Løsningsforslag oblig 2 Mat 1110 vår 2018

Oppgave 1

a) $$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2+1}$$

Dermed passer det å bruke polarkoordinater :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4+1} \cdot |J| \, d\theta \right] dr$$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r}{1+r^4}\,dr$$

$u = r^2$

$\frac{du}{dr} = 2r$

$du = 2r\,dr$

$r=0$ gir $u=0$

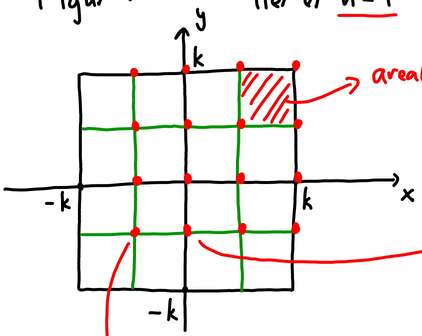
$r=R$ gir $u=R^2$

$$= 2\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{\frac{1}{2}\,du}{1+u^2} = \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \Big[\arctan u\Big]_0^{R^2} = \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left[\arctan(R^2) - \arctan 0\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

b) Figur : Her er $\underline{n=4}$



areal $\frac{2k}{n} \cdot \frac{2k}{n} = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \overset{n=4}{=} \left(\frac{2k}{4}\right)^2$

punktet $\left(-k + \frac{2k \cdot 2}{n}, -k + \frac{2k \cdot 1}{n}\right)$

punktet $\left(-k + \frac{2k \cdot 1}{n}, -k + \frac{2k \cdot 1}{n}\right) \overset{n=4}{=} \left(-k + \frac{2k \cdot 1}{4}, -k + \frac{2k \cdot 1}{4}\right)$

Vi ser at Riemannsummen R_n^k er basert på en partisjon av kvadratet $[-k,k]\times[-k,k]$ med maskevidde $\left(\frac{2k}{n}\right)^2$.

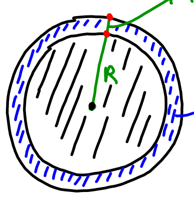
Funksjonsverdiene

$$f\left(-k + \frac{2ki}{n}, -k + \frac{2kj}{n}\right)$$

er beregnet i punktet som utgjør <u>øvre høyre hjørne</u> av hvert delrektangel (delkvadrat) i partisjonen. Disse punktene er markert med røde prikker på figuren.

(Oppgave 1b og 1c finnes i en egen fil)

Oppgave 2



Vi legger koordinatsystemet (x,y,z) slik at planetens sentrum er i punktet $(0,0,0)$. Massen M av havet er gitt ved

$$M = \iiint_H \frac{\alpha}{R+h(x,y,z)}\, dx\,dy\,dz,$$

der $h(x,y,z)$ er høyden over havets bunn i punktet (x,y,z).

Vi bruker kulekoordinater ρ, ϕ, θ. Beskrivelse av havet H:

$$\begin{cases} \rho \in [R, R+D] \\ \phi \in [0,\pi] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad J = \rho^2 \sin\phi$$

Merk at $R + h(x,y,z)$ er avstanden fra punktet (x,y,z) til origo. Dette blir altså bare ρ når vi skifter til kulekoordinater. Altså:

$$M = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_R^{R+D} \frac{\alpha}{\rho}\cdot |J|\, d\rho\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_R^{R+D} \frac{\alpha}{\rho}\cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\alpha \sin\phi \cdot \frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=R}^{\rho=R+D} d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi\left[(R+D)^2 - R^2\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[(R+D)^2 - R^2\right]\cdot \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[2DR + D^2\right]\cdot \int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \frac{\alpha D}{2}\left[D+2R\right]\cdot \int_0^{2\pi}\left[-(-1)-(-1)\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha D}{2}\left[D+2R\right]\cdot \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = \frac{\alpha D}{2}(D+2R)\cdot 4\pi = \underline{\underline{2D\pi\alpha(D+2R)}}$$

Oppgave 3

Anta at $a\vec{x} + b\vec{y}$ er en egenvektor for M.
La den tilhørende egenverdien hete α. Vi har da

$$M(a\vec{x} + b\vec{y}) = \alpha(a\vec{x} + b\vec{y})$$
$$= a\alpha\vec{x} + b\alpha\vec{y}$$

Samtidig, siden $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er egenvektorer for M med egenverdier henholdsvis λ og μ, har vi

$$M(a\vec{x} + b\vec{y}) = M(a\vec{x}) + M(b\vec{y}) \quad \text{(ved linearitet)}$$
$$= a \cdot M\vec{x} + b \cdot M\vec{y} \quad (\text{— " —})$$
$$= a \cdot \lambda\vec{x} + b \cdot \mu\vec{y} \quad \text{(siden de er egenvektorer).}$$

Setter vi de to uttrykkene for $M(a\vec{x} + b\vec{y})$ lik hverandre, får vi

$$a\alpha\vec{x} + b\alpha\vec{y} = a\lambda\vec{x} + b\mu\vec{y}$$
$$(a\alpha - a\lambda)\vec{x} + (b\alpha - b\mu)\vec{y} = 0$$
$$a(\alpha - \lambda)\vec{x} + b(\alpha - \mu)\vec{y} = 0$$

Fra pensum vet vi at siden $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, er de lineært uavhengige. Dette medfører at

$$a(\alpha - \lambda) = 0 \quad \text{og} \quad b(\alpha - \mu) = 0$$

Hvis da $a \neq 0$ og $b \neq 0$, følger at

$$(\alpha - \lambda) = 0 \quad \text{og} \quad (\alpha - \mu) = 0$$

Ergo er $\lambda = \alpha$ og $\mu = \alpha$, så $\lambda = \mu$. Men vi forutsetter $\lambda \neq \mu$.
Selvmotsigelse. Så antakelsen om at $a \neq 0$ og $b \neq 0$ må være gal.
Alltså $a = 0$ eller $b = 0$. $\square$

Løsning av oppgave 1c) og 1d)
Oblig 2 Mat1110, vår 2018

c)
Et Matlab-program som beregner R_n^k er vist nedenfor. Programmet starter med å lese inn k og n. Variabelen R brukes til å beregne Riemannsummen. Til å begynne med settes R lik 0, og maskevidden m regnes ut. Deretter følger to for-løkker som tilsvarer dobbeltsummen i R_n^k. I hver runde beregnes først punktet (x,y) der f skal evalueres, og så legges bidraget f(x,y)*m til på R.

Når for-løkkene er ferdig gjennomløpt, tilordnes sluttverdien av R til variabelen "Riemannsum", som skrives ut.

PROGRAMMET:

```
k=input('Gi størrelsen k av kvadratet: ');
n=input('Gi antall ruter n i bredden på partisjonen: ');
R=0
m=((2*k)/n)^2
for i=1:n
    for j=1:n
        x=-k+((2*k*i)/n);
        y=-k+((2*k*j)/n);
        R=R+((1/((x^2+y^2)^2+1))*m);
    end
end
Riemannsum = R
```

d)
Med k=100 og n=1000 gir programmet

Riemannsum = 4.9345

Den eksakte verdien fra a) er 4.93480…, så det er klart at disse verdiene for k og n gir feil mindre enn 1/10.