Løsningsforslag til eksamen i MAT1110, 15/8-08

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

August 15, 2008

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Finn to lineært uavhengige søyler i A og skriv de andre søylene som lineærkombinasjoner av disse.

Svar a): Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar b): De to første søylene i den reduserte trappeformen er pivot-søyler. Derfor er de to første søylene i A lineært uavhengige og utspenner søylerommet.

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ være søylene til A. Å finne x_1, x_2 i ligningen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ svarer til å bringe matrisen $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$ på redusert trappeform (tredje kolonne i den reduserte trappeformen angir da x_1, x_2). Det er derfor klart at tredje og fjerde søyle i den reduserte trappeformen angir hvordan tredje og fjerde søyle i A kan uttrykkes ved første og andre søyle i A, det vil si

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Finn det stasjonære punktet til funksjonen $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ og avgjør om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et sadelpunkt.

Svar: Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2x + 4y - 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2.
\end{aligned}$$

For at $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, må $x = y$, og $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gir da at $x = y = 1$. Hesse-matrisen blir

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinanten til denne er 4. Siden $A = 2 > 0$ er derfor det stasjonære punktet et minimumspunkt.

Oppgave 3

Avgjør om rekka konvergerer eller divergerer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n}{4n^3+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Svar a): Vi sammenligner med $a_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-2n}{4n^3+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2}{4n^3+2} = \frac{1}{4}.$$

Rekka divergerer derfor fordi $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer.

Svar b): Vi bruker forholdstesten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

Rekken konvergerer siden $\frac{1}{e} < 1$.

Oppgave 4

T er området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av paraboloiden $z = x^2+y^2$ og planet $z = x-2y-\frac{1}{4}$.

a) Vis at volumet til T er

$$V = \int\!\!\int_S (x - 2y - x^2 - y^2 - \frac{1}{4})\, dxdy$$

der S er sirkelen i xy-planet med sentrum i $(\frac{1}{2}, -1)$ og radius 1.

b) Regn ut volumet V.

Svar a): Skjæringen mellom paraboloiden og planet får vi ved å løse

$$x^2 + y^2 = x - 2y - \frac{1}{4}.$$

Dette kan vi skrive

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4},$$

eller

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 1$$

som viser at skjæringen er en sirkel med sentrum i $(\frac{1}{2}, -1)$ og radius 1. Det er videre klart at $(\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{4})$ ligger på paraboloiden, og $(\frac{1}{2}, -1, \frac{9}{4})$ ligger i planet. Det er derfor klart at planet ligger øverst i området som de to flatene avgrenser, og integralet blir derfor

$$\int\int_S \left(x - 2y - \frac{1}{4} - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

Svar b): Vi bruker translaterte polarkoordinater:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + r\cos\theta \\ y &= -1 + r\sin\theta. \end{aligned}$$

Siden

$$x - 2y - \frac{1}{4} - x^2 - y^2 = 1 - (x - \frac{1}{2})^2 - (y+1)^2 = 1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1 - r^2$$

får vi

$$\begin{aligned} \int\int_S \left(x - 2y - \frac{1}{4} - x^2 - y^2\right) dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Oppgave 5

Dersom du i MATLAB taster inn kommandoene

```
>> t=0:0.01:1;
>> x=sin(2*pi*t);
>> y=t.*(1-t);
>> plot(x,y)
>> axis('equal')
```

får du figuren nedenfor. Finn arealet til området avgrenset av kurven.

Svar: Kall kurven for $\mathcal{C}$. Vi ser at kurven har samme orientering som kreves av Greens teorem (mot klokka). Vi har at $\mathbf{r}(t) = (\sin(2\pi t), t - t^2), 0 \leq t \leq 1$, er en parametrisering av kurven, og at $\mathbf{r}'(t) = (2\pi \cos(2\pi t), 1 - 2t)$. Vi har derfor

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}} x dy = \int_0^1 x(t)y'(t)dt = \int_0^1 \sin(2\pi t)(1-2t)dt \\
&= \int_0^1 \sin(2\pi t)dt - 2\int_0^1 t\sin(2\pi t)dt = -2\int_0^1 t\sin(2\pi t)dt \\
&= -2\left(\left[-t\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)dt\right) \\
&= -2\left[-t\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6

I denne oppgaven er

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

en symmetrisk 3×3*-matrise, og* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *er funksjonen* $f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ *(der* $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ *er skalarproduktet mellom vektorene* $A\mathbf{x}$ *og* $\mathbf{x}$*).*

a) Vis at

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

Vis også at dersom $\mathbf{x}$ *er en eigenvektor med egenverdi* λ*, så er* $f(\mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2$*.*

b) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$ *er kuleskallet om origo med radius 1. Forklar at når vi innskrenker* f *til* S*, så har funksjonen maksimums- og minumspunkter. Bruk multiplikatormetoden til Lagrange til å vise at disse maksimums- og minimumspunktene er egenvektorer til* A*. Vis til slutt at maksimumsverdien til* f *på* S *er den største egenverdien til* A*, mens minimumsverdien er den minste egenverdien til* A*.*

Svar a): Vi har at

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \\
&\quad + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 \\
&\quad + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Hvis $\mathbf{x}$ er en egenvektor med egenverdi λ så har vi

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2.$$

Svar b): S er en lukket og begrenset mengde, og f er en kontinuerlig funksjon. Ifølge ekstremalverdisetningen har f da både maksimums- og minimumspunkter på S. Vi setter

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

og bruker Lagranges multiplikatormetode med bibetingelse $g(x_1,x_2,x_3) = 1$. Vi har at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{13}x_3 \\
\frac{\partial f}{\partial x_3} &= 2a_{13}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{33}x_3 \\
\frac{\partial g}{\partial x_1} &= 2x_1 \\
\frac{\partial g}{\partial x_2} &= 2x_2 \\
\frac{\partial g}{\partial x_3} &= 2x_3
\end{aligned}
$$

Vi ser fra de første tre ligningene at

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

og fra de tre siste ligningene at

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Lagranges multiplikatormetode ber oss finne punktene der $\bigtriangledown g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ eller $\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = \lambda \bigtriangledown \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Den første betingelsen ($\bigtriangledown g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) er bare oppfylt når $\mathbf{x} = 0$, og dette punktet er uinteressant siden det ikke ligger på S. Setter vi inn resultatene ovenfor i den andre betingelsen (altså i $\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = \lambda \bigtriangledown \mathbf{g}(\mathbf{x})$), får vi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, som sier at $\mathbf{x}$ er en egenvektor for A. Dette betyr at maksimums- og minimumspunkter for f på S er egenvektorer for A.

Hvis $|\mathbf{x}| = 1$ er en egenvektor med tilhørende egenverdi λ, har vi fra a) at $f(\mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2 = \lambda$. Det er derfor klart at maksimumsverdien er den største egenverdien til A, og at minimumsverdien er den minste egenverdien til A.