UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.

Eksamensdag: Fredag 18. mars 2016.

Tid for eksamen: 11:00-13:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

K_{Λ}	NDIDATNR.	
r\ A	NDIDATNE.	

Eksamen består av 15 oppgaver. De 10 første teller 3 poeng hver, mens de 5 siste teller 4 poeng hver slik at den totale poengsummen er 50. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene fører du inn på dette svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng. Lykke til!

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)	Alt. e)	Poengverdi
1					X	3 poeng
2				X		3 poeng
3				X		3 poeng
4					X	3 poeng
5		X				3 poeng
6	X					3 poeng
7			X			3 poeng
8			X			3 poeng
9		X				3 poeng
10	X					3 poeng
11				X		4 poeng
12					X	4 poeng
13	X					4 poeng
14	X					4 poeng
15		X				4 poeng

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1. (3 poeng) La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en avbildning slik at $\mathbf{F}(0,0) = (0,0)$ og $\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funksjon slik at $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right) = (1,-1)$. Da blir $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,0), \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right)$ for den sammensatte funksjonen $h(x,y) = g(\boldsymbol{F}(x,y))$:

a)
$$(-1,1)$$

b)
$$(2,1)$$

e)
$$(1, -1)$$

(3 poeng) En parametrisert kurve er gitt ved Oppgave 2.

$$\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j}.$$

Akselerasjonen a(t) er da

a)
$$-t\cos t\,\boldsymbol{i} - t\sin t\,\boldsymbol{j}$$

b)
$$(2\sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (2\cos t + t\sin t)\mathbf{j}$$

c)
$$(2\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (-2\cos t - t\sin t)\mathbf{j}$$

d)
$$(-2\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (2\cos t - t\sin t)\mathbf{j}$$

e)
$$(\cos t - t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t \cos t)\mathbf{j}$$

(3 poeng) En vaier har form av en kurve parametrisert ved Oppgave 3.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t^2 \, \mathbf{k}, \, 0 \le t \le 1.$$

Hvis tettheten til vaieren i punktet (x, y, z) er gitt ved $f(x, y, z) = 8\sqrt{z}$, så blir massen til vaieren

a)
$$\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$
 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$ e) $5\sqrt{5}-1$

c)
$$\sqrt{2}$$

d)
$$\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

e)
$$5\sqrt{5} - 1$$

Oppgave 4. (3 poeng) En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$F(x, y, z) = (2xy + 2xz)i + (x^2 + z)j + (x^2 + y)k$$

er gitt ved

a)
$$\phi(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$$

b)
$$\phi(x, y, z) = x^2 + x^2z + xy$$

c)
$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

d)
$$\phi(x, y, z) = z^2 + y^2 z + xz$$

e)
$$\phi(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. (3 poeng) Tangentplanet til funksjonen

$$f(x,y) = x^2 \cos(\pi x) - 2y^2$$

i punktet (1,1) er gitt ved

a)
$$z = -3 + 2(x - 1) + 4(y - 1)$$

b)
$$z = -3 - 2(x - 1) - 4(y - 1)$$

c)
$$z = 3 - 2(x+1) - 4(y+1)$$

d)
$$z = -3 + 2(x - 1)$$

e)
$$z = -3 - \pi(x - 1) - 2(y - 1)$$

Oppgave 6. (3 poeng) La A være området i \mathbb{R}^2 gitt ved $0 \le y \le 1$ og $e^{-y} \le x \le e^y$. Dobbeltintegralet $\iint_A e^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ er lik:

a)
$$\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}$$

b)
$$e + \frac{1}{e}$$

d)
$$2e - 1$$

e)
$$e - \frac{1}{e}$$

Oppgave 7. (3 poeng) Skjæringen mellom kurven $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og planet z = x + 1 gir en

a) Sirkel

b) Ellipse

c) Parabel

d) Hyperbel

e) Tom mengde

Oppgave 8. (3 poeng) La \mathbf{F} være affinavbildningen fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^2 som speiler om punktet (1,1) (det vil si at vi \mathbf{F} avbilder \mathbf{x} på det andre punktet som ligger på linjen gjennom \mathbf{x} og (1,1), og som har samme avstand til (1,1)). Da er

a)
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b)
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9. (3 poeng) Hvis R er rektangelet $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ så er dobbeltintegralet $\iint_R (x^2 + 2xy) dx dy$ lik:

a) 0

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) 2

e) $\frac{8}{3}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. (3 poeng) Når vi skifter integrasjonsrekkefølge i integralet

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{\frac{1}{x}}^{3-2x} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right] \, \mathrm{d}x$$

får vi

a)
$$\int_{1}^{2} \left[\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y) \, dx \right] dy$$

b) $\int_{1}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{3-2x}^{\frac{1}{x}} f(x,y) \, dy \right] dx$
c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{\frac{1}{y}}^{3-2y} f(x,y) \, dx \right] dy$
d) $\int_{\frac{1}{x}}^{3-2x} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y) \, dx \right] dy$
e) $\int_{1}^{2} \left[\int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y) \, dx \right] dy$

Oppgave 11. (4 poeng) Vi har gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}.$$

Hvis kurven \mathcal{C} er parametrisert ved

$$r(t) = \cos t \, \boldsymbol{i} + \sin t \, \boldsymbol{j} + t(2\pi - t) \, \boldsymbol{k}, \, 0 \le t \le 2\pi,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

a)
$$2 + \pi$$

c)
$$2\pi$$

e) 4

Oppgave 12. (4 poeng) La R være rektangelet $R = [0,1] \times [1,3]$ og la f(x,y) = 8x + 4y. Arealet til grafen $\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$ over R er

a) 2

b) 12

c) 6

d) 8

e) 18

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 13. (4 poeng) Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$-9x^2 - 36x + 4y^2 - 32y - 8 = 0?$$

- a) En hyperbel med sentrum i (-2,4), med brennpunkter $(-2,4-\sqrt{13})$ og $(-2,4+\sqrt{13})$.
- b) En hyperbel med sentrum i (-2,4), med brennpunkter $(-2-\sqrt{13},4)$ og $(-2+\sqrt{13},4)$.
- c) En ellipse med sentrum i (-2,4) med brennpunkter $(-2,4+\sqrt{5})$ og $(-2,4-\sqrt{5})$.
- d) En ellipse med sentrum i (-2,4) med brennpunkter $(-2+\sqrt{5},4)$ og $(-2-\sqrt{5},4)$.
- e) En parabel med sentrum i (2, -4) og brennpunkt (2, -5).

Oppgave 14. (4 poeng) Volumet til området avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + x + y^2 - 3y$ og planet z = 4 + x - 3y er:

- a) 8π
- b) $\frac{32\pi}{3}$
- c) 4π
- d) $\frac{24\pi}{5}$
- e) 2π

Oppgave 15. (4 poeng) La C være den parametriserte kurven $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{2}\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathbf{2}\sin\theta\,\mathbf{j}$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Regn ut integralet

$$\int_{\mathcal{C}} (y + e^{x^2}) dx + (2x + y + \sin e^y) dy$$

- a) $\sin e^4$
- b) 4π
- c) e^4
- d) 4
- e) $\frac{\pi}{4}$

SLUTT.