$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha | a, b \in \mathbb{Z}\}$
Normen til et element $z = a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ er gitt ved $N(z) = z \cdot \bar{z}$, der $\bar{z}$ er det konjugerte elementet til z (den andre roten til det minimale polynomet til z).
For $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ er normen gitt ved $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$.

Pell likninger: Alle løsningene til $x^2 - dy^2 = 1$ er gitt ved $x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^n$ der (x_0, y_0) er en minimal løsning.
For å finne løsningene til $x^2 - dy^2 = a$:

- Finn en minimal løsning $z = x_0 + y_0\sqrt{d}$ til $x^2 - dy^2 = a$
- Finn en minimal løsning $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{d}$ til $x^2 - dy^2 = 1$ (se over)

Da er alle løsningene gitt ved $x + \sqrt{d} = z_0 \cdot z_1^n = (x_0 + y_0\sqrt{d}) \cdot (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}[i]$ og $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/3}]$ har alle unik faktorisering (UFD).

Oppgave 1

Løs $x^2 - 5y^2 = 1$ i heltall x, y.

Oppgave 2

Vis at $x^2 + y^2 = 11$ ikke har noen løsning i $\mathbb{Z}[i]$ og dermed ingen i $\mathbb{Z}$.

Oppgave 3

Løs $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$ i heltall (Hint: Fullfør kvadratet og bruk variabelskiftet $u = y - 2x$).

Oppgave 4

Finn to faktoriseringer av tallet 9 i $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Konkluder med at $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ikke er et UFD ('unikfaktoriseringsområde').

Oppgave 5

I denne oppgaven skal vi vise Fermats lille teorem og utlede Wilson's teorem.
a) La $a \not\equiv 0 \mod p$. Forklar at modulo p, er $\{a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
b) Fermats lille teorem sier at hvis p er prim, er $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ for alle $a \not\equiv p \mod p$. Ved å betrakte produktet

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv (p-1)! \mod p,$$

vis dette.
c) La $P(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$. Vis at $P(x) - (x^{p-1} - 1)$ er nullpolynomet modulo p. (Hint: hvor mange røtter har det?)
d) Vis Wilson's teorem: $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

Oppgave 6 (Litt vanskeligere)

Løs $x^2 - 19y^2 = 1$ i *rasjonale tall* x og y. Hint: Her trengs ingen kunnskaper om Pell's likning.

Oppgave 7 (For de tøffe)

Per har mange søstre, noen med blå øyne, andre uten. Du får vite at sannsynligheten for at to tilfeldige søstre har blå øyne er nøyaktig 50%. Hvor mange søstre vil du gjette på at Per har? Bonus for Pell-likning eksperter: Finn alle mulige slike antall søstre.