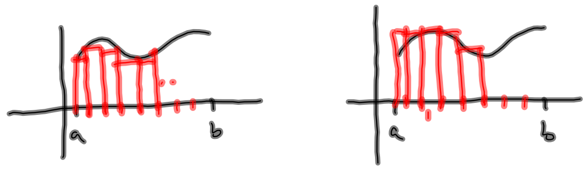
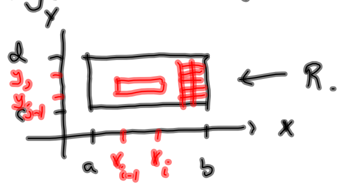
Flateintegraler

Husk fra en variabel



Skal arbeide over et rektangel $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$



En partisjonering Π av R: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$

$R_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

La nå $f : R \to \mathbb{R}$ være en begrenset funksjon.

Sett:
$$m_{ij} := \inf_{(x,y) \in R_{ij}} \{ f(x,y) \}$$

$$M_{ij} := \sup_{(x,y) \in R_{ij}} \{ f(x,y) \}$$

$|R_{ij}| := (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$ = arealet til R_{ij}.

Nedre trappesum: $N(\Pi) := \sum_{i,j} m_{ij} \cdot |R_{ij}|$

Øvre trappesum: $\Phi(\Pi) := \sum_{i,j} M_{ij} \cdot |R_{ij}|$.

DEF: I situasjonen over:

$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy := \inf_{\text{alle } \Pi} \Phi(\Pi)$ kalles øvreintegralet

$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy := \sup_{\text{alle } \Pi} N(\Pi)$ kalles nedreintegralet.

Dersom $\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$ sier vi at f er integrerbar over R og vi setter

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy := \overline{\iint_R} = \underline{\iint_R}$$

Merk: Ethvert øvreintegral er større eller lik ethvert nedreintegral.

Setning 6.1.2 Gitt $R=[a,b]\times[c,d]$, $f,g: R\to\mathbb{R}$ integrerbare over R, $K\in\mathbb{R}$ en konstant holder følgende:

(i) $K\cdot f$ er integrerbar over R og

$$\iint_R (K\cdot f)\,dxdy = K\cdot\iint_R f(x,y)\,dxdy,$$

(ii) $f+g$ er integrerbar over R og

$$\iint_R (f+g)(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy,$$

(iii) dersom $f\le g$ så er

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R g(x,y)\,dxdy.$$

Integraler av kontinuerlige funksjoner.

La $A\subset\mathbb{R}^2$ være en mengde og la $f: A\to\mathbb{R}$ være en funksjon.

Minner på kontinuitet: La $x_0\in A$. Dersom det for enhver $\varepsilon>0$ fins en $\delta>0$ s.a. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ når $|x-x_0|<\delta$ sier vi at f er kontinuerlig i x_0.
Vi sier at f er kontinuerlig på A dersom f er kontinuerlig i alle $x_0\in A$.

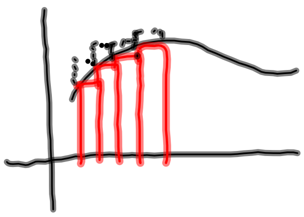
DEF: Anta at $f: A\to\mathbb{R}$ er en funksjon av n variable. Vi sier at f er uniformt kontinuerlig på A dersom det for enhver $\varepsilon>0$ fins en $\delta>0$ s.a. $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$ når $|u-v|<\delta$ for alle $u,v\in A$.

Teorem: La $R=[a,b]\times[c,d]$ være et rektangel i $\mathbb{R}^2$, og la f være en kontinuerlig funksjon på R. Da er es f også uniformt kontinuerlig på R.

(Det samme holder hvis vi bytter ut R med en generell lukket og begrenset mengde.)

Teorem: La $R=[a,b]\times[c,d]$ være et rektangel i $\mathbb{R}^2$ og $f: R \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da er f integrerbar over R.

Bevis: Må vise: for enhver $\varepsilon>0$ så fins en partisjon Π av R s.a. $\Phi(\Pi)-N(\Pi)<\varepsilon$

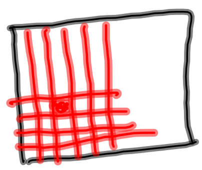


Gitt $\varepsilon>0$ så fins $\delta>0$ s.a.

$$|f(u)-f(v)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \quad \text{når } |u-v|<\delta,$$

(uniform kontinuitet)

La Π være en partisjon av R s.a. dersom $u,v\in R_{ij}$ så er $|u-v|\le\delta$.



R

$$\Phi(\Pi)-N(\Pi)=\sum_{ij} M_{ij}|R_{ij}| - \sum_{ij} m_{ij}|R_{ij}|$$

$$=\sum_{ij}(M_{ij}-m_{ij})\cdot|R_{ij}| \le \sum_{ij}\frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}\cdot|R_{ij}|$$

$$=\frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}\cdot\sum_{ij}|R_{ij}| = \varepsilon.$$

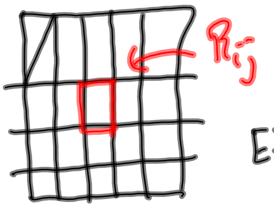
$\blacksquare$

Riemannsummer

Gitt et rektangel $R = [a,b] \times [c,d]$.

- For en partisjon Π av R lar vi $|\Pi|$ betegne <u>maskevidden</u> til Π:

$$|\Pi| := \max_{i,j} \left\{ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \right\}.$$



Et <u>utplukk</u> U er et valg $c_{ij} \in R_{ij}$.

Vi setter $$R(\Pi, U) := \sum_{i,j} f(c_{ij}) \cdot |R_{ij}|.$$

(Riemann-sum).

Ser at: $$m_{ij} \le f(c_{ij}) \le M_{ij},$$

så $$N(\Pi) \le R(\Pi, U) \le \text{Ø}(\Pi).$$

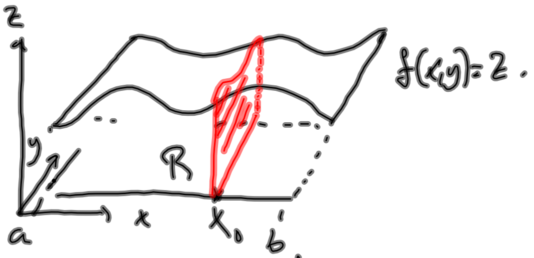
Setning 6.1.6. La $R = [a,b] \times [c,d]$ være et rektangel og la f være en kontinuerlig funksjon på R. La Π_k være en følge av partisjoner så $|\Pi_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ og la U_k være utplukk for Π_k.

Da er
$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{k \to \infty} R(\Pi_k, U_k),$$
dvs. en grense av Riemannsummer.

<u>Bevis</u>: Følger av forrige bevis. ∎

Itererte integraler

Anta f kontinuerlig.



Hvordan skulle vi kunne regne ut $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$?

Vet: dersom vi fikseres $x_0 \in [a,b]$ vet vi hvordan vi ~~skal~~ kan regne ut arealet til snittet med planet $x=x_0$:

$$\text{Areal} = \int_c^d f(x_0,y)\,dy$$

Da burde volumet under grafen over R være

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \,,$$