LH 5.9 Ekstremalpunkter

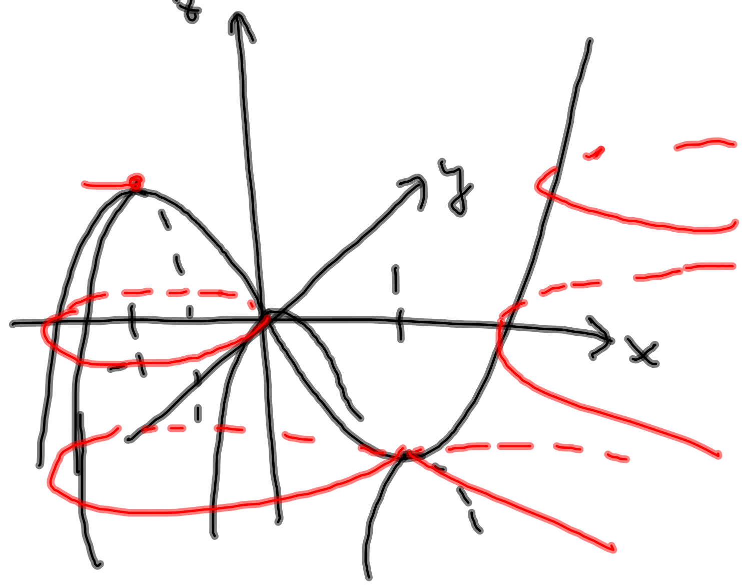
= minimumspunkter og maksimumspunkter

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

Eks $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$



Def $\vec{p} \in A$ (indre punkt?)

er et stasjonært punkt hvis $f'(\vec{p}) = 0$

$\Leftrightarrow \nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$.

Hesse-matrisen

Gradient $\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{p}) \right)$

Hessematrisen

$$Hf(\vec{p}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{p}) \right)_{i,j=1}^{m}$$

m×m matrise

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\vec{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\vec{p}) \end{bmatrix}$$

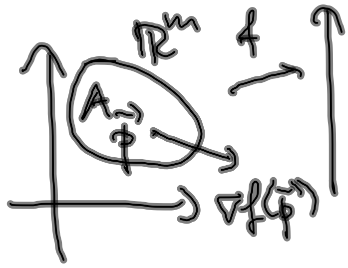
Antar heretter at:

- f er to ganger kontinuerlig deriverbar
- = hver funksjon $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{p})$ er kontinuerlig
- = $Hf(\vec{p})$ er kontinuerlig som funksjon av $\vec{p}$

$\Longrightarrow$ $Hf(\vec{p})$ er symmetrisk

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Hessematrisen til f er Jacobimatrisen til gradientfeltet $\nabla f : A \to \mathbb{R}^m$.



$$(\nabla f)'(\vec{p}) = Hf(\vec{p})$$

$$\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right).$$

<u>Annetderivertesten</u> (5.9.6)

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\vec{p} \in A$ stasjonært punkt ($\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$);
anta Hf er kontinuerlig nær $\vec{p}$.

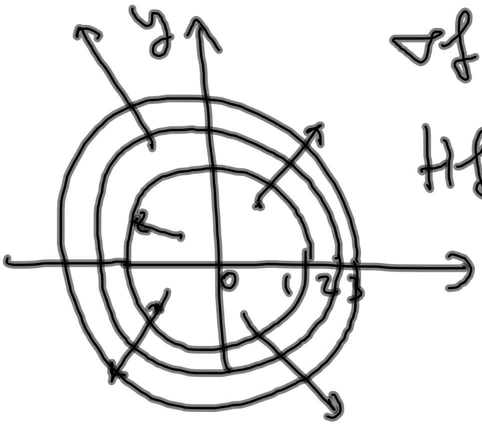
(a) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{p})$ er > 0 er $\vec{p}$ et lokalt minimumspunkt.

(b) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{p})$ er < 0 er $\vec{p}$ et lokalt maksimumspkt.

(c) Hvis minst en egenverdi er > 0 og minst en egenverdi er < 0, er $\vec{p}$ et <u>sadelpunkt</u>.

(d) Hvis noen egenverdier er 0, og de andre har samme fortegn, gir testen ingen konklusjon.

Eks $f(x,y) = x^2+y^2$



$\nabla f(x,y) = (2x,2y)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

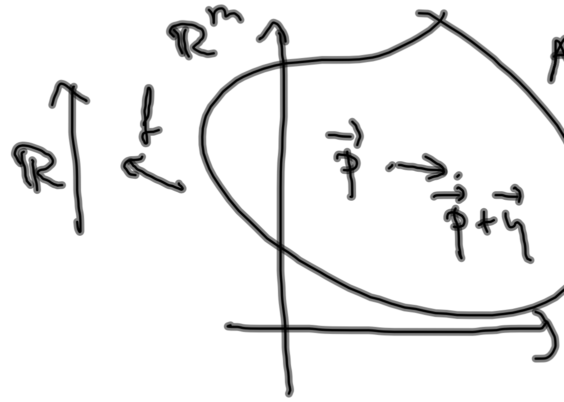
egenverdier

$0 < \lambda_1 = 2 \leq \lambda_2 = 2.$

$\Longrightarrow$ lokalt minimum i $(0,0)$.

Eks $f(x,y) = x^2-y^2$, $f(x,y) = -x^2-y^2$.

Taylors formel (5.9.4)



$$f(\vec{p}+\vec{y}) = f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{y} + \frac{1}{2} Hf(\vec{p})\vec{y}\cdot\vec{y} + \varepsilon(y)|\vec{y}|^2$$

der $\varepsilon(\vec{y}) \to 0$ når $\vec{y} \to \vec{0}$.

Fra Kalkulus 11.2:

Hvis $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to ganger kontinuerlig deriverbar nær 0 er

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + \eta(t)t^2$$

der $\eta(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Vises ved delvis integrasjon...

Fra Kalkulus 11.2: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Fundamentalteoremet:

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(x)\,dx$$

Delvis integrasjon:

$$g(t) = g(0) + \Big[g'(x)(x-t)\Big]_0^t - \int_0^t g''(x)(x-t)\,dx$$

$$= g(0) + g'(0)t + \int_0^t g''(0)(t-x)\,dx + \int_0^t (g''(x)-g''(0))(t-x)\,dx$$

$$= g(0) + g'(0)t + \tfrac{1}{2}g''(0)t^2 + \eta(t)t^2$$

der $\eta(t)t^2 = \int_0^t (g''(x)-g''(0))(t-x)\,dx$

Når g'' er kontinuerlig i 0 vil gitt $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ med $|g''(x) - g''(0)| \le \varepsilon$ for $|x| < \delta$, så

$$\left|\int_0^t (g''(x)-g''(0))(t-x)\,dx\right| \le t\cdot\varepsilon\cdot t = \varepsilon t^2$$

så $|\eta(t)| \le \varepsilon$.

Bevis - skisse La $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ og

$$g(t) = f(\vec{p} + t\vec{y}) \quad \text{for små } t.$$

$$g(0) = \underline{f(\vec{p})}$$

kjerneregelen

$$g'(t) = f'(\vec{p} + t\vec{y})\vec{y}$$

$$= \nabla f(\vec{p} + t\vec{y}) \cdot \vec{y}$$

$$g'(0) = \underline{\nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{y}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})\, y_i$$

$$g''(t) = \nabla f'(\vec{p} + t\vec{y})\vec{y} \cdot \vec{y}$$

$$= Hf(\vec{p} + t\vec{y})\vec{y} \cdot \vec{y}$$

$$g''(0) = \underline{Hf(\vec{p})\vec{y} \cdot \vec{y}} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{p})\, y_i y_j$$

<u>Lemma 5.9.5</u> H symmetrisk $m \times m$ matrise med egenverdier $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$.

ⓐ Hvis alle λ_i er positive $(0 < \lambda_1)$

er $$H\vec{y} \cdot \vec{y} \geq \lambda_1 |\vec{y}|^2$$

for alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

ⓑ Hvis alle λ_i er negative $(\lambda_m < 0)$

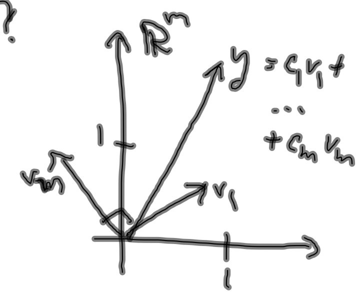
er $$H\vec{y} \cdot \vec{y} \leq \lambda_m |\vec{y}|^2$$

for alle $y \in \mathbb{R}^m$.

<u>Bevis</u> H symm. $m \times m$ matrise

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ egenverdier

$\vec{y} \in \mathbb{R}^m \quad H\vec{y} \cdot \vec{y}$?



Kan finne en basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ for $\mathbb{R}^m$ som består av egenvektorer: $H\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

Videre kan vi anta at basisen er <u>ortonormal</u>, dvs:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

Skriver $\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m$

Da er

$$\underline{|\vec{y}|^2} = \vec{y} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^m c_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j=1}^m c_j \vec{v}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \, \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$$

$$= \sum_{i=1}^m c_i^2$$

og $H\vec{y} = \sum_{i=1}^m c_i H\vec{v}_i = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i \vec{v}_i$

så

$$\underline{H\vec{y} \cdot \vec{y}} = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j=1}^m c_j \vec{v}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \lambda_i \, \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i^2$$

$$= \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_m c_m^2 \qquad 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$$

$$\geq \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_1 c_m^2$$

$$= \lambda_1 (c_1^2 + \dots + c_m^2) = \underline{\lambda_1 |\vec{y}|^2}$$

Bevis av annenderiverttesten:

(a) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$

$$f(\vec{p}+\vec{y}) = f(\vec{p}) + \underbrace{\nabla f(\vec{p})}_{\vec{0}} \cdot \vec{y} + \frac{1}{2} Hf(\vec{p})\vec{y} \cdot \vec{y} + \varepsilon(\vec{y})|\vec{y}|^2$$

der $\varepsilon(\vec{y}) \longrightarrow 0$ når $\vec{y} \to \vec{0}$.

$$\geq f(\vec{p}) + \frac{1}{2}\lambda_1 |\vec{y}|^2 + \varepsilon(\vec{y})|\vec{y}|^2$$

Det finnes $r>0$ slik at

$$\frac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(\vec{y}) > 0 \quad \text{for } |\vec{y}| < r.$$

$$f(\vec{p}+\vec{y}) \geq f(\vec{p}) + \left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(\vec{y})\right)|\vec{y}|^2$$

$$\geq f(\vec{p}) \quad \text{for } |\vec{y}| < r.$$

Altså er $\vec{p}$ et lokalt minimumspunkt for f.

<u>Eksempel</u> $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, -2y)$$

stasjonære punkter: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = (-1,0)$$

eller $(1,0)$.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ har egenverdien $6x$ og -2.

I $(-1,0)$ er $Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

som bare har negative egenverdier $(-6 < -2)$.

$(-1,0)$ er et <u>lokalt maksimumspunkt</u>

I $(1,0)$ er $Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

med en negativ og en positiv egenverdi

$(-2 < 0 < 6)$

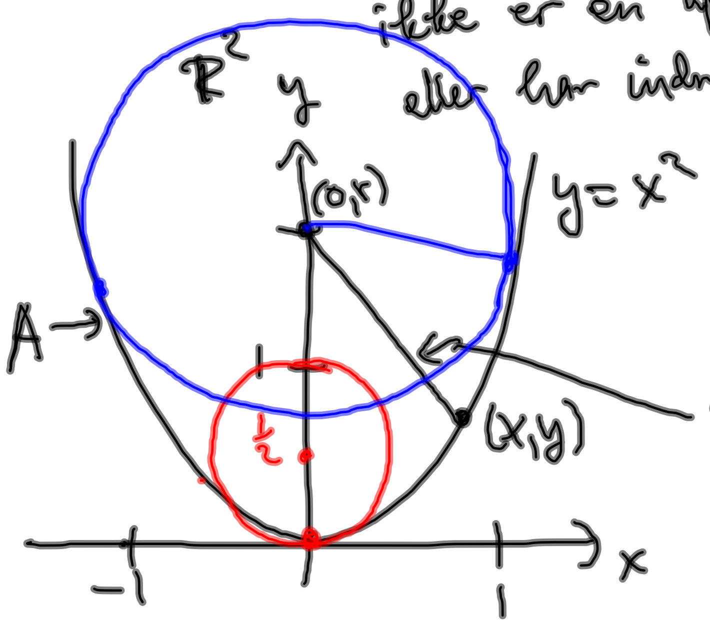
$(1,0)$ <u>er et sadelpunkt.</u>

LH 5.10 Lagranges multiplikatormetode

Hva skjer når $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$

ikke er en åpen delmengde?

eller har indre punkter?



$g(x,y) = x^2 - y$

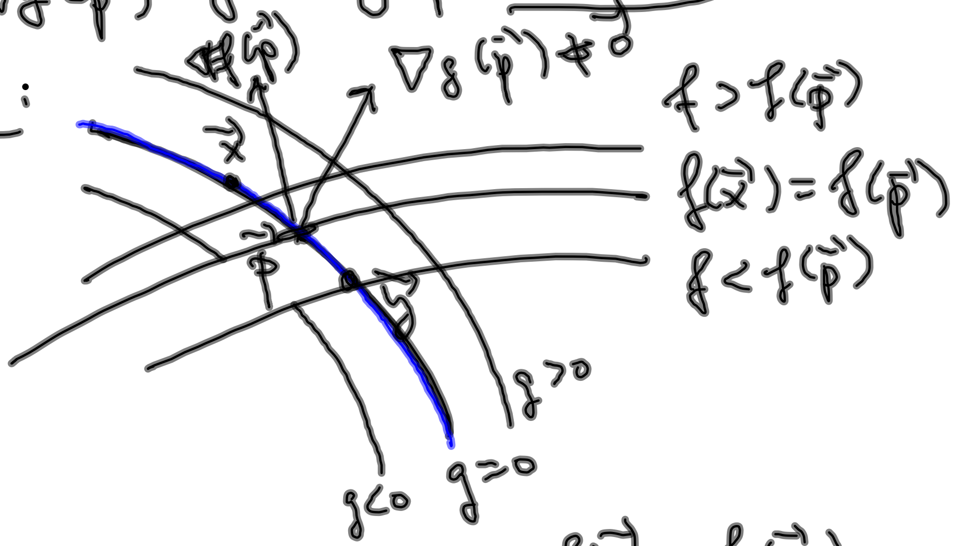
$g(x,y) = 0$

avstand $\sqrt{f(x,y)}$

$f(x,y) = x^2 + (y-r)^2$

Ser på nivåflater for f og g:

Hvis $\nabla f(\vec{p})$ og $\nabla g(\vec{p})$ <u>ikke er parallelle</u>:

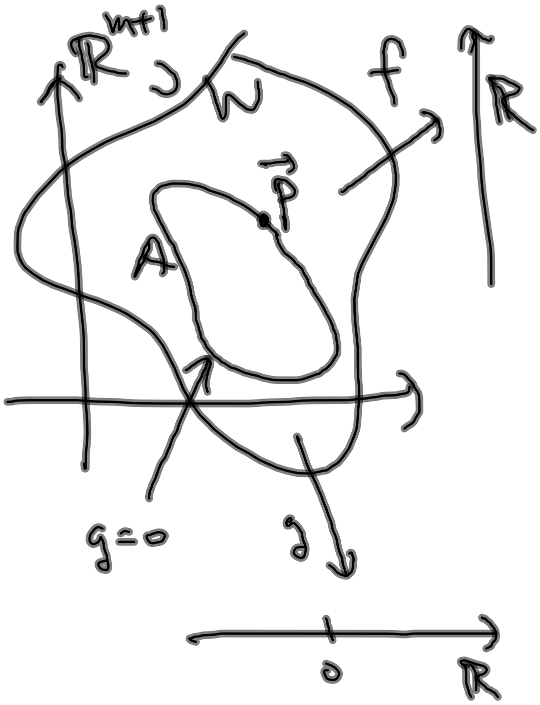


finnes det $\vec{x}$ nær $\vec{p}$ med $f(\vec{x}) > f(\vec{p})$ og $g(\vec{x}) = 0$

og $\vec{y}$ nær $\vec{p}$ med $f(\vec{y}) < f(\vec{p})$ og $g(\vec{y}) = 0$

så $\vec{p}$ er <u>ikke et lokalt ekstrempunkt</u>.

Lagranges multiplikatormetode



$W \subset \mathbb{R}^{m+1}$ åpen delmengde

$f, g : W \longrightarrow \mathbb{R}$

Hf, Hg kontinuerlige

Anta at

$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}) \in W$

er et lokalt maksimum (eller minimum)

for f restriktert til mengden

$$A = \{ \vec{x} \in W \mid g(\vec{x}) = 0 \}$$

Da er enten $\nabla g(\vec{p}) = \vec{0}$ eller

det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\vec{p}) = \lambda \nabla g(\vec{p}).$$