3.6 Kjeglesnitt

Familie av kurver som dukker opp i mange sammenhenger. Anvendelser i fysikk.

Dukker opp når et plan snitter en kjegle (feks. $z = \sqrt{x^2+y^2}$) i rommet.

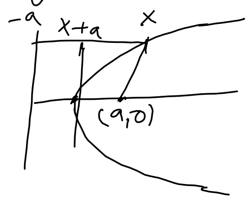
Skal vise at snittkurvene blir en av disse:

1. Sirkel
2. Ellipse
3. Parabel
4. Hyperbel.

# 1. Parabel.

En parabel med styrelinje $l$ og brennpunkt $F$ består av alle punkter som er like langt fra $l$ og $F$.

Setning 3.6.1: Parabelen med styrelinje $l$ gitt ved at $x = -a$ og brennpunkt $F = (a, 0)$ er gitt ved at $y^2 = 4ax$




Bevis: avstand fra $(x, y)$ til linjen $-a$ er gitt ved $x - (-a) = x + a$

Avstand til $F = (a, 0)$ er $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

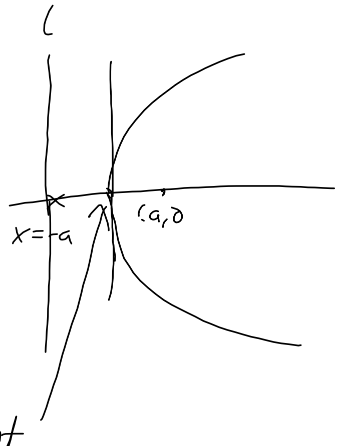
For å finne formel for parabel må vi løse

$$x + a = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\underline{x^2} + 2ax + \underline{a^2} = \underline{x^2} - 2ax + \underline{a^2} + y^2$$

$$y^2 = 4ax$$




toppunkt

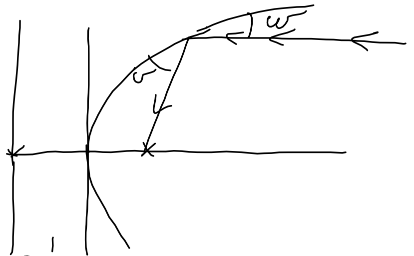
$a$ kalles for brennvidde

$l$ kalles for styrelinje

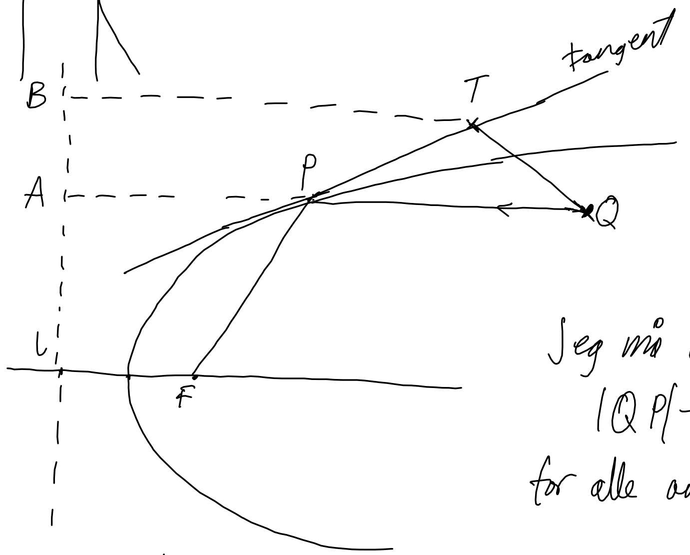
Hvis vi i stedet har $(y-n)^2 = 4a(x-m)$, så blir punktet $(m, n)$ toppunkt.

Refleksjonsegenskapen for parabler:

En innkommende stråle som er parallell med x-aksen, vil bli reflektert til brennpunktet når det treffer parabelen:




egenskap 1: Strålen vil bli reflektert slik at $v = w$




egenskap 2: Vi har at $v = w$ hvis $|QP| + |PF|$ er minst blant alle punkter på tangenten.

Jeg må altså vise at

$$|QP| + |PF| < |QT| + |TF|$$

for alle andre punkter T på tangenten.

Vi har at $|QA| < |QT| + |TB| < |QT| + |TF|$

$$|QA| = |QP| + |PA| = |QP| + |PF|$$

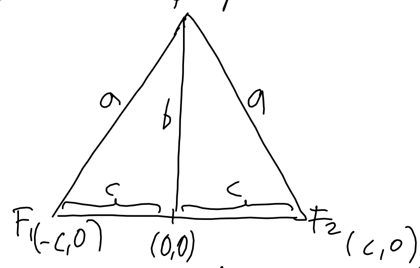
$|TB| < |TF|$ siden T ligger utenfor parabelen, og der er avstanden til brennpunktet større enn avstanden til styrelinjen (egenskap 3)

Dermed er

$$|QP| + |PF| < |QT| + |TF|$$

Ellipse med brennpunkter $F_1$ og $F_2$ består av alle punkter $P$ der $|PF_1| + |F_2P| = 2a$

Vil la brennpunktene være $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$




c kalles brennvidde

a, b kalles store og lille halvakse.

(x,y) (-c,0)

Formel for ellipse: $|PF_1| + |F_2P| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$\vdots$

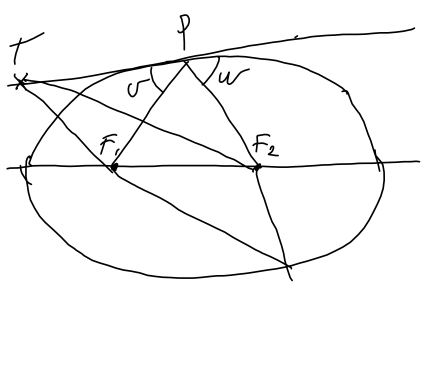
$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(a^2-cx)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$\vdots$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Setning 3.6.4 Formelen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ angir en ellipse med sentrum i origo, a og b store og lille halvakse, brennvidde $c = \sqrt{a^2-b^2}$ (gitt at $a > b$) ($a = b$ gir en sirkel)




Setning 3.6.6: En stråle som går ut fra det ene brennpunktet vil bli reflektert til det andre brennpunktet.

Vi må vise at $v = w$ for alle punkter på ellipsen. Igjen kan man vise dette ved å ta for seg et vilkårlig punkt T på tangenten

$|TF_1| + |TF_2| > |PF_1| + |PF_2|$.

Hyperbel med brennpunkter $F_1, F_2$, halvakse $a$ består av alle punkter $P$ s.a $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$

Setter vi $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$ (som for ellipser), gir en tilsvarende type utregning som for ellipsen at

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b = \sqrt{c^2 - a^2})$$

Setning 3.6.7: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ gir oss en hyperbel med halvakse $a$, brennpunkter $(\pm c, 0)$, der $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{har asymptoter} \quad y-n = \pm \frac{b}{a}(x-m):$$

Bevis: Tar for oss $m=n=0$, og viser at

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ har asymptoter $y = \pm \frac{b}{a} x$

$\Downarrow$

$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Vi viser at $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x \to 0$ når $x \to \infty$:

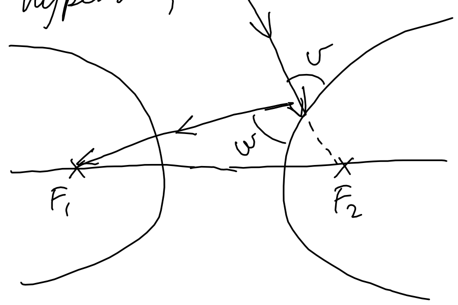
$$\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = \frac{b}{a}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\frac{(-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \to 0 \text{ når } x \to \infty$$

Setning 3.6.11:

En stråle som kommer inn mot et brennpunkt på en hyperbel, vil bli reflektert til det andre brennpunktet:

$(v = w)$




Beviser ikke.

Eksempel 1:

$$y^2+4y-8x+20=0$$

Hva slags kjeglesnitt? brennpunkter / halvakser?

Fullfør kvadrater.

$$y^2+4y+4 \quad -8x+20-4=0$$

$$(y+2)^2 \quad \underbrace{-8x+16}_{4a}=0 \Rightarrow a=2 \text{ (brennvidde)}$$

$$(y+2)^2 = 8(x-2)$$

Dette er altså en parabel med toppunkt $(2,-2)$, brennvidde 2.

---

Eksempel 2: $3x^2+2y^2-6x+8y-5=0$

$$3x^2-6x \qquad 2y^2+8y \qquad -5=0$$

$$3(x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4) \quad -5-3-8=0$$

$$3(x-1)^2+2(y+2)^2=16$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{16}{3}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{16}{2}}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{\underbrace{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}_{a}}+\frac{(y+2)^2}{\underbrace{(\sqrt{8})^2}_{b}}=1$$

Dette er en ellipse med sentrum $(1,-2)$

halvakser $\sqrt{8}$ og $\frac{4}{\sqrt{3}}$. $\sqrt{8}$ er her størst, så denne er store halvakse. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ er lille halvakse.

Brennvidde: $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{8-\frac{16}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Siden $b>a$ så ligger ellipsen på siden, med brennpunkter

$$(1,-2)\pm\left(0,\sqrt{\tfrac{8}{3}}\right) \Longrightarrow F_1=\left(1,-2+\sqrt{\tfrac{8}{3}}\right),\ F_2=\left(1,-2-\sqrt{\tfrac{8}{3}}\right)$$