Tom Lindstrøm 27/1, 2006:

MAT 1110: Litt om basiser

Begrepet *basis* står sentralt i lineær algebra. I Lays bok dukker det først opp i seksjon 2.8, men jeg synes det er naturlig å introdusere begrepet allerede i forbindelse med seksjon 1.7. Dette lille notatet dekker det ekstra stoffet jeg gikk gjennom på forelesning — pluss litt bonusmateriale.

Definisjon 1 *En* basis *for* $\mathbf{R}^n$ *er en samling vektorer* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *som er lineært uavhengige og som utspenner hele* $\mathbf{R}^n$ *(dvs. at enhver vektor i* $\mathbf{R}^n$ *kan skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$*).*

Det enkleste eksempelet på en basis i $\mathbf{R}^n$ er samlingen av enhetsvektorer langs koordinataksene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots \ , \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vårt første resultat viser at antall elementer p i en basis alltid må være nøyaktig lik dimensjonen n til rommet. Det gir oss også en effektiv metode for å sjekke om en samling vektorer er en basis:

Teorem 1 *En basis for* $\mathbf{R}^n$ *har alltid nøyaktig* n *elementer. En samling* $\mathbf{v}_1$*,* $\mathbf{v}_2$*, …,* $\mathbf{v}_n$ *er en basis hvis og bare hvis den reduserte trappeformen til matrisen*

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

er identitetsmatrisen

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dvs. $n \times n$*-matrisen med 1'ere på diagonalen og 0'er ellers.*

Bevis: La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_p$ være en samling vektorer. For å undersøke om dette er en basis danner vi matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p]$$

og skriver den på redusert trappeform. Fra Lays Theorem 4 (side 43) vet vi at vektorene våre utspenner hele $\mathbf{R}^n$ hvis og bare hvis A har et pivotelement i hver *rad.* Fra Lays seksjon 1.7 vet vi at vektorene våre er lineært uavhengige hvis og bare hvis det finnes et pivotelement i hver *søyle.* Følgelig er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_p$ en basis hvis og bare hvis A har et pivotelement både i hver eneste rad og i hver eneste søyle. Ved å begynne i øverste rad og arbeide seg nedover er det lett å se at dette betyr at den reduserte trappeformen til A er en diagonalmatrise. Her er detaljene: Pivotelementet i rad 1 må stå i første søyle for ellers er det umulig å få plassert et pivotelement i denne søylen. Pivotelementet i rad 2 må tilsvarende stå i annen søyle, for ellers er det umulig å få plassert et pivotelement i denne søylen. Ved å fortsette på denne måten, ser vi at alle pivotelementene må stå på diagonalen. Vi ser dessuten at når vi har fått plassert pivotelementet på nederste rad, kan det ikke være flere søyler igjen til høyre for dette elementet siden slike søyler umulig kan inneholde et pivotelement. Altså er antall søyler lik n (dvs. $p = n$), og den reduserte trappeformen er diagonalmatrisen I.

Eksempel: Undersøk om vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

danner en basis for $\mathbf{R}^3$. Vi skriver matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette er ikke identitetsmatrisen, så vektorene våre danner *ikke* en basis.

Det neste resultatet er hovedårsaken til at basiser er så nyttige.

Teorem 2 *Anta* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *er en basis for* $\mathbf{R}^n$. *Da kan ethvert element* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ *skrives som en lineærkombinasjon*

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

på nøyaktig én måte.

Bevis: Siden enhver basis per definisjon utspenner hele $\mathbf{R}^n$, trenger vi bare å vise entydigheten. Vi må altså vise at hvis

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

og

$$\mathbf{b} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

så er $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $\ldots$, $c_n = d_n$. Trekker vi de to ligningene fra hverandre, får vi:

$$\mathbf{0} = (c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n$$

Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er dette bare mulig dersom alle koeffisientene er null, dvs. dersom $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $\ldots$, $c_n = d_n$.

Det siste resultatet vi tar med, viser at enhver mengde som utspenner hele $\mathbf{R}^n$, inneholder en basis.

Teorem 3 *Anta at vektorene* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *utspenner hele* $\mathbf{R}^n$*. Da kan vi plukke ut en delmengde* $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}$ *som er en basis for* $\mathbf{R}^n$*.*

Bevis: Vi danner som vanlig matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p]$$

og skriver den på redusert trappeform. Siden mengden utspenner hele $\mathbf{R}^n$, finnes det et pivotelement i hver eneste rad. Det betyr at det er n pivotelementer og derfor n pivotsøyler med nummer $i_1, i_2 \ldots, i_n$. Vi går tilbake til A og fjerner alle søyler som ikke er pivotsøyler. Den nye matrisen A' har søyler $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}$. Utfører vi nøyaktig de samme radoperasjonene på A' som vi i stad gjorde på A, får vi identitetsmatrisen (hvorfor?). Ifølge Teorem 1 er da $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}$ en basis for $\mathbf{R}^n$.

Legg merke til at beviset ovenfor inneholder en metode for å finne basisen $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}$ — vi plukker rett og slett ut pivotsøylene til $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p]$.

Basiser og lineæravbildninger

(Resten av notatet (unntatt oppgave 1, 2, 3 og 7) forutsetter at du har lest seksjon 1.8 i Lays bok.) Én av hovedgrunnene til at basiser er så viktige, er samspillet med lineæravbildninger. Anta at $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er en lineæravbildning, og at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $\mathbf{R}^n$. Dersom vi vet hvordan T virker på disse basiselementene (f.eks. at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $\ldots$, $T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$), kan vi regne ut hvordan T virker på en vilkårlig vektor $\mathbf{b}$. Vi skriver rett og slett $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

og bruker lineæriteten:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}) &= T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \\ &= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \\ &= c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Legg merke til at i dette argumentet benytter vi bare at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ utspenner hele $\mathbf{R}^n$, og har ikke bruk for entydighetsdelen av basisdefinisjonen. I andre argumenter er imidlertid denne delen viktig. Anta nå at vi ikke *har* en lineæravbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ som ovenfor, men at vi ønsker å *definere* en avbildning slik at basiselementene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbf{R}^n$ avbildes på elementene $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ i $\mathbf{R}^m$. Vi ønsker med andre ord å lage en lineæravbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ slik at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $\ldots$, $T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$. Siden enhver $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ kan skrives som en sum

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

på en *entydig måte*, kan vi rett og slett definere

$$T(\mathbf{b}) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$$

(Hvorfor kunne dette ha gått galt dersom fremstilingen ikke var entydig?) Det er en lærerik oppgavene å sjekke at T virkelig er en lineæravbildning og at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $\ldots$, $T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Oppgaver

1. Bruk definisjon 1 (og *ikke* teorem 1!) til å vise at enhetsvektorene $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ danner en basis for $\mathbf{R}^n$.

2. Bruk MATLAB til å sjekke om

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

er en basis for $\mathbf{R}^4$ (eller gjør det for hånd hvis du orker).

3. Finn en delmengde av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

som er en basis for $\mathbf{R}^3$ (bruk gjerne MATLAB).

4. Bevis påstanden helt til slutt i notatet (at T virkelig er en lineæravbildning og at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$).

5. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vis at det ikke finnes noen lineæravbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ slik at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, og $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$. (Hint: Skriv $\mathbf{v}_3$ som en linærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Anta at det finnes en T med de ønskede egenskapene, og beregn $T(\mathbf{v}_3)$ på to forskjellige måter.)

6. Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært *avhengige* vektorer i $\mathbf{R}^n$. Vis at det eksisterer vektorer $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p$ i $\mathbf{R}^m$ slik at det ikke finnes noen lineæravbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ med $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $T(\mathbf{v}_p) = \mathbf{w}_p$.

7. Vis at enhver lineært uavhengig mengde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbf{R}^n$ kan utvides til en basis for $\mathbf{R}^n$ ved å legge til nye elementer.

8. Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært *uavhengige* vektorer i $\mathbf{R}^n$ og la $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p$ være hvilke som helst vektorer i $\mathbf{R}^m$. Vis at det finnes en lineæravbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ slik at $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $T(\mathbf{v}_p) = \mathbf{w}_p$.