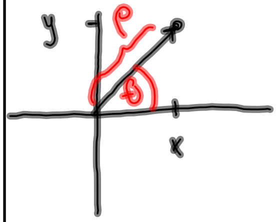
Div. koordinater

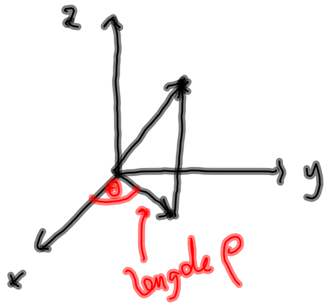


Polarkoordinater

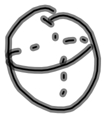
$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\cdot\sin\theta)$.

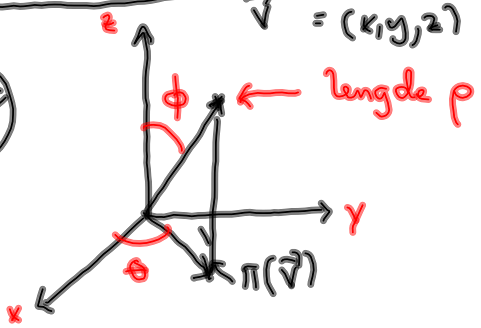
Sylinderkoordinater (i $\mathbb{R}^3$).

$(x,y,z) = (\rho\cdot\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$.



Kulekoordinater (på $\mathbb{R}^3$).





- ϕ er vinkel mellom $\vec{v}$ og z-aksen.
- ρ er lengden til $\vec{v}$
- θ er vinkelen mellom projeksjon av $\vec{v}$ på (x,y)-planet og x-aksen.
- lengden til $\pi(\vec{v}) = \rho\cdot\sin\phi$

z-koord: $\rho\cdot\cos\phi$

x-koord: $\rho\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta$

y-koord: $\rho\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \phi \le \pi$.

Varsko: I fysikkbøker er det vanlig å la ϕ være vinkelen mellom $\vec{v}$ og (x,y)-planet.

Eks: $u(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{z^2}$, $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$.

$$u(\rho,\phi,\theta) = \frac{\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\phi}$$

$$= \frac{\rho^2\sin^2\phi}{\rho^2\cos^2\phi} = \frac{1-\cos^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1.$$

Oppg: Bruk sylinder-koord. istedet.

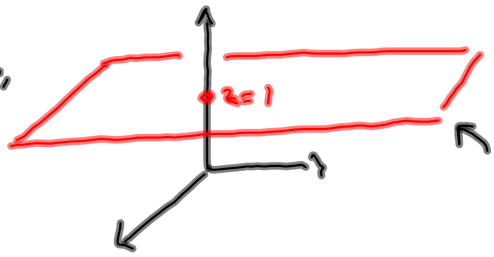
Nivåflater og tangentplan

DEF 3.7.1: Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable, og la $c \in \mathbb{R}$.
Da kaller vi mengden

$$N_c = \{x \in A : f(x) = c\}$$

en nivåflate for f.

Eks:



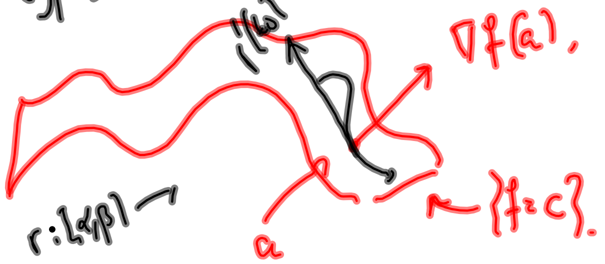
$A = \mathbb{R}^3$

La $f(x,y,z) = z$, og $c = 1$.

Obs: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,1)$.

∇f står vinkelrett på N_1.

For mer generelle f, kommer det typisk til å se slik ut



Setning 3.7.2 Anta at f er en funksjon i n variable, og at f er deriverbar i punktet a. Dersom $f(a)=c$ har $\nabla f(a)\cdot r'(t_0) = 0$ for alle parametriserte kurver $r: [\alpha,\beta] \to N_c$ med $r(t_0) = a$.

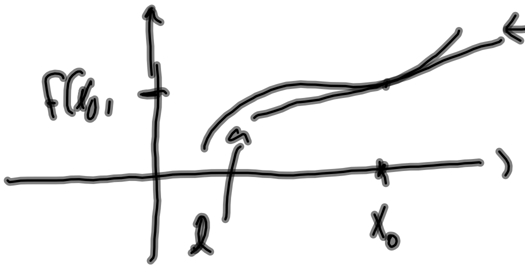
Bevis: Siden $r([\alpha,\beta]) \subset N_c$ så er $h(t) := f(r(t))$ konstant $= c$.
Så $h' = 0$, Kjerneregel: $h'(t_0) = \nabla f(\underbrace{a}_{= r(t_0)}) \cdot r'(t_0)$. ∎

Så: det virker rimelig å definere tangentplanet i a til å være alle punkter $x \in \mathbb{R}^n$ så

$$\nabla f(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)} = 0$$

Tangentplan

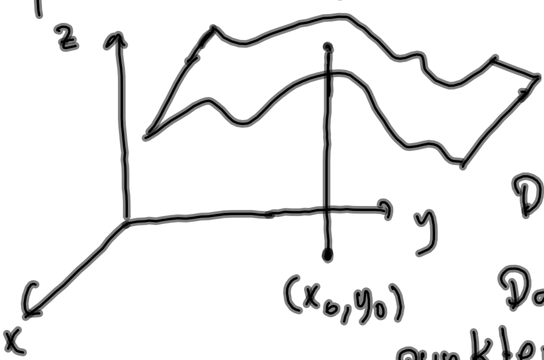
Fra en variabel:



l er tangenten til grafen i $(x_0, f(x_0))$.

$l: \quad y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Se på $z = f(x,y)$.



Hva kunne tangentplanet i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ være?

Definer $g(x,y,z) := z - f(x,y)$.

Da er grafen mengden av punkter (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$ s.a. $g(x,y,z) = 0$, dvs. Graf $= N_0$.

Burde være mengden av vektorer som starter i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ som står normalt på $\nabla g(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

$g(x,y,z) = z - f(x,y)$.

Gradient $\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right).$$

Tangplan: $\nabla g(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)) = 0$.

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + 1\cdot(z-f(x_0,y_0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

feb 19-09:00

DEF 3.7.3 Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ er en funksjon i 2 variable, og at f er deriverbar i (x_0, y_0). Tangentplanet til f i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ er definert ved

$$(*) \qquad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Normalretningen i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ er $\vec{n}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$.

Merk: Tangentplanet er gitt som grafen til en affin avb: Dersom vi lar r betegne punktet i $\mathbb{R}^2$ og setter $a=(x_0,y_0)$, får vi at $(*)$ kan skrives

$$z = \underbrace{f(a) + \nabla f(a) \cdot (r-a)}_{\text{lineariseringen til } f \text{ i } a}.$$

Eksempel: Finn tangentplanet til $f(x,y) = x^3 - 5xy^2$ i punktet $(1,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 5y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -10xy$

Tangentplan: $z = -4 - 2(x-1) - 10(y-1)$

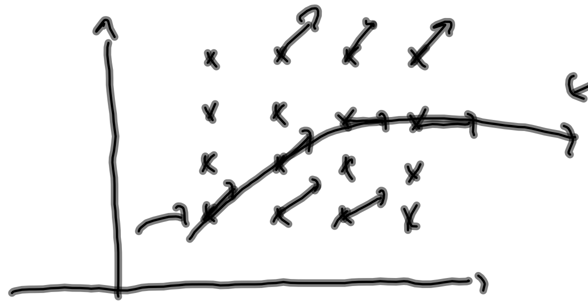
$= -4 - 2x + 2 - 10y + 10$

$= -2x - 10y + 8.$

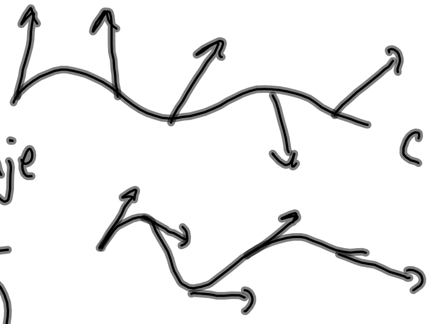
feb 19-09:22

Grafisk fremstilling av vektorfelt

Vektorfelt: $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.



strømlinje (integral-kurve)



I MATLAB: Dersom u og v er $(m \times n)$-matriser og vi ser for oss et felt som i punktet (i,j) er gitt ved (u_{ij}, v_{ij}), kan man tegne dette i MATLAB ved kommando quiver (u,v).

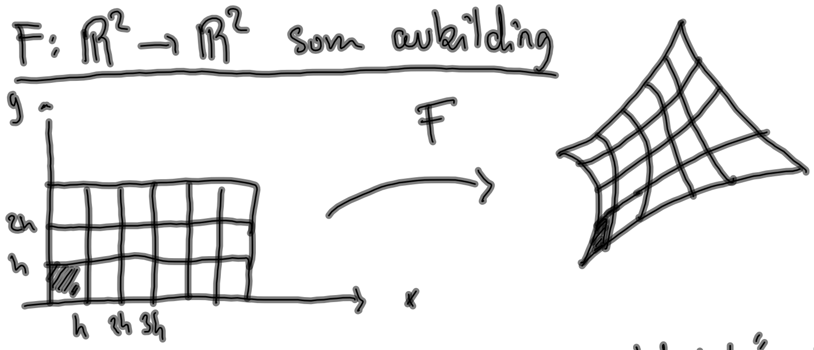
For selv å bestemme nett og felt:

Eks:

```
x = 0:1:10;
y = 0:1:10;
[x,y]= meshgrid (x,y);

u = x+y
v = x.^2.*y.
quiver (x,y,u,v).
streamline(x,y,u,v, 4,4).
```

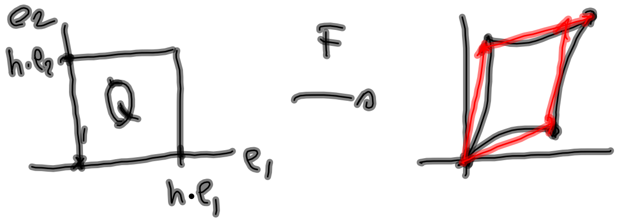
$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbilding



(h liten). Hva gjør F med arealet til "små" kuber?

Har sett: Dersom F er affin, altså $F(x,y) = (x_1, y_0) + A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, der A er en 2×2-matrise, blir arealet skalert med determinanten til A.

Generelt



Anta at $F(0)=0$,

Dersom h er liten er $F(Q)$ omtrent parallellogrammet utspent av

$$F(he_1) = (f_1(h\cdot e_1), f_2(h\cdot e_1))$$

$$F(h\cdot e_2) = (f_1(h\cdot e_2), f_2(h\cdot e_2)).$$

Har sett: areal $= f_1(h\cdot e_1)\cdot f_2(h\cdot e_2) - f_2(h\cdot e_1)\cdot f_1(h\cdot e_2)$.

Areal av $Q = h\cdot h$.

$$\text{Forhold} = \frac{f_1(h\cdot e_1)\cdot f_2(h\cdot e_2) - f_2(h\cdot e_1)\cdot f_1(h\cdot e_2)}{h^2}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{f_1(h\cdot e_1)}{h} & \frac{f_1(h\cdot e_2)}{h} \\ \frac{f_2(h\cdot e_1)}{h} & \frac{f_2(h\cdot e_2)}{h} \end{pmatrix}$$

h liten

$$\approx \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0) \end{pmatrix}. \leftarrow \text{Jacobi-determinant til } F \text{ i } 0.$$