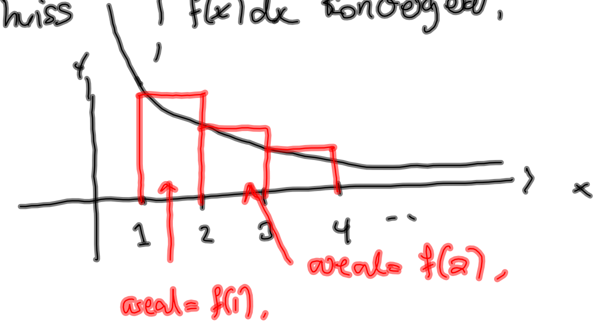
Positive rekker

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ positiv dersom $a_j \geq 0$ for $j = 1, 2, 3, \ldots$

Konvergerer hviss den er begrenset.

Setning: La $f: [1, \infty)$ være en positiv og avtagende kont. funksjon. Da konvergerer $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ hviss $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Bevis:



$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

så dersom $\sum_{j=1}^{\infty} f(j) < \infty$ så er $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

For motsatt implikasjon tegn boksene under grafen istedet.

Setning: $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^p$ konvergerer hviss $p > 1$.

Bevis: Undersøker når $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^p dx < \infty$.

For $p = 1$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n \to \infty} \left[\ln x\right]_1^n = \infty$.

For $p \neq 1$ $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right]_1^n$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-p} n^{1-p} + \frac{1}{p-1}$$

$\to \infty$ når $p < 1$, $\to 0$ når $p > 1$

Sammenligningstesten: La $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ være positive rekker.

(i) Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent og $b_j \leq a_j$ for alle j, da er $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergent.

(ii) Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ er divergent, og $b_j \geq a_j$ for alle j, da er $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent.

Bevis: (i) $\sum_{j=0}^{m} b_j \leq \sum_{j=0}^{m} a_j \leq M.$

(ii) $\sum_{j=0}^{m} a_j \leq \sum_{j=0}^{m} b_j$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle j\to\infty}$$

$$\infty \qquad \blacksquare$$

Grensesammenligningskriterium:

La $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ og $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ være positive rekker.

(i) Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ er konvergent og $\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} < \infty$, da er $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergent.

(ii) Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ er divergent og $\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} > 0$ så er $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ også divergent.

Bevis: (i) $\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = s < \infty$.

Da fins $N > 0$ s.a. $\frac{b_j}{a_j} \leq N$ for alle j,

$b_j \leq N \cdot a_j \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} b_j \leq N \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$.

(ii) $\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} > 0$

Da fins $\varepsilon > 0$ s.a. $\frac{b_j}{a_j} \geq \varepsilon$ for alle j,

$b_j \geq \varepsilon \cdot a_j$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \geq \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j}_{\downarrow\, j\to\infty \atop \infty}$$

Eksempel: La $b_j = \frac{3n^2+5n+1}{2n^4+5}$.

Avgjør om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergerer eller divergerer.

Skriv: $b_n = \frac{n^2(3+5/n+1/n^2)}{n^4(2+5/n^4)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3+5/n+1/n^2}{2+5/n^4}\right)$

sett $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{3+5/n+1/n^2}{2+5/n^4}\right)}{\cancel{1/n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+5/n+1/n^2}{2+5/n^4} = \frac{3}{2}.$$

Så $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergerer.

Eksempel: Avgjør om $\sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{j^2}\right)$ konvergerer eller divergerer.

Har at $\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

$$= x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j+1)!}$$

$$= x \cdot g(x) \quad , \quad \text{der } g(0) = 1.$$

Får $\sin\left(\frac{1}{j^2}\right) = \frac{1}{j^2} \cdot g\left(\frac{1}{j^2}\right) \leq \frac{1}{j^2} \cdot 2$

når j er stor.

Sammenligner med $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$.

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{j^2}\right)}{1/j^2} \leq \lim_{j \to \infty} \frac{2 \cdot \cancel{\frac{1}{j^2}}}{\cancel{1/j^2}} = 2.$$

Så $\sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{j}\right)$ konvergerer.

<u>Rottesten</u> : $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er en positiv rekke.

(i) dersom $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} < 1$ så konvergerer $\sum a_j$,

(ii) dersom $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} > 1$ så divergerer rekka.

(iii) Dersom $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = 1$ er det ingen konklusjon.

<u>Bevis</u>: (i) $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = s < 1$.

Da fins $s < s_0 < 1$ og $N > 0$

s.a. $\sqrt[j]{a_j} \leq s_0$ for $j \geq N$.

$$\Downarrow$$

$a_j \leq s_0^j$ for $j \geq N$.

$$\sum_{j=N}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=N}^{\infty} s_0^j < \frac{1}{1-s_0}.$$

(ii) <u>Tilsvarende</u>.

<u>Eks</u>: Avgjør om $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{j}\right)^{j^2}$ konvergerer eller divergerer.

Rottest: se på $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\left(1-\frac{1}{j}\right)^{j^2}}$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(1-\frac{1}{j}\right)^{j}.$$

Se istedet på $\lim_{j\to\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{j}\right)^{j}\right)$

$$= \lim_{j\to\infty} j\cdot \ln\left(1-\frac{1}{j}\right).$$

<u>Har</u>: $\ln x = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(x-1)^j}{j!}$

så $\ln x = (x-1) + g(x)$

der $|g(x)| \leq C\cdot|x-1|^2$.

Så $j\cdot \ln\left(1-\frac{1}{j}\right) = j\cdot\left(-\frac{1}{j}\right) + j\, g\left(\frac{1}{j}\right)$

$$= \underline{\underline{-1}} + \underbrace{j\cdot g\left(-\frac{1}{j}+1\right)}_{\leq C\cdot j\cdot \frac{1}{j^2} = C\cdot\frac{1}{j} \xrightarrow{j\to\infty} 0}$$

Så $\lim_{j\to\infty} j\ln\left(1-\frac{1}{j}\right) = -1$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\left(1-\frac{1}{j}\right)^{j^2}} = e^{-1} < 1.$$

Så rekka konvergerer. ∎

Alternerende rekker

DEF: En rekke $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er <u>alternerende</u> dersom a_{j+1} alltid har motsatt fortegn av a_j.

Setning: Anta at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ er alternerende.

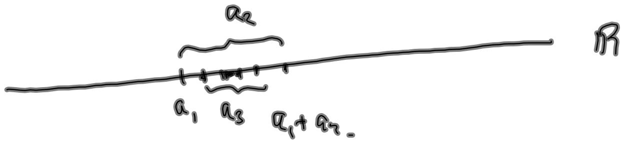
Dersom $a_j \underset{j\to\infty}{\searrow} 0$ (følgen $\{a_j\}$ avtar mot 0)

så konvergerer $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$.

Eks: $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1}{j}$ konverger.

Husk: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \to \infty$.

Bevis:



a_1+a_2

$a_1+a_2+a_3 \quad |a_3|<|a_2|$

$a_1+a_2+a_3+a_4 \quad |a_4|<|a_3|$ ∎

Absolutt konvergens:

DEF: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er <u>absolutt konvergent</u> dersom $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ er konvergent. Dersom $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergerer men ikke $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$, sier vi at $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er betinget konv.

<u>Setning</u>: Dersom $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er absolutt konvergent er den også konvergent.

<u>Bevis</u>: $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konvergerer.

Da er $S_m = \sum_{j=1}^{m} |a_j|$ en Cauchy-følge.

Så for $\varepsilon > 0$ fins $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$,

s.a. $|S_k - S_\ell| \le \varepsilon$ for all $k > \ell \geq N_\varepsilon$.

Vil vise at $\tilde{S}_m = \sum_{j=1}^{m} a_j$ er Cauchy.

For $k > \ell \geq N_\varepsilon$: $|\tilde{S}_k - \tilde{S}_\ell|$

$= |a_{\ell+1} + a_{\ell+2} + \cdots + a_k|$

$\leq |a_{\ell+1}| + |a_{\ell+2}| + \cdots + |a_k|$

$= S_k - S_\ell < \varepsilon$.

Så $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er konvergent. $\boxed{Z}$