Oppgave 12.2.3 e)

Vi skal se om summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

konvergerer. Vi bruker grensesammenligningstesten (s. 636 i Kalkulus) med $a_n = \frac{1}{n^2}$ og $b_n = 1-\cos\frac{1}{n}$. Vi har

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} =^{L'Hop} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{n^2}\sin\frac{1}{n}}{\frac{-2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$=^{L'Hop} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\frac{-1}{n^2}\cos\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer og $\frac{1}{2} < \infty$ sier grensesammenligningstesten at den opprinnelige summen konvergerer.

Oppgave 12.2.3 f)

Her bruker vi grensesammenligningstesten med $a_n = \frac{1}{n}$ og $b_n = \sin\frac{1}{n}$. Vi får ved en tilsvarende utregning som over at $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$, så den opprinnelige summen divergerer siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerer.