Iterasjon

Problem: $\bar{x}_0$ inngangsdata, A kvadratisk matrise som uttrykker dynamikk

$$\bar{x}_1 = A\bar{x}_0$$
$$\bar{x}_2 = A\bar{x}_1$$
$$\vdots$$
$$\bar{x}_{n+1} = A\bar{x}_n$$

Lineær utvikling

Mer generelt:

Dynamikk $\rightarrow$ $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Inngangsdata $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^m$

$$\bar{x}_1 = F(\bar{x}_0),\ \bar{x}_2 = F(\bar{x}_1),\ \ldots\ldots$$

Eksempel: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

IKKE lineær

x_n: byttedyr
y_n: jegere

$$x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n$$
$$y_{n+1} = c y_n + d x_n y_n$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

Forarbeid (klargjøre det matematisk-formelle grunnlaget)

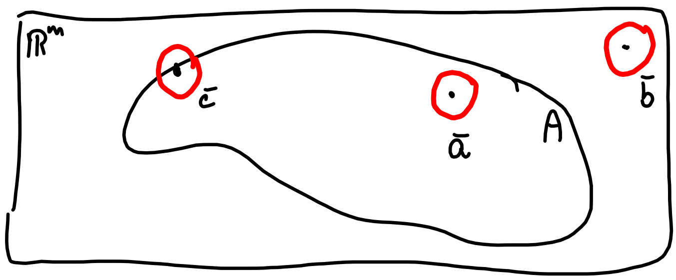
$A \subseteq \mathbb{R}^m$ delmengde

Åpen Kule/ball:
$$B(\bar a, r) = \{\bar x \in \mathbb{R}^m \mid |\bar x - \bar a| < r\}$$
$\bar a \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}_+$

Indre punkter i A: $\bar a \in \mathbb{R}^m$ som er slik at det finnes en ball $B(\bar a, r) \subset A$

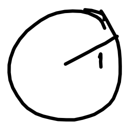
Ytre punkter til A: $\bar b \in \mathbb{R}^m$ slik at $\exists B(\bar b, r)$ med $B(\bar b, r) \cap A = \emptyset$

Randpunktene til A: $\bar c \in \mathbb{R}^m$ slik at $\forall B(\bar c, r)$ så vil
∂A $\qquad B(\bar c, r) \cap A \neq \emptyset$, $B(\bar c, r) \not\subseteq A$



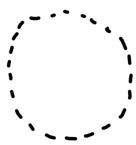
Randpunkter kan/trenger ikke være i A

$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



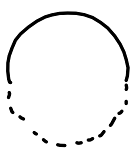
Randpunkter er med

$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$



Randpunkten er IKKE med.

C:



Noen er med, andre ikke

Def. 1) En mengde er **LOKKET** dersom den inneholder alle sine randpunkter : $\partial A \subseteq A$

2) En mengde er **ÅPEN** dersom den ikke inneholder noen av sine randpunkter: $\partial A \cap A = \emptyset$

Kompletthet : For $\mathbb{R}$: Enhver ikke-tom begrenset delmengde $A \subset \mathbb{R}$ har minst én øvre skranke

$\Rightarrow$ Enhver voksende begrenset følge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}$ konvergerer

$2,\ 2{,}7,\ 2{,}71,\ 2{,}718,\ \ldots \longrightarrow e$

Samme gjelder for $\mathbb{R}^m$, $m > 1$

Følger i $\mathbb{R}^m$

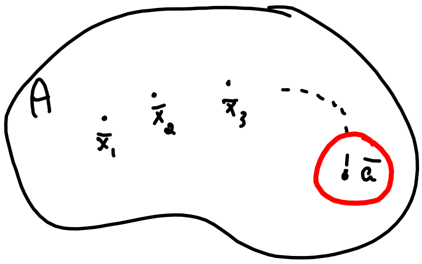
$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots\ldots$ Følge i $\mathbb{R}^m$

evt $A \subset \mathbb{R}^m$

Delfølge: Eks $\bar{x}_2, \bar{x}_7, \bar{x}_8, \bar{x}_{234}, \ldots$

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \in \mathbb{Z}_+$

$\{\bar{x}_{n_i}\}$ delfølge av $\{\bar{x}_n\}$



Def. En følge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ **KONVERGERER MOT** $\bar{a}$ dersom $\forall \varepsilon > 0$ så $\exists N$ slik at $n \geq N$ så vil

$|\bar{x}_n - \bar{a}| < \varepsilon$

Alt. $\bar{x}_n \in B(\bar{a}, \varepsilon)$

Setning 5.18

$A \subset \mathbb{R}^m$ lukket

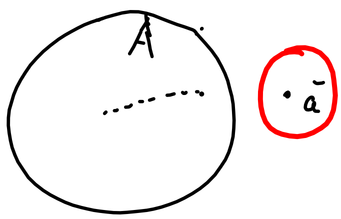
A_n, $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}^m$, konverger mot $\bar{a}$

Da vil $\bar{a} \in A$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{a} \\ \{x_n\} \to \bar{a} \\ x_n \to \bar{a} \end{array}\right\}$

Bevis:

Anta motsatt



umulig.

Setning 5.19

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

1) $F : A \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig i $\bar{a} \in A$ og $\{\bar{x}_n\} \to \bar{a}$, da vil

$$\lim_{n\to\infty} F(\bar{x}_n) = F(\bar{a}) \qquad (\lim F = F \lim)$$

2) F ikke kontinuerlig, så finnes en følge $\{\bar{x}_n\}$ slik $\lim_{n\to\infty} F(\bar{x}_n) \neq F(\bar{a})$

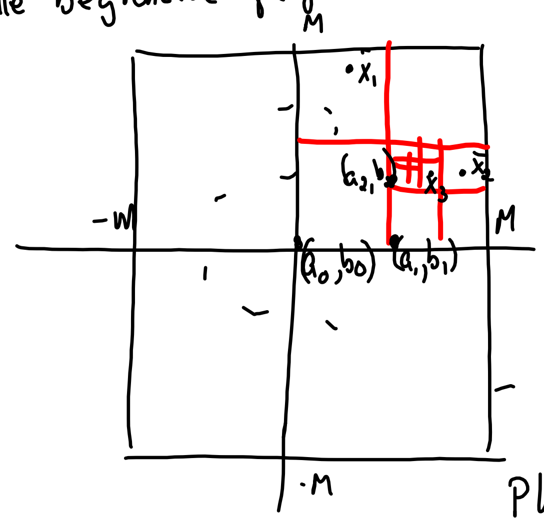
$$\bar{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} \to \bar{a} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a^{(i)} \quad i = 1, \ldots, m$$

Setning 5.2.2 Dersom $\{\bar{x}_n\}$ konvergerer mot $\bar{a} \in \mathbb{R}^m$, så vil enhver delfølge konverge mot $\bar{a}$

Bolzano-Weierstrass $\{\bar{x}_n\}$

Alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Bevis



$|\bar{x}_n| \leq M$

Nedre venstre hjørne: (a_k, b_k)

$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq M$

$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq M$

$a_i \to a$

$b_i \to b$

Plukk $\bar{x}_{n_1}$ i firkant 1

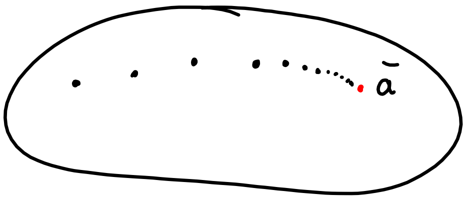
$\bar{x}_{n_2}$ i –"– 2 (mindre)

$\vdots$

delfølge $\{x_{n_i}\} \to \bar{a} = (a,b)$

Cauchy-følger

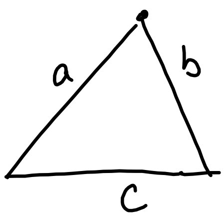
Def. En følge $\{x_n\}$ kalles en **CAUCHY-FØLGE** dersom $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ slik at $|x_n - x_k| < \varepsilon \quad \forall n,k \geq N$



Viktig resultat: Konvergente følger = Cauchy-følger

Mellomspill:

Trekantulikheten: $a+b \geq c$



$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$

Bevis 1. Enhver konvergent følge er en Cauchy-følge

$\{\bar{x}_n\} \to \bar{a}$

Bevis.

Trekantulikheten

$$\Rightarrow |\bar{x}_n - \bar{x}_k| = |\bar{x}_n - \bar{a} + \bar{a} - \bar{x}_k| \leq |\bar{x}_n - \bar{a}| + |\bar{a} - \bar{x}_k|$$

Velg $\varepsilon > 0$. La N være slik at hvis $n \geq N$, så er

$$|\bar{x}_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |\bar{x}_n - \bar{x}_k| \leq |\bar{x}_n - \bar{a}| + |\bar{a} - \bar{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

QED