f) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Finn egenvektorer og egenverdier:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-3)+2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 5\lambda + 15 + 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 17}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{8 \pm 2i}{2}$$

$$= \underline{4 \pm i}$$

Fasit er også rett; Ikke entydig egenvektor. Gang denne med $(-1+i) \Rightarrow$ fasitvektor

Egenverdier:

$$\lambda_1 = \underline{\underline{4+i}}, \quad \lambda_2 = \underline{\underline{4-i}}$$

Egenvektorer: $\vec{v}_1$: $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \Rightarrow (\lambda_1 I_2 - A)\vec{v}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1+i & -2 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ -1+i & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Får ikke samme som fasiten?

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = (-1-i)y$$

Men sikker på rett pga:

$$-2-(-1+i)(1+i)$$
$$= -2-(-1-i+i-1)$$
$$= -2+2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

SJEKK:

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-5i+2 \\ 1+i+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-5i \\ 4+i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{v}_1 = (4+i)\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-4i-i+1 \\ 4+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-5i \\ 4+i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ LIKE

$\boxed{OK?}$

Tilsv:

$$-2-(-1-i)(1-i)$$
$$= -2-(-1+i-i-1) = 0$$

$\vec{v}_2$: $(\lambda_2 I_2 - A)\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1-i & -2 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ -1-i & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så: $x = -(1-i)y \Rightarrow \vec{v}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

Kan sjekke v/ innsett at $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$!