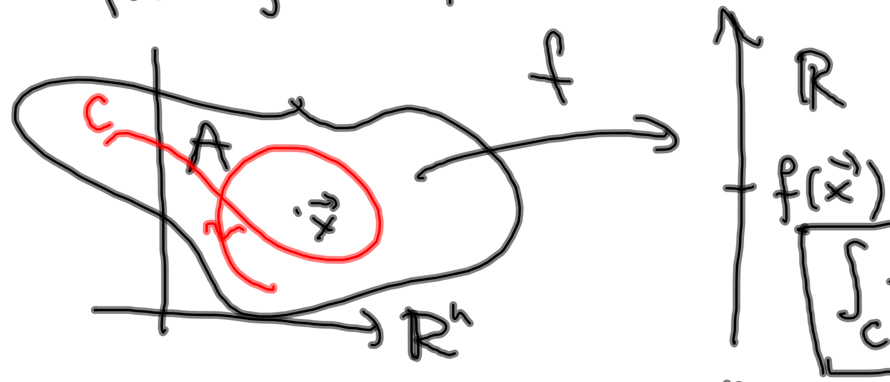
LINJEINTEGRALER FOR
8.3: SKALARFELT OG
3.4: VEKTORFELT

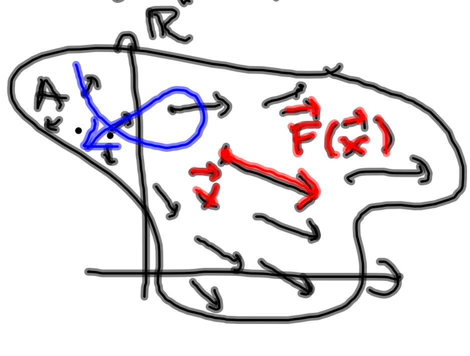
La $\mathbb{R}^n$ være som før.

Et <u>skalarfelt</u> på $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er en funksjon $f: A \to \mathbb{R}$.



$$\boxed{\int_C f\, ds}$$

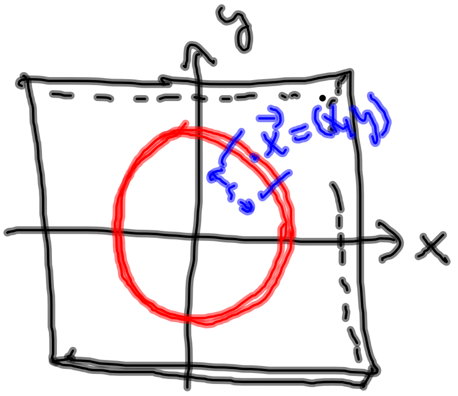
Et <u>vektorfelt</u> på $A \subset \mathbb{R}^n$ er en funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$.



$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

skalarprodukt

MOTIVASJON FOR LINJEINTEGRAL AV SKALARFELT



SER PÅ EN „TRÅD"
DER ET LITE STYKKE
AV LENGDE s NÆR
$\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
HAR MASSE
$f(\vec{x})\, s$

$$f(\vec{x}) = \frac{\text{masse}}{\text{lengdeenhet}} \text{ nær } \vec{x}.$$

Hvis formen består av N deler, der
i'te del har lengde s_i og er nær $\vec{x}_i$
er den totale massen

$$M = \sum_{i=1}^{N} f(\vec{x}_i)\, s_i$$

Anta at C har en parametrisering

$$\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t)$$

Ta en partisjon

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

La C_i være delen av kurven der $t_{i-1} < t \leq t_i$. $(1 \leq i \leq N)$

Da er $\vec{r}(t_i) = \vec{x}_i$ et punkt på C_i, så $f(\vec{x}_i) = f(\vec{r}(t_i))$.

C_i har lengde ca.

$$|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$
$$\approx v(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

farten $v(t) = |\vec{v}(t)|$
$= |\vec{r}\,'(t)|$

Summen vi er ute etter blir

$$\sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}(t_i))\, \underline{v(t_i)}\,(t_i - t_{i-1})$$

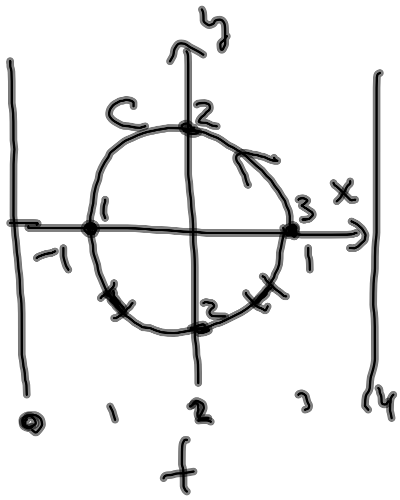
$$\xrightarrow[\substack{t_i - t_{i-1} \to 0 \\ N \to \infty}]{} \boxed{\int_{t_0 = a}^{\cancel{t_N} = b} f(\vec{r}(t))\, v(t) \; dt}$$

NB

<u>Def</u> La $\vec{r}: [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ parametrisere en kurve C.
La $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ være et skalarfelt på A. Anta at $v(t) = |r'(t)|$ og f er kontinuerlige. Da er linjeintegralet til f langs C definert lik

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt.$$

Eksempel:



$$\vec{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$f(x,y) = x + 2$$

$$\int_C f \, ds$$

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) =$
$(-\sin t, \cos t)$

$v(t) = |\vec{v}(t)|$
$= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}$
$= 1$

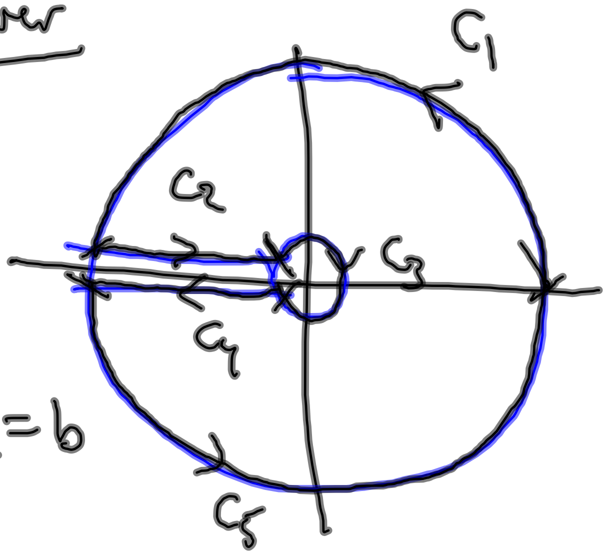
$$= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \, v(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t + 2) \cdot 1 \, dt$$

$$= \Big[\sin t + 2t \Big]_0^{2\pi} = \sin 2\pi + 2 \cdot 2\pi - \sin 0 - 2 \cdot 0$$

$$= \underline{\underline{4\pi}}$$

Stykkevis glatte kurver



DEF: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
er stykkevis glatt
hvis det finnes
$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$
slik at restriksjonen
$$\vec{r}_i : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
av $\vec{r}$ til $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a,b]$
er deriverbar med kontinuerlig derivert, for hver $1 \le i \le m$.
La C_i være parametrisert ved $\vec{r}_i$.

DEF
$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \ldots + \int_{C_m} f \, ds$$

Setning 3.3.2 La $\vec{r}:[a,b]\to A\subseteq\mathbb{R}^n$ være en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C i A, og la

$$f,g: A\longrightarrow \mathbb{R}$$

være to skalarfelt på A. La $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (lambda, my)

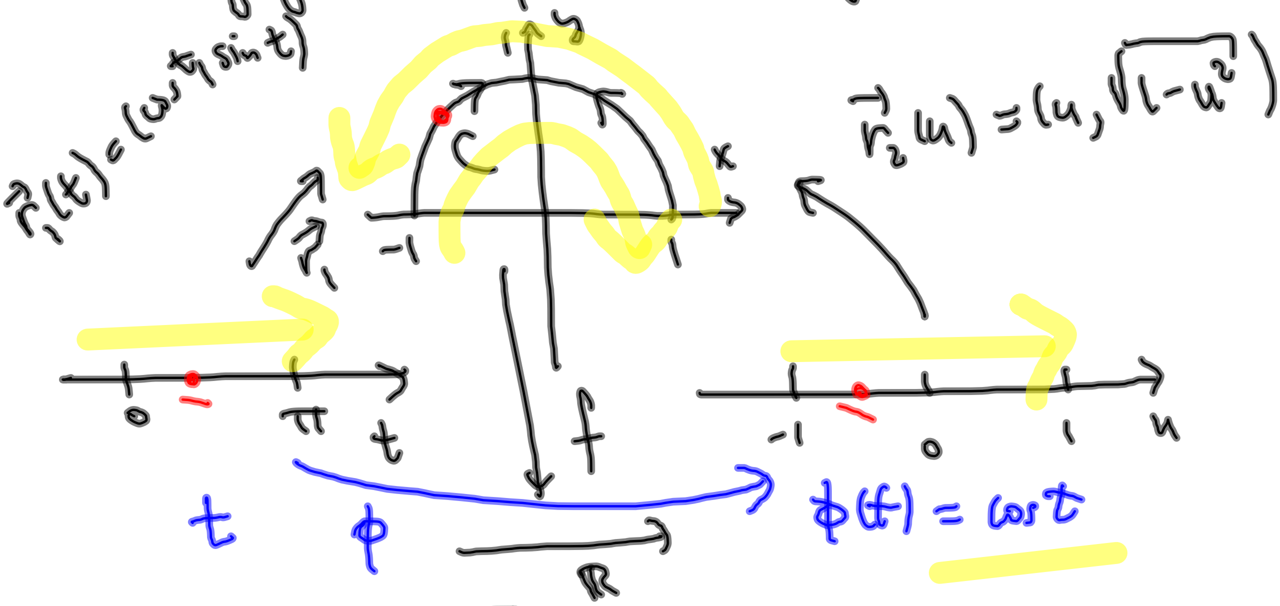
Da er

$$\int_C \lambda f+\mu g \, ds = \lambda\int_C f\, ds + \mu\int_C g\, ds$$

La C være sammensatt av kurvene $C_1, \dots, C_m$. Da er

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \dots + \int_{C_m} f\, ds$$

Uavhengighet av parametrisering:



$$I_1 = \int_C f\,ds = \int_0^\pi f(\vec{r}_1(t))\, v_1(t)\,dt$$

$$I_2 = \int_C f\,ds = \int_{-1}^{1} f(\vec{r}_2(u))\, v_2(u)\,du$$

Når er to parametriseringer ekvivalente?

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[rr, bend left, "\text{phi}\ \phi"] \arrow[dr, "\vec{r}_1"'] & & {[c,d]} \arrow[ll, bend left, "\text{psi}\ \psi"] \arrow[dl, "\vec{r}_2"] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Hvert punkt $\vec{r}_1(t)$ må ha formen $\vec{r}_2(u)$ for en $u \in [c,d]$. Anta at $u = \phi(t)$ for en funksjon $\phi : [a,b] \to [c,d]$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t)) \quad \text{for } t \in [a,b].$$

Omvendt må hvert punkt

$$\vec{r}_2(u) = \vec{r}_1(\psi(u))$$

for en $\psi : [c,d] \to [a,b]$.

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\underbrace{\phi(t)}_{u}) = \vec{r}_1(\psi(\phi(t)))$$

så hvis $\vec{r}_1$ er injektiv (= en-til-en) må $\psi(\phi(t)) = t$ for alle t.

Tilsvarende må $\phi(\psi(u)) = u$ for alle u.

$\therefore$ ψ må være ϕ^{-1}.

Vil anta at $\phi : [a,b] \to [c,d]$

og $\psi = \phi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$

er kontinuerlig deriverbare. Deriverer

$$t = \psi(\phi(t))$$

og får

$$1 = \psi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

så $\phi'(t) \neq 0$ og $\psi'(u) \neq 0$ overalt.

DEF: To parametriseringer $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ og $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er <u>ekvivalente</u> hvis det finnes en surjektiv funksjon (=på)

$$\phi : [a,b] \to [c,d]$$

med kontinuerlig derivert $\phi'(t) \neq 0$ for alle $t \in [a,b]$*, og

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t)).$$

* eventuelt $t \in (a,b)$.

Setn. 3.3.5

La $\vec{r}_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^n$ og
$\vec{r}_2 : [c,d] \to A \subset \mathbb{R}^n$
være ekvivalente parametriseringer av kurven $\mathcal{C}$ i A. La $f: A \to \mathbb{R}$ være et skalarfelt. Da er

$$\underbrace{\int_a^b f(\vec{r}_1(t))\, v_1(t)\, dt}_{I_1} = \overbrace{\int_c^d f(\vec{r}_2(u))\, v_2(u)\, du}^{I_2}$$

så $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ er veldefinert.

<u>Bevis</u> La $\phi : [a,b] \to [c,d]$ være en reparametrisering så

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \phi$$

Antar $\phi'(t) < 0$ for alle t.

$$I_1 = \int_a^b f(\vec{r}_1(t))\, v_1(t)\, dt$$

$$= -\int_a^b f(\vec{r}_2(\phi(t)))\, v_2(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$$

$u = \phi(t)$ $\quad du = \phi'(t)\, dt$

$$= -\int_{\phi(a)=d}^{\phi(b)=c} f(\vec{r}_2(u))\, v_2(u)\, du$$

$\phi(a) = d$

$\phi(b) = c$

$$= \int_c^d f(\vec{r}_2(u))\, v_2(u)\, du$$

$$= I_2$$

$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$

$\vec{r}_1{}'(t) = \vec{r}_2{}'(\phi(t))\, \phi'(t)$

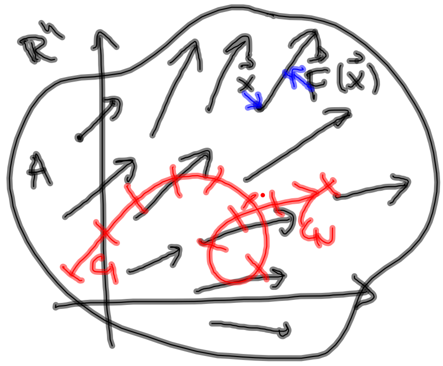
$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(\phi(t))\, \phi'(t)$

$v_1(t) = |\vec{v}_1(t)| = |\vec{v}_2(\phi(t))\, \phi'(t)| = v_2(\phi(t))\, |\phi'(t)|$

$= -v_2(\phi(t))\, \phi'(t)$

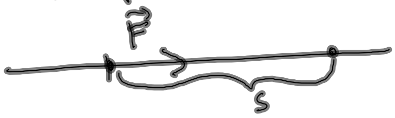
Linjeintegral for vektorfelt

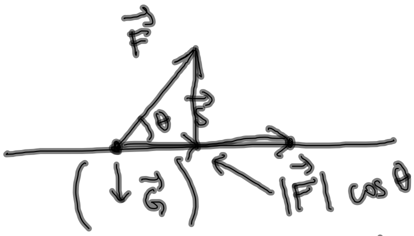
$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^n$



For å utøve en kraft på noe som beveges kreves arbeid;

Arbeid = Kraft · Vei $\qquad W = Fs$





$$W = |\vec{F}| \cos\theta \, |\vec{s}| = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

skalarprodukt

Partisjon

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{kurve } C$$

Ser på

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \underbrace{(\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}))}_{\vec{v}(t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underline{\vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{v}(t_i)} \, (t_i - t_{i-1})$$

$$\xrightarrow[t_i - t_{i-1} \to 0]{} \boxed{\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) \, dt}$$

<u>DEF</u>: La $\vec{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ være et kontinuerlig vektorfelt på $A \subset \mathbb{R}^n$ og la $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow A$ være en (stykkevis) glatt parametrisering av $\mathcal{C} \subseteq A$.

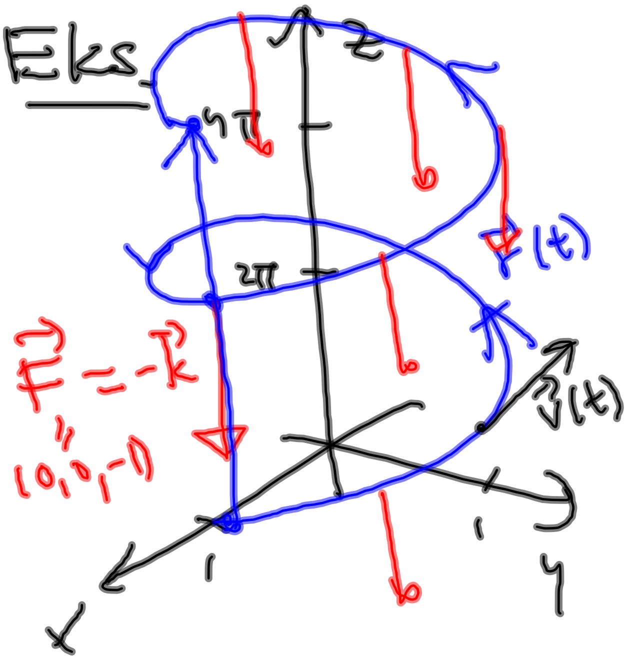
Da er linjeintegralet av vektorfeltet $\vec{F}$ langs $\mathcal{C}$ lik

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

der $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

$$\left(d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\, dt = \vec{v}(t)\, dt \right)$$

Eks



$\vec{r} : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t) =$
$(\cos t, \sin t, t)$
$= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$

$\vec{F}(x,y,z) = (0,0,-1).$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{4\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) \; dt$$

$$= \int_0^{4\pi} (0,0,-1) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \; dt$$

$$= \int_0^{4\pi} (-1)\, dt = \Big[-t\Big]_0^{4\pi} = \underline{\underline{-4\pi}}$$