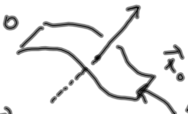
Maks- og min-punkter

Husk generelt: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$

ønskes å finne ekstrempunkter for f.

Dersom $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$



$\vec{x}_0$

$\{f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$

$H_f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)\right)$

- Dersom $\vec{x}_0$ er ekstr. punkt, så må $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Se videre på Hessematrisen $H_f(\vec{x}_0)$.

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(•) Dersom alle egenverdiene til $H_f(\vec{x}_0)$ er positive så er x_0 et lokalt min-punkt.

$f(x,y) = -x^2-y^2$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(••) Dersom alle egenverdiene til $H_f(\vec{x}_0)$ er negative så er x_0 et maks.punkt.

$f(x,y) = x^2-y^2$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(•••) Dersom du har egenverdier med både positive og negative fortegn, så er x_0 et sadelpunkt.

To variable:

Teorem: La $\vec{a}$ være et stasjonært punkt for en funksjon $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og anta at f har kontinuerlige partiellderivete av orden 2, i en omegn om $\vec{a}$. Anta videre at $\nabla f(\vec{a}) = 0$.

La

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}),$$

og la $D = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2$.

$-(x^4+y^4)$.

(i) Dersom $D < 0$ så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

(ii) Dersom $D > 0$ og $A > 0$ så er $\vec{a}$ et minimumspunkt.

(iii) Dersom $D > 0$ og $A < 0$ så er $\vec{a}$ et maksimumspunkt.

Dersom $D = 0$ har vi ingen konklusjon.

A sym.
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
$v_1, \dots, v_n$ (ortonormal basis)
$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Bevis: (i) D er produktet av de to egenverdiene til $H_f(\vec{a})$.

i (ii) og (iii) er λ_1 og λ_2 begge positive eller begge negative, så vi har maks-punkt eller min-punkt.

(ii) $A > 0 \Rightarrow f$ har et min.punkt betraktet som funksjon av én variabel $x_1 \Rightarrow \vec{a}$ er min. punkt.

(iii) Analogt med (ii).

Eksempel: $f(x,y) = 5 + x^2 + 3xy \pm y^2$

Finn ekstrempunkter.

Stasjonære punkter: $\nabla f(x,y) = (2x+3y\,,\ 3x-2y)$

Løs $\nabla f(x,y) = 0$.

Ser at eneste løsning er $x=0=y$.

Hessematrise: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A=2 \quad B=-2 \quad C=3.$

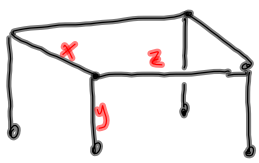
Da er $AB - C^2 = -13$,

så origo er et sadelpunkt.

Eksempel (oppgave 12)

Lag et telt med volum $500\,m^3$.

Minimer lengden av stålrørene.



$L(x,y,z) = 4y + 2x + 2z.$

$x \cdot y \cdot z = 500\,, \quad z = \dfrac{500}{xy}$

$L(x,y) = 4y + 2x + \dfrac{1000}{xy}.$

Vil finne minimumspunkt for $L(x,y)$.

Ser på gradienten først.

$\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2 - \dfrac{1000\,y}{(xy)^2} = 2 - \dfrac{1000}{x^2 y}$

$\dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 4 - \dfrac{1000}{xy^2}.$

$\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad x^2 y = 500$

$\dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad xy^2 = 250.$

Få $x = 10$, $y = 5$.

Hessematrise: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2000}{x^3 y}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2000}{x y^3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1000}{x^2 y^2}.$$

Få $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(10,5) = \frac{2}{5}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(10,5) = \frac{8}{5}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(10,5) = \frac{2}{5}$$

$AB - C^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5} - (\frac{2}{5})^2 > 0.$

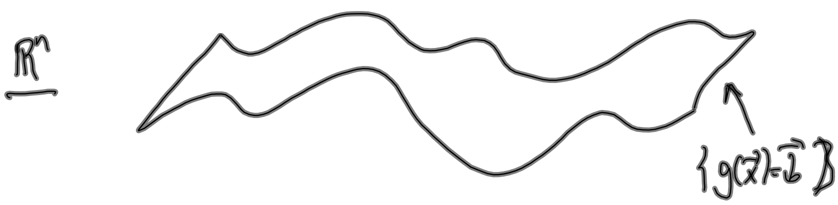
Siden $A > 0$ har vi min-punkt.

Lagranges multiplikatormetode

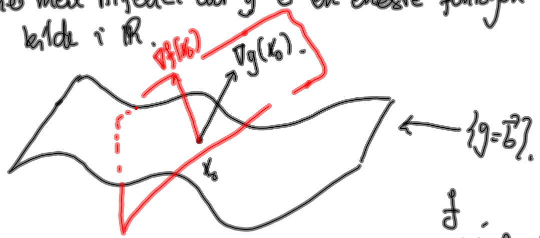
Ønsker å finn maks- og min-punkter under bibetingelser.

Eks: Forrige eksempel:
Minimer $f(x,y,z) = 4y + 2x + 2z$ under betingelsen
$g(x,y,z) = x \cdot y \cdot z = 500$.

Generelt: Gitt $g = (g_1, \dots, g_m): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ønsker å finne maks/min. for f på mengden $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) = \vec{b}\}$.



Begynner med tilfellet der g er en eneste funksjon med kilde i $\mathbb{R}$.



Anta at x_0 er ekstrempunkt for f.

Teorem (Lagrange)

Anta at U er en åpen mengde i $\mathbb{R}^n$ og at $f,g: U \to \mathbb{R}$ er to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. La $b \in \mathbb{R}$ og anta at $\vec{x}_0$ er et lokalt maks/min-punkt for f på mengden $\{g(\vec{x}) = b\}$.
Da er enten $\nabla g(\vec{x}_0) = 0$ eller $\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eks.: Finn maks/min for $f(x,y) = x^2 y$ på sirkelen $\{x^2+y^2=1\}$. Setter $g(x,y) = x^2+y^2-1$, og ser på mengden $\{g=0\}$.

$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = 2(x,y)$$

Vil løse $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

løser $2xy = \lambda x$

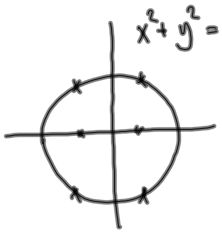
$x^2 = \lambda y$ $\qquad \lambda = \frac{x^2}{y}$

$2xy = \frac{x^3}{y}$ $\quad \boxed{2y^2 = x^2}$

$x^2+y^2=1 \quad 3y^2=1$

$y = \pm\sqrt{1/3}$

$x = \pm\sqrt{2}\sqrt{1/3}$.



Kandidater for ekstrempunkter.

$f(x,y) = x^2 \cdot y$. f tar samme verdi i punktene $(\pm\sqrt{2}\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$.

Ser at f er pos. over x-aksen og negativ under.

Vet fra ekstremalverdi-setningen at f må ha maksimum, så f tar maks i $(\sqrt{2}\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ og $(\sqrt{2}\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$

mai 2-15:24

Eks $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z) = x^2+3y^2-z-1$

minimu f på $\{g(x,y,z)=0\}$.

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 6y, -1)$

Må løse $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$,

$2x = \lambda \cdot 2x$
$2y = \lambda \cdot 6y$
$2z = -\lambda$.

(A) hvis $x \neq 0$, $\lambda = 1$, $2y = 6y$, $y=0$ $z=-1/2$

$x^2 + 1/2 = 1$ $x = \pm\sqrt{1/2}$.

(B) hvis $x=0$ (B₁) hvis $y \neq 0$. $\lambda = 1/3$, $z=-1/6$

Fra bikelt: $3y^2+1/6=1$
$3y^2 = 5/6$ $y = \pm\sqrt{5/18}$.

For $y=0$ Få $z=-1$ fra bikelt.

(A) $f(\pm\sqrt{1/2}, 0, -1/2) = 3/4$

(B₁) $f(0, \pm\sqrt{5/18}, -1/6) = 11/36$

(B₂) $f(0,0,-1) = 1$.

Ser at $(0, \pm\sqrt{5/18}, -1/6)$ er globale minima for funksjon f på $\{g=0\}$.

mai 2-15:43

Eks: La A være området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av aksene og grafen $y = 1 - x$.
Finn ekstremalpunkter for $f(x,y) = x^2y + xy^2$ på A.

ekstrempunkt ~~maks~~ inni området.

$$\nabla f(x,y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$$

For $\nabla f(x,y) = 0$ må $x = y = 0$.

Ingen krit. punkter inni A, men vi ser at vi har min $= 0$ på aksene.

Randa:

$$g(x,y) = 1 - x - y$$

$$\nabla g(x,y) = (-1,-1)$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$$

$x = y$ er eneste mulighet, og vi har funnet et maks på randa