→ Skriv leselig.

→ Eyes on the price!

→ Lykke til! Tvi tvi!

12.6: Konvergens av potensrekker

1) Finn konvergensintervallet til potensrekka:

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x-1)^n$

Forholdstest: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^{n+1}}(n+1)(2x-1)^{n+1}}{n(2x-1)^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(2x-1)}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} |2x-1| \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = |2x-1|$

Så rekka konvergerer absolutt når $|2x-1| < 1$, dvs.

$-1 < 2x-1 < 1$

$0 < 2x < 2$

$0 < x < 1$ (og divergerer for $x < 0$, $x > 1$)

Hva med endepkt?

$x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n = 0-1+2-3+4-5+6 \ldots$

Ledd $\not\to 0$; Divergerer! ~~Konvergerer ikke! (Endrer seg hele tida)~~

Fra divergenstesten!

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} n(2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$; Divergerer, så ikke konvergent!

Konvergensintervall: $(0, 1)$.

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})^n (x-1)^n}{n(n-1)}$

unngå dele på 0

<u>Forholdstest:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-\frac{1}{4})^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)(n)}}{\frac{(-\frac{1}{4})^n (x-1)^n}{n(n-1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}|x-1| \frac{n-1}{n+1}$$

$= \frac{1}{4}|x-1|$; så konv. når $\frac{1}{4}|x-1| < 1$

$$-1 < \frac{1}{4}(x-1) < 1$$

$$-4 < x-1 < 4$$

$$\underline{-3 < x} < 5$$

<u>Endepkt:</u>

<u>$x=-3$:</u> $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})^n (-4)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1^n}{n(n-1)}$; Konvergerer! ($\sum \frac{1}{n^2}$ Da. konv.)

<u>$x=5$:</u> $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})^n 4^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$; Konvergerer! (alternerende & ledd $\to 0$)

Test for alt. rekker

Konvergensintervall:

$$\underline{\underline{[-3, 5]}}$$

12.8: Taylorrekker

1) c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ i pkt -1:

Finn Taylorrekka til funksjonen i det gitte pkt. Finn konvergensintervallet I og vis at rekka konvergerer mot funksjonen i I

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 7$, $f'(-1) = 3 + 4 = 7$

$f''(x) = 6x - 4x$, $f''(-1) = -2$

$f'''(x) = 6$, $f'''(-1) = 6$

$\cancel{f^{(4)}(x) = 0}$ $f^{(n)}(x) = 0$ for $n \geq 4$

Taylorrekke om -1: $f(-1) = -1 - 2 - 7 - 4$
$= -14$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x - (-1))^n$$

$$= -14 + 7(x+1) - \frac{2}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3$$

$$= -14 + 7(x+1) - (x+1)^2 + (x+1)^3$$

Konvergensintervall $I = \mathbb{R}$ (er jo bare en endelig sum, så konvergerer overalt)

$$\lim_{x \to -1} \left(-14 + 7(x+1) - (x+1)^2 + (x+1)^3\right)$$

$= -14 + 0 - 0 + 0 = -14 = f(-1)$, så rekka konvergerer til funksjonen.

I så fall er: $x = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$

$y = -2 + 3 = \underline{\underline{1}}$

$z = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

SJEKK: sett inn i oppr. system, se at OK!

) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ har lok. max. under bibet. $g(x,y,z) = x + y + z = 3$. Finn dette:

Lagrange: max $f(x,y,z)$
s.a. $g(x,y,z) = 3$

Løs:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$, altså

$y + z = \lambda$

$x + z = \lambda$

$x + y = \lambda$ og bibet: $x + y + z = 3$.

Dette er ligningssystemet fra a): $(x, y, z) = \underline{\underline{(1,1,1)}}$ er et lok. max, med maksverdi $f(1,1,1) = \underline{\underline{3}}$.

Intuisjon: Se på funk. og begr. & se at virker rimelig

2012:

3.) Finn invers til $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sjekk: $AA^{-1} = I$

Vis: $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - x - y + 1 \\ x - y^2 + 2y - 2 \end{bmatrix}$ har en omvendt funk. $\vec{G}$ def. i et område rundt pkt. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ s.a. $\vec{G}(1,-2) = (0,0)$. Finn $G'(1,-2)$:

Vil bruke

Omvendt funksjonsteorem:

Merk: $\vec{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\vec{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x - 1 & -1 \\ 1 & -2y + 2 \end{bmatrix}$, så $\vec{F}'(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ som

vi vet er inverterbar (fra over). Siden $\vec{F}$ har kont. partiellderiverte gir omvendt funksjonsteorem at $\vec{F}$ har en omvendt funk., $\vec{G}$, i en omegn om $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og at

$$\vec{g}'(-1,2) = \vec{F}'(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

over

a) For hvilke x konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$?

pga x^n

...rholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{x^n}{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)x}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \underbrace{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}_{\downarrow 1} = |x|$$

Fra forholdstesten konvergerer
rekka for $|x|<1$ og divergerer for $|x|>1$. Når:

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$; divergerer

$k=n+1$

$x=-1$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$; $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ og er avtagende
i n. Fra testen for alternerende rekker er
derfor rekka konvergent.

Så: Konvergensintervall; $[-1,1)$.

b) Finn summen til rekka der den konvergerer:

La $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$

Gang m/ x & deriver:

$$[x S(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } x \in (-1, 1)$$

geometrisk rekke

Integrer opp:

$$x S(x) = -\ln(1-x) + C$$

Finne C: $x = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} VS = 0 \\ HS = C \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = 0$.

Så: $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ for $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$

For $x = 0$: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$

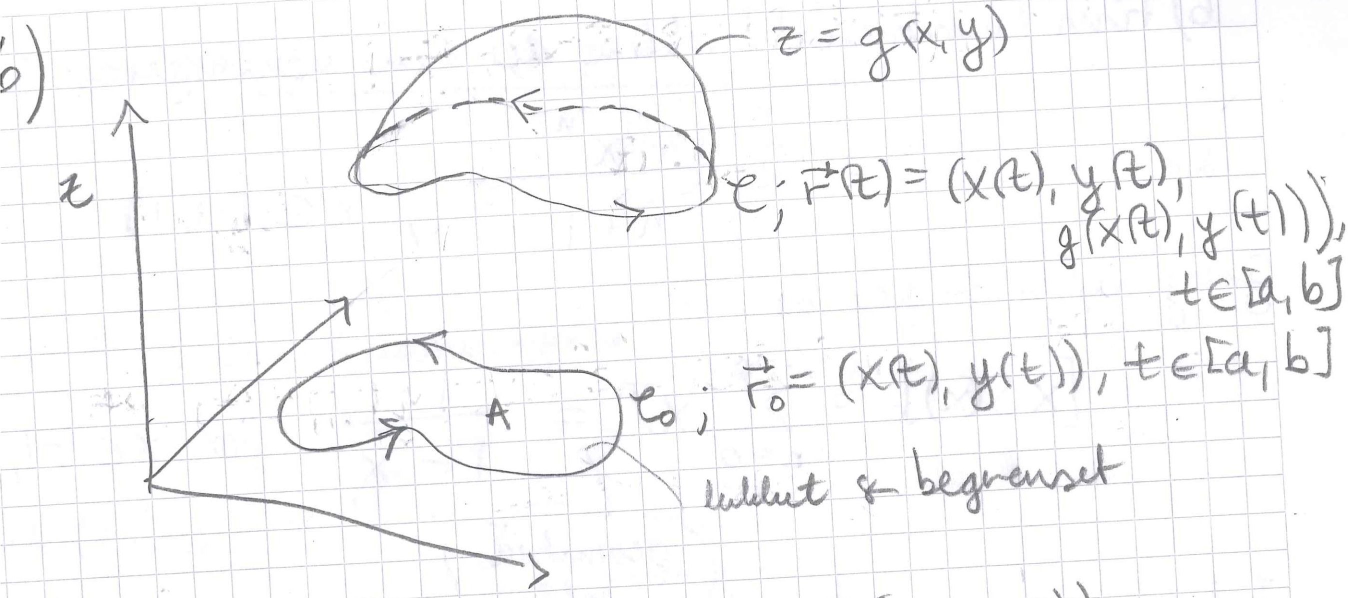
$x = -1$; Abels teorem $\Rightarrow S(-1) = \lim_{x \to -1^+} -\frac{\ln(1-x)}{x}$,

Så formelen holder også i endepkt.

Dvs:

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x}, & x \in [-1, 1),\ x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

b)



$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

kont. partiellderiverte

<u>Vis</u>: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_0} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy$ der

$$\tilde{P}(x,y) = P(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$
$$\tilde{Q}(x,y) = Q(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ :$$

Vil finne $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$.

$$\vec{r}\,'(t) = \Big(x'(t),\ y'(t),\ \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}y'(t)}_{\text{Fra kjerneregelen.}}\Big)$$

$$\int_C \vec{F}\cdot dr \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \big(P(\vec{r}(t)),\ Q(\vec{r}(t)),\ R(\vec{r}(t))\big)\cdot\Big(x'(t),\ y'(t),\ \frac{\partial g}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}y'(t)\Big)\,dt$$

regn ut

$$= \int_a^b \Big[P(\vec{r}(t))\,x'(t) + Q(\vec{r}(t))\,y'(t) + R(\vec{r}(t))\Big(\frac{\partial g}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}y'(t)\Big)\Big]dt$$

$$= \int_a^b \Big[x'(t)\Big(P(\vec r(t)) + R(\vec r(t))\frac{\partial g}{\partial x}\Big) + y'(t)\Big(Q(\vec r(t)) + R(\vec r(t))\frac{\partial g}{\partial y}\Big)\Big] dt$$

(sorterer)

$$= \int_a^b [\tilde P(x(t), y(t))\, x'(t) + \tilde Q(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt$$

def. av $\tilde P$ & $\tilde Q$

$$= \int_{C_0} \tilde P\, dx + \tilde Q\, dy$$

def. av notasjon

<u>VIS</u>: $\underbrace{\int_C \vec F \cdot d\vec r = \iint_A H(x,y)\,dx\,dy}$ der H er gitt ved et veldig langt uttrykk

<u>Fra over</u>: $\int_C \vec F \cdot d\vec r = \int_{C_0} \tilde P\, dx + \tilde Q\, dy$

$$= \iint_A \Big(\frac{\partial \tilde Q}{\partial x} - \frac{\partial \tilde P}{\partial y}\Big) dx\, dy.$$

C_0 er enkel, lukket, pos. orientert kurve; greens teoremet

Derfor: Nok å vise at
$$H(x,y) = \frac{\partial \tilde Q}{\partial x} - \frac{\partial \tilde P}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial \tilde Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial y}\Big(\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}\Big)$$
$$+ R(x,y,g(x,y))\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

def $\tilde Q$

Kjerneregel

kort-notasjon for enkelhet

Tilsvarende:
$$\frac{\partial \tilde P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\Big(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\Big)$$
$$+ R(x,y,g(x,y))\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

Kryssparitell deriverte $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \Rightarrow$

~~Pga~~: antatt kont.

$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = H(x,y) \Rightarrow$ Formelen er vist. $\square$

per def. av H

Hva kan man lære? Ikke bli stressa av mye og wrant tekst. Pust m/ magen og tenke på hva som egentlig står?

→ Gjør gamle eksamensoppg. Tett hull. Gå tilbake. Notater fra pensum?

Eksamensråd:

→ Sjekk tid og sted i god tid

→ Sov ekstra mye, spis godt. Ta pauser (TV, tur, trening etc.)

→ Spis frokost. Ha m/ matpakke

→ Beregn god tid

→ Husk kandidatnr.

→ Hvis står fast: Pust, gå videre. Ikke psyk deg selv ut!

→ Skriv noe! Hvilket thm. tror du at du skal bruke? Figur? Mye kan gi poeng

men ikke skriv stil!