MUSTER FSP T- Kurs

Fach: **Mathematik**
Bearbeitungszeit: **180 Minuten**
Erlaubte Hilfsmittel: **(nicht grafikfähiger) Taschenrechner, Tafelwerk**

1. Funktionale Zusammenhänge

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{x}}$ und $g(x)=\dfrac{2}{1+e^{1-x}}$, jeweils mit $x\in R$.

1.1. Weisen Sie nach, dass die Funktion $g(x)$ die Differentialgleichung

$g'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot g(x)\cdot\left[2-g(x)\right]$ erfüllt.

1.2. Untersuchungen haben ergeben, dass die momentane Änderungsrate des Energiebedarfs (in 10^8 kWh/Jahr) eines Landes seit dem Jahr 2000 durch $g(x)$ mit $x\geq 0$ [$x=$ Zeit in Jahren ab Anfang 2000] beschrieben werden kann. Berechnen Sie den gesamten Energiebedarf im Zeitraum von Anfang 2000 bis Ende 2010. [→ Antwortsatz]

1.3. Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt von $f(x)$.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und geben Sie den Wertebereich von $f(x)$ an. Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ sowie die Asymptoten in ein Koordinatensystem.

1.4. Zeigen Sie rechnerisch, dass $g(x)$ aus $f(x)$ durch Spiegelung an der Geraden $x=1/2$ entsteht.
Skizzieren Sie den Graphen von $g(x)$ in das Koordinatensystem (siehe 1.3.).
Bestimmen Sie Wertebereich und Monotonieverhalten von $g(x)$ sowie den Wendepunkt von $g(x)$.

2. Vermischtes

2.1. Die Funktion $f(x)=\left(\ln x\right)^{3}-2\left(\ln x\right)^{2}+\ln x$ ist für alle $x>0$ definiert.
Berechnen Sie $f(e^{2})$ sowie die Nullstellen von $f(x)$.

2.2. Gegeben ist die Funktion $y=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x)$ sowie die Umkehrfunktion $\overline{f}(x)$.
Geben Sie die Definitionsbereiche von $f(x)$; $f'(x)$ und $\overline{f}(x)$ an.

2.3. Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Gleichungen.

2.3.1. $\lg\left(x^{\lg x}\right)+3\lg x=\lg\left(x^{3}\right)+1$

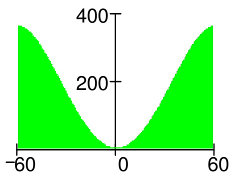
2.3.2. $\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{2x-8}$

2.4. Die Weltbevölkerung im Jahr 2003 betrug 6,3 Mrd. Menschen. Sie wächst exponentiell (stetig) pro Jahr mit einer Wachstumsrate von 1,2%, d.h. nach *n* Jahren ist sie auf den Wert $6,3 \cdot e^{0,012 \cdot n}$ angewachsen.
Berechnen Sie, wann die Weltbevölkerung in etwa 8,5 Mrd. beträgt. [→ Antwortsatz]

2.5. Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems auf der Basis des GAUß´schen Algorithmus.

$$\begin{array}{llll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & =4 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =7 \\ 2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & =6 \\ 3x_1 & +4x_2 & & =11 \end{array}$$

2.6. Die symmetrische Querschnittsfläche eines Gebirgstales lässt sich mittels ganzrationaler Funktion 4. Grades [$y = f(x) = ax^4 + bx^2$] beschreiben.
Das Tal hat eine maximale Breite von 120 m und ist 360 m tief [s. Skizze].
Bei einer Breite von 60 m wird von der Talsohle aus eine Höhe von 157,5 m gemessen. Bestimmen Sie den Funktionsterm für $f(x)$.



3. Integralrechnung und ihre Anwendung

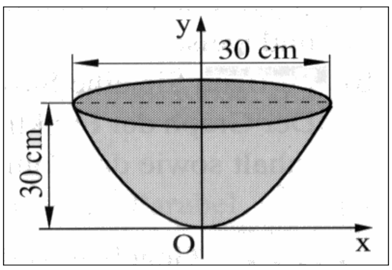
3.1. Berechnen Sie folgende Integrale.

3.1.1. $\int x^2 \cdot e^{-4x} dx$ 3.1.2. $\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}\, dx$ 3.1.3. $\int_0^b \left[x \cdot e^{2-x} \right] dx$ [für $b \to \infty$]

3.2. Bestimmen Sie $F'(x)$, wenn $F(x) = \int_4^x \left(\sqrt{u} + \frac{x}{\sqrt{u}} \right) \cdot du$.

3.3. Bestimmen Sie die Fläche A (in Flächeneinheiten→ FE) zwischen den beiden Funktionen, die durch die Gleichungen $y+1=(x-1)^2$ und $3x = y^2$ definiert sind.

3.4. Ein Behälter zur Herstellung von Eis hat ein parabelförmiges Profil mit den nebenstehenden Maßen [s. Skizze].



3.4.1. Bestimmen Sie die zugehörige Parabelgleichung [$y = f(x) = ax^2$]
3.4.2. Berechnen Sie das Volumen des Behälters (in Liter). [→ Antwortsatz]

[Hinweis: $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$; $y = f(x) = \frac{2}{15} x^2$]