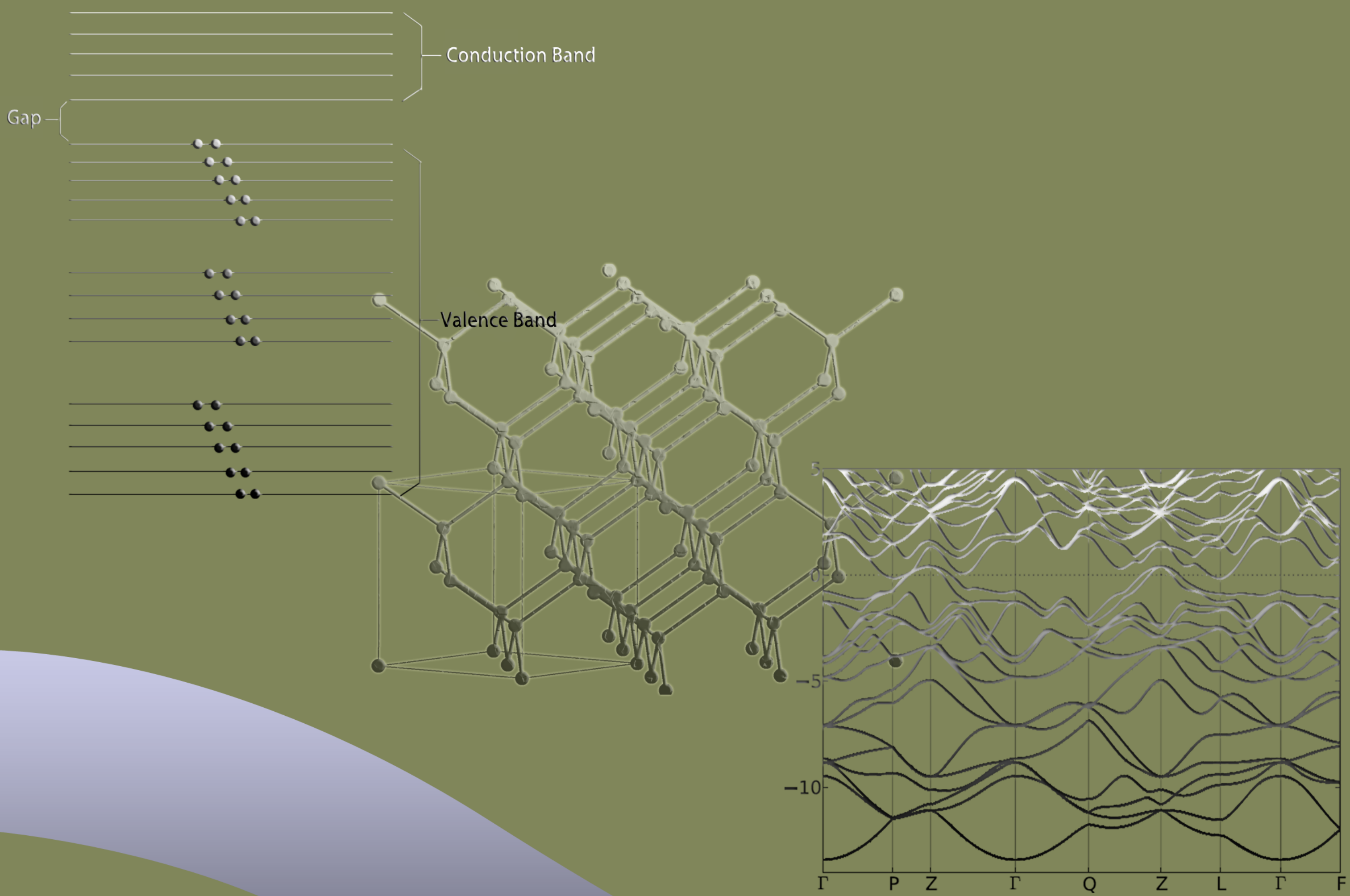
Queen Mary, University of London

School of Physics and Astronomy

类氢离子能级及角动量量子化



玻尔量子化假设给出的类氢离子（电离后原子核外只剩一个电子的离子）能量本征值为：

$$E_n = -\frac{2\pi^3 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} = -\frac{Z^2 R_H}{n^2}(n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

给定主量子数n，角量子数取值为：

$$l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1) \tag{2}$$

而给定角量子数l，磁量子数取值为：

$$m = -l, -(l-1), \cdots, l-1, l \tag{3}$$

所以给定主量子数n，量子态总数为：

$$\sum_{l=0}^{n=1}(2l+1) = n^2 \tag{4}$$

式（1）至（4）是类氢离子能级量子化的一般性结论，这里要讨论的是得到以上结论的理论依据，本文介绍的是赵凯华《量子物理》一书中给出的利用隆格-楞次矢量来讨论这一问题的方法。首先给出隆格-楞次矢量的定义（在经典力学中，同样有该矢量的定义方式，详见赵凯华《量子物理》一书P221）：

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}}}{2Ze^2 m} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \tag{5}$$

在能量本征值为E的简并子空间内，重新标定新的力学量算符$\hat{K}$：

$$\hat{\mathbf{K}} = \sqrt{\frac{Ze^2 m}{2|E|}}\hat{\mathbf{A}} \tag{6}$$

定义两个新的矢量算符：

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2\hbar}(\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{K}}),\ \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2\hbar}(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{K}}) \tag{7}$$

在定义式（5）与（6）以及式（7）定义的两个新矢量算符基础上，可以证明（这里只给出结论，详细计算过程从略）：

$$\hat{\mathbf{K}}^2 + \hat{\mathbf{l}}^2 = 2\hbar(\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{\mathbf{N}}^2) \tag{8}$$

进一步推导（详细过程见赵凯华《量子物理一书》P222）可以得到：

$$2(\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{\mathbf{N}}^2) = 4\hat{\mathbf{J}}^2 = -1 - \frac{Ze^2 m}{2\hbar^2 E} \tag{9}$$

由于定义的算符$\hat{\mathbf{J}}$满足角动量的对易关系式：

$$\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}} = i\hat{\mathbf{J}} \tag{10}$$

因此$\hat{\mathbf{J}}^2$的本征值应是$J(J+1)$，其中J的取值为：

$$J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots \tag{11}$$

根据（9）式可以得到能量的本征值E满足：

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2(2J+1)^2} \tag{12}$$

将（12）式中$(2J+1)$写成n，可得：

$$n = 2J+1 = 1, 2, 3, \cdots \tag{13}$$

这便是类氢离子能级量子化的结论，与基于玻尔量子化假设所得到的结论完全相同。

由（8）式可知：

$$\hat{\mathbf{K}}^2 + \hat{\mathbf{l}}^2 = 4\hat{\mathbf{J}}^2 \tag{14}$$

所以可以得到$\hat{\mathbf{l}}$与$\hat{\mathbf{J}}$本征值之间存在如下关系：

$$\hbar l(l+1) \leqslant 2J(2J+2) \Rightarrow l \leqslant 2J = n-1 \tag{15}$$

至此便得到了类氢离子能级量子化与角动量量子化的取值及其物理依据。