Plenum 10/5

5.7: 9

5.8: 1

5.9: 12, (8), (16)

5.10: 1e, 2, 8

5.7

9.) $\phi(x, y(x)) = C$, ANTA: $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$

Bevis: La x_0 være s.a. $\phi(x_0, y(x_0))$ er def., og definer

$$f(x_0, y(x_0)) := \phi(x_0, y(x_0)) - C = 0$$

Siden $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0)) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y(x_0)) \underset{\text{antagelse}}{\neq} 0$, og de partiellderiverte er kont., gir implisitt funksjonsteorem at det fins en funksjon g s.a. $g(x_0) = y(x_0)$ og

$$f(x_0, g(x_0)) = 0 \Rightarrow \phi(x_0, g(x_0)) = C.$$

I tillegg

$$g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0))} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y(x_0))}$$

Men siden dette holder for alle x_0 i definisjonsområdet, så må funksjonene g og y være like (samme funksjon), så

$$y'(x) = g'(x) \underset{\text{over}}{=} - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))} .$$

5.8:

1) $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^k$ kont.

VIS: Fins K s.a. $|\vec{F}(\vec{x})| \leq K$ for alle $\vec{x} \in A$

Bevis: $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$, $F_i : A \to \mathbb{R}$.

$\vec{F}$ er kont. $\Rightarrow F_1, F_2, \dots, F_k$ er kont. (Setning 2.2.4).

Siden A er lukket og begrenset og $F_i : A \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, k)$, får vi fra ekstremalverdisetningen at hver av F_i'ene er begrenset (på A). Dvs. det fins $K_1, K_2, \dots, K_k$ s.a.

$$|F_i(\vec{x})| \leq K_i \text{ for alle } \vec{x} \in A.$$

La $C := \max\{K_1, K_2, \dots, K_k\}$. Da er

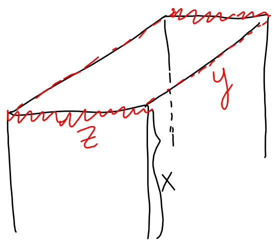
$$\underbrace{|\vec{F}(\vec{x})| = \sqrt{F_1(\vec{x})^2 + F_2(\vec{x})^2 + \dots + F_k(\vec{x})^2}}_{\text{def. av norm}} \leq \sqrt{\underbrace{C^2 + C^2 + \dots + C^2}_{k \text{ stk}}}$$

$$= \sqrt{kC^2} = C\sqrt{k} \text{ for alle } \vec{x} \in A.$$

Så def. $K := C\sqrt{k}$ er en begrensende konstant. ∎

5.9:

12)



Må ha: $V = xyz = 500$; (★)

Minimer total rørlengde.

a) $L(x, y) = 4x + 2y + \dfrac{1000}{xy}$

Har 4 bein med lengde x, 2 sider med lengde y og 2 sider med lengde z. Fra (★):

$$z = \frac{500}{xy} \Rightarrow 2z = \frac{1000}{xy}$$

($x, y \neq 0$ fordi vil ha telt som står / volum $= 500$)

Finner partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{x y^2}$$

b) $\nabla L = \begin{bmatrix} 4 - \frac{1000}{x^2 y} \\ 2 - \frac{1000}{x y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 4x^2 y = 1000 \\ 2x y^2 = 1000 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 y^2 = 250 y \quad (I) \\ x^2 y^2 = 500 x \end{array}$

$\Rightarrow$ (Trekk fra hverandre) $\quad 250y = 500x$

$\underline{y = 2x}$

Setter inn i (I): $\quad x^2 4x^2 = 500x$

$4x^3 = 500$

$x^3 = \frac{250}{2} = 125$

$\overline{x = 5}$

Så: $y = 2 \cdot 5 = \underline{10}$ og $z = \frac{500}{xy} = \frac{500}{50} = \underline{10}$

a)

Sjekk at er minimum:

$HL(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2000}{y x^3} & \frac{1000}{x^2 y^2} \\ \frac{1000}{x^2 y^2} & \frac{2000}{y^3 x} \end{bmatrix}$

Hesse matrise

$HL(5,10) = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(HL(5,10)) = \frac{16}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12}{25} > 0$

Fra annenderiverttesten i 2 variable er $(5,10)$ et minimum (siden $\det HL(5,10) > 0$) og $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{8}{5} > 0$.

Svar: $(x^*, y^*, z^*) = (5, 10, 10)$.

5.10:

1e) $f(x,y,z) = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$

$\left(x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \right.$

Ellipse;

lukket og begrenset $\Rightarrow$ ekstremalverdisetningen: f har maks. og min.

Lagrange:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

$g(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\lambda x \\ 4\lambda y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs:
$$6\lambda x = 2$$
$$4\lambda y = 3$$
og $3x^2 + 2y^2 = 3$ (OBS!)

$$\begin{cases} \lambda x = \frac{1}{3} & (\mathrm{I}) \\ \lambda y = \frac{3}{4} & (\mathrm{II}) \\ 3x^2 + 2y^2 = 3 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Merk: $\lambda = 0$ går ikke (pga. (I)), så anta $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3\lambda}$, $y = \frac{3}{4\lambda}$.

Sett inn i (III):
$$3\frac{1}{3^2\lambda^2} + 2\frac{9}{4^2\lambda^2} = 3$$
$$\frac{8+27}{24} = 3\lambda^2$$
$$\lambda^2 = \frac{35}{72} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{35}{72}}$$

Så: $x = \pm\frac{1}{3\sqrt{\frac{35}{72}}}$ og $y = \pm\frac{3}{4\sqrt{\frac{35}{72}}}$

Mellomregning: $\frac{1}{3\sqrt{\frac{35}{72}}} = \frac{\sqrt{72}}{3\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{72}{3^2 \cdot 35}} = \sqrt{\frac{24}{3 \cdot 35}}$

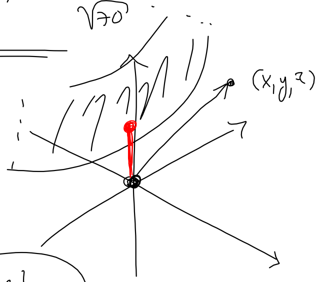
$$= \sqrt{\frac{8}{35}} = \sqrt{\frac{16}{70}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

Kandidatene for max. og min: $\left(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{70}}, -\frac{9}{\sqrt{70}}\right)$.

Fra def. av f: makspunkt der $f\left(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}}\right) = \frac{35}{\sqrt{70}}$ og

minpkt. der $f\left(-\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{-9}{\sqrt{70}}\right) = -\frac{35}{\sqrt{70}}$

2) Hvilket pkt på $z^2 - xy = 1$ er nærmest origo?



Avstand fra pkt. til origo?

$$|(x,y,z) - (0,0,0)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vil egentlig minimere! Det er ekvivalent å minimere uten $\sqrt{\cdots}$ ($\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \geq b$ for $a, b \geq 0$)

Så: $\min \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f(x,y,z)}$

s.a. $\underbrace{z^2 - xy}_{g(x,y,z)} = 1$

Lagrange: $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = 2\lambda z \end{cases} \quad \text{og} \quad z^2 - xy = 1$$

$z \neq 0$: $\lambda = 1$, så $2x = -y$, $2y = -x$ $\Rightarrow$ $2(-2y) = -y$, $-3y = 0$, $y = 0$, $x = 0$

Bibet: $z^2 - 0 = 1$, $z = \pm 1$. Kandidater: $(0, 0, \pm 1)$.

$z = 0$: $\begin{cases} 2x = -\lambda y & \text{(i)} \\ 2y = -\lambda x & \text{(ii)} \\ -xy = 1 & \text{(iii)} \end{cases}$ $\longrightarrow$ NB: $x, y \neq 0$

Så: $x = -\frac{1}{y}$. Fra (i), (ii): $-\frac{2}{y} = -\lambda y \Rightarrow \frac{2}{y^2} = \lambda \Rightarrow$

$2y = \lambda \frac{1}{y} \Rightarrow 2y^2 = \lambda$

$2\cancel{y^2} \frac{2}{\cancel{y^2}} = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$, men siden $2y^2 = \lambda$,

må $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda = 2$ og $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Da er

$x = \mp 1$. Kandidat: $(-1, 1, 0)$ og $(1, -1, 0)$.

Alle kandidater: $\underbrace{(0, 0, \pm 1)}_{1}$ og $\underbrace{(-1, 1, 0), (1, -1, 0)}_{\sqrt{2}}$

Avst. til origo: 1, $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Pkt'ene som minimerer avst. er $(0, 0, \pm 1)$.