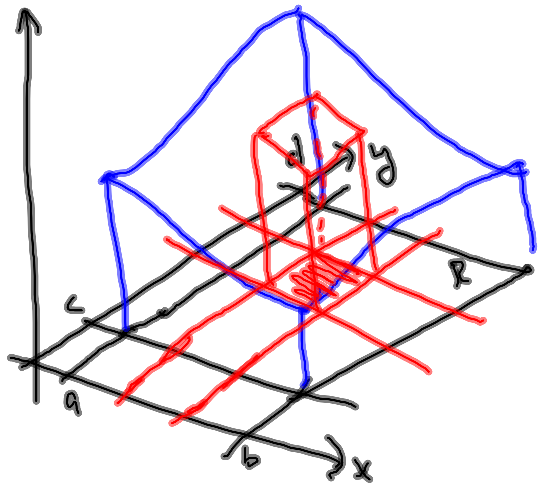
LH 6.1 Dobbeltintegraler over rektangler



Π

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$m_{ij} = \inf \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$

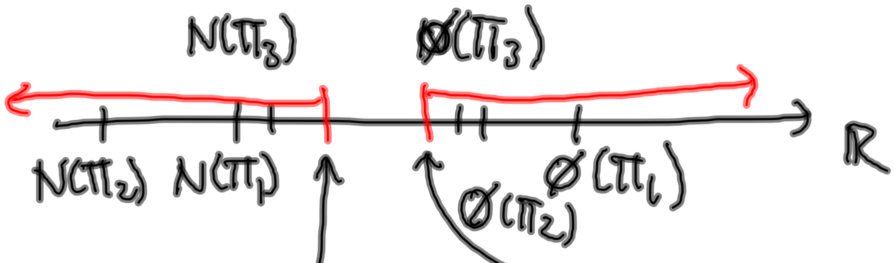
$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$

$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$

$m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij}$
$(x,y) \in R_{ij}$

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = N(\Pi)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m}\right) \qquad \leq \emptyset(\Pi) = \sum M_{ij}(\cdots)$$



$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dxdy$ $\qquad$ $\overline{\iint}_R f(x,y)\,dxdy$

Hvis

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dxdy = \sup_{\Pi} N(\Pi) = \inf_{\Pi} \emptyset(\Pi) = \overline{\iint}_R f(x,y)\,dxdy$$

Sier vi at f er <u>integrerbar</u> (på R).

Egenskaper (16.1.2)

(a) f integrerbar og $k \in \mathbb{R}$ konstant

$\Longrightarrow$ $kf : (x,y) \mapsto kf(x,y)$ er integrerbar og

$$\iint_R kf(x,y)\,dxdy = k \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

(b) f, g integrerbare

$\Longrightarrow$ $f+g : (x,y) \mapsto f(x,y) + g(x,y)$ er integrerbar

$$\iint_R f(x,y)+g(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

(c) Hvis $f(x,y) \geq g(x,y)$ for alle $(x,y) \in R$

er
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \geq \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

- Hvilke f er integrerbare?
- Hvordan beregne $\iint_R f(x,y)\,dxdy$?

Integrasjon av kontinuerlige funksjoner

Teorem 6.1.5: La $R = [a,b] \times [c,d]$ og la $f : R \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da er f integrerbar på R.

---

f kont. på R (lukket & begrenset)

$\Rightarrow f$ uniformt kontinuerlig

$\Rightarrow f$ er integrerbar

$f : R \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig

$\Updownarrow$

f er kontinuerlig i hvert punkt $\vec{u} \in R$

$\Updownarrow$

for hver $\vec{u} \in R$ og hver $\varepsilon > 0$
finnes $\delta > 0$ slik at
for alle $\vec{v} \in R$ med $|\vec{v} - \vec{u}| < \delta$
er $|f(\vec{v}) - f(\vec{u})| < \varepsilon$.

Smlgn:

f er uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$

$\Updownarrow$ DEF

for hvis $\varepsilon > 0$

finnes en $\delta > 0$

slik at for alle $\vec{u} \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}$

med $|\vec{v} - \vec{u}| < \delta$

er $|f(\vec{v}) - f(\vec{u})| < \varepsilon$.

Teorem 6.1.4 $K \subset \mathbb{R}^2$ lukket og begrenset.

Da er $f: K \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

$\Downarrow$

$f: K \to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuerlig.

f unif. kont. på R

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f integrerbar på R

Viser: Gitt $\varepsilon > 0$ finnes partisjon Π med $N(\Pi) \leq \emptyset(\Pi) \leq N(\Pi) + \varepsilon$.

$\Big[\Longrightarrow \overline{\iint}_R f \leq \underline{\iint}_R f + \varepsilon$ for alle $\varepsilon > 0$

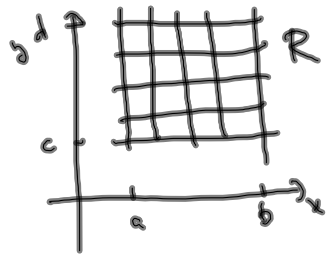
$\Longrightarrow \underline{\iint}_R f = \overline{\iint}_R f \Big]$

Ved uniform kont. finnes $\delta > 0$ slik at

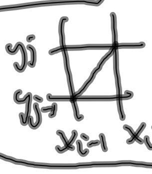
$|\vec{v} - \vec{u}| < \delta$. for $\vec{u}, \vec{v} \in R$

vil $|f(\vec{v}) - f(\vec{u})| < \frac{\varepsilon}{|R|}$

der $|R| = \text{areal}(R) = (b-a)(d-c)$



$$\boxed{\text{Velger } \Pi \text{ slik at } \operatorname{diam}(R_{ij}) < \delta \text{ for hver } i,j.}$$

$\operatorname{diam}(R_{ij}) =$ 

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$$

maskevidden til Π

$$|\Pi| = \max_{i,j} \operatorname{diam}(R_{ij})$$

For $\vec{u}, \vec{v} \in R_{ij}$ er $|\vec{v} - \vec{u}| \leq \operatorname{diam}(R_{ij}) < \delta$

så $|f(\vec{v}) - f(\vec{u})| < \frac{\varepsilon}{|R|}$

$$\Longrightarrow \quad m_{ij} \leq M_{ij} \leq m_{ij} + \frac{\varepsilon}{|R|}$$

$$N(\Pi) \geq \emptyset(\Pi) \leq N(\Pi) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{|R|} |R_{ij}|$$

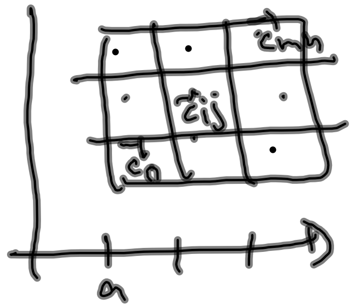
$$= N(\Pi) + \varepsilon.$$

QED

Riemann-summer

Gitt Π er utplukk U en familie punkter $\{\vec{c}_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$

med $\vec{c}_{ij} \in R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.



Riemann-sum

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\vec{c}_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$m_{ij} \le f(\vec{c}_{ij}) \le M_{ij}$$

$$N(\Pi) \le R(\Pi, U) \le \emptyset(\Pi).$$

Setning 6.1.6 $R = [a,b] \times [c,d]$
$f: R \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

La $\{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge av partisjoner der $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$.

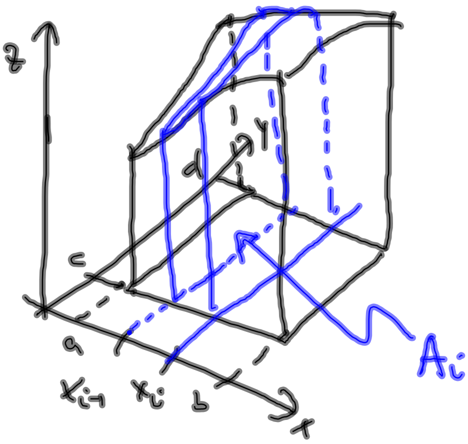
La U_n være et utplukk for Π_n. Da vil $R(\Pi_n, U_n) \to \iint_R f(x,y)\,dxdy$ når $n \to \infty$.

Itererte integraler

$\mathcal{P}$

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

A_i = området under grafen til f der $x = x_i$



areal (A_i)

$$= \int_c^d f(x_i, y)\,dy \qquad y \longmapsto f(x_i, y)$$

volum mellom $x = x_{i-1}$ og $x = x_i$ er ca.

$$\approx \left(\int_c^d f(x_i, y)\,dy\right)(x_i - x_{i-1})$$

Det ~~totale~~ volumet er

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_c^d f(x_i, y)\,dy\right)}_{= F(x_i)}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

en Riemann-sum for

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

$$\longrightarrow \int_a^b F(x)\,dx \quad \text{når } \mathcal{P} \text{ blir tilstrekkelig fin}$$

Den felles grensen er

$$V = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx$$

Teorem 6.1.7

Anta $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar. og at $y \mapsto f(x,y)$ er integrerbar på $[c,d]$ for hver x i $[a,b]$. Da er

Rettet etterpå!

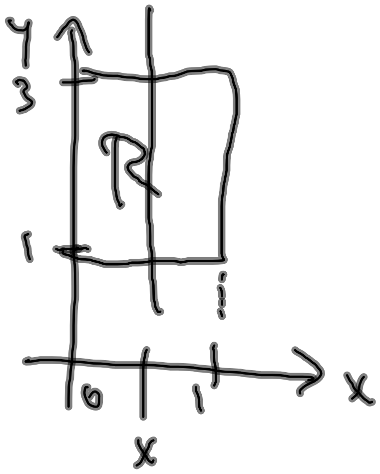
$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

en integrerbar funksjon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, og

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

[likedan med $x \longleftrightarrow y$ byttet om]

[eks: f kontinuerlig]



Eks 1 $R = [0,1] \times [1,3]$

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\iint_R x^2 y \, dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=1}^{y=3} x^2 y \, dy \right) dx$$

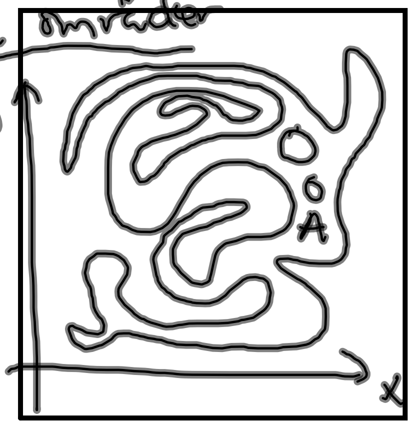
$$= \int_{x=0}^{x=1} \left[x^2 \cdot \tfrac{1}{2} y^2 \right]_{y=1}^{y=3} dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2}_{F(x)} \, dx$$

$$= \int_0^1 4x^2 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{4}{3} x^3 \right]_0^1 = \tfrac{4}{3} \cdot 1 - \tfrac{4}{3} \cdot 0 = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}}}$$

LH 6.2 $\iint$ over begrensede områder



La $A \subseteq [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$
være et begrenset område

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

Hva er $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$

$! \longrightarrow A$

Def $f_A : R \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

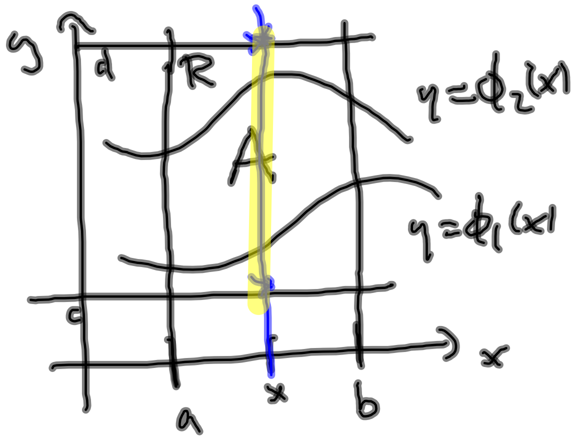
$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{hvis } (x,y)\in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Hvis f_A er integrerbar (på R) la

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f_A(x,y)\,dx\,dy$$

Hvilke områder A gjør f_A integrerbar?

Eks: Type I og Type II områder i $\mathbb{R}^2$



$\phi_1, \phi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
kontinuerlige

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

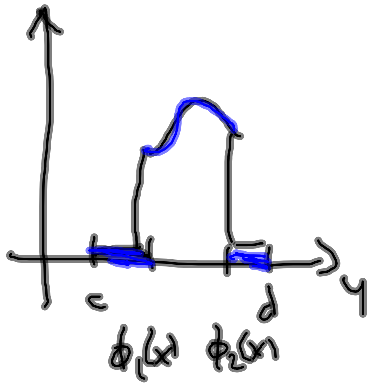
(anta $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ for alle x).

A er et område av type I.

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy} = \iint_R f_A(x,y)\,dx\,dy$$

hvis f_A er integrerbar på R

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f_A(x,y)\,dy \right) dx$$



$$= \int_a^b \left(\underbrace{0}_{\int_c^{\phi_1(x)}} + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy + \underbrace{0}_{\int_{\phi_2(x)}^{d}} \right) dx$$

$$= \boxed{\int_a^b \left(\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$