Prøveeksamen i MAT1110, våren 2012

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og bruk den til å finne alle løsningene av ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - u &= 1 \\ -y + z + 3u &= -1 \\ -x - y + u + v &= 1 \end{aligned}$$

b) Plukk ut tre søyler i A som danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 2

Finn eventuelle stasjonære punkter til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør hva slags type de er.

Oppgave 3

a) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

b) Finn summen til rekken der den konvergerer.

Oppgave 4

Vis at det finnes en funksjon $z = g(x, y)$ definert i en omegn av $(1, 0)$ slik at $g(1, 0) = 0$ og

$$g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + g(x, y)^2)$$

Finn $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)$.

Oppgave 5

Vis at egenverdiene til en 2×2-matrise

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er gitt ved

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Finn en 2×2-matrise som *ikke* har to lineært uavhengige egenvektorer.

Oppgave 6
Finn volumet til området avgrenset av flatene $z = -x^2 - 2y^2$ og $z = 2x^2 + y^2 + 6x$.

Oppgave 7
I denne oppgaven er $\mathcal{C}$ en enkel, lukket kurve som avgrenser et område A i planet, og $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, er en glatt, positivt orientert parametrisering av $\mathcal{C}$.

a) Vi kaller

$$\mathbf{N}(t) = y'(t)\,\mathbf{i} - x'(t)\,\mathbf{j}$$

den *utadrettede normalvektoren* til $\mathcal{C}$. Forklar at dette er en fornuftig betegnelse.

Hvis $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er et kontinuerlig vektorfelt, definerer vi integralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{N}$ ved

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{N} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\,dt$$

En funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med kontinuerlige annenordens partiellderiverte kalles *harmonisk* dersom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Vis at for alle harmoniske f er $\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{N} = 0$.

SLUTT

Ekstraoppgave 1
Avgjør om rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2\sqrt{n}}{n^3 + 2n + 3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

konvergerer.

Ekstraoppgave 2
Finn det punktet på flaten $xy - 2z + 2 = 0$ som ligger nærmest origo.