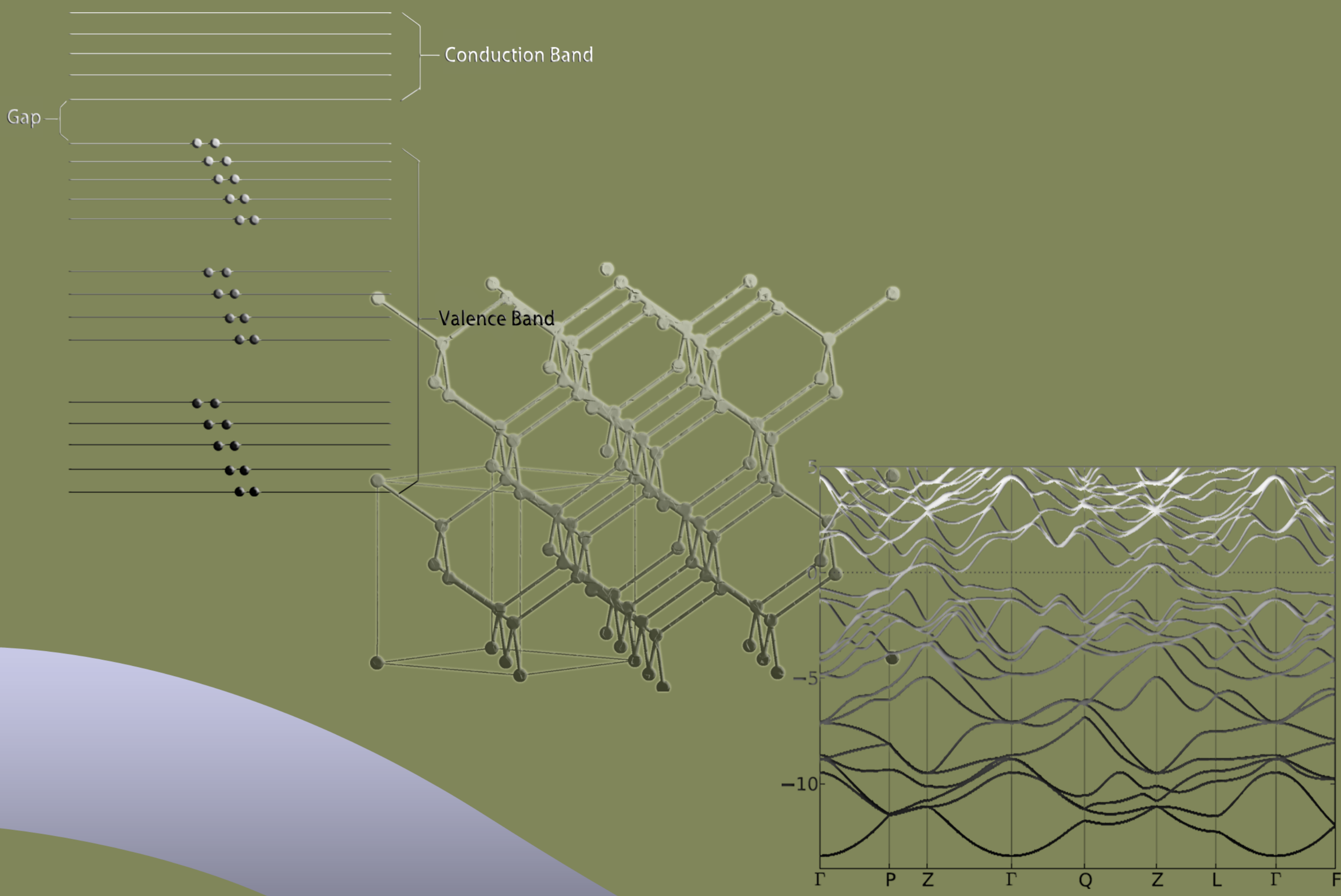
Queen Mary, University of London

School of Physics and Astronomy

相对论——时间与空间变换



一、 时间与空间变换

根据相对论的基本思想，任何坐标系都有“权力”说自己是静止的坐标系（这也是“相对”一词的本质含义），这样在讨论相对论体系下的时间与空间变化就可以任意选定一坐标系为静系（如图一所示的F系）而其他坐标系相对于该静系运动（如图一 所示F'系），设动系相对于静系以v_0速度运动：

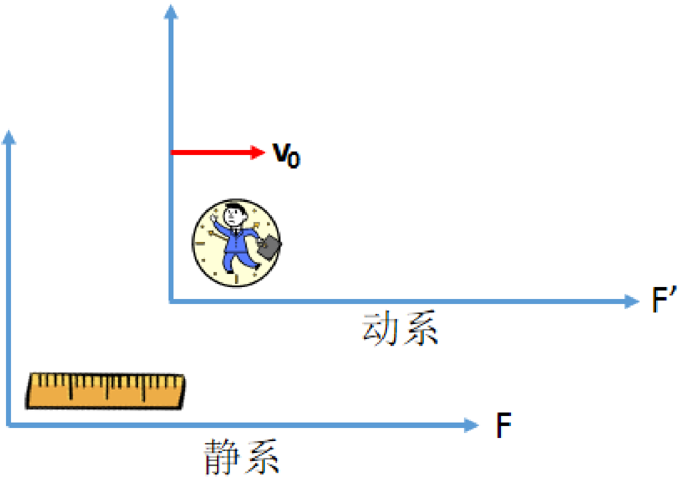


图 一 静系与动系——1

首先给出相应的洛伦兹时间与空间变换关系式：

$$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \gamma(t' + \frac{v_0}{c^2}x') \tag{1-1}$$

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \gamma(x' + v_0 t') \tag{1-2}$$

其次需要给出“静止长度”与“静系时间”的概念，所谓“静止长度”，是指无论是否同时测量被测物体（如图一所示的尺子）两端的空间坐标，得到的长度结果均不发生变化，测量得到的结果都是真实的物体长度，这也就是在静系中测量得到的相对于静系静止的物体的长度，反之，如果在动系中测量相对于静系静止的物体的长度，则必须保证同时测量物体两端的坐标才能得到物体的真实长度；对于时间间隔的测量，所谓的“静系时间”，指的是有一个时钟，跟随动系以相同的速度相对于静系运动，则在动系中测量两个事件的时间间隔是在同一地点（时钟相对于测量系无相对运动）得到的，这样得到的时间间隔就是所谓的“静系时间”，这里“静”的含义与“静止长度”中“静”的含义不同，指的是时钟相对于动系的静止，对应的，如果在图一所示的静系中测量同样两个事件的时间间隔，则测量得到的两个时刻并不是在同一地点得到的，此时的时间间隔便与上述的“静系时间”间隔有所区别。

由洛伦兹时间及空间变换关系式（1-1）与（1-2）可以得到：

$$\Delta x = \gamma(\Delta x^{'} + v_0 \Delta t^{'}) \tag{1-3}$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t^{'} + \frac{v_0}{c^2}\Delta x^{'}) \tag{1-4}$$

结合式（1-3）与（1-4）与上述的“静止长度”与“静系时间”的定义，如果被测物体静止于静系中，则式（1-3）中的Δx指的就是“静止长度”，欲保证在动系中测量得到真实的物体长度，则需要保证两端坐标的同时测量，即$\Delta t^{'} = 0$，因此有：

$$\Delta x = \gamma \Delta x^{'} \tag{1-5}$$

即动系测量的长度比静系测量的长度短。

而对于时间间隔的变换，式（1-4）中$\Delta t^{'}$指的是“静系时间”间隔（同地测量得到的两事件发生的时间间隔），而Δt指的是在不同地点测量两事件发生的时间间隔，同样有：

$$\Delta t = \gamma \Delta t^{'} \tag{1-6}$$

即在同一地点测量两事件发生的时间间隔最短。

对比式（1-5）与（1-6），虽然二者形式上相同，但是长度变换中的“静”在等式的左边，而时间间隔变换中的的“静”在等式的右边。

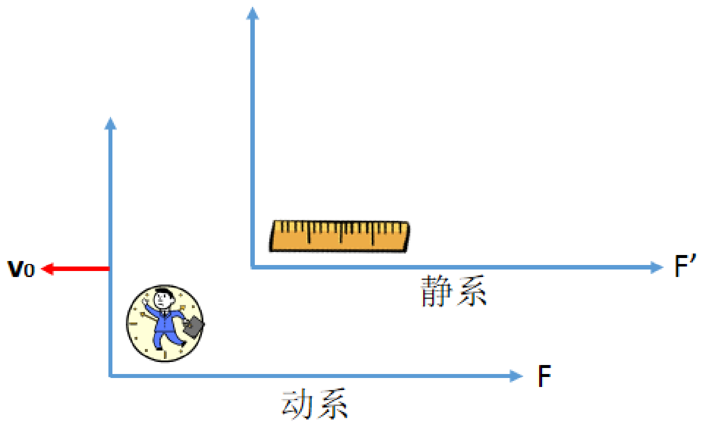


图 二 静系与动系——2

考虑到洛伦兹变换的逆变换：

$$t^{'} = \frac{t - \frac{v_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \gamma(t - \frac{v_0}{c^2}x) \tag{1-7}$$

$$x^{'} = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \gamma(x - v_0 t) \tag{1-8}$$

对应式（1-3）与（1-4）有：

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v_0 \Delta t) \tag{1-9}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v_0}{c^2}\Delta x) \tag{1-10}$$

此时同样可以得到上述的“动长度”变短，“动时间”间隔变长的结论，只不过此时图一中的F'系认为自己是静系，对应的被测物体应置于F'系中，时钟则应置于F系中（参见图二），于是式（1-9）与（1-10）中的$\Delta x'$与Δt 分别代表“静止长度”与“静系时间”间隔。

二、 关于洛伦兹速度变换的一点讨论

如图三所示的相对运动，方框相对于静系以速度v_0运动，方框内有一粒子以速度v'相对于方框运动，分别从速度变换以及时间变换的角度计算从静系中观察到的粒子自出发点到碰到方框壁的时间间隔。

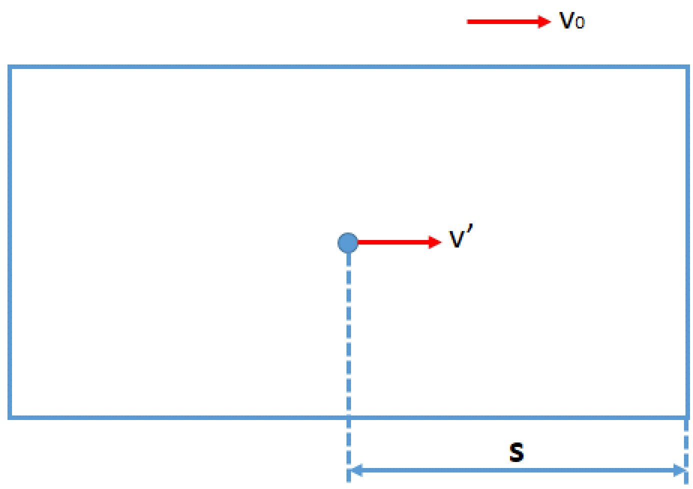


图 三 洛伦兹速度变换

首先利用洛伦兹速度变换公式将速度v'变换至静系中：

$$v = \frac{v_0 + v'}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}} \tag{2-11}$$

于是应有：

$$(\frac{v_0 + v'}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}} - v_0)t = s\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \tag{2-12}$$

式（2-12）中等式右侧是指从静系中测量得到的相对于动系静止的被测物体（在动系中长度是s）的长度，整理式（2-12）可以得到：

$$t = \frac{s}{v'} \cdot \frac{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \tag{2-13}$$

这就是通过洛伦兹速度变换计算得到的在静系中测量动系中两事件发生的时间间隔。如果直接从时间间隔变换的角度计算，首先可以直接得到在动系中测量得到的粒子由始发点到方框壁的时间间隔：

$$t^{'} = \frac{s}{v^{'}} \tag{2-14}$$

因此利用式（1-1）可以得到：

$$t = \frac{t^{'} + \frac{v_0}{c^2}s}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \tag{2-15}$$

将式（2-14）带入式（2-13）中可以得到与式（2-15）完全相同的结论，也即无论从洛伦兹速度变换还是时间变换的角度出发，最终得到的结果是相同的，这是因为实际上洛伦兹速度变换包含了空间变换与时间变换，因此根据式（2-12）计算t的过程中，等式两端的空间变换相互抵消，因此便只剩下时间变换的作用，得到的结果自然与直接计算时间变换的结果相同。

另外，对于这一问题的准确理解应该是，以粒子在动系中出发的时刻为0时刻，在动系中的出发点为动系的坐标原点，由式（1-1）可知，在这种情况下，粒子出发的时刻在静系中也是0，而式（2-14）与（2-15）则分别给出了在动系与静系中观察到的粒子碰撞到方框壁的时刻$t^{'}$与t，值得注意的是，这里的$t^{'}$与t均不是粒子出发与粒子碰撞到方框壁两事件的最短时间间隔，真正的最短时间间隔（“静系时间”间隔）应该是将时钟至于与粒子一起运动的坐标系中测量得到的时间间隔，由式（1-6）可以得到，两事件发生的最短测量时间间隔$\Delta t^{'}_{real}$为：

$$\begin{aligned}\Delta t^{'}_{real} &= \frac{t^{'}-0}{\gamma} \\ &= t^{'}\sqrt{1-\frac{v^{'2}}{c^2}}\end{aligned} \tag{2-16}$$

结语

第一部分给出了对于相对论体系下洛伦兹时间与空间变换的理解，重点在于对“静止长度”以及“静系时间”间隔（即两事件发生的最短测量时间间隔）的理解，尤其是理解被测物体与时钟分别处于哪一个参考系（动系或静系）对应的才是真正的“静止长度”与“静系时间”间隔，第二部分则给出了涉及到洛伦兹速度变换的实例进行讨论，得到的结果是，无论从时间变换还是速度变换的角度，计算得到的在静系中观察动系发生的两时间的时间间隔结果是相同的，但是二者均不是两事件发生的的可测量最短时间间隔，真正的最短时间间隔需要将时钟放在随着粒子运动的坐标系中测量得到!