Plenum 12/4

(valg.uio.no)

4.5: $1^c, 6, 7, 9$

4.6: 3b, 11, 12

4.5: 1) c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Så C er ikke inverterbar; søyle 2 er ikke pivotsøyle (noe den måtte vært for å være radekvivalent med I_2, og dermed inverterbar).

6) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} x + 2y \quad &= 5 \\ y + z &= 3 \\ -2y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$B\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}\left(B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = B^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(B^{-1}B)}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - \cancel{2} + \cancel{2} \\ 0 + 1 - \cancel{1} \\ 0 + 2 + 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + z = 3 \\ -2y + (a+1)z = b^2 - 10 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 & b^2-10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 & b^2-4 \end{bmatrix}$$

$a \neq -3$: Nøyaktig én løsning

$a = -3$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & b^2-4 \end{bmatrix}$

$b^2 - 4 = 0$, dvs. $b = \pm 2$: Uendelig mange løsninger (søyle 3 er ikke pivot; fri variabel)

$b \notin \{-2, 2\}$: Siste rad; $0 = $ noe ikke-null ; Usant! Ingen løsninger.

7) A, $n \times n$, inverterbar. $\vec{b} = [\ldots \ \ldots] \in \mathbb{R}^n$

VIS: $\vec{x} = \vec{b}A^{-1}$ er unik $\underbrace{\text{av}}_{\text{løsning}}$ $\vec{x}A = \vec{b}$.

Bevis: i) $\vec{x}$ er en løsning: Sett inn:

$$\vec{x}A = (\vec{b}A^{-1})A = \vec{b}(A^{-1}A) = \vec{b}I = \vec{b}$$

def. $\vec{x}$

OK!

ii) $\vec{x}$ er enest løsning: Dvs: Fins ingen andre løsninger.

Anta $\vec{x}$ og $\vec{y}$ løser ligningen. Da er

$$\vec{x}A - \vec{y}A = (\vec{x}-\vec{y})A \quad (\mathrm{I})$$

og

$$\vec{x}A - \vec{y}A = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \quad (\mathrm{II})$$

Fra (I) og (II): $(\vec{x}-\vec{y})A = \vec{0}$ (A invertibel)

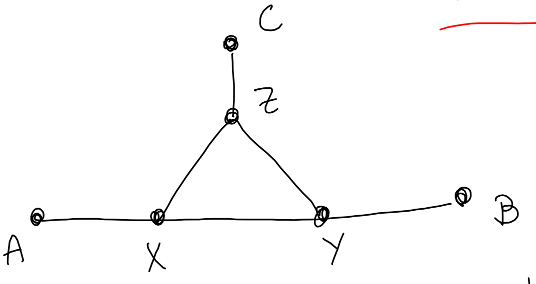
$$(\vec{x}-\vec{y})\underbrace{AA^{-1}}_{I} = \vec{0}A^{-1}$$

$$\vec{x}-\vec{y} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{y} \implies \text{Fins bare én løsning!}$$

$\boxtimes$

9)



a, b, c, x, y, z = spenning i pkt.

· Indre pkt: X, Y, Z

Nabo X: A, Z, Y

–"– Y: X, Z, B

–"– Z: X, Y, C

$$x = \frac{a+z+y}{3} \iff 3x - y - z = a$$

$$y = \frac{x+z+b}{3} \iff -x + 3y - z = b$$

$$z = \frac{x+y+c}{3} \iff -x - y + 3z = c$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

b) $$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A\vec{x} = \vec{b}$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+2+3 \\ 1+4+3 \\ 1+4+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

d) Vil ha: $\vec{b}$ s.a.

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \vec{b}$$

$$A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(A^{-1})^{-1}A^{-1}}_{I}\vec{b} = (A^{-1})^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = (\underbrace{A^{-1}A}_{I})\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = A^{-1}\vec{b}.$$ Da må:

$$\vec{b} = (A^{-1})^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-2\\2\\6\end{bmatrix}$$ Dvs: $a=-2$, $b=2$ og $c=6$.

4.6:

3)b)
$$\begin{array}{ccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&4\\3&-1&7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&-4&4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Ikke pivotelement i siste kolonne $\Rightarrow$ Ikke lin. uavhengige.

$$\left(\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2\right)$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

11) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

a) $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er to lin. uavh. vektorer i $\mathbb{R}^2$ og derfor er de en basis (motsatt fortegn;

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1\\0&-2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix})$$

b) $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{e}_1 \quad \text{og} \quad z\vec{v}_1 + w\vec{v}_2 = \vec{e}_2$$

$$\underbrace{[\vec{v}_1\ \vec{v}_2]}_{V}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \vec{e}_1 \quad \text{og} \quad [\vec{v}_1\ \vec{v}_2]\underbrace{\begin{bmatrix}z\\w\end{bmatrix}}_{\vec{z}} = \vec{e}_2$$

$$V\vec{x} = \vec{e}_1 \quad \text{og} \quad V\vec{z} = \vec{e}_2$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-2&-1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

gir $\vec{x}$

gir $\vec{z}$

$$\underline{\text{Så:}} \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2$$

c) $\vec{T}(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$ og $\vec{T}(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$

Dette følger av Set. 4.6.17 og at $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er en basis for $\mathbb{R}^2$ (fra a))

d) Vet: Kolonnene til A er $\vec{T}(\vec{e}_1)$ og $\vec{T}(\vec{e}_2)$.

$$\vec{T}(\vec{e}_1) \overset{b)}{=} \vec{T}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2\right) \underset{T \text{ lineær}}{=} \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_1) + \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_2)$$

$$= \frac{1}{2}2\vec{v}_1 + \frac{1}{2}(-\vec{v}_2)$$

$$= \vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) \overset{b)}{=} \vec{T}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2\right) = \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_1) - \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{Så:}} \quad A = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

12) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, ikke-null, normale. VIS: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh.

Bevis: Set. 4.6.6: Å vise $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh. er det

samme som å vise at hvis $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$

så er $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

Anta at $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. Da er, for $i = 1, \dots, k$:

$$\underbrace{0} = (\underbrace{c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k}_{\vec{0}}) \cdot \vec{v}_i$$

$$= c_1\underbrace{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i)}_{0 \text{ (normale)}} + \dots + c_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) + \underbrace{\dots + c_k(\vec{v}_k \cdot \vec{v}_i)}_{0 \text{ (normale!)}}$$

$$= c_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \underbrace{c_i\,|\vec{v}_i|^2}$$

$$\Downarrow \left(\vec{v}_i \text{ ikke-null} \Rightarrow |\vec{v}_i|^2 \neq 0\right)$$

$$c_i = 0$$

Så $c_i = 0$ for alle $i = 1, \dots, k$. Men da følger det fra Set. 4.6.6 at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh. $\boxtimes$