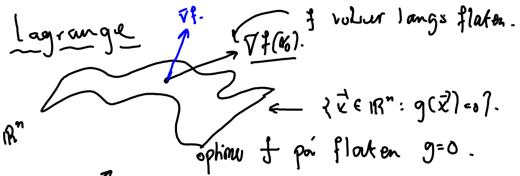
Lagrange



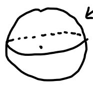
$\nabla f(\vec{x})$ peker alltid i retningen der f vokser mest.

Må ha $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x}_0)$

Eks: $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$f(x,y,z) = xy + z^2$

Optimer f på flaten $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 1\}$.



S er kuleskallet.

Må altså løse $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ på S.

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 2\cdot(x,y,z)$.

$\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z)$

Må løse $(y, x, 2z) = \lambda \cdot (x,y,z)$.

- $y = \lambda x$
- $x = \lambda y$
- $2z = \lambda \cdot z$.
- $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Tilf. 1 Dersom $z \neq 0$ må $\lambda = 2$.

Får $y = 2x$, $x = 2y \longrightarrow y = 4y \Rightarrow y = 0$.

Også $x = 0$.

Siden også $x^2+y^2+z^2 = 1 = z^2$, så får vi at $z = \pm 1$.

I begge tilfeller har vi at $f(x,y,z) = f(0,0,\pm 1) = 1$.

Tilf 2: $z = 0$.

(i) $y = \lambda x$

(ii) $x = \lambda y$

(i)+(ii) = $x + y = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$

Tilf (a): $x+y \neq 0$. Da er $\lambda = 1$, altså $x = y$.

Har også $x^2+y^2 = 1$.

Så vi har to muligheter $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

I begge tilfeller $f(x,y,z) = x\cdot y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Tilf (b): $x+y = 0 \Leftrightarrow x = -y$, så mulighetene er $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

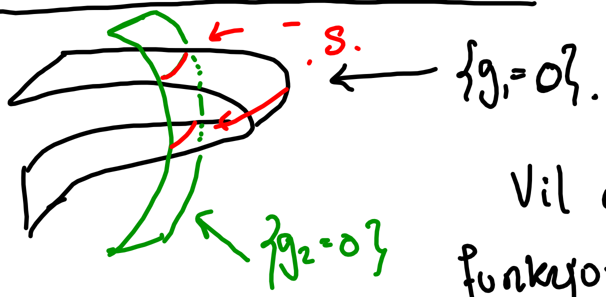
I begge tilfeller er $f(x,y,z) = x\cdot y = -\frac{1}{2}$.

Så $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ er globale min-punkter, og

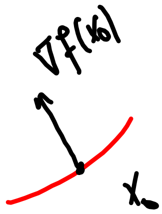
$(0,0,1)$ og $(0,0,-1)$ er glob. maks-pkt.

mai 19-10:19

Lagrange med flere bibet.



Vil optimere en funksjon f på



$$S=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : g_1(\vec{x})=g_2(\vec{x})=0\}.$$

Av samme grunn som før må vi ha at ∇f ligger i normalplanet til kurven.

Litt ettertanke gir at normalplanet er utspent av $\nabla g_1(\vec{x}_0)$ og $\nabla g_2(\vec{x}_0)$. Så det vil si at

$$\boxed{\nabla f(\vec{x}_0)=\lambda_1\nabla g_1(\vec{x}_0)+\lambda_2\nabla g_2(\vec{x}_0).}$$

Teorem: Anta at $\vec{x}_0$ er et ekstrempunkt for $f(\vec{x})$ på mengden

$$S=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : g_1(\vec{x}_0)=\dots=g_k(\vec{x}_0)=0\}.$$

Da er enten

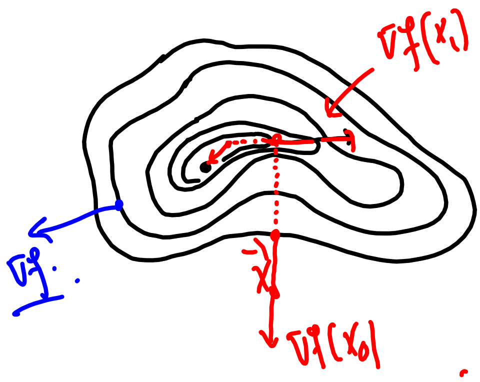
$$\{\nabla g_1(\vec{x}_0),\dots,\nabla g_k(\vec{x}_0)\}$$

er lin. avh. eller

$$\nabla f(\vec{x}_0)=\lambda_1\nabla g_1(\vec{x}_0)+\dots+\lambda_k\nabla g_k(\vec{x}_0).$$

Gradientmetoden. (lokalt)

Anta at du vil finne et minimum for en funksjon f, og anta at du kan gjøre et "godt" gjett av minimumspunkt $\vec{x}_0$.



Siden f vokser i retning $\nabla f(x_0)$, bør du bevege deg i retning $-\nabla f(\vec{x}_0)$, og stopp i et punkt $\vec{x}_1$ du funksjonen begynner å vokse igjen.

$$g(t) := f(x_0 \div t \cdot \nabla f(x_0))$$

Ønsker å finne den minste t'en som er et min. for $g(t)$.

løser $g'(t) = 0$,

løse $g'(t) = \nabla f(x_0 \div t \cdot \nabla f(x_0)) \cdot (-\nabla f(x_0))$

$= 0$.

Kall denne verdien t_0.

Sett $\vec{x}_1 = x_0 \div t_0 \cdot \nabla f(x_0)$.

⋮

fortsett slik.