# MAT 1110: Løsningsforslag til obligatorisk oppgave 2, V-06

**Oppgave 1:** a) Hvis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ er to vektorer, vil kommandoen `>> plot(x,y)` tegne rette forbindelseslinjer mellom punktene $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ osv. For å plotte en parametrisert kurve må vi derfor lage vektorer **x**, **y** som består av hhv. $x$- og $y$-koordinatene til punkter på kurven. For kurven i oppgaven kan vi gjøre dette ved å skrive

```
>> t=0:0.01:2*pi;
>> x=t.*cos(t);
>> y=t.*sin(t);
>> plot(x,y)
```

Plottet viser én omdreining av en spiral.

b) Siden `>> plot3` virker på samme måte som `>> plot`, bare i tre dimensjoner, kan vi bruke den samme fremgangsmåten som ovenfor:

```
>> t=0:0.01:2*pi;
>> x=t.*cos(t);
>> y=t.*sin(t);
>> z=t.^2;
>> plot3(x,y,z)
```

Figuren viser spiralen i a) "løftet opp i" rommet.

c) For å vise at kurven ligger på flaten observerer vi bare at

$$x(t)^2 + y(t)^2 = (t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 = t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = t^2 = z(t)$$

Før vi tegner kurven og flaten i samme koordinatssystem, kan det være greit å gjøre et overslag over hvor stort vinduet skal være. Når $t = 2\pi$, er $x(t)$ lik $2\pi$, altså litt mindre enn 7. Det virker derfor rimelig å la $x$ og $y$ løpe fra $-7$ til 7:

```
>> [x,y]=meshgrid(-7:0.1:7);    % se MATLAB-heftet, seksjon 4
>> z=x.^2+y.^2;
>> mesh(x,y,z)                  % se MATLAB-heftet
>> hold on
>> t=0:0.01:2*pi;
>> x1=t.*cos(t);                % velger nye variabelnavn for
>> y1=t.*sin(t);                % ikke å overskrive de innlagte
>> z1=t.^2;                     % verdiene i x,y og z
>> plot3(x1,y1,z1,'LineWidth',2)
```

Det kan være nødvendig å snu litt på figuren for å se kurven godt.

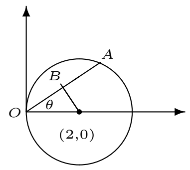
**Oppgave 2:** På grunn av integranden $\sqrt{x^2 + y^2}$ er det fristende å bytte til polarkoordinater, men før vi gjør det, trenger vi bedre oversikt over området $R$. Fullfører vi kvadratet, ser vi at

$$x^2 - 4x + y^2 = x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4$$

som gir

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$$

Dette betyr at $R$ er sirkelskiven med radius 2 om punktet $(2, 0)$ (se figuren).




Fra figuren ser vi at $|OB|$ er $2\cos\theta$, så $|OA| = 2|OB| = 4\cos\theta$. Dette betyr at for gitt $\theta$, skal $r$ løpe fra 0 til $4\cos\theta$. For å fange opp alle punkter i området må $\theta$ løpe fra $-\pi/2$ til $\pi/2$, så integralet blir

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{4\cos\theta} r \cdot r \, dr \right] d\theta$$

der den første $r$'en i integranden skyldes at $\sqrt{x^2+y^2} = r$ mens den andre er Jacobi-determinanten. Vi får

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{4\cos\theta} r^2 \, dr \right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=4\cos\theta} d\theta = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta$$

For å regne ut det siste integralet bruker vi at

$$\cos^3\theta = \cos^2\theta \cdot \cos\theta = (1 - \sin^2\theta)\cos\theta$$

Innfører vi nå $u = \sin\theta$ som ny variabel, får vi $du = \cos\theta \, d\theta$ og

$$I = \frac{64}{3} \int_{-1}^{1} (1 - u^2) \, du$$

der de nye grensene skyldes at $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ and $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Resten er lett:

$$I = \frac{64}{3} \int_{-1}^{1} (1 - u^2) \, du = \frac{64}{3} \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{256}{9}$$

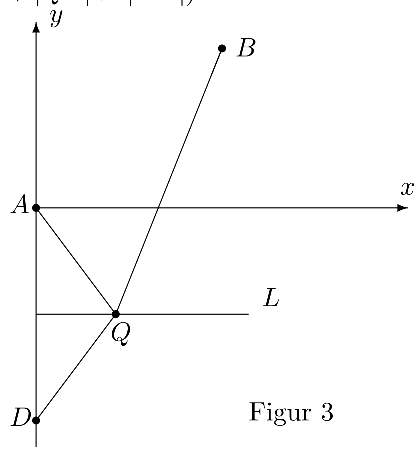
**Oppgave 3:** a) Ellipsen med brennpunkter i $A$ og $B$ og med store halvakse $a$ består av alle punkter $C$ slik at $|AC| + |CB| = 2a$. I vårt tilfelle er $2a = 2 \cdot 17 = 34$. Siden dette et tauets lengde, ligger $C$ på ellipsen. Den halve brennpunktavstanden er $c = \frac{20}{2} = 10$, så den lille halvaksen blir $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{289 - 100} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21} \approx 13.75$.

b) Hvis $D$ har koordinater $(0, y)$, sier avstandsformelen at $34^2 = |BD|^2 = (16-0)^2 + (12-y)^2$. Løser vi denne ligningen, og tar hensyn til at $D$ skal ligge på den *negative* $y$-aksen, får vi $y = -18$. $D$ har altså koordinater $(0, -18)$.

c) Siden $L$ ligger halvveis mellom $D$ og $A$, er $|PA| = |DP|$ (se figur 3 på oppgavearket). Dermed er $|PA| + |PB| = |DP| + |PB| = |DB| = 34$, som viser at

$P$ ligger på ellipsen.

d) Hvis $Q$ er et annet punkt på $L$, så er fortsatt $|QA| = |DQ|$ (se figuren nedenfor). Dermed er $|QA| + |QB| = |DQ| + |QB| > |DB| = 34$, så $Q$ ligger ikke på ellipsen (her har vi brukt at siden $Q$ ikke ligger på linjen fra $D$ til $B$, er $|DQ| + |QB| > |DB|$).




Figur 3

Det er flere metoder for å vise at $P$ er det laveste punktet på ellipsen. Det enkleste er kanskje å si at dersom det fantes et lavere punktet $R$, måtte ellipsen ha krysset $L$ to steder — en gang på vei ned til $R$ og en gang på vei opp igjen (dette argumentet gjør skjult bruk av skjæringssetningen). Det er også mulig å bruke en variant av argumentet i c) og d) til å vise at hvis $R$ ligger lavere enn $P$, så er $|RA| + |RB| > 34$.

e) Siden linjen $L$ ligger halvveis mellom $A(0,0)$ og $D(0,-18)$, må den ha ligning $y = -9$, og $y$-koordinaten til $P$ er derfor $-9$. Linjen fra $D$ til $B$ har stigningstall $\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$. Når vi går fra $D$ til $P$ øker $y$-koordinaten med 9, så $x$-koordinaten må øke med $9 \cdot \frac{8}{15} = \frac{24}{5}$ (husk at vi må snu stigningstallet på hodet når vi regner fra $y$-tillegg til $x$-tillegg). Altså har $P$ koordinater $(\frac{24}{5}, -9)$.

**Oppgave 4:** a) Siden $T$ er lineær, er

$$T(\mathbf{a} + t\mathbf{r}) = T(\mathbf{a}) + tT(\mathbf{r})$$

Når $T(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, er dette ligningen til en linje gjennom $\mathbf{a}$ med retningsvektor $T(\mathbf{r})$; når $T(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, får vi bare punktet $T(\mathbf{a})$ uansett hvilken $t$ man velger.

b) La $\mathbf{a} = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$, $\mathbf{v}_1 = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ og $\mathbf{v}_2 = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$. Da er bildet av de fire punktene (her bruker vi at $T$ er lineær!):

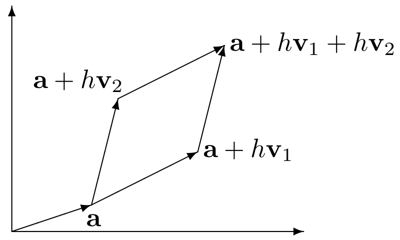
$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \mathbf{a}$$

$$T(\begin{bmatrix} x+h \\ y \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \mathbf{a} + h\mathbf{v}_1$$

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y+h \end{bmatrix} = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{a} + h\mathbf{v}_2$$

$$T(\begin{bmatrix} x+h \\ y+h \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{a} + h\mathbf{v}_1 + h\mathbf{v}_2$$

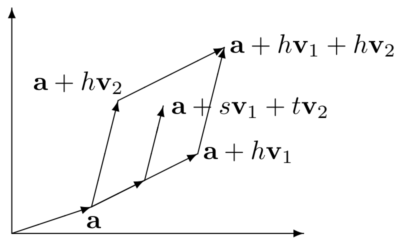
"Normalt " danner disse punktene de fire hjørnene i et parallellogram $P$ (se figuren). Unntaket er hvis vektorene $\mathbf{v}_1$ eller $\mathbf{v}_2$ er lineært avhengig (dvs. at de enten er parallelle eller minst én av dem er null) — da klapper parallellogrammet sammen til et linjestykke eller et punkt.




Vi konsentrerer oss om tilfellet der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige. Ifølge punkt a) avbilder $T$ rette linjer på rette linjer, og dette medfører at sidekantene i kvadratet $K$ avbildes på sidekantene i parallellogrammet $P$. Det gjenstår å vise at punktene i det indre av $K$ avbildes på punkter i det indre av $P$ (og omvendt: at alle punkter i det indre av $P$ er bilder av punkter i det indre av $K$). Dette virker geometrisk ganske opplagt, men er ikke helt lett å vise. Det enkleste er kanskje å observere at punktene i $K$ er på formen $\begin{bmatrix} x+s \\ y+t \end{bmatrix}$ der $s$ og $t$ ligger mellom 0 og $h$, mens punktene i $P$ er på formen $\mathbf{a} + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ der $s$ og $t$ ligger mellom 0 og $h$ (se figuren nedenfor). Siden

$$T(\begin{bmatrix} x+s \\ y+t \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{a} + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

ser vi at $T$ avbilder $K$ på $P$.




c) Parallellogrammet $P$ har $h\mathbf{v}_1$ og $h\mathbf{v}_2$ som kanter. Dersom $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, blir arealet dermed

$$\begin{vmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{vmatrix} = h^2(ad - bc)$$

Dersom $A$ er matrisen til $T$, vet vi at

$$A = [T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}), T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

(se Lays bok, seksjon 1.9). Siden

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

følger resultatet.

Legg merke til at resultatet også stemmer når $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært avhengige. Da har "parallellogrammet" areal null (siden det har klappet sammen til et linjestykke eller et punkt), og $\det(A) = 0$.