Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 25/5-29/5

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

May 29, 2009

Oppgave 12.6.5

Rekken her er geometrisk. Hvis $|1-x^2| < 1$ (dvs. $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ er summen gitt ved

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x} & x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

For $x = \pm\sqrt{2}$ og alle andre x-verdier divergerer rekken. Konvergensområdet er altså $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, og summen er altså 0 hvis $x = 0$, og $\frac{1}{x}$ hvis $x \neq 0$ og $|x| < \sqrt{2}$. Vi ser at summefunksjonen ikke er kontinuerlig i dette tilfellet. Dette kan virke som strider mot Abels teorem. Legg imidertid merke til at potensrekken ikke har samme form slik den har i Abels teorem.

Oppgave 12.6.7

a)

For at følgene skal konvergere må vi på grunn av divergenstesten ha at $a_n \to 0$. Vi regner ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

og dermed kan vi bruke grensesammenligningstesten til å slå fast at den ene rekka konvergerer hvis og bare hvis den andre gjør det.

b)

Den gitte rekka konvergerer på grunn av a) hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ gjør det. Denne konvergerer igjen på grunn av a) hvis og bare hvis rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ gjør det. Fra tidligere vet vi fra integraltesten at denne konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

c)

Vi kan bruke grensesammenligningstesten som i a) til å se at rekka har samme konvergensradius som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, og denne ser vi lett at har konvergensradius 1. For $x = 1$ ser vi at rekka divergerer siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, for $x = -1$ ser vi at rekka konvergerer siden den tilsvarende rekka er alternerende. Konvergensområdet er derfor $[-1, 1)$.

Oppgave 12.7.1 a)

Vi bruker setning 12.7.1 og 12.7.3 for $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.1 b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.1c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^{n-1}}{n+1} \\ F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{n+1}}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.1d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(x-4)^n}{n!} = 3f(x) \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^n}{n!} = \frac{1}{3}(f(x)-1). \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.2

a)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ er en geometrisk rekke som konvergerer for $|x| < 1$. Bruker vi summeformelen for geometriske rekker får vi $\frac{1}{1-x^2}$.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}.$$

Integrerer vi begge sider får vi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} &= \int_0^x\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t}+\frac{\frac{1}{2}}{1+t}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}[-\ln|1-t|+\ln|1+t|]_0^x\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).\end{aligned}$$

Ganger vi med 2 på begge sider får vi

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Sett inn $x=\frac{1}{2}$ i b), da får du ligningen som du skal komme frem til.

Oppgave 12.8.1 a)

Taylor-rekken rundt 1 er

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

Forholdstesten viser at denne konvergerer for alle x. Hvis $|x|\leq M$ er restleddet begrenset av $\frac{e^M}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$. Det er klart at vi kan få denne så liten vi vil bare vi velger n stor nok. (eller bruk setning 12.8.2).

Oppgave 12.8.1d)

Taylorrekka blir

$$Tf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k!}(x-1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k.$$

Ved forholdstesten er det klart at Taylor-rekken konvergerer i $(-1,1)$. Ved divergestesten er det klart dette også er hele konvergensintervallet (d.v.s. endepunktene er ikke med).

Oppgave 12.8.1 e)

Den deriverte av $\ln(x+1)$ er

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$

Høyresiden må derfor være Taylor-rekken til $\frac{1}{1+x}$. Integrerer vi fra 0 til x får vi

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Vet vet derfor at høyresiden her er Taylor-rekken til $\ln(x+1)$ (og har samme konvergensintervall $(-1,1)$ som rekken for $\frac{1}{x+1}$. Konvergensintervallet her blir faktisk $(-1,1]$, siden vi nå har fått konvergens i det ene endepunktet også (alternerende rekke).

Oppgave 12.8.3a)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, slik at

$$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^2)2k+1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2}.$$

Oppgave 12.8.3b)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, slik at

$$e^{-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{k!}.$$

Oppgave 12.8.3f)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, slik at

$$x^2 e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!}.$$

Oppgave 12.8.3g)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, slik at

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Siden $f(x)$ er definert slik at den er kontinuerlig i 0, så vil rekken over være Taylorrekka til f.

Oppgave 12.8.5

a)

Vi ser først at

$$f^{(1)}(x) = (2x^2 + 2x + 2x + 1)e^{2x} = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$

Vi ser umiddelbart at dette stemmer med induksjonshypotesen for $n = 1$. Anta at vi har vist at

$$f^{(n)}(x) = (2^n x^2 + 2^n(n+1)x + 2^{n-2}n(n+1))e^{2x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+1)x + 2^{n-1}n(n+1) + 2^{n+1}x + 2^n(n+1))e^{2x} \\ &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+2)x + 2^{n-1}(n+1)(n+2))e^{2x}, \end{aligned}$$

som viser at induksjonshypotesen er riktig for $n+1$ også.

b)

Vi ser at $f^{(n)}(0) = 2^{n-2}n(n+1)$. Taylor-rekken blir dermed

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-2}(n+1)}{(n-1)!}x^n.$$

Ved hjelp av forholdstesten ser vi at denne konvergerer for alle x.

c)

Det er lett å se at vi kan få restleddet så lite vi vil ved å velge n stor nok. Dermed vil Taylor-rekken konvergere mot f for alle x. Setter vi inn $x = -1/2$ ser vi at Taylor-rekken blir

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+1}{4(n-1)!},$$

som er rekken fra oppgaveteksten. Summen blir dermed $f(-1/2) = (1/4-1/2)e^{-1} = -\frac{1}{4e}$.

d)

Vi har

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \\
e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^n}{n!} \\
xe^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} \\
x^2e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+2}}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{2^{n-2}x^n}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

Legger vi sammen de to siste rekkene ser vi at vi får for $n \geq 2$ (for $n = 1$ er det lett å se at vi får samme bidrag som i Taylor-rekken over)

$$\frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}x^n}{(n-2)!} = 2^{n-2}\frac{2+(n-1)}{(n-1)!}x^n = 2^{n-2}\frac{n+1}{(n-1)!}x^n,$$

som stemmer med Taylor-rekken over.

Oppgave 12.8.8

a)

Vi bruker forholdstesten:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\log\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\log\sqrt{n}}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{\frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}}}\right| \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}}\right|} \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2n}}\right|} \\
&= |x|.
\end{aligned}
$$

Konvergensradien er derfor 1. Rekka konvergerer for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. For $x = 1$ kan vi sammenligne med den divergente rekka $\sum \frac{1}{n}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\log\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\log e}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{2}\ln n} \\
&= \frac{1}{2\log e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2\log e}\lim_{n\to\infty} n = \infty.
\end{aligned}
$$

Det er dermed klart fra grensesammenligningstesten at denne rekka også divergerer for $x = 1$, slik at konvergensområdet er $[-1, 1)$.

b)

Siden potensrekken er lik Taylorrekka til f er $\frac{f^{(310)}(0)}{310!} = \frac{1}{\log\sqrt{310}}$, slik at $f^{(310)}(0) = \frac{310!}{\log\sqrt{310}}$. Vi begrenser så feilen for ledd $N+1, N+2, \ldots$ slik:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{N+1}\log\sqrt{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}\log\sqrt{N+2}} + \cdots \\
\leq\ & \frac{1}{\log\sqrt{N+1}}\left(\frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \cdots\right) \\
=\ & \frac{1}{2^N\log\sqrt{N+1}} \\
\leq\ & 0.1.
\end{aligned}
$$

Det holder derforå velge N slik at $2^N\log\sqrt{N+1} > 10$. Prøver vi oss frem finner vi at $N = 5$ er den minste slike verdien.

Oppgave 12.8.12

a)

Forholdstesten viser at konvergensradien er 1. Rekken er alternerende i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

b)

Kall summen for $s(x)$. Deriverer vi rekka leddvis får vi

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2},$$

der vi har gjenkjent rekka som en geometrisk rekke. Integrerer vi får vi

$$s(x) = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ på begge sider får vi at $C = 0$, og dermed $s(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Oppgave 12.8.13

a)

$$\sum_{n \geq 1} n x^n$$

konvergerer når $|x| < 1$ (bruk forholdstesten). Siden rekken divergerer når $|x| = 1$ (divergenstesten), så er konvergensintervallet $(-1, 1)$.

b)

Vi har at

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

slik at $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Det eneste problemet som kunne oppstå her er når vi deler med x, siden x kan være 0. Dette er ikke noe problem likevel, siden vi kan bruke det vi vet om at summefunksjonen er en kontinuerlig funksjon, også i 0.

Oppgave 12.8.14

a)

Forholdstesten gir at rekka konvergerer for $|x| < \frac{1}{3}$. Rekka konvergerer for $x = -1$ ved testen for alternerende rekker. Rekka divergerer for $x = 1$ ved sammenligning med den divergente rekka $\sum \frac{1}{n}$.

b)

Vi ganger først med x og får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}.$$

Integrerer vi dette får vi

$$xS(x) = -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + C = -\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-3x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 12.8.16

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1. Rekka konvergerer i begge endepunktene ved sammenligningstesten på rekka $\sum \frac{1}{n^2}$. derfor blir konvergensområdet $[-1, 1]$. Deriverer vi rekka leddvis to ganger får vi

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x}.$$

b)

Vi integrerer først og får

$$f'(x) = \ln|1+x| + C,$$

og dermed $f'(x) = \ln(1+x)$ (sett inn $x = 0$), der vi kunne ta bort absoluttverditegnet. Vi integrerer så på nytt og bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(1+x) - \int \frac{x}{x+1}dx \\ &= x\ln(1+x) - x + \ln(x+1) + C \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

c)

Vi ser at $f(1/2) = 3/2\ln(3/2) - 1/2$. Altså har vi at

$$\ln(3/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}f(1/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)}\right).$$

Rekken til høyre er her alternerende. Hvis vi klarer å finne N slik at

$$|a_{N+1}| = \frac{2}{3}\frac{1}{2^{N+1}(N+1)N} \leq \frac{1}{250},$$

så får vi den nøyaktigheten vi skal ha. Vi må altså velge minste mulige N slik at $2^{N+1}(N+1)N \geq 166.66$. Vi finner fort at dett blir $N = 3$, slik at approksimasjonen blir

$$\begin{aligned}
\ln(3/2) &\approx \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^2 2} - \frac{1}{2^3 3 \times 2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{48}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{5}{48} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{72} \\
&= \frac{29}{72} \\
&\approx 0.4028.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.8.18

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1, slik at rekka konvergerer i $(-1, 1)$. Rekka konvergerer ikke i endepunktene $x = -1, x = 1$ på grunn av divergenstesten. Dermed blir konvergensområdet $(-1, 1)$.

b)

Kall summen av rekka for $s(x)$. Deriverer vi rekka får vi først

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Deler vi med x får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Integrerer vi får vi

$$\int \frac{s'(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C.$$

Deriverer vi får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

eller $s'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Ny integrasjon gir at

$$s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = -1$, slik at $s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} - 1$.

Oppgave 12.8.21

a)

ved forholdstesten ser vi at rekka konvergerer for alle x.

b)

deriverer vi rekka får vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n-2)!}x^n \\ &= x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2} \\ &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}x^n \\ &= x^2e^{-x}. \end{aligned}$$

som er en rekkeutvikling for $f'(x)$.

c)

Integrerer vi ved delvis integrasjon får vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x}\int 2e^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ og $f(0) = 2$ ser vi at $C = 4$, slik at

$$f(x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 4.$$