1. N을 클럽의 회원수, T를 테니스를 하는 회원의 집합, S를 스쿼시를 하는 회원의 집합, B를 배드민턴을 하는 회원의 집합이라고 하자. X를 클럽의 활동이라고 할때, 아래와 같이 정의를 하자.

$$P(X) = \frac{|C|}{N}$$

그러면 아래와 같은 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(T \cup S \cup B) &= P(T) + P(S) + P(B) - (P(TS) + P(TB) + P(SB)) + P(TSB) \\ &= \frac{36 + 28 + 18 - (22 + 12 + 9) + 4}{N} \\ &= \frac{43}{N} \end{aligned}$$

<u>따라서 43명의 회원이 3가지 운동 가운데 적어도 하나를 한다고 할 수 있다.</u>

2. 어느 누구도 자신의 모자를 선택하지 않을 확률 = 1- 적어도 1명이 자신의 모자를 선택할 확률이다.
E_i ($i = 1, 2, ..., N$)를 i번째 남자가 자신의 모자를 선택할 사건이라고 하자.
적어도 1명이 자신의 모자를 선택할 확률은 아래와 같다.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$$

위의 확률은 '포함제외 등식'에 의해서 아래와 같이 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = &\sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) \\ &+ \cdots + (-1)^{N+1} P(E_1 E_2 \cdots E_N) \end{aligned}$$

가능한 전체 경우의 수는 N 개의 모자를 $(i_1, i_2, ..., i_N)$ 으로 배치하는 경우의 수이니, $N!$개 존재한다.
n명의 남자 $i_1, i_2, ..., i_n$이 자신의 모자를 각각 선택할 사건인 $E_{i_1} E_{i_2} ... E_{i_n}$이 발생할 수 있는 경우의 수는 $(N-n)!$이다.(n명이 자기 모자를 선택했다면, 나머지 $N-n$ 명을 배치하는 경우의 수 이기 때문이다.)
따라서 $P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \dfrac{(N-n)!}{N!}$ 이 되고, 아래의 식이 성립한다.

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \binom{N}{n} \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{n!}$$

따라서 $P(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1} \dfrac{1}{N!}$ 이 된다.
우리가 최종적으로 구하고 싶은 식은 아래와 같다.

$$1 - P(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i / i!$$

$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ 이므로 $x = -1$을 대입하여 $N \to \infty$ <u>일때</u> $e^{-1} \approx 0.3679$<u>이다.</u>

3. 사건 $E_i, i = 1, 2, 3, 4$를 아래와 같이 정의하자.
$E_1 =$ {스페이드의 에이스가 더미 중 어느 하나에 있다}
$E_2 =$ {스페이드의 에이스가 하트 에이스가 다른 더미에 있다}
$E_3 =$ {스페이드, 하트, 다이아몬드의 에이스가 각각 다른 더미에 있다}
$E_4 =$ {에이스 4장에 모두 서로 다른 더미에 있다}

구하고자 하는 확률은 $P(E_1E_2E_3E_4)$이고 아래와 같이 나타낼 수 있다.
$P(E_1E_2E_3E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)P(E_4|E_1E_2E_3)$

$E_1 = S$ 이므로 $P(E_1) = 1$

하트 에이스가 스페이드 에이스가 있는13장에 포함될 확률은 12/51 이다. (12는 13장의 카드중에서 스페이드 에이스를 제외하기 때문(12자리 중에서 하트 에이스가 들어갈 자리), 51은 남은 카드의 수)
$$P(E_2|E_1) = 1 - \frac{12}{51} = \frac{39}{51}$$

다이아몬드의 에이스가 스페이드 에이스가 속한 13장이나, 하트 에이스가 속한 13장의 더미에 포함될 확률은 24/50이다.(24는 13장의 더미 2개에서 각각 1을 빼서 더한 것이고(다이아몬드 에이스가 들어갈 수 있는 자리는 12개, 12개 각각), 50은 남은 카드의 수)
$$P(E_3|E_1E_2) = 1 - \frac{24}{50} = \frac{26}{50}$$

같은 논리로 아래와 같은 식이 나온다.
$$P(E_4|E_1E_2E_3) = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49}$$

$$P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0.105$$
즉, 각 더미에 에이스가 한 장씩 포함 가능성은 근사적으로 10.5%이다.

4. 혈액 검사를 받은 사람이 이 질병에 걸렸을 사건을 D, 검사결과가 양성일 사건을 E 라고 하자. $P(E|D^c) = 0.01, P(D) = 0.005, P(E|D) = 0.95$ 이므로 구하고자 하는 확률은 아래와 같다.
$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)}$$
$$= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)}$$
$$= \frac{(0.95)(0.005)}{(0.95)(0.005) + (0.01)(0.995)}$$
$$= \frac{95}{294} \approx 0.323$$
그러므로 검사결과가 양성인 사람들의 32%만 실제로 이 질병에 걸렸다.

5. i번째 부품이 작동할 사건을 A_i라고 하면 우리가 구하고자 하는 확률은 아래와 같이 표현하여 구할 수 있다..

$$\begin{aligned} P\{\text{시스템 작동}\} &= 1 - P\{\text{모든 시스템이 작동하지 않음}\} \\ &= 1 - P\{\text{모든 부품이작동하지 않음}\} \\ &= 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\Big) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) \end{aligned}$$

6.1. $1+1+\cdots+1+1=n$ 이라고 할때 $+$의 수는 $n-1$개가 된다. 결국 $n-1$개의 $+$ 에서 $r-1$개의 $+$의 지점을 잡아서 나머지를 괄호 치면, $(1+1)+(1+\cdots+1)\cdots+1+(1)=n$ 형태가 되어, r 개의 괄호가 생긴다. 결론적으로 $n-1$개의 $+$의 지점에서 $r-1$개의 $+$의 지점(분할 지점)을 구하는 것과 동일하여 아래와 같은 결과가 나온다.

$$\binom{n-1}{r-1}$$

6.2. $y_i = x_i + 1$ 라고 설정을 하면 $y_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{N}_0$ 으로 $y_1+\cdots+y_r = n+r$ 이 된다. 따라서 y_i로 이루어진 벡터 $(y_1, ..., y_r)$의 개수를 구하는 식으로 문제를 변형하여 문제 6.1을 활용하면 아래와 같은 결과를

얻을 수 있다.

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

6.3. $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, ..., n_r} x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$ 이 되기 때문에 $n_1+\cdots+n_r = n$ 이기 때문에 음이 아닌 모든 정수 값 $(n_1, ..., n_r)$의 개수를 구하는 문제가 된다. 따라서 아래와 같은 결과가 나온다.

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$