Greens teorem: et eksempel

John Rognes

1. mars 2011

Teoremet

Theorem

La $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *være en stykkevis glatt parametrisering av en enkel, lukket kurve* $\mathcal{C}$ *i planet, som er orientert mot klokken. La* R *være området innenfor* $\mathcal{C}$*. La* $\mathbf{F} = (P, Q)$ *være et vektorfelt, og anta at* P *og* Q *har kontinuerlige partielle deriverte i et åpent område som inneholder* R*. Da er*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Et område i planet

La $\mathbf{r}\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t \cos t, \sin t)$$
$$\mathbf{r}'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, \cos t)$$

Dette gir en enkel, lukket kurve $\mathcal{C}$ som er orientert mot klokken, og som avgrenser et område R. Hva er arealet

$$|R| = \iint_R 1\, dxdy$$

til R? Sentroiden til S er på formen $(0, \bar{y})$, der

$$\bar{y}|R| = \iint_R y\, dxdy$$

siden R er symmetrisk om y-aksen.

Et vektorfelt

Vi vil bruke Greens teorem til å beregne disse integralene, siden $\mathcal{C}$ er lettere å beskrive enn R. Må skrive $1 = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ for et passende vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$. Siden y-komponenten i $\mathbf{r}'(t)$ er enklest lar vi $P(x, y) = 0$. Da passer $Q(x, y) = x$, så $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Da er

$$\iint_R 1\, dxdy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} x\, dy\,.$$

Per definisjon er dette

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt &= \int_0^{\pi} (0, \sin t \cos t) \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t\, dt = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t\right]_0^{\pi} = 2/3\,.\end{aligned}$$

Et annet vektorfelt

Så vil vi skrive $y = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ for et annet vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$. Kan la $P(x, y) = 0$ og $Q(x, y) = xy$, så $\mathbf{F}(x, y) = (0, xy)$. Da er

$$\iint_R y\,dxdy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} xy\,dy\,.$$

Per definisjon er dette

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt &= \int_0^{\pi} Q(\sin t \cos t, \sin t) \cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t\,dt\,.\end{aligned}$$

Firedoble vinkler

Her er

$$\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t)$$

så

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 t \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{8}\int_0^\pi (1 - \cos 4t)\, dt \\ &= \frac{1}{8}\Big[t - \frac{1}{4}\sin 4t\Big]_0^\pi = \pi/8 \,.\end{aligned}$$

Altså er arealet $|R| = 2/3$ og sentroiden er $(0, \bar{y})$ der

$$\bar{y} = (\pi/8)/(2/3) = 3\pi/16 \,.$$