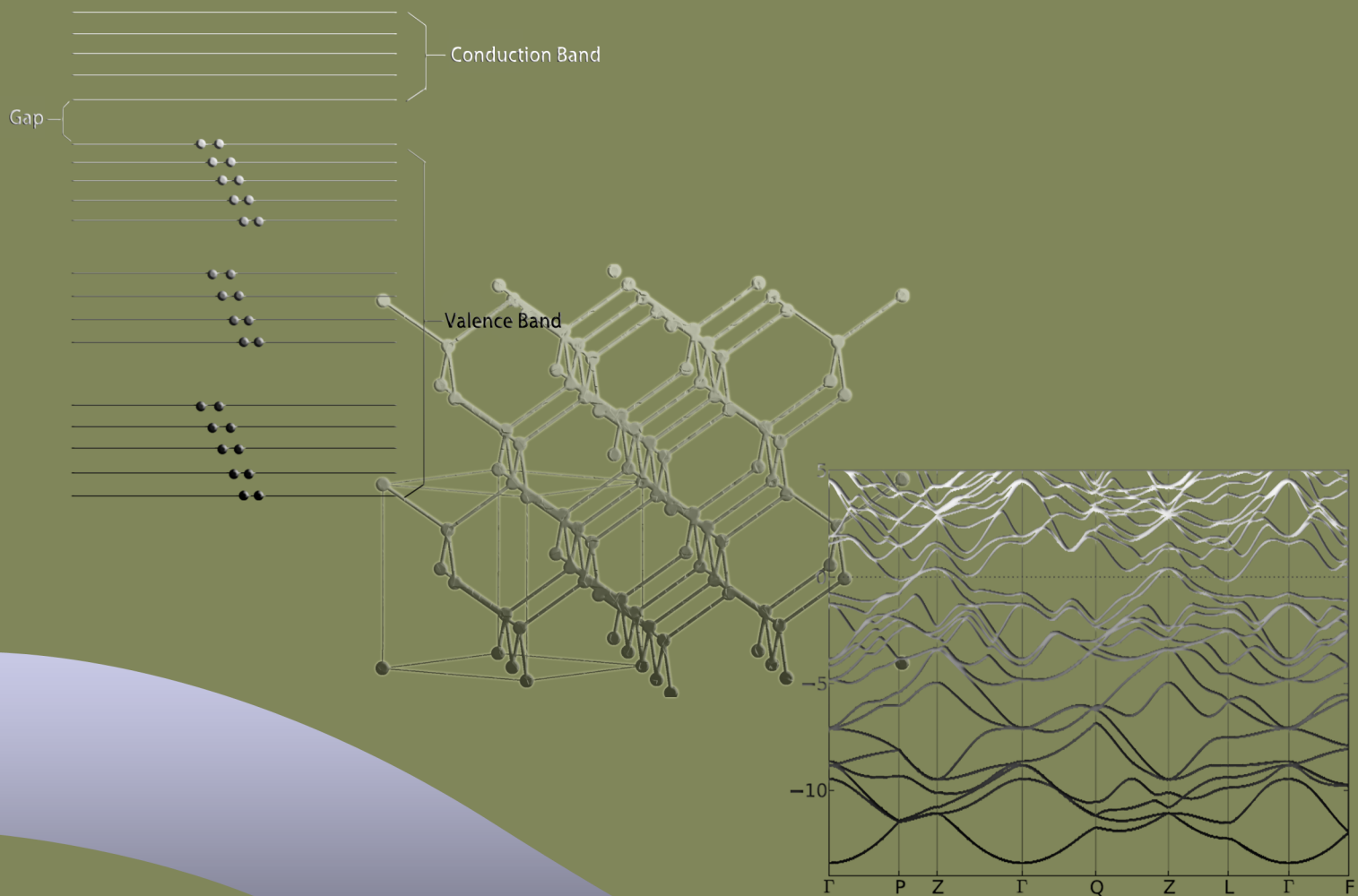


# Queen Mary, University of London

School of Physics and Astronomy

## Fourier变换的几种基本形式



## Fourier变换简介

Fourier变换对信号处理具有非常重要的意义，同时也在图像处理领域有着广泛的应用，在物理学领域，晶格结构对应的倒格子也是Fourier变换的一个具体的应用，讨论各种手段产生的衍射峰、衍射斑等问题实际上都是相应晶格结构Fourier变换的具体体现，譬如之所以会有倒格子的存在，就是因为周期性的正格子对应Fourier变换形式必然只包含与基频以及基频整数倍频对应的频率分量，这些允许的倍频就是倒格点，所有倒格点就构成了整个的倒空间，同时在量子力学领域空间表象与动量表象之间的变换也是应用了Fourier变换的形式，更具体一些，在处理EXAFS信号时，将信号由能量坐标转为k空间坐标再进一步转换为实空间坐标的过程，同样应用了Fourier变换，由此可见Fourier变换应用的广泛，本文从几种基本的Fourier变换形式出发对Fourier变换做简单介绍，同时提供对Fourier变换一些基本的理解。

### 一、连续周期信号的Fourier变换

连续周期信号的Fourier变换是最基本的Fourier变换形式，也是Fourier最初提出的Fourier变换形式，就是将一个连续的周期信号写成是余弦函数的和函数形式，假设函数 $f(t)$ 的周期为 $T$ ，则可以将 $f(t)$ 写成：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (1-1)$$

其中， $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ，当 $n=1$ 时，对应的频率分量称为基波分量， $n > 1$ 对应的分量则称为谐波分量，而 $a_0$ 不与任何频率对应，称为直流分量，这里的 $a_0$ ， $a_n$ ， $b_n$ 可以根据余弦函数的正交性给出相应的计算式：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (1-2)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (1-3)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (1-4)$$

为了数学上表述的方便，将Fourier级数（1-1）写成复数的形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad (1-5)$$

式（1-5）中 $F(n\omega_1)$ 与（1-1）式中系数有如下的对应关系：

$$F(0) = a_0 \quad (1-6)$$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (1-7)$$

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (1-8)$$



这里假设 $n > 0$ ，同时需要指出的是，式(1-5)中负频率的引入是为了与式(1-1)形成一对一的对应，这一点可以从下面的计算中看出，并且负频率与实际频率并无对应关系，只是为了上述的数学表述的对应关系才引入了负频率，下面给出由复数形式变换为实数形式的过程：

$$\begin{aligned} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t} &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t} \\ &= a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \end{aligned} \quad (1-9)$$

由此可见，以负频率作为辅助，复数形式的Fourier表述可以完全等价的过度到实函数形式，同时应该指出的是，复数形式的Fourier变换系数 $F(n\omega_1)$ （式1-7与1-8）同时包含了实函数形式Fourier变换正弦项与余弦项的系数，相比于实函数的表述形式，复数形式的Fourier变换更加综合、简单。将系数 $F(n\omega_1)$ 写成模与幅角的形式：

$$F(n\omega_1) = |F(n\omega_1)|e^{j\psi_n} \quad (1-10)$$

其中，模 $|F(n\omega_1)|$ 反映的是对应谐波分量的比重，从 $F(n\omega_1)$ 的表达式(1-5)中可以看出： $\tan\psi_n = \frac{b_n}{a_n}$ ，对应式(1-1)可以看出，幅角 $\psi_n$ 反映的则是对应谐波分量中余弦分量与正弦分量之间的比重。

将 $a_n$ 及 $b_n$ 的计算式1-3与1-4带入 $F(n\omega_1)$ 的表达式1-7可得：

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1-11)$$

这就是连续周期信号的Fourier变换的表达式，由于周期信号的Fourier变换只存在基频整数倍频的分量（包括直流分量与基频分量本身），因此复数形式的Fourier变换表达式中 $F(\omega)$ 也只有在 $n\omega_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )处才存在函数值，而式(1-5)实际上就是相应的Fourier变换的逆变换形式。

## 二、连续非周期信号的Fourier变换

第一部分讨论的是最简单的连续周期信号的Fourier变换形式，其特点就是频谱的离散型，当然，函数的周期性要求函数必须是时域无限的，但是通常情况的函数都是时域有限的，此时则需要将函数进行时域的延拓，同时将函数的限域作为周期，如此便可以得到与第一部分所述完全相同的结果。但是，对于时域限域非常宽的函数而言，上述的方法势必会导致函数的周期非常大，极限情况下，函数限域无限大，周期无限长，函数退化为整个时域的连续非周期函数，这时则需要通过另外一种形式对函数进行Fourier变换，当然，只是形式上的不同，本质上与连续周期函数的Fourier变换没有区别。

将式(2-7)做一步变形可得：

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (2-1)$$



对式 (2-1) 求极限 ( $T \rightarrow \infty$ ):

$$F_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (2-2)$$

由于积分项有限, 因此想要得到非零的结果需要将式 (2-2) 两端分别乘以T得到:

$$F = T F_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (2-3)$$

由于周期T无限大, 因此n取相邻两个整数值时,  $n \frac{2\pi}{T}$  的变化无限小, 可认为是连续变化, 所以将  $n \frac{2\pi}{T}$  写成:  $\omega = n \frac{2\pi}{T}$ , 式 (2-3) 则变为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-4)$$

这就是连续非周期信号的Fourier变换式。进一步, 由连续周期信号对应的Fourier变换的逆变换形式 (1-5) 可知, 当  $T \rightarrow \infty$  时应有:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1 \\ &= \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \cdot e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1) \end{aligned} \quad (2-5)$$

式2-5中需要注意的是 $\Delta(n\omega_1)$ , 有如下关系:

$$\Delta(n\omega_1) = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1 \quad (2-6)$$

之所以这样表述的原因是为了下面求极限进而完成由离散形式向连续形式过度的方便。由式 (2-3) 可知:

$$F(\omega) = F(n\omega_1) T = \frac{F(n\omega_1)}{f} \quad (2-7)$$

因此式 (2-5) 变为:

$$f(t) = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi} \cdot e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1) \quad (2-8)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $\omega_1 \rightarrow 0$ , 同时有  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ ,  $\Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$ , 所以式 (2-8) 过度为积分形式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-9)$$

式 (2-9) 就是连续非周期信号的Fourier逆变换形式, 至此便给出了连续非周期信号的Fourier变换及其逆变换式。



### 三、 离散非周期信号的Fourier变换

第一部分与第二部分给出了连续时域信号的Fourier变换形式，在实际的应用中，通常获取的信号都是离散的（无论时域还是频域），因此，下面将给出离散信号的Fourier变换及其逆变换形式，首先给出的是离散非周期信号的Fourier变换形式

对于离散非周期信号而言，时域信号无上下限，而且信号是离散的，这等于是对连续非周期信号进行抽样，设抽样的时间间隔为 $T_1$ ，则抽样信号可表示为：

$$P_\delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1) \quad (3-1)$$

抽样之后的时域连续信号则变为：

$$\begin{aligned} f_{discrete}(t) &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_1) \delta(t - kT_1) \end{aligned} \quad (3-2)$$

对式（3-2）进行Fourier变换可得：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F(f_{discrete}(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_1) F[\delta(t - kT_1)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_1) e^{-jk\omega T_1} \end{aligned} \quad (3-3)$$

这里不妨设 $T_1 = 1$ 进行归一化处理，可得离散非周期信号的Fourier变换形式为：

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-jk\omega} \quad (3-4)$$

由式（3-4）可知， $F(\omega)$ 为频域的连续周期信号，周期为 $2\pi$ ，由时域与频域的对偶性可知，其逆变换形式应与式（2-7）对应：

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{ik\omega} d\omega \quad (3-5)$$

以上便是离散非周期信号的Fourier正逆变换的形式，求解过程中应用了Fourier变换的一个重要规则，即变换的对偶性，上面的例子中，用到了连续周期信号与离散非周期信号之间的对偶关系，对于其他形式的Fourier变换同样有这种对偶关系的存在，即一种形式的函数对应的Fourier变换得到另一种函数形式，那么将得到这种函数形式再接着进行Fourier变换，得到的函数形式正是其Fourier逆变换对应的形式。

### 四、 离散周期信号的Fourier变换

实际的信号处理过程中，信号既不可能是连续的，同时也不可能是时域无限的，这就涉及到了最为普遍、最为常用的一种Fourier变换的形式——离散周期信号的Fourier变换及其逆变换。根



据第三部分提到的Fourier变换的对偶性可知，离散周期信号的Fourier变换形式同样是离散周期信号，下面给出得到离散周期信号Fourier变换形式的两种理解方式，其中第一种是个人的理解，第二种是文献中给出的理解方式。

### 第一种方式

这里首先应假定离散信号的时域宽度为 $L$ ，则应用周期信号的Fourier变换形式（2-7）可得：

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+L} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (4-1)$$

用与式（3-1）同样的方式对 $f(t)$ 进行抽样得到离散信号：

$$f_{discrete}(t) = f(t) \sum_{kT_1} \delta(t - kT_1) \quad (4-2)$$

抽样的间隔为 $T_1$ ，总的抽样点有 $N = L/T_1$ 个，于是4-1变换为：

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+L} f(t) \sum_{kT_1} \delta(t - kT_1) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{L} \sum_{kT_1} f(kT_1) e^{-jn\frac{2\pi}{L} kT_1} \end{aligned} \quad (4-3)$$

根据上面提到的对偶性原则，离散周期信号的Fourier逆变换形式与式（4-3）完全相同，这就是按照个人的理解给出的离散周期信号Fourier变换的形式。

### 第二种方式

首先不考虑信号在时域的有限性，则回归到第三部分提到的离散非周期信号的Fourier变换形式，通过对时域连续信号进行间隔为 $T_1$ 的抽样，可以得到与式（3-3）相同的表达式：

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_1) e^{-jk\omega T_1} \quad (4-4)$$

得到的Fourier变换表达式 $F(\omega)$ 在频域是连续周期的，而由对偶性原则可知，离散周期信号的Fourier变换应该是离散的，因此需要在频域进行抽样，由于已经在时域进行了间隔为 $T_1$ 的抽样，根据采样定理，频域信号应当带限于 $[0, 1/T_1]$ ，又由于时域信号带限于 $[0, L]$ ，由采样定理可知，频域采样间隔应为 $1/L$ ，于是可以得到采样点数为： $N = \frac{1/T}{1/L} = \frac{L}{T}$ ，换个角度理解，实际上这就是说，时域信号限于 $[0, L]$ ，经过周期延拓至无限域，则时域信号具有了周期性，周期为 $L$ ，此时经过Fourier变换，在频域， $\omega$ 的取值只能是基频 $2\pi/L$ 的整数倍，这对应着上述的采样间隔 $1/L$ ，于是可以得到频域的采样点为 $\omega_k = 2\pi k/L = 2\pi k/NT$ ，经过上述在频域的抽样，可以得到离散周期信号的Fourier变换形式：

$$F(k) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_1) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \quad (4-5)$$



令式 (4-3) 与 (4-5) 中  $T_1 = 1$  进行归一化, 同时对比两式可以看出, 由两种方式得到的离散周期信号的Fourier变换形式上完全相同, 只是前者的表达式中有  $1/L$  系数, 这实际上并不影响Fourier变换的基本性质。

## 结语

本文从最基本的Fourier级数出发, 通过对周期延拓至时域的无限域情况得到了连续非周期信号的Fourier变换形式, 又通过采样定理进一步得到了离散非周期与周期信号的Fourier变换及其逆变换的形式, 仅供对Fourier变换几种基本形式的理解之用, 并未涉及Fourier变换的具体应有及其相关的性质, 这些内容需要在日后的学习中进一步补充。

