) = (3,2)$

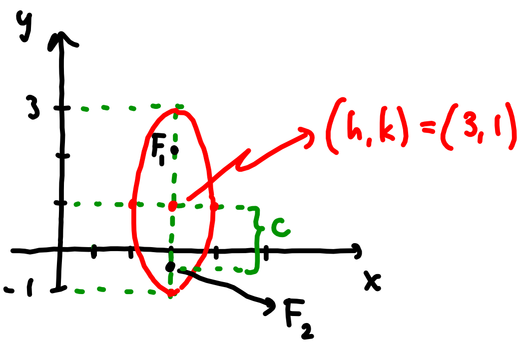
$y - 2 = a(x-3)^2$

Ser at $\frac{1}{4a} = 1$, så $a = \frac{1}{4}$

Likning: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2$

eks. 2 Finn brennpunktene til ellipsen $\frac{(x-3)^2}{1^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

Løsn. $(h,k) = (3,1)$, $a = 2$, $b = 1$



$a^2 = b^2 + c^2$ gir

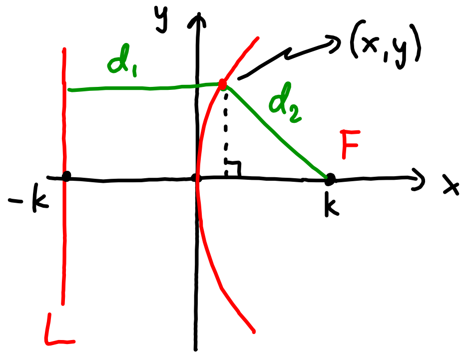
$4 = 1 + c^2$

$c = \sqrt{3}$

$F_1 = (3, 1+\sqrt{3})$ $F_2 = (3, 1-\sqrt{3})$ brennpkt.

Sammenlikning mellom geometriske beskrivelser av kjeglesnitt og likningene deres

Eks: Parabel gitt ved styrelinje L og brennpunkt F



Legger koord. systemet slik at L er linjen $x = -k$ og brennpunktet F er $(k, 0)$ der $k > 0$.

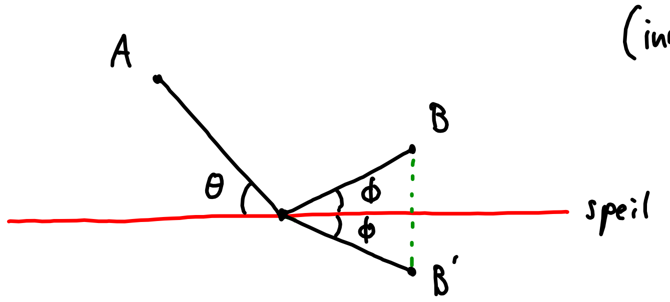
$d_1 = d_2$ gir
$$k + x = \sqrt{y^2 + (k-x)^2}$$
$$(k+x)^2 = y^2 + (k-x)^2$$
$$\cancel{k^2} + 2kx + \cancel{x^2} = y^2 + \cancel{k^2} - 2kx + \cancel{x^2}$$
$$4kx = y^2$$
$$x = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{a} y^2$$

Så i standardlikningen
$$x = ay^2$$
er $a = \frac{1}{4k}$, dvs. $\underline{\underline{k = \frac{1}{4a}}}$

(Ellipser og hyperbler: Tilsvarende, se bok)

Refleksjonsegenskaper generelt

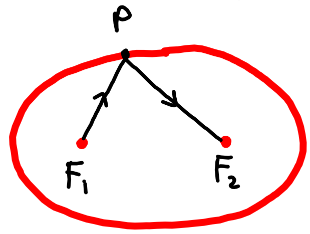
Korteste vei fra A til B via speilet er når $\theta = \phi$
(innfallsvinkel = utfallsvinkel)



(fordi: $AB' = AB$)

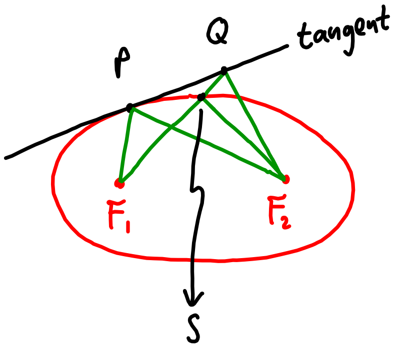
Refleksjonsegenskapen til ellipser

- En stråle fra det ene brennpunktet vil reflekteres til det andre



(innfallsvinkel = utfallsvinkel i P)

Hvorfor?



$$F_1P + PF_2 = F_1S + SF_2$$
$$< F_1Q + QF_2$$

Så å gå via P er korteste vei fra F_1 til F_2 via tangenten. Altså blir innfallsvinkel lik utfallsvinkel i P

Refleksjonsegenskap for parabler: Setning 3.6.3

Nivåkurver for funksjoner $f(x,y)$

→ Metode: Tegn kurven $f(x,y) = c$ i xy-planet for passende verdier av c.

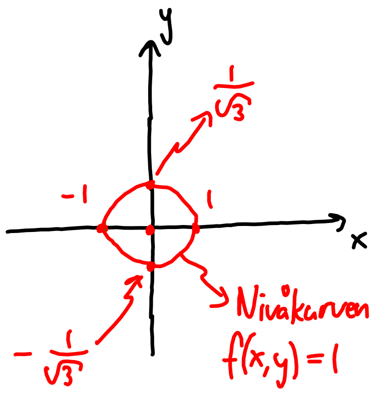
<u>eks.</u> $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

$f(x,y) = 0$ gir $x = y = 0$

$f(x,y) = 1$ gir $x^2 + 3y^2 = 1$

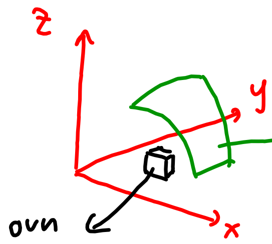
$x = 0$ gir $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 0$ gir $x = \pm 1$



Nivåflater for funksjoner $f(x,y,z)$: Flater $f(x,y,z) = c$

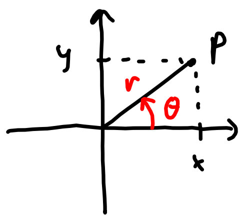
<u>eks.</u>



$f(x,y,z)$ er temp. i punktet (x,y,z)

→ Her er $f(x,y,z) = 20°$ (nivåflate for f)

Polarkoordinater r, θ

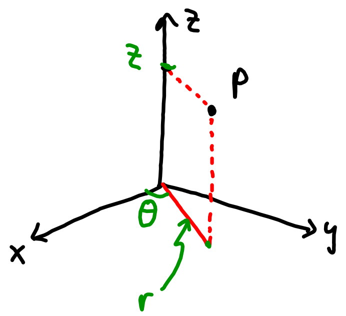


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

eks. $z = x^2 + y^2$ kan skrives $z = r^2$ (paraboloide)

$z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ kan skrives $z = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$ □

Sylinderkoordinater r, θ, z

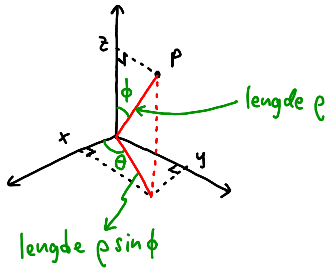


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

eks. $w = \dfrac{z}{1+x^2+y^2}$ kan skrives

$$w = \frac{z}{1+r^2}\,. \quad \square$$

Kulekoordinater ρ, θ, ϕ



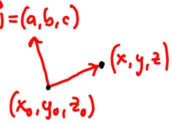
$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

eks. $w = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ kan skrives $w = \dfrac{\rho\cos\phi}{\rho} = \cos\phi$

Linearisering, tangentplan og normalvektor

Likningen for et plan gjennom (x_0, y_0, z_0) med normalvektor $\vec{N} = (a, b, c)$:



$$(a,b,c)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = \text{konst.} \qquad (*)$$

Lineariseringen til $f(x,y)$ i punktet (x_0, y_0): (fra 2.8)

$$T_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Likningen til tangentplanet til $f(x,y)$ i punktet (x_0, y_0) er likningen for grafen til lineariseringen:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Dette kan skrives

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot y + z = \text{konst.}$$

Sammenlikning med $(*)$ gir at

$$\vec{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ 1\right)$$

er en normalvektor for tangentplanet i (x_0, y_0).

Grafiske fremstillinger med Matlab: Eks. 3.7.12 og 3.8.1