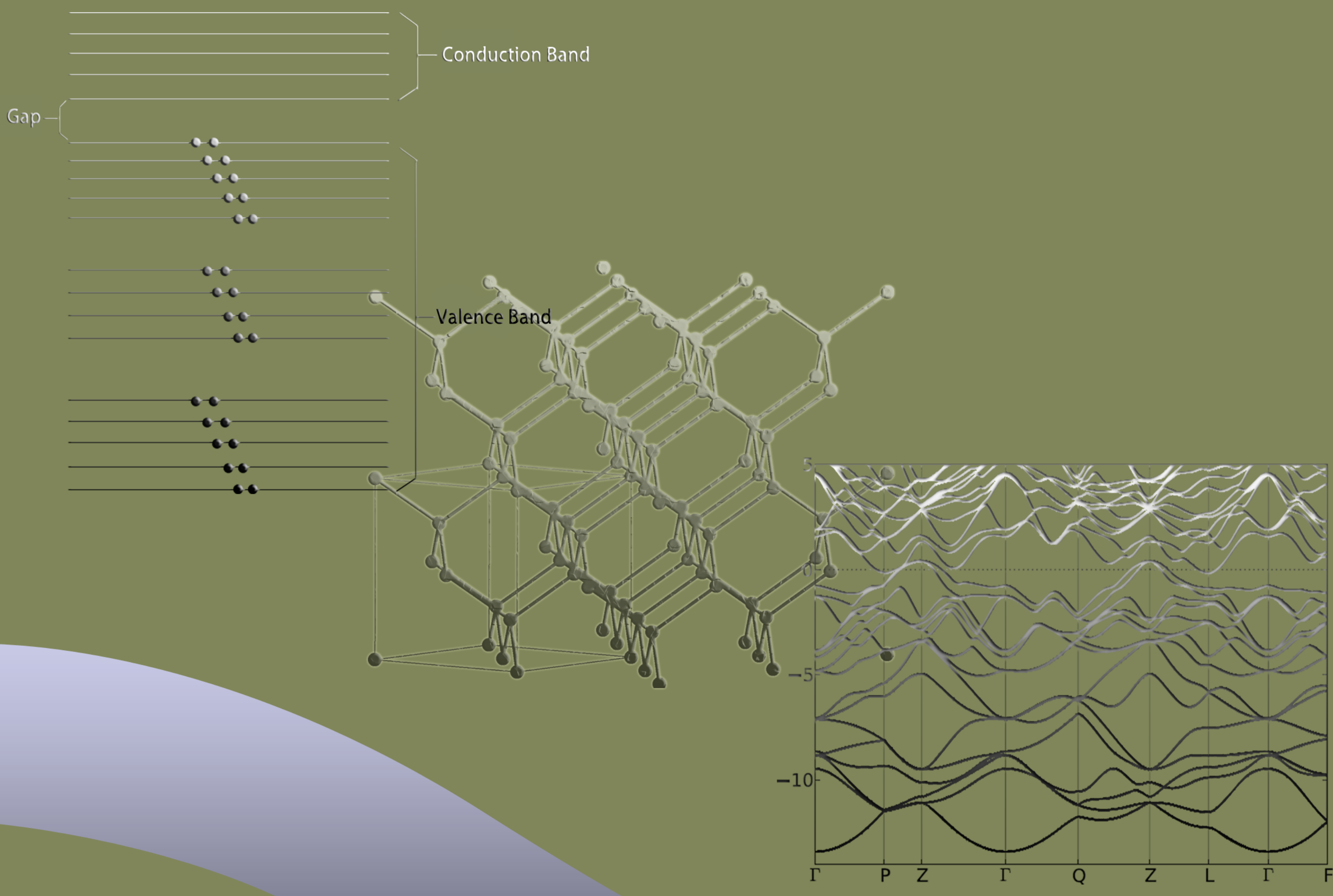
Queen Mary, University of London

School of Physics and Astronomy

波包——相速度与群速度



一、 波包

在基础物理讨论波动问题时，两列振幅相同频率接近的行波：

$$y_1 = Acos(\omega_1 t - k_1 x) \tag{1-1}$$

$$y_2 = Acos(\omega_2 t - k_2 x) \tag{1-2}$$

其中$\omega_1 \approx \omega_2$，两列波叠加得到：

$$y = 2Acos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x)cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x) \tag{1-3}$$

由于$\omega_1 \approx \omega_2$，因此前一项余弦函数的周期很大，振荡很慢，这就相当于对一个高频振荡（后一项，这里暂时先不考虑波的传播—空间项）的振幅进行调制，如图一所示：

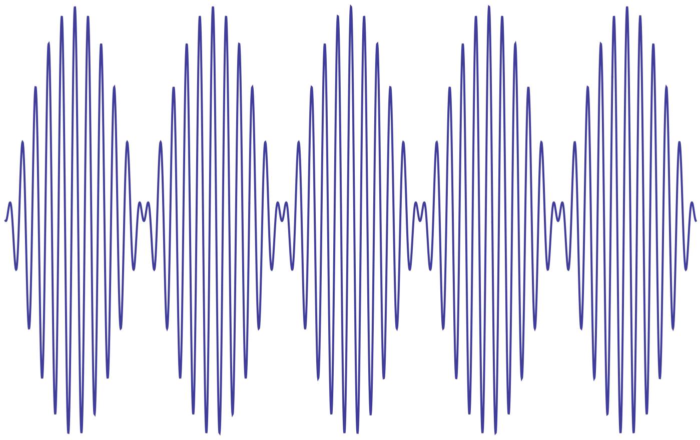


图 一 波包图示

如果考虑波在空间的传播，则图一所示的形状会整体移动，由于整体看来像是波的“包络”在移动，因此得名波包。

讨论波包在空间中的传播时，对于波速需要重新定义，不同于单色波，按照波的叠加原理将不同频率的波叠加之后得到的角速度ω与波矢k在一般情况下具有一定的函数关系，设定这种关系为$\omega(k)$，则可以分别定义波包传播的相速度与群速度：

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{1-4}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{1-5}$$

从定义式可以看出，波包的相速度与群速度描述的是在由各分量叠加形成的整体运动中，各个组分（与每个k对应）对于整体运动的贡献，相速度针对的是相的传播，而群速度针对的是能量的传播。

首先，单色波可以看成是一种特殊的“波包”，这种“波包”的相速度与群速度都是单色波的波速本身。其次，还有一种特殊的情况，就是当叠加的单色波的ω与k成正比，也即：

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \cdots = \frac{\omega_i}{k_i} = \cdots \tag{1-6}$$

此时组成波包的所有成分具有相同的波速，这也就是波包的相速度，同时还应该有：

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}=\frac{\omega_2-\omega_3}{k_2-k_3}=\cdots=\frac{\omega_i-\omega_{i+1}}{k_i-k_{i+1}}=\frac{\omega_i}{k_i}=\cdots \tag{1-7}$$

可以看出此时的波包群速度是常数并且与相速度相等，这就意味着波包的传播过程中，波包内部保持着稳定不变的形状（参见稳定波包动画演示），称为wave packet without dispersion (or distortion)。单色波是这种特殊情况的一种特殊情况。当1-6式不被满足时，相速度与群速度并不相同，而且二者也不再是常数，这是产生的波包在传播过程中整体波形会不断变化，称为wave packet with dispersion (or distortion)，参见不稳定波包动画演示。

附：k的含义

描述一维波的函数形式：

$$y=Acos(\omega t-kx) \tag{1-8}$$

对于时间部分（也即在平衡位置附近的简谐振动部分）有：$T=\frac{2\pi}{\omega}$，描述的是在平衡位置附近振动一个周期恢复原样所需要的时间，从而角速度ω描述的就是振动的快慢，而对于空间部分（波在空间的传播），则有：$\lambda=\frac{2\pi}{k}$，描述的是波在空间传播一个周期（λ，与时间域的周期T对应）所“需要的距离”，进而物理量k描述的就是波在空间传播的“快慢”，这里应该注意k描述的只是波在空间的紧凑程度，而不是波的真实传播速度，k越大，说明波形在空间越紧凑，反之则越稀疏。

附：波包在量子力学中的应用

在量子力学体系中，由于讨论波粒二象性的需要，既不能将物质波或光波看成是机械波，又不能完全将二者视为经典物理中的粒子，波函数的采用解决了这一矛盾，使得既可以将物质波或光波视为粒子（能量以及其他物理量的不连续性），又可以借助波函数模方代表的概率来代表粒子出现在空间某个区域的概率，即概率波。

而在量子力学中采用的波函数，正是利用了播波包的概念，每一个波函数，实际上都对应一个波包，在讨论色散关系（ω对应的能量与k对应的波长之间的关系）时更能看出波包概念中相速度与群速度的重要性。