Отчёт по лабораторной работе №3
по курсу
Методы вычислений

Кочуркин Иван Алексеевич
Группа ИУ7-92
Вариант №11

2011 г.

1 Постановка задачи

1.1 Краевая задача

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \\
&u|_{x=0} = \varphi_0(y) \qquad u|_{x=a} = \varphi_a(y) \\
&u|_{y=0} = \psi_0(x) \qquad u|_{y=b} = \psi_b(x)
\end{aligned}
$$

1.2 Исходные данные

1. Размеры области решения $a = 1$, $b = 1$
2. $\varphi_0(y) = y, \quad \varphi_a(y) = y^2$
3. $\psi_0(x) = 2x(1-x), \quad \psi_b(x) = 1$
4. $f(x,y) = 0$

2 Решение

2.1 Разностные уравнения

На заданом поле решения выбирается сетка из N равноотстоящих узлов по каждой координате.

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = -f(x_i, y_j) \\
&u_{1j} = \varphi_0(y_j), u_{Nj} = \varphi_a(y_j), u_{i1} = \psi_0(x_i), u_{iN} = \psi_b(x_i) \\
&\qquad \text{, где } i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, N-1}
\end{aligned}
$$

Выбранная схема является абсолютно устойчивой, поэтому нет ограничений на выбор шагов по переменным. Шаг влияет исключительно на величину невязки при счёте. Использованы шаги $h_x = \frac{a}{N}, h_y = \frac{b}{N}, N = 80$.

2.2 Метод верхней релаксации

Для решения получившейся СЛАУ используется итерационный метод верхней релаксации. В координатной форме для нашей СЛАУ он выглядит так:

$$u_{ij}^{k+1/2} = \frac{h_y^2}{2(h_x^2+h_y^2)}(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k}) + \frac{h_x^2}{2(h_x^2+h_y^2)}(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k}) + \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2+h_y^2)} f_{ij}$$
$$u_{ij}^{k+1} = \omega u_{ij}^{k+1/2} + (1-\omega)u_{ij}^{k}$$

Величина параметра метода релаксации влияет на скорость его сходимости. Оптимальным является значение:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sin\dfrac{\pi}{N-1}}$$

Если на выходе требуется, чтобы выполнялось $\|u^{k+1}\|_1 < \epsilon$, итерации метода прекращаются при выполнении следующего условия:

$$\|u^{k+1} - u^k\|_1 < (2-\omega)\epsilon$$

2.3 Устойчивость разностной схемы

Данная разностной схемы является устойчивой.

2.4 Порядок аппроксимации разностной схемы

Аппроксимация разностной схемы "Крест" оценивается как $O(h_x^2 + h_y^2)$.

2.5 Определение ошибки

Для определения ошибки воспользуемся формулой Рунге

$$z^I \approx \frac{|u^I - u^{II}|}{r^2 - 1}$$

один раз, приняв $r = 2$. При этом используется обычная сетка ω^I с шагами τ и h и сгущённая сетка ω^{II}.Поскольку порядок аппроксимации счёта по переменным одинаковый, шаги у сгущённой сетки ω^{II} будут соответственно h_x/r и h_y/r. Формула применяется для совпадающих узлов двух сеток.

Результаты: максимальная погрешность $z^I_{max} = 0.101354$, среднее значение погрешности $\overline{z^I} = 0.025783$.

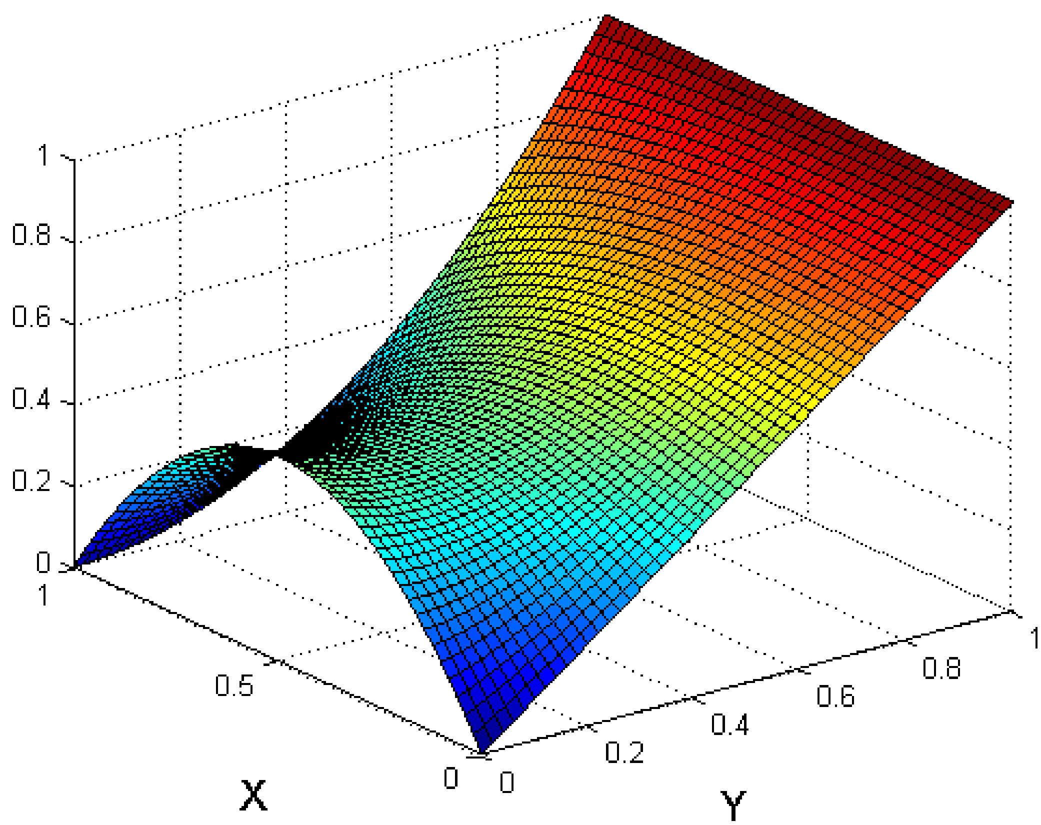

Рис. 1: График функции