10. februar 2017

MAT1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 23. FEBRUAR 2017, klokken 14:30 i obligkassen, som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. etasje i Niels Henrik Abels hus.

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd eller på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Alle besvarelser skal inkludere følgende offisielle forside:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du skrive ut programkoden og levere denne sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir. For å skrive ut programkoden fra en av UiOs Linux-maskiner kan du gå til mappen hvor programmet ditt ligger og skrive

```
lpr -P pullprint_produsent filnavn
```

der `filnavn` er navnet på filen du ønsker å skrive ut og `pullprint_produsent` er navnet på produsenten av skriveren du ønsker å hente utskriften fra. Det er vanlig å enten bruke `pullprint_Ricoh` eller `pullprint_HP`.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. La T være en lineæavbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som er slik at

$$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

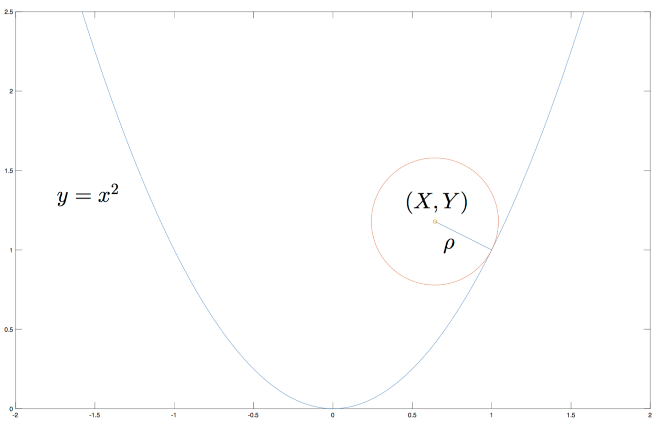
a) Finn en 2×2 matrise A slik at $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Finn to egenverdier og to tilhørende egenvektorer for A.

c) Regn ut

$$(A^5 + A^3 + A)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Oppgave 2. En disk med radius $\rho \le 1/2$ ruller på parabelen $y = x^2$. Se figur 1. La senteret i disken ha koordinater (X, Y).



Figur 1: En disk som ruller på en parabel.

a) Finn enhetsnormalen med negativ andrekomponent til kurven $\mathbf{s}(x) = (x, x^2)$. Nedenfor kaller vi denne for $\mathbf{n}(x)$.

b) Finn X og Y som funksjon av førstekomponenten til berøringspunktet $\mathbf{s}(x)$

c) Anta at $x(t) = 2\cos(t)$. Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ til senteret i disken.

Vi er nå interessert i å finne banen, $\mathbf{r}(x)$, til det punktet på randen av disken som er slik at $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$. For å hjelpe oss med dette innfører vi funksjonen

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 4\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1 + 4x^2} + \sinh^{-1}(2x)\right),$$

der $\sinh^{-1}$ betegner den inverse til *hyperbolsk sinus*.

d) Forklar hvorfor $\sigma(x)$ er buelengden på kurven $\mathbf{s}(t) = (t, t^2)$ for $t \in [0, x]$.

e) La $\mathbf{m}(x) = \mathbf{r}(x) - (X(x), Y(x))$. Forklar hvorfor

$$\mathbf{m}(x) = \rho \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sigma(x)}{\rho}) & \sin(\frac{\sigma(x)}{\rho}) \\ -\sin(\frac{\sigma(x)}{\rho}) & \cos(\frac{\sigma(x)}{\rho}) \end{pmatrix} \mathbf{n}(x)$$

f) Anta at $\rho = 1/2$, bruk Matlab eller python til å plotte kurvene $\mathbf{s}(x)$, $(X(x), Y(x))$ og $\mathbf{r}(x)$ for $x \in [-2, 2]$ i samme diagram.

Oppgave 3. La $\sigma(t)$ være kurven $\sigma(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, og sett $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\sigma(t)$.

a) Skissér kurven $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [0, 4\pi]$.

b) Finn lengden av linjestykket $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [0, \infty)$.

c) Vis at $\mathbf{r}(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\mathbf{r}'(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}(t), \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}.$$

Oppgave 4. Vi lar $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ betegne en vektor i $\mathbb{R}^n$. Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles *sentralt* hvis det kan skrives på formen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$, der f er en funksjon fra $[0, \infty) \to \mathbb{R}$.

a) Vis at sentrale vektorfelter konservative i $\mathbb{R}^n$ hvis f er kontinuerlig deriverbar og $\lim_{r\to 0} f'(r) = 0$.

b) La $h(r)$ være en funksjon slik at $h'(r) = rf(r)$. Vis at $\phi(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x}|)$ er en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$.

SLUTT