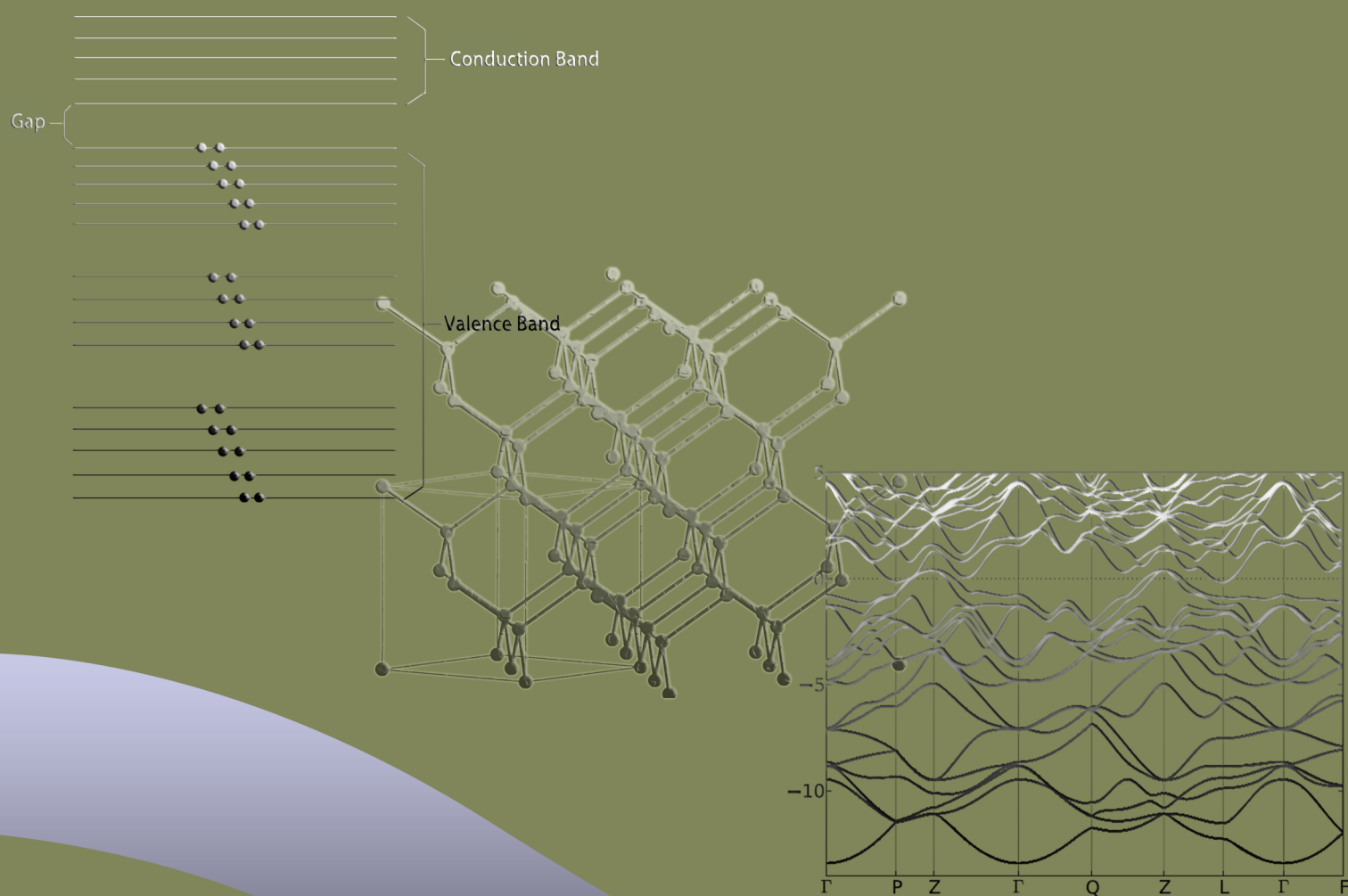


Queen Mary, University of London

School of Physics and Astronomy

经典及量子霍尔效应总结



一、多电子体系中外场作用下电子的运动

在多电子体系中，电子在外场的作用下的运动与单电子的情况不同，这是因为多电子体系中电子之间的碰撞，从整体看，电子受外场作用下，只有未经过碰撞的电子对动量有贡献（具体原因参见阎守胜版《固体物理基础》1.4.2节），用 τ 表示电子的平均自由程，经过 dt 时间，应该有：

$$\mathbf{P}(t + dt) = (1 - \frac{dt}{\tau})[\mathbf{P}(t) + \mathbf{F}(t)dt] \quad (1.0.1)$$

写成简单的形式：

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t) - \frac{\mathbf{P}(t)}{\tau} \quad (1.0.2)$$

在恒定的电场中，应有：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{F} = -e\mathbf{E} \quad (1.0.3)$$

由式 (1.0.2)，可得：

$$\mathbf{v} = -\frac{e\tau\mathbf{E}}{m} \quad (1.0.4)$$

于是可以得到：

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1.0.5)$$

所以：

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (1.0.6)$$

\Rightarrow

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1.0.7)$$

这就是电导率表达式的推导过程。

二、经典霍尔效应

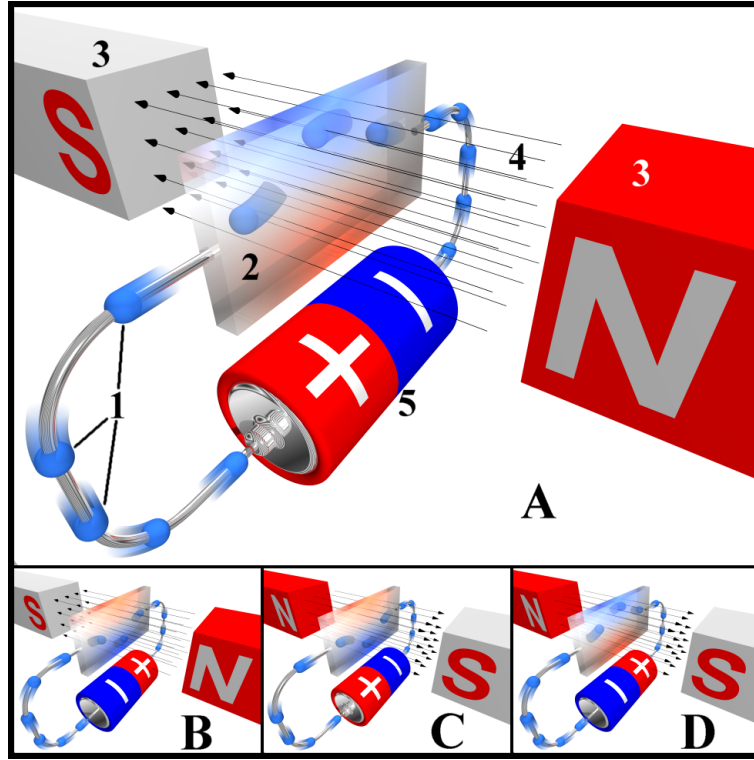
考虑电子在电场与磁场的共同作用下的运动，如图一所示的体系：在该体系中，方程 (1.0.2) 的具体形式为：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{P}}{\tau} \quad (2.0.1)$$

考虑到式 (1.0.5)，同时考虑到稳态的情况 ($\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$)，并且将式 (2.0.1) 写成分量的形式：

$$\begin{aligned} & -e[E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}] - \frac{1}{ne} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \\ & = -\frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} (J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.0.2)$$





图一 霍尔效应图示（来自于维基百科）

进一步展开有：

$$\begin{aligned}
 & -eE_x \mathbf{i} - eE_y \mathbf{j} - eE_z \mathbf{k} + \frac{1}{n}(J_y B_z - J_z B_y) \mathbf{i} \\
 & + \frac{1}{n}(J_z B_x - J_x B_z) \mathbf{j} + \frac{1}{n}(J_x B_y - J_y B_x) \mathbf{k} \\
 & = -\frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} (J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k})
 \end{aligned} \tag{2.0.3}$$

在讨论霍尔效应问题时，如图一所示，磁场方向只沿z方向，电流只局限于二维，因此有：

$$B_x = B_y = 0, J_z = 0 \tag{2.0.4}$$

重新整理式 (2.0.3)：

$$\begin{aligned}
 & (-eE_x + \frac{1}{n} J_y B_z) \mathbf{i} + (-eE_y - \frac{1}{n} J_x B_z) \mathbf{j} \\
 & = -\frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} J_x \mathbf{i} - \frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} J_y \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

进一步有：

$$eE_x = \frac{1}{n} J_x B_z + \frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} J_x \tag{2.0.6}$$

$$eE_y = \frac{m}{\tau} \frac{1}{ne} J_y - \frac{1}{n} J_x B_z \tag{2.0.7}$$

考虑到电导率的表达式 $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ (见式-1.0.7), 并给出电子在磁场 B_z 作用下做回旋运动的频率 (回旋频率-cyclotron frequency): $\omega_c = \frac{eB}{m}$, 可以将式 (2.0.6) 与 (2.0.7) 写为:

$$\sigma_0 E_x = J_x + \omega_c \tau J_y \quad (2.0.8)$$

$$\sigma_0 E_y = J_y - \omega_c \tau J_x \quad (2.0.9)$$

在电流只沿着x方向的情况下 (无横向电流), $J_y = 0$, 此时 E_y 称为霍尔电场, 这就是霍尔效应的核心—磁场垂直于电流的情况下, 产生同时垂直于电流与磁场方向的电场—霍尔电场, 这样式 (2.0.8) 与 (2.0.9) 变为:

$$E_y = -\frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} J_x = -\frac{B_z}{ne} J_x \quad (2.0.10)$$

式 (2.0.10) 描述的是横向电场与纵向电流之间的关系, 类似于真实电流与电压之间的关系, 可以定义霍尔磁阻 (类似于电阻的形式, 受磁场调制, 因此得名):

$$\rho = \frac{E_y}{J_x} = -\frac{B_z}{ne} \quad (2.0.11)$$

同时定义霍尔系数:

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B_z} = -\frac{1}{ne} \quad (2.0.12)$$

三、整数量子霍尔效应

实验基础

1980年, 冯·克利青利用场效应二极管在极低温度与强磁场作用研究霍尔效应发现了整数量子霍尔效应, 首先, 利用门电压 V_g 控制载流子浓度, 由霍尔磁阻的定义式 (2.0.11) 可知, 正常情况下, 载流子浓度 n 与门电压 V_g 成正比, 则霍尔磁阻 ρ 与门电压 V_g 成反比, 然而实验结果是, 利用霍尔磁阻定义式的另外一种表达: $\rho = \frac{V_H}{I_x}$, 在给定恒流源 I_x (源极-漏极) 的情况下, 测量得到的横向电压 V_H 出现平台, 这意味着霍尔磁阻 ρ 出现不服从反比规律的平台, 并且实验结果显示, 这些平台的霍尔磁阻值在误差范围内可以按照下面的表达式给出:

$$\rho = \frac{h}{\nu e^2} (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.0.1)$$

这就是整数量子霍尔效应的实验基础。

理论解释

后续讨论基于磁矢势, 这里首先给出磁矢势的介绍, 由于磁场无散度 (无源):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.0.2)$$

必然存在一矢量 \mathbf{A} 满足:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.0.3)$$



根据安培定律：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.0.4)$$

可得：

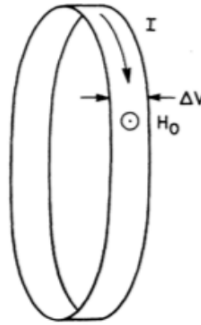
$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

可以解得磁矢势的表达式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (3.0.6)$$

其中， r 为场的位置， r' 为源的位置。

基于图示的体系：磁矢势由两部分组成，一部分是外加的磁场（沿图二所示背离圆心的方向），



图二 整数量子霍尔效应理论解释图示

向），另一部分则是由环中电流引起（ $I \Rightarrow A_g$ ），根据Stokes定理（矢量的面积分等于该矢量旋度的线积分）可得：

$$A_g = \frac{\phi}{L} \quad (3.0.7)$$

另外在高斯单位制下可以给出：

$$I = c \frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{c}{L} \frac{\partial U}{\partial A_g} \quad (3.0.8)$$

其中U是指体系的能量，这里可以给出式（3.0.8）的定性推导：

$$IV = P \quad (3.0.9)$$

\Rightarrow

$$I \frac{\partial \phi}{\partial t} = c \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.0.10)$$

\Rightarrow

$$I \partial \phi = c \partial U \quad (3.0.11)$$

\Rightarrow

$$I = c \frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (3.0.12)$$



其中 c 为光速，是由高斯单位制引进的。

经过复杂的量子力学计算（过程从略，详见Quantized Hall conductivity in two dimensions一文），得到的结论是，体系本征能量（朗道能级）的变化是由 A_g 引起的，而且这种变化并没有改变朗道能级的特征，只是在基础上产生了一定程度平移，在推导过程中还给出了与 A_g 对应的磁通量的量子化取值：

$$\phi = n\phi_0 = \frac{nhc}{e}(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.0.13)$$

另外，基于周期边界条件，电子转一周的结果是又回到原点，只是有 ν 个电子从左端运动到右端（对应朗道能级的平移），此时有：

$$\Delta U = \nu e V_H \quad (3.0.14)$$

$$\Delta\phi = \frac{hc}{e} \quad (3.0.15)$$

因此：

$$I = c \frac{\partial U}{\partial \phi} = \nu \frac{e^2}{h} V_H \quad (3.0.16)$$

\Rightarrow

$$\rho = \frac{h}{\nu e^2} \quad (3.0.17)$$

这就是量子化霍尔磁阻的推导过程。

四、 分数量子霍尔效应

所谓分数量子霍尔效应，是指按照整数量子霍尔效应的表达形式（3.0.17），式中的 ν 可能不是整数，而是相应的分数形式，具体的理论解释过于复杂，而且目前尚无最终定论，此处从略。

五、 反常霍尔效应

按照式（2.0.11），霍尔磁阻应该与磁场强度成正比，而在极端条件下（低温等），霍尔磁阻表现出不同的性质，在铁磁性材料中，霍尔磁阻会出现按照如下形式的变化规律：

$$\rho = R_0 B + 4\pi R_s M \quad (5.0.1)$$

其中 M 是指材料的磁化强度，当磁化强度达到饱和值 M_s 时，霍尔磁阻出现平台，更重要的是，这种情况下产生的霍尔磁阻的平台，在没有外磁场作用的情况下依然存在，这就是”反常“的由来，而相应的平台值的量子化就被称为量子反常霍尔效应。相比于”正常“量子霍尔效应，量子反常霍尔效应不需要外加磁场的作用同样可以表现出霍尔磁阻的量子化特征，这就为超级计算机的制造提供了一种可能性，即可以利用霍尔磁阻的量子化特性重新定义逻辑数值进行量子计算，但是目前，反量子霍尔效应的实现依然需要低温这一极端条件，无法实现正常条件下的使用。



六、量子霍尔效应的应用

精细结构常数的测量

首先给出精细结构常数的表达式：

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (6.0.1)$$

又有：

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_0\epsilon_0}} = c \quad (6.0.2)$$

可得：

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar} \frac{\mu_0 c}{2} \quad (6.0.3)$$

根据式 (3.0.17)，有：

$$\nu\rho = \frac{\hbar}{e^2} \quad (6.0.4)$$

因此：

$$\alpha = \frac{1}{\nu\rho} \cdot \frac{\mu_0 c}{2} \quad (6.0.5)$$

其中 μ_0 与 c 均能够精确测量，于是可以通过测量整数量子霍尔效应的不同平台值获得精细结构常数的精确值。

电阻与质量的基准

由于霍尔磁阻具有电阻的单位，因此精确的霍尔磁阻平台值自然可以给出电阻的基准，而质量基准的给出需要特定的装置将电阻值转化为质量值，具体的方法此处从略。

