

1. N 을 클럽의 회원수, T 를 테니스를 하는 회원의 집합, S 를 스쿼시를 하는 회원의 집합, B 를 배드민턴을 하는 회원의 집합이라고 하자. X 를 클럽의 활동이라고 할때, 아래와 같이 정의를 하자.

$$P(X) = \frac{|C|}{N}$$

그러면 아래와 같은 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(T \cup S \cup B) &= P(T) + P(S) + P(B) - (P(TS) + P(TB) + P(SB)) + P(TSB) \\ &= \frac{36 + 28 + 18 - (22 + 12 + 9) + 4}{N} \\ &= \frac{43}{N} \end{aligned}$$

따라서 43명의 회원이 3가지 운동 가운데 적어도 하나를 한다고 할 수 있다.

2. 어느 누구도 자신의 모자를 선택하지 않을 확률 = 1- 적어도 1명이 자신의 모자를 선택할 확률이다.

E_i ($i = 1, 2, \dots, N$)를 i 번째 남자가 자신의 모자를 선택할 사건이라고 하자.

적어도 1명이 자신의 모자를 선택할 확률은 아래와 같다.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$$

위의 확률은 ‘포함제외 등식’에 의해서 아래와 같이 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &= \sum_{i=1}^N P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{N+1} P(E_1 E_2 \dots E_N) \end{aligned}$$

가능한 전체 경우의 수는 N 개의 모자를 (i_1, i_2, \dots, i_N) 으로 배치하는 경우의 수이니, $N!$ 개 존재한다.

n 명의 남자 i_1, i_2, \dots, i_n 이 자신의 모자를 각각 선택할 사건인 $E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}$ 이 발생할 수 있는 경우의 수는 $(N - n)!$ 이다. (n 명이 자기 모자를 선택했다면, 나머지 $N - n$ 명을 배치하는 경우의 수 이기 때문이다.)

따라서 $P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) = \frac{(N - n)!}{N!}$ 이 되고, 아래의 식이 성립한다.

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) = \binom{N}{n} \frac{(N - n)!}{N!} = \frac{1}{n!}$$

따라서 $P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$ 이 된다.

우리가 최종적으로 구하고 싶은 식은 아래와 같다.

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=0}^N (-1)^i / i!$$

$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ 이므로 $x = -1$ 을 대입하여 $N \rightarrow \infty$ 일때 $e^{-1} \approx 0.3679$ 이다.

3. 사건 $E_i, i = 1, 2, 3, 4$ 를 아래와 같이 정의하자.

$E_1 = \{\text{스페이드의 에이스가 더미 중 어느 하나에 있다}\}$

$E_2 = \{\text{스페이드의 에이스가 하트 에이스가 다른 더미에 있다}\}$

$E_3 = \{\text{스페이드, 하트, 다이아몬드의 에이스가 각각 다른 더미에 있다}\}$

$E_4 = \{\text{에이스 4장에 모두 서로 다른 더미에 있다}\}$

구하고자 하는 확률은 $P(E_1E_2E_3E_4)$ 이고 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$P(E_1E_2E_3E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)P(E_4|E_1E_2E_3)$$

$$E_1 = S \text{이므로 } P(E_1) = 1$$

하트 에이스가 스페이드 에이스가 있는 13장에 포함될 확률은 $12/51$ 이다. (12는 13장의 카드중에서 스페이드 에이스를 제외하기 때문(12자리 중에서 하트 에이스가 들어갈 자리), 51은 남은 카드의 수)

$$P(E_2|E_1) = 1 - \frac{12}{51} = \frac{39}{51}$$

다이아몬드의 에이스가 스페이드 에이스가 속한 13장이나, 하트 에이스가 속한 13장의 더미에 포함될 확률은 $24/50$ 이다. (24는 13장의 더미 2개에서 각각 1을 빼서 더한 것이고(다이아몬드 에이스가 들어갈 수 있는 자리는 12개, 12개 각각), 50은 남은 카드의 수)

$$P(E_3|E_1E_2) = 1 - \frac{24}{50} = \frac{26}{50}$$

같은 논리로 아래와 같은 식이 나온다.

$$P(E_4|E_1E_2E_3) = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49}$$

$$P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0.105$$

즉, 각 더미에 에이스가 한 장씩 포함 가능성은 근사적으로 10.5%이다.

4. 혈액 검사를 받은 사람이 이 질병에 걸렸을 사건을 D , 검사결과가 양성일 사건을 E 라고 하자. $P(E|D^c) = 0.01, P(D) = 0.005, P(E|D) = 0.95$ 이므로 구하고자 하는 확률은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(0.95)(0.005)}{(0.95)(0.005) + (0.01)(0.995)} \\ &= \frac{95}{294} \approx 0.323 \end{aligned}$$

그러므로 검사결과가 양성인 사람들의 32%만 실제로 이 질병에 걸렸다.

5. i 번째 부품이 작동할 사건을 A_i 라고 하면 우리가 구하고자 하는 확률은 아래와 같이 표현하여 구할 수 있다..

$$\begin{aligned} P\{\text{시스템 작동}\} &= 1 - P\{\text{모든 시스템이 작동하지 않음}\} \\ &= 1 - P\{\text{모든 부품이 작동하지 않음}\} \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \end{aligned}$$

6.1 ~ 6.3 (직접풀이)