d)

Forhldet mellom sukkerinnholdet i Viktorias og Emils saft etter n blandinger er $\frac{3-0.8^n}{3+0.8^n}$. Skal dette være større enn 0.95 må altså $\frac{3-0.8^n}{3+0.8^n} > 0.95$, som gir at

$$\begin{aligned}3-0.8^n &> 0.95(3+0.8^n) = 2.85 + 0.95 \times 0.8^n \\ 0.15 &> 1.95 \times 0.8^n \\ \frac{1}{13} &> 0.8^n \\ n &> \frac{\ln(1/13)}{\ln(0.8)},\end{aligned}$$

som gir at $n \geq 12$.

Oppgave 5.1.1

c)

Mengden er hverken åpen eller lukket. Den er ikke lukket siden randpunktene der $|y| = 1$ ikke er med i mengden. Den er ikke åpen fordi den inneholder randpunkter der $|x| = 1$.

d)

Mengden er lukket, siden randpunktene svarer til at $|x| = 1$, og disse er inneholdt i mengden.

e)

Mengden er åpen , siden randpunktene svarer til at $x + 2y = 1$, og disse er ikke inneholdt i mengden.

f)

Mengden er lukket, siden randen til mengden er lik mengden selv.

g)

Mengden av alle rasjonale tall er ikke åpen, siden man kan finne irrasjonale tall vilkårlig nært. Mengden av alle rasjonale tall er heller ikke lukket, siden det finne følger av rasjonale tall som konvergerer mot irrasjonale tall.

Oppgave 5.1.2

a)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n}, \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{1-2n}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}\right).$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin\frac{1}{n}, n\left(1-e^{2/n}\right)\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{2/n}\right)\right).$$

Første komponenten har grenseverdi 1 med L'Hospitals regel. Tilsvarende for den andre:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{2/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2 e^{2/n}}{-1/n^2} = -2.$$

Grensen blir derfor $(1, -2)$.

Oppgave 5.1.9

a)

$\mathbf{x}_n$ går mot $\mathbf{0}$ hvis og bare hvis alle x_{ni} går mot 0. i'te komponent i $A\mathbf{x}_n$ er $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ni}$, og det er klart at denne går mot 0 siden alle x_i gjør det. men da går også $A\mathbf{x}_n$ mot $\mathbf{0}$.

b)

Hvis $B\mathbf{x}_n$ konvergerer mot $\mathbf{0}$ så er det klart fra a) at $B^{-1}B\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n$ også konvergerer mot $\mathbf{0}$.

c)

Hvis C ikke er inverterbar finnes en vektor $\mathbf{x}$ forskjellig fra $\mathbf{0}$ slik at $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sett $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ for alle n. Da vil $C\mathbf{x}_n$ være $\mathbf{0}$ for alle n, mens $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ for alle n. Resultatet følger.

Oppgave 5.2.4

a)

Anta at $\mathbf{x}$ er et opphopningspunkt for $\{\mathbf{x}_n\}$. Enhver ball $B(\mathbf{x}, \frac{1}{n})$ vil da inneholde minst et punkt (uendelig mange faktisk) $\mathbf{y}_n$ fra følgen. Det er klart at delfølgen $\mathbf{y}_n$ vil konvergere mot $\mathbf{x}$, siden $|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}| \leq \frac{1}{n}$. Omvendt, anta at det finnes en delfølge $\mathbf{y}_n$ som konvergerer mot $\mathbf{x}$. La $B(\mathbf{x}, r)$ være en ball med radius r rundt $\mathbf{x}$. Siden $\mathbf{y}_n$ konvergerer mot $\mathbf{x}$ vil det finnes en N slik at $\mathbf{y}_n$ er inneholdt i $B(\mathbf{x}, r)$ for alle $n \geq N$. Dermed inneholder $B(\mathbf{x}, r)$ uendelig mange punkter fra følgen, slik at $\mathbf{x}$ er et opphopningspunkt.

b)

Fra Bolzano-Weierstrass følger det at enhver følge fra A har en konvergent delfølge. La $\mathbf{x}$ være punktet delfølgen konvergerer mot. Fra a) vet vi da at $\mathbf{x}$ er et opphopningspunkt for følgen. $\mathbf{x}$ ligger i A siden A er lukket.

c)

Hvis A ikke er lukket så finnes det et punkt $\mathbf{x}$ som ikke ligger i A, og der hver ball $B(\mathbf{x}, \frac{1}{n})$ inneholder punkter fra A. La oss kalle et slikt punkt for $\mathbf{x}_n$. Da er det klart at følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ konvergerer mot $\mathbf{x}$, slik at $\{\mathbf{x}_n\}$ er en følge i A som har ett eneste opphopningspunkt, og som ikke ligger i A.

d)

Hvis A ikke er begrenset så finnes en følge $\{\mathbf{x}_n\}$ fra A der $|\mathbf{x}_{n+1}| > |\mathbf{x}_n| + 1$. Det er klart at denne følgen fra A ikke har noe opphopningspunkt, siden alle punkter har avstand større enn 1 fra hverandre.

Matlab-kode

```
% Oppgave 5.4.2
antalliterasjoner=200;
x=zeros(2,antalliterasjoner+1);
x(:,1)=[20;2000];
for n=1:antalliterasjoner
  x(:,n+1)=[0.9 0.01; -1.01 1]*x(:,n)+[-10; 300];
end
plot(x(1,:),x(2,:))
```

```
% Oppgave 5.4.4
antalliterasjoner=200;
x=zeros(antalliterasjoner+1);
y=zeros(antalliterasjoner+1);

x(1)=8;  % 12
y(1)=12; % 8
for n=1:antalliterasjoner
  x(n+1)=1.01*(x(n)+y(n))/2;
  y(n+1)=min(x(n),1.1*y(n));
end
plot(x,y)

figure(2)
x(1)=12;
y(1)=8;
for n=1:antalliterasjoner
  x(n+1)=1.01*(x(n)+y(n))/2;
  y(n+1)=min(x(n),1.1*y(n));
end
plot(x,y)
```

```
% Oppgave 5.4.5
antalliterasjoner=200;
x=zeros(antalliterasjoner+1);
y=zeros(antalliterasjoner+1);
x(1)=0.5; % 0.1
y(1)=0.5; % 0.8
for n=1:antalliterasjoner
  x(n+1)=2.2*x(n)*(1-x(n)) + 0.01*x(n)*y(n);
  y(n+1)=3.1*y(n)*(1-y(n)) - 0.02*x(n)*y(n);
end
plot(x,y)
```

```
% Oppgave 5.4.7
antalliterasjoner=30;
x=zeros(antalliterasjoner+1);
x(1)=sqrt(2);
x(1)
for n=1:antalliterasjoner
  x(n+1)=x(n)^2+x(n)-2;
  x(n+1)
end
```

Python-kode

```
# Oppgave 5.4.2
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

antalliterasjoner=200
x=zeros((2,antalliterasjoner+1))
x[:,[0]]=matrix([[20],[2000]])
for n in range(antalliterasjoner):
  x[:,[n+1]]=matrix([[0.9,0.01],[-1.01,1]])*x[:,[n]]+matrix([[-10],[300]])
plot(x[[0],:],x[[1],:])
```

```
# Oppgave 5.4.4
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

antalliterasjoner=200
x=zeros(antalliterasjoner+1)
y=zeros(antalliterasjoner+1)
x[0]=8
y[0]=12
for n in range(antalliterasjoner):
  x[n+1]=1.01*(x[n]+y[n])/2
  y[n+1]=min(x[n],1.1*y[n])
plot(x,y)

figure(2)
x[0]=12
y[0]=8
for n in range(antalliterasjoner):
  x[n+1]=1.01*(x[n]+y[n])/2
  y[n+1]=min(x[n],1.1*y[n])
plot(x,y)
```

```
# Oppgave 5.4.5
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

antalliterasjoner=200
x=zeros(antalliterasjoner+1)
y=zeros(antalliterasjoner+1)
x[0]=0.5 # 0.1
y[0]=0.5 # 0.8
for n in range(antalliterasjoner):
  x[n+1]=2.2*x[n]*(1-x[n]) + 0.01*x[n]*y[n]
  y[n+1]=3.1*y[n]*(1-y[n]) - 0.02*x[n]*y[n]
plot(x,y)
```

```
# Oppgave 5.4.7
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

antalliterasjoner=30
```

```
x=zeros(antalliterasjoner+1)
x[0]=sqrt(2)
print x[0]
for n in range(antalliterasjoner):
  x[n+1]=x[n]**2+x[n]-2
  print x[n+1]
```