Løse ligningssystemer

$Ax = b \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Utvidede matrisen

$$C = (A\, b) \underset{\uparrow}{\sim} D \leftarrow D \text{ er på trappeform:}$$

① Alle rader starter med 0 eller 1

② Hvis en rad i D starter i kolonne j, så starter neste rad til høyre for j

radoperasjoner:
- multiplisere en rad med tall $\neq 0$
- legge sammen rader
- bytte rader

$$D = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x & & \\ 0 & 0 & 1 & x & x & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \; \uparrow \quad \uparrow$ pivotsøyler

pivotelementer

Variable som tilsvarer en pivotsøyle kalles <u>basisvariable</u>, de andre kalles <u>frie</u>

<u>Resultat</u>

Alle matriser er radekvivalent "$\sim$" med en matrise på trappeform.

<u>Eks</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III+I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II/5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \uparrow \uparrow$ pivotsøyler

<u>Eks</u>

$x + 2y + z = 1$
$-x + y - z = 0$
$x + 5y + z = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \to 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{I+II \\ III-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \to 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-II \\ II/3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \to 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \uparrow$ pivotsøyler
basisvariable x, y
z fri

Ligningssystem: $x + 2y + z = 1 \Rightarrow x = 1/3 - z$
$y = 1/3$
$0z = 0$

Hvis siste ligning er $x + 5y + z = 3$ så får vi ligningene:

$x + 2y + z = 1$
$y = 1/3$
$0 \cdot z = 1$ ← Har ingen løsning !!

<u>Setning.</u>

D er den utvidede matrisen til et ligningssystem

$D \sim C \leftarrow$ trappeform:

① Hvis siste søyle i C er pivotsøyle:
så har systemet <u>ingen</u> løsninger

$0\ 0\ 1 \Updownarrow 0x_m = 1$

② Hvis siste søyle <u>ikke</u> er pivotsøyle:

(2a) Hvis <u>alle</u> de andre søylene er pivot, så fins det en entydig løsning.

(2b) Hvis ikke alle andre søyler er pivot, så fins fri variable og uendelig mange løsninger.

$x_m = k$

$0x_m = 0$

$Ax = b$. Har denne en entydig løsning for alle b?

$C = (A\ b)$ utvidet matrise

$\wr$

D alle søyler, unntatt siste, er pivot $\quad D = (E\ \tilde{b})$

<u>Dvs</u>: $A \sim E$ som har alle søyler pivot.

<u>Eksempel</u>

$3x + y - 2z = b_1$
$-x + 2y - z = b_2$
$x + z = b_3$

Har dette løsning for alle b_1, b_2 og b_3? <u>Ja</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{I \leftrightarrow III \\ III+II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II/2 \\ III-3I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-II \\ III/-5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \uparrow \uparrow$ pivotsøyler

Antar at $\bar{b}$ s.a. ligningssystemet blir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}$$

En trappematrise er på redusert trappeform hvis hver pivotsøyle <u>bare</u> inneholder pivotelementet.

Observasjon: Hvis trappeform, så redusert trappeform.

<u>Eks</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2III \\ I+3II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \overset{I-10III}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & u & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$u = 1/2$
$z = 2$
$x + 2y = 6 \sim x = 6 - 2y \quad y$ fri

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & x \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ har entydig løsning for alle b

<u>A nxn</u> $\quad \Updownarrow$

$A \sim D$, D har alle søyler pivotsøyler, D trappeform.

$D \sim I$ redusert trappeform

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \text{identitetsmatrisen i } \mathbb{R}^n$$
nxn identitetsmatrise.

Entydig løsning for alle b $\Leftrightarrow A \sim I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$

Homogene ligninger. $Ax = 0$

$A \sim D \leftarrow$ redusert trappeform, hvis alle søylene i D er pivot så er $\bar{x} = \bar{0}$ eneste løsningen.

Hvis D har søyler som <u>ikke</u> er pivotsøyler, da har vi uendelig mange løsninger.

$Ax = b \leftarrow$ Vil finne alle løsningene.

Anta vi har funnet en: $x_p \qquad Ax_p = b$

Anta y er en annen løsning: $Ay = b$

$z = x_p - y$

$Az = A(x_p - y) = Ax_p - Ay = b - b = 0 \quad$ z løser homogen ligning.

$y = x_p - z$

<u>Moral:</u>

En generell løsning av inhomogen er en spesiell løsning av inhomogen + løsning av homogen.

Kan løse mange simultant.

$Ax = b_1 \quad \underline{Ax = b_2} \quad Ax = b_3 \quad \ldots \quad \underline{Ax = b_k} \qquad b_j$ vektor. $\quad j = 1, \ldots, k$

$$\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} | \\ b_1 \\ | \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ b_2 \\ | \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} | \\ b_k \\ | \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & \tilde{B} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & \tilde{\tilde{B}} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_{1,1} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_{n,1} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_{1,2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_{n,2} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_{1,k} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_{n,k} \end{pmatrix}$$

<u>Eks</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{3I,\ 2II}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & +5 & -1 & +4 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II/5}{=} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \overset{I-3II}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & 0 & \frac{18}{5} & \frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \overset{I/6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$