ENSIMAG

PEPS : Multimonde21

Pricing et couverture
Modèle Mathématique

IF MeQA

Ibakuyumcu Arnaud

20/01/2017

Table des matières

1 Modélisation du produit multi-économies

Le produit `multimonde21` met en jeu des sous-jacents répartis sur plusieurs économies (et devises). Contrairement à la couverture en delta classique sur une seule économie, le portefeuille de réplication induit un achat de titres étrangers et par cette occasion une exposition au risque de change.
La modélisation doit donc faire intervenir de nouveaux actifs risqués : les changes.

1.1 Notations

On pose H le pay off du produit multimonde. On posera pour la suite les indices $(S_k(t))_{k=1,\ldots,6}$ du panier du produit et leur économie respective dans l'ordre suivant :

1. Eurostock50 (EUR)
2. Ftse (GBP)
3. P500 (USD)
4. Hangseng (CNY)
5. Nikkei (JPY)
6. SPASX200 (AUD)

On notera aussi $(r_k(t))_{k=1,\ldots,6}$ les taux sans risque de chaque économie et $(X_k(t))_{k=1,\ldots,6}$ les changes associés pour revenir à la monnaie domestique : l'euro. [1]

Le pay off faisant intervenir seulement les performances de ces indices on peut noter $H = u(S_1, \ldots, S_6)$.

1.2 Modèle de Black&Scholes

On utilisera la modélisation classique de Black& Scholes pour écrire la dynamique de prix des différents actifs.

1.2.1 Sous probabilité historique

On modélise le marché sous l'espace de probabilité historique filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ de la façon suivante :

⋆ Actif risqué domestique :

$$dS_1(t) = S_1(t)\left(\mu^1(t)dt + \sigma^1(t).dB(t)\right)$$

⋆ Taux de change :

$$(\forall k \in \{2, \ldots, 6\})\, dX_k(t) = X_k(t)\left(\mu^{X_k}(t)dt + \sigma^{X_k}(t).dB(t)\right)$$

⋆ Actifs risqués étrangers :

$$(\forall k \in \{2, \ldots, 6\})\, dS_k(t) = S_k(t)\left(\mu^k(t)dt + \sigma^k(t).dB(t)\right)$$

⋆ Actifs non risqués :

$$(\forall k \in \{1, \ldots, 6\})\, dR_k(t) = R_k(t)r^k(t)dt$$

Où $B(t)$ est un MB à 11 dimensions partant de 0.

Par la suite on supposera l'ensemble des trend μ et des volatilités σ déterministes et constants au cours du temps.

1. Bien évidemment $X_1(t) = 1$ et ne sera pas utilisé puisque S_1 est un actif domestique

1.2.2 Reconsidération des actifs en euros

On se place pour la suite dans l'économie domestique, pour cela il faut que chacun des actifs considérés soit exprimé en euro : on use donc des taux de changes pour convertir les actifs risqués.
La dynamique sous probabilité historique devient alors la suivante après application de la formule d'Itô : [2]

- $dS_1(t) = S_1(t)\left(\mu^1 dt + \sigma^1.dB(t)\right)$
- $dR_1(t) = R_1(t)r^1(t)dt$
- $(\forall k \in \{2,\dots,6\})\, d(X_kS_k)(t) = X_k(t)S_k(t)\left[\left(\mu^k + \mu^{X_k} + \sigma^k.\sigma^{X_k}\right)dt + \left(\sigma^k + \sigma^{X_k}\right).dB(t)\right]$
- $(\forall k \in \{2,\dots,6\})\, d(X_kR_k)(t) = X_k(t)R_k(t)\left[\left(\mu^{X_k} + r^k(t)\right)dt + \sigma^{X_k}(t).dB(t)\right]$

On pose alors le vecteur des trends et la matrice des volatilités dans l'univers euro :

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \left(\mu_2 + \mu^{X_2} + \sigma^2.\sigma^{X_2}\right) \\ \vdots \\ \left(\mu_6 + \mu^{X_6} + \sigma^6.\sigma^{X_6}\right) \\ \left(\mu^{X_2} + r^2(t)\right) \\ \vdots \\ \left(\mu^{X_6} + r^6(t)\right) \end{bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{bmatrix} \left(\sigma^1\right)^T \\ \left(\sigma^2 + \sigma^{X_2}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\sigma^6 + \sigma^{X_6}\right)^T \\ \left(\sigma^{X_2}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\sigma^{X_6}\right)^T \end{bmatrix}$$

1.3 Prix sous probabilité historique

On suppose que la matrice de volatilité σ est inversible et que $\sigma.\sigma^T$ soit minoré au sens des matrices symétriques.
Sous ces hyposthèses, le marché est complet et il existe une probabilité risque neutre domestique Q^d sous laquelle les actifs domestiques actualisés sont des martingales.
La prime de risque associé est $\lambda(t) = \sigma^{-1}.\left(r^1(t).\mathbf{1}_{11} - \mu(t)\right)$.

1.3.1 Dynamique sous Q^d

On note $W^d(t) = B(t) + \int_0^t \lambda(t)dt$ le mouvement brownien associé au nouvel espace risque neutre.
Les dynamiques des actifs sous cette probabilités sont alors :

- $dS_1(t) = S_1(t)\left(r^1(t)dt + \sigma^1.dB(t)\right)$
- $dR_1(t) = R_1(t)r^1(t)dt$
- $(\forall k \in \{2,\dots,6\})\, d(X_kS_k)(t) = X_k(t)S_k(t)\left[r^1(t)dt + \left(\sigma^k + \sigma^{X_k}\right).dB(t)\right]$
- $(\forall k \in \{2,\dots,6\})\, d(X_kR_k)(t) = X_k(t)R_k(t)\left[r^1(t)dt + \sigma^{X_k}(t).dB(t)\right]$

2. L'ensemble des actifs sont dans l'économie domestique désormais

1.3.2 Portefeuille de couverture et prix

Le portefeuille de couverture V est alors constitué des actifs suivants en t :

- $\Delta_1(t)$ actifs S_1
- $\Delta_k(t)$ actifs $X_k S_k$ pour $k \in \{2, \dots, 6\}$
- $\Delta_{k+6}(t)$ actifs $X_k R_k$ pour $k \in \{1, \dots, 6\}$

En supposant ce portefeuille de couverture autofinancé et admissible on a alors que le prix du portefeuille actualisé au taux sans risque domestique $\widetilde{V}$ est une martingale sous Q^d.

Dès lors on a l'égalité suivante pour $t < T$: $\widetilde{V}(t) = E^{Q^d}\left[\widetilde{V}(T) \mid \mathcal{F}_t\right]$.

Si on impose $V(T) = H$ alors par absence d'oportunité d'arbitrage, le prix du produit est le prix du portefeuille de couverture $V(t)$ et on a l'égalité suivante :

$$Prix(t) = V(t) = E^{Q^d}\left[\frac{R_1(t)}{R_1(T)} H \mid \mathcal{F}_t\right]$$

1.3.3 Calcul des deltas

Pour intégrer les sous-jacents du portefeuille de couverture on peut utiliser une nouvelle fonction $g(s, x, y)$ tel que :

$$g\left(S_1, (X_2 S_2 \dots, X_6 S_6), (X_2 R_2, \dots, X_6 R_6)\right) = u\left(S_1, \left(\frac{X_2 S_2}{X_2 R_2} * R_2\right), \dots, \left(\frac{X_6 S_6}{X_6 R_6} * R_6\right)\right) = H$$

Dans ce cas, le prix en t vaut $prix(t) = \phi\left(S_1(t), ((X_2 S_2)(t) \dots, (X_6 S_6)(t)), ((X_2 R_2)(t), \dots, (X_6 R_6)(t))\right)$ et on obtient les égalités suivantes :

- $\Delta_1(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t)$
- $(\forall k \in \{2, \dots, 6\})\ \Delta_k(t) = \frac{\partial \phi}{\partial x_{k-1}}(t)$
- $(\forall k \in \{2, \dots, 6\})\ \Delta_{k+6}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial y_{k-1}}(t)$
- $\Delta_7(t) = \frac{1}{R_1(t)}\left(V(t) - \left(\Delta_1 S_1(t) + \sum_{k=2}^{6} \Delta_k(t)(X_k S_k)(t) + \Delta_{k+6}(t)(X_k R_k)(t)\right)\right)$

On montre qu'avec cette stratégie, le portefeuille est autofinancé, admissible et réplique le pay off H. C'est donc un portefeuille de couverture du produit `multimonde21`.

2 Calibration du modèle

On part du modèle précédent avec paramètres constants au cours du temps.

2.1 Taux d'intérêt sans risque

À remplir : choix du modèle etc ...

2.2 Paramètres de la dynamique

On rappelle que tout actif de dynamique $\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu^i dt + \sigma^i.dB(t)$, où B est un MB à n dimension sous probabilité historique , s'intègre en :

$$S_i(t+1) = S_i(t) exp\left(\mu^i - \frac{(\sigma^i)^2}{2} + \sigma^i.\varepsilon(t)\right)$$

Où $\varepsilon(t) \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbf{1}_n)$ et $(\sigma^i)^2 = \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k^i)^2$

Maintenant, en prenant $\mathcal{R}_i(t) = log\left(\frac{S_i(t+1)}{S_i(t)}\right)$ les log-rendements de l'actif entre t et $t+1$ on obtient

$$\mathcal{R}_i(t) = \ drift^i \ + \sigma^i.\varepsilon(t) \text{ où } drift^i = \mu^i - \frac{(\sigma^i)^2}{2}$$

2.2.1 Matrice de volatilité

En utilisant la covariance on obtient :

$$Co\mathbb{V}ar\left[\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_j\right] = (\sigma.\sigma^T)_{ij}$$

Ainsi, en utilisant la matrice de variance-covariance empirique (débiaisé) sur un échantillon de m log-rentabilité des actifs on obtient A_m un estimateur sans biais de $\sigma.\sigma^T$.
En prenant la matrice de cholesky[3] de A_m on obtient $cholesky(A_m) = \widetilde{\sigma}_m$ un estimateur sans biais de σ la matrice de vol.

2.2.2 Drift

En utilisant l'espérance on obtient :

$$E\left[\mathcal{R}_i\right] = drift^i$$

Ainsi, en utilisant la moyenne empirique sur un échantillon de m log-rentabilités de l'actif i on obtient M_m^i un estimateur sans biais à variance minimale du $drift^i$.

2.2.3 Trend

Connaissant le drift de l'actif i et la matrice de volatilité, sur un échantillon de m log-rentabilités, on obtient l'estimateur $\widetilde{\mu}_m^i = M_m^i - \frac{\widetilde{\sigma}_m}{2}$ sans biais du trend μ^i

3. On aurait pu prendre la matrice racine aussi, mais la matrice de cholesky a la particularité d'être triangulaire rendant les calculs plus rapide par la suite

3 Méthode d'estimation du prix

Décrire la méthode de monte carlo avec variance minimale