p.14, 예1.15 #1. Date. 251225 Thur No.

· $P(W_i)=P(W_j)=9/10$, $(i\neq j)$

· $P(R_4|W_i)=1/10$ $(i=0,1,2,3)$

$$\square\ P(R_4)=\sum_{i=0}^{3}P(R_4|W_i)\times P(W_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{10}\cdot P(W_i)=1\cdot\frac{1}{10}\ \square.$$

P.23 예1.27 #2.

<조합 사용 X>

$$\left(\begin{matrix}B\,W\,W\\W\,B\,W\\W\,W\,B\end{matrix}\right.\Rightarrow\frac{1}{15}\times\frac{1}{14}\times\frac{1}{13}\times(5\times4\times10)\times3.$$

<조합 사용 O, 사용 가능 이유>

$$\frac{{}_5C_2\times{}_{10}C_1}{{}_{15}C_3}$$

→ 흰공 두개 순서 있게 뽑음. ⇒ $\{W_1, W_2\}$

$$=\frac{\frac{{}_5P_2}{2!}\times\frac{{}_{10}P_1}{1!}}{\frac{{}_{15}P_3}{3!}}$$

→ 검은공 1개 뽑음 ⇒ $\{B\}$

⇒ ${}_5P_2\times{}_{10}P_1$ 의 경우 $\left\{\begin{matrix}\bigcirc W_1\bigcirc W_2\bigcirc \text{ 혹은}\\ \bigcirc W_2\bigcirc W_1\bigcirc\end{matrix}\right.$

W_1 과 W_2를 순서를 정해 배치하고 B를 어디에 넣을까 고민하는 식이 된다. B의 자리가 각 경우별로 3개이므로 3을 곱해주면 모든 경우가 만들어짐.

$$\Rightarrow\frac{\frac{{}_5P_2\times{}_{10}P_1\times3}{2!\times1!\times3}}{\frac{{}_{15}P_3}{\cancel{3!}}}$$

→ 상쇄. □.

* 순서 존재 X 뽑는 경우 조합 사용 가능.

p.25, 연습문제 1장, 02번 풀이 Date: 251227 Sat No.

• 주요개념

$n=2$: $|A \sqcup B| = |A| + |B| - |A \sqcap B|$

$n=3$: $|A \sqcup B \sqcup C| = (|A|+|B|+|C|) - (|A \sqcap B| + |B \sqcap C| + |C \sqcap A|) + |A \sqcap B \sqcap C|$

일반화 : $|\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \sqcap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \sqcap A_j \sqcap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n|$

• 가정 : $e \in S$, $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ 라 하자. $A_1, \ldots, A_k$ 에 e가 속해있다. $(1 \le k \le n)$

⇒ $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$ 에는 e가 1개 들어있음 따라서 $|\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i| = 1$ 임을 증명하면 원소개수가 $e_1, e_2 \ldots$ 가 된다고 해도 합집합에서는 정확히 한 번만 세어짐을 확인할 수 있어서 (중복으로 안 세어짐) 일반화-버전의 증명이 된다. 그리고 일반화-버전의 증명은 곧 문제 02의 증명으로 이어짐을 알 수 있다. (발생확률 = 원소개수 / 전체 원소개수)

• 풀이

Step1. (일반화-버전 계산)

Hint1은 n개 중 1, ..., n개만 뽑는 경우, 여기는 k개 중 1, ... n개만 뽑는경우 (n개중 k)

- 첫째항 : $\sum |A_i| = \binom{k}{1}$
- 둘째항 : $\sum |A_i \sqcap A_j| = \binom{k}{2}$

⋮

- k번째 항 : 〃
- $\underbrace{k+1 \sim n}_{* \, m > k}$ 번째 항 : $\binom{k}{m} = 0$

Step2.

$$1 = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots \pm \binom{k}{k}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -\binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \cdots \mp \binom{k}{k}$$

$$\Leftrightarrow \binom{k}{0} - 1 = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots \mp \binom{k}{k}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot (+1)^{k-i}$$

Hint2 (이항정리)

$$= (-1+1)^k = 0 \;\square$$

〈포함-제외-부등식〉

(f1) $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ *1항까지 ⇔ Bool의 부등식.

(f2) 〃 $\ge \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{j<i} P(E_iE_j)$ *2항까지.

(f3) 〃 $\le \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{j<i} P(E_iE_j) + \sum_{k<j<i} P(E_iE_jE_k)$ *3항까지.

⋮

〈f1~f3 증명의 key Idea〉

$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P(\bigcup_{j<i} E_iE_j)$

↓ 위의 식 먼저 증명.

Proof) [1]. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_1^cE_2 \cup E_1^cE_2^cE_3 \cup \cdots \cup E_1^c \cdots E_{n-1}^cE_n$ #1 참고.

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = P(E_1) + P(E_1^cE_2) + P(E_1^cE_2^cE_3) + \cdots + P(E_1^c \cdots E_{n-1}^cE_n)$

$= P(E_1) + \sum_{i=2}^{n} P(E_1^c \cdots E_{i-1}^cE_i)$

[2]. $B_i = E_1^c \cdots E_{i-1}^c = (\bigcup_{j<i} E_j)^c$ 이라 하자.

$P(E_i) = P(B_iE_i) + P(B_i^cE_i)$ 이니, B_i에 위의 식을 대입하면

$= P(\{E_1^c \cdots E_{i-1}^c\}E_i) + P(\{E_1 \cup \cdots \cup E_{i-1}\}E_i)$

$= P(\{E_1^c \cdots E_{i-1}^c\}E_i) + P(\{\bigcup_{j<i} E_j\} \cap E_i)$ #2 참고

$= P(\{E_1^c \cdots E_{i-1}^c\}E_i) + P(\bigcup_{j<i} E_jE_i)$

$\Leftrightarrow P(\{E_1^c \cdots E_{i-1}^c\}E_i) = P(E_i) - P(\bigcup_{j<i} E_jE_i)$

[3]. [1]번 마지막 식에 [2]번 마지막 식 대입하면 증명이 완료됨 □

f1-proof)

$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_i P(E_i) \overbrace{- \sum_i \underbrace{P(\overbrace{\bigcup_{j<i} E_iE_j}^{\ge 0})}_{\ge 0}}^{\le 0} \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ □

f2-proof)

f1의 E_i에 E_iE_j 대입 $\Rightarrow P(\bigcup_{j<i} E_iE_j) \le \sum_{j<i} P(E_iE_j)$

$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P(\bigcup_{j<i} E_iE_j) \ge \sum_i P(E_i) - \sum_i P(\bigcup_{j<i} E_iE_j)$ □

f3-proof)

f2의 E_i에 E_iE_j 대입 $\Rightarrow P(\bigcup_{j<i} E_iE_j) \ge \sum_{j<i} P(E_iE_j) - \sum_{k<j<i} P(E_iE_jE_k)$

$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P(\bigcup_{j<i} E_iE_j) \le \sum_i P(E_i) - \sum_{j<i} P(E_iE_j) + \sum_{k<j<i} P(E_iE_jE_k)$ □

⋮

* $n \to \infty$ 일때 생각하기
* 지시변수 I 사용해서 풀어보기.

#1. 설명.

2항까지 전개. : $E_1 \cup (E_1^c \cap E_2) = (E_1 \cup E_1^c) \cap (E_1 \cup E_2) = E_1 \cup E_2$

3항까지 전개 : $(E_1 \cup E_2) \cup E_1^c E_2^c E_3$

$= (E_1 \cup E_2) \cup \{(E_1^c \cap E_2^c) \cap E_3\}$

$= (E_1 \cup E_2) \cup \{(E_1 \cup E_2)^c \cap E_3\}$

$= A \cup (A^c \cap E_3)$

$= A \cup E_3 = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

⋮

#2. 설명.

EX) $(E_1 \cup E_2) \cap E_j$

$= (E_1 \cap E_j) \cup (E_2 \cap E_j)$

$= (E_1 E_j) \cup (E_2 E_j)$

〈일반화-버전 풀이〉

$\underbrace{P(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i) \le \sum_{i=1}^{k} P(A_i)}_{\text{Bool 의 부등식}} \Leftrightarrow P(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i^c) \le \sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$

$\Leftrightarrow -P(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i^c) \ge -\sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$

$* \sqcap_{i=1}^{k} A_i = (\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i^c)^c$

$\Leftrightarrow 1-P(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i^c) \ge 1-\sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$

$\Leftrightarrow 1-P((\sqcap_{i=1}^{k} A_i)^c) \ge$ 〃

$\Leftrightarrow 1-\{1-P(\sqcap_{i=1}^{k} A_i) \ge$ 〃

$\Leftrightarrow P(\sqcap_{i=1}^{k} A_i) \ge 1-\sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$ □

〈2항까지 풀이〉

$P(A \sqcup B) \le P(A)+P(B) \Leftrightarrow P(A \sqcap B) \ge 1-\{P(A^c)+P(B^c)\}$ 증명

$A = (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap B^c) \Rightarrow P(A) = P(A \sqcap B) + P(A \sqcap B^c)$

$\Leftrightarrow P(A \sqcap B) = P(A) - P(A \sqcap B^c)$

$\Downarrow$ $* A \sqcap B^c \subseteq B^c \Rightarrow P(A \sqcap B^c) \le P(B^c)$

$P(A) - P(A \sqcap B^c) \ge P(A) - P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A \sqcap B) \ge P(A) - P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A \sqcap B) \ge 1 - P(A^c) - P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A \sqcap B) \ge 1 - \{P(A^c) + P(B^c)\}$ □

p.25~26, 연습문제 1장 Date. 25|229 Mon No. 1

(05번)

(1) 경우.

- T○○○
- ○T
- T
- T

$\Rightarrow \frac{1}{16} \times 4 = \boxed{\frac{1}{4}}$

(2) $1 - P(TTTT) = \boxed{\frac{15}{16}}$

(3) 경우

- $3H + 1T \Rightarrow \frac{1}{4}$
- $4H \Rightarrow \frac{1}{16}$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{16}}$

(4) * 문제오류.

∘ $2H + 2T \Rightarrow$ HHTT, TTHH
HTHT, THTH
HTTH, THHT

$\boxed{\frac{6}{16}}$

∘ 출제자 의도.

X : 앞면 나온 개수 $\Rightarrow X \sim Bin(4, \frac{1}{2})$

$$P(X=2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X=2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=2)}{1-P(X=0)} = \frac{6/16}{15/16} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

06번)

(1) $P(W_1) = P(W_1B_2) + P(W_1W_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$

(2) $P(W_2 \mid W_1) = \frac{P(W_1W_2)}{P(W_1)}$

(3) $P(B_1) = P(B_1B_2) + P(B_1W_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$

(4) $P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}$

07번)

∘ 4번째 공 검은색 고정. 3번째 까지의 공은 7W+2B 중 3개 뽑아서 배열.

① 4번째 검은공 뽑을 확률 = $\frac{3}{10}$

② 3번째 까지 경우의 수.

- WWW ×1개 $\Rightarrow \binom{7}{3} / \binom{9}{3}$
- WBW ×3개 $\Rightarrow 3 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{2}{1} / \binom{9}{3}$
- WBB ×3개 $\Rightarrow 3 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{2}{2} / \binom{9}{3}$

$$\boxed{\frac{3}{10} \times \left\{ \frac{\binom{7}{3}}{\binom{9}{3}} + 3 \times \frac{\binom{7}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}} + 3 \times \frac{\binom{7}{1}\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}} \right\}}$$

09번)

(1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= \{1 - P(A^c)\} \times P(B)$

$= P(B) - P(B) \cdot P(A^c)$

$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A^c)$

$\Leftrightarrow \{P(B) + P(A) - P(A \cap B)\} - P(A) =$ 〃

$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \cdot P(A^c)$

$\Leftrightarrow P(B - A) =$ 〃

$\Leftrightarrow P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$ □.

〃(2) $P(B^c \cap A) = P(B^c)\cdot P(A)$ 도 (1)과
같이 증명 가능.

〃(3) $P(A^c \cap B) = P(A^c)\cdot P(B)$

$= P(A^c)\cdot\{1-P(B^c)\}$

$= P(A^c) - P(A^c)\cdot P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A^c) - P(A^c \cap B) = P(A^c)\cdot P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A^c) - P(A^c \cap B) + P(B) - P(B) =$ 〃

$\Leftrightarrow P(A^c \cup B) - P(B) = P(A^c)\cdot P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A^c - B) = P(A^c)\cdot P(B^c)$

$\Leftrightarrow P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c)$ □.

10번)

(1) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \overset{0}{P(A\cap B)} = 0.7$

$= 0.5 + P(B) + 0 = 0.7$

$\boxed{P(B) = 0.2}$

(2) · $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

$= 0.5 \times P(B)$

· $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

$= 0.5 + P(B) - 0.7$

$= P(B) - 0.2$

$\Rightarrow P(B) - 0.2 = 0.5\times P(B)$

$\Leftrightarrow 0.5\cdot P(B) = 0.2$

$\Leftrightarrow \boxed{P(B) = 0.4}$

11번)

D_i: i번째 주사위 눈의 수.

(1) $A = \{(6,1),(1,6),(2,5),(5,2),(3,4),$
$(4,3)\} \Rightarrow P(A) = 1/6$.

$(D_1=4) = \{(4,1),\dots,(4,6)\}$.

$P(D_1=4) = 1/6$.

$D_1=4 \cap A = \{(4,3)\}$

$\therefore P(D_1=4\cap A) = 1/36$.

$\therefore P(D_1=4\cap A) = P(D_1=4)\cdot P(A)$ □.

‴(2) (1)과 동일.

12번)

A, B, C가 모두 독립임

$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)\cdot P(B) & (\circ) \\ P(AC) = P(A)\cdot P(C) & (\circ) \\ P(BC) = P(B)\cdot P(C) & (\circ) \\ P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) & (\times) \end{cases}$

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(AB) = 1/4$, $P(AC) = 1/4$,

$P(BC) = 1/4$

$P(ABC) = 1/4$

$\boxed{\text{독립X}}$