# $\boxed{\text{5.4/5.5 Iterasjon av funksjoner}}$

kreaver ikke lenger at $\vec{F}$ er lineær

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n) \qquad \vec{x}_n \in \mathbb{R}^m , \qquad \vec{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

eks.
$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n \\ y_{n+1} = c y_n + d x_n y_n \end{cases}$$

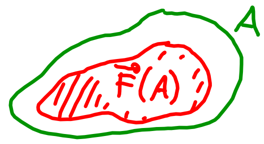
$x_n$ byttedyr

$y_n$ rovdyr

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Def  La $A \subseteq \mathbb{R}^m$. $\vec{F} : A \to A$ kalles en kontraksjon hvis det fins $0 < C < 1$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C \cdot |\vec{x} - \vec{y}|$$




for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$. Et punkt $\vec{x} \in A$ kalles et fikspunkt for $\vec{F}$ hvis $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$. Tallet $C$ kalles en kontraksjonsfaktor for $\vec{F}$.

**Banachs fikspunktteorem** (5.5.4)

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikke-tom og lukket

$\vec{F} : A \to A$ kontraksjon med kontraksjonsfaktor $C$.

Da har vi:

- $\vec{F}$ har nøyaktig ett fikspunkt $\vec{x} \in A$.
- Uansett hvilket punkt $\vec{x}_0 \in A$ vi starter iterasjonen i, vil følgen $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$ konvergere mot $\vec{x}$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$
- Feilestimat: For alle $n \geq 1$ gjelder

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq \frac{C^n}{1 - C} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| .$$

**Bevis** Hvis $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$ og $\vec{F}(\vec{y}) = \vec{y}$, har vi

$$|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C \cdot |\vec{x}-\vec{y}|$$

Siden $0 < C < 1$, gir dette $|\vec{x}-\vec{y}| = 0$, så $\vec{x} = \vec{y}$.

Altså har $\vec{F}$ høyst ett fikspunkt.

Vi $n, j > 0$ har vi

$$\begin{aligned}
|\vec{x}_n - \vec{x}_{n+j}| &= |(\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}) + (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}) + \dots + (\vec{x}_{n+j-1} - \vec{x}_{n+j})| \\
&\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}| + \dots + |\vec{x}_{n+j-1} - \vec{x}_{n+j}| \\
&\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}| + |\vec{x}_{n+2} - \vec{x}_{n+3}| + \dots \\
&\leq C^n \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + C^{n+1} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + C^{n+2} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + \dots \\
&= (C^n + C^{n+1} + C^{n+2} + \dots) \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| \\
&= \frac{C^n}{1-C} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|
\end{aligned}$$

Sum av geo. rekke $a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$ hvis $|r| < 1$. Her: $a = C^n$, $r = C$

Siden $C < 1$, kan vi få dette mindre enn en gitt $\varepsilon > 0$ ved å velge $n$ stor nok.

Altså er følgen $\{\vec{x}_n\}$ Cauchy, så den konvergerer mot et punkt $\vec{x}$.

Siden enhver kontraksjon er kontinuerlig (velg $\delta = \varepsilon$), har vi

$$\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \vec{F}(\vec{x}_n) \underset{\boxed{5.1.9}}{=} \vec{F}\left(\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n\right) = \vec{F}(\vec{x})$$

Så $\vec{x}$ er et fikspunkt. Lar vi $j \to \infty$ i regningen ovenfor, får vi

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq \frac{C^n}{1-C} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| . \qquad \square$$

**Middelverdisetningen i flere variable (5.5.6)**

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f : A \to \mathbb{R}$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

Da fins et punkt $\vec{c}$ på linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ slik at

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

**Bevis** Parametriserer linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ ved

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \qquad \text{for } t \in [0, 1].$$

La $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$g(t) = f(\vec{r}(t)).$$

Kjerneregelen gir

$$g'(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ \vdots \\ r_m'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \qquad (*)$$

Ved middelverdisetningen i en variabel fins $c \in [0,1]$ slik at

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c) \overset{(*)}{=} \nabla f(\vec{r}(c)) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Her er $g(1) = f(\vec{r}(1)) = f(\vec{b})$ og $g(0) = f(\vec{r}(0)) = f(\vec{a})$

Setter vi $\vec{c} = \vec{r}(c)$, fås dermed

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}). \quad \square$$

**Setning 5.5.7**

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

Da fins det punkter $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$ på linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{b}) - \vec{F}(\vec{a})| \leq \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2} \cdot |\vec{b} - \vec{a}|$$

**Bevis** Ved middelverdisetningen i flere variable fins for hver $i$ et punkt $\vec{c}_i$ på linjestykket slik at

$$|F_i(\vec{b}) - F_i(\vec{a})| = |\nabla F_i(\vec{c}_i) \cdot (\vec{b} - \vec{a})|$$

Schwartz' ulikhet (1.2.3) brukt på høyre side gir

$$|F_i(\vec{b}) - F_i(\vec{a})| \leq |\nabla F_i(\vec{c}_i)| \cdot |\vec{b} - \vec{a}|$$

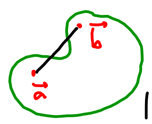
Dermed

$$|\vec{F}(\vec{b}) - \vec{F}(\vec{a})| = \sqrt{|F_1(\vec{b}) - F_1(\vec{a})|^2 + \dots + |F_m(\vec{b}) - F_m(\vec{a})|^2}$$

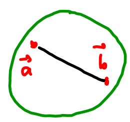
$$\leq \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 \cdot |\vec{b} - \vec{a}|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2 \cdot |\vec{b} - \vec{a}|^2}$$

Sett så $|\vec{b} - \vec{a}|$ utenfor. □

**Def** $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er konveks hvis hver gang $\vec{a}, \vec{b} \in A$, er også linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ med i $A$.




Ikke konveks




Konveks

**Setning 5.5.8**

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, ikke-tom, lukket, konveks

$\vec{F} : A \to A$ deriverbar

Anta at det fins $C < 1$ slik at

$$\sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2} \leq C$$

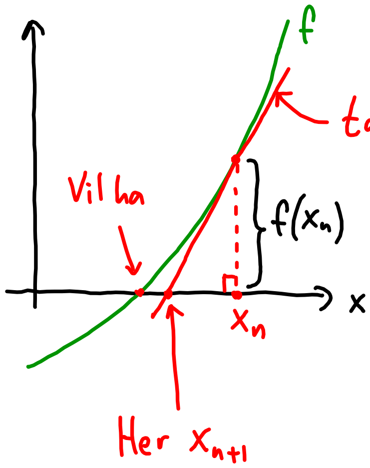
for alle $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in A$. Da er $\vec{F}$ en kontraksjon, og

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C \cdot |\vec{x} - \vec{y}| \quad \text{for alle } \vec{x}, \vec{y} \in A.$$

**Bevis** Følger fra setning 5.5.7. □

## 5.6 Newtons metode

En variabel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vil finne nullpunkt for $f$.




tangent : Stigningstall : $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$

Så :

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

**Flere variable:** $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Finne $\vec{x}$ slik at $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$. Newtons metode:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left[\vec{F}'(\vec{x}_n)\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}_n)$$

- Newtons metode kan oppfattes som en iterasjon av

$$\vec{G}(\vec{x}) = \vec{x} - \left[\vec{F}'(\vec{x})\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

for vi har $\quad \vec{x}_{n+1} = \vec{G}(\vec{x}_n)$.

- Hvis $A$ er en $(n \times n)$-matrise, så er operatornormen $|A|$ til $A$ gitt ved

$$|A| = \sup \left\{ \frac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

## Kantorovitsj' teorem (5.6.4 – 5.6.6)

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, konveks

$\vec{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ deriverbar

Vi itererer $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left[\vec{F}'(\vec{x}_n)\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}_n)$

med startpunkt $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$ (Newtons metode)

### Anta at

- Det fins $M$ slik at

$$\left|\vec{F}'(\vec{x}) - \vec{F}'(\vec{y})\right| \leq M \cdot |\vec{x} - \vec{y}| \text{ for alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}.$$

- Jacobimatrisen $\vec{F}'(\vec{x}_0)$ er inverterbar med en invers som har operatornorm $\leq K$.

- Vi har $\overline{B}\left(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}\right) \subseteq \mathcal{U}$ samt

$$|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| = \left|\left[\vec{F}'(x_0)\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}_0)\right| \leq \frac{1}{2KM}$$

### Da har vi:

- $\vec{F}'(\vec{x})$ er inverterbar for alle $\vec{x} \in B\left(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}\right)$

- $\vec{x}_n \in B\left(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}\right)$ for alle $n \geq 0$, og det fins $\vec{x} \in \overline{B}\left(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}\right)$ slik at

$$\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{x} \quad \text{og} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Punktet $\vec{x}$ er det eneste nullpunktet for $\vec{F}$ i kulen $\overline{B}\left(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}\right)$.

Hvis $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2KM}$, er

$$|\vec{x} - \vec{x}_n| \leq \frac{1}{KM}\left[\frac{\left(1 - \sqrt{1-2h}\right)^{2^n}}{2^n}\right], \text{ der } h = KM\varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Iterasjoner (inkl. Newtons metode) i Matlab.}}$

byttedyr.m side 442 (effektiv variant)

$$\texttt{>>}\ [x, y] = \text{byttedyr}(\underset{x(1)}{\underset{\downarrow}{1000}}, \underset{y(1)}{\underset{\downarrow}{100}}, \underset{\text{antall iterasjoner}}{\underset{\downarrow}{1000}})$$

Newtonfler : Side 465

Eksempel 5.6.2 Finne nullpunkt for :

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + 1 \\ e^{x_1} + x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Start: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

Oppdatering :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \left[F'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ e^{x_1} & 1 \end{pmatrix}$$