선형대수 실라버스와 진단 Quiz

21 겨울방학 ESC 정규세션 대비

21-1 ESC 간사 강경훈

JAN 05, 2021

대부분 문제들은 고켄바흐 선대 책에서 발췌하였습니다.

가지고 계신 선대 책을 뒤져보아 최대한 풀 수 있는 만큼 풀어서 1월 5일 자정까지 답안지의 사진 파일을 강경훈에게 갠톡으로 보내주세요! 메인트랙 서브트랙 참여자분들 모두 해당합니다!

> *모든 문제를 다 푸는 것이 목적이 아니라, 내가 선형대수에 대해 **얼만큼 알아야할 것이 많은가**를 직접 체감해보기 위해서 낸 문제들입니다. 수학과 선형대수를 듣지 않았다면 대다수 문제를 풀 수 없는 것이 정상입니다. 1년 분량을 6주 12시간 분량으로 압축하는 것이 쉽지는 않지만, 직관을 앞세워 몇 가지 연결고리를 스리슬쩍 넘어가고 불필요한 군더더기를 쳐내면 개략적인 이해는 가능할 것으로 기대합니다. 적어도 6주 뒤에는 아래에 있는 문제들의 개념을 이해하고 풀 수 있습니다. 몇몇 문제는 과제로도 나갈 거니까요.*
>
> ***포기하지 않는 자에겐 반드시 그 노력과 열정에 마땅한 결실이 있습니다! 화이팅!***

Week 1

1. Fields and Vector Spaces

1. **(벡터스페이스)** n차 이하 다항식들의 공간 $\mathcal{P}_n$을 생각해보자. 즉 $p \in \mathcal{P}_n$은 다음과 같다.
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$
$\mathcal{P}_n$이 벡터 스페이스임을 보여라.

2. **(서브스페이스)** $\mathbb{R}^3$에서의 평면은 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$
이 평면이 $\mathbb{R}^3$의 subspace이기 위해서는 어떤 조건이 주어져야 하는가?

3. **(서브스페이스)** $\mathcal{P}_n$의 부분공간 S가 다음과 같을 때,
$$S = sp\{1 - 3x + 4x^2, -2 + 7x - 7x^2\}$$
$p(x) = x + x^2$는 S에 속하는가?

2. Linear Operators

1. **(선형연산자)** $M : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$인 연산자 M을 $M(p) = xp(x)$로 정의하자. M이 선형임을 보여라.

2. **(선형연산자)** $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$인 연산자 D을 $D(p) = p'(x)$로 정의하자.
(1) D가 선형임을 보여라.
(2) D의 선형연산에 대응하는 행렬 $[D]_{S,S}$를 찾아라. 이때 D의 domain과 codomain의 basis는 다항식 공간의 표준 기저를 사용한다. 예컨대 $\mathcal{P}_n$의 기저는 $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

3. **(원투원과 온투)** 그냥 아무 집합 X, Y에 대해 정의된 함수 $f : X \to Y$에 대해 생각해보자.
(1) f가 injective (1-to-1)인 필요충분조건은?
(2) f가 surjective (onto)일 필요충분조건은?
(3) f가 bijective일 필요충분조건은?

3. Determinants and Eigenvalues

1. 유한차원 벡터스페이스에서 정의된 선형연산자의 고유값과 고유벡터에 대하여 아는 대로 말해보라.

2. 정방행렬 $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$을 다음과 같이 정의하자.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A의 고유값과 고유벡터를 구하라.

(2) A는 대각화가 가능한가? 일반적으로 정방행렬이 대각화가 가능한 조건은 무엇인가?

3. 정방행렬 A의 고유값을 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$으로 할 때, 다음을 증명하라.

(1) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(2) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

4. 정방행렬 A에 대해 $A = VDV^{-1}$를 만족하는 D가 있다고 하자. 이때 A와 D는 서로 similar matrices의 관계에 있다. similar matrices에 대하여 다음을 증명하라. (간단히 직관적으로 설명해도 괜찮다.)

(1) rank와 nullity가 같다.

(2) 행렬식이 같다.

(3) characteristic polynomial이 같다.

(4) trace가 같다.

(5) algebraic과 geometric multiplicty가 같다.

Week 2 - 3

4. Orthogonality and Best Approximation

1. **(놈과 내적)** $f, g \in C[a,b]$ (a b 구간에서 연속인 함수의 공간)에 대하여 다음과 같은 연산을 정의하자.

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

(1) 위 연산이 $C[a,b]$에서의 내적을 정의하는 것을 보이시오.

(2) 위 내적에서 어떻게 norm을 유도할 수 있는가?

2. **(Linear Adjoint)** $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 에 대하여 다음을 보여라.

$$(Ax) \cdot y = x \cdot (A^T y) \quad {}^{\forall} x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

3. **(직교 기저)** $\mathcal{P}_3$ 에서 내적을 1번 문제와 같이 정의하자(대신 $C[0,1]$에서). p_1, p_2, p_3 은 다음과 같다.

$$p_1(x) = 1$$
$$p_2(x) = x - 1/2$$
$$p_3(x) = x^2 - x + 1/6$$

(1) $\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3\}$이 직교 기저임을 보여라.

(2) $q(x) = x^2 + 2x + 3$의 $\mathcal{X}$에서의 좌표를 $\mathbf{R}^3$ 벡터로 나타내라.

4. **(직교 투영)** $C[0,1]$에서 내적을 1번 문제와 같이 정의하자. $f(x) = x$에 대하여, $C[0,1]$의 부분공간

$$S_1 = sp\{1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x)\}$$

에서의 f에 대한 best approximation을 찾아라.

Week 4 - 5

5. Spectral Theory of Symmetric Matrices

1. **(대칭행렬)** $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$에 대하여 다음을 보여라.

   (1) $A^T A$는 positive semidefinite하다.

   (2) $A^T A$의 모든 고유값은 0보다 크거나 같다.

2. **(최적화)** $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 $q(x) = (1/2)x \cdot (Ax) + b \cdot x$로 정의하자.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

   q의 모든 global minimizer는 존재하지 않는다. 왜 그런가?

3. **(등호 조건 최적화)** f, g가 다음과 같을 때 ($x \in \mathbb{R}^2$)

   $$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$
   $$g(x) = x_1 + x_2 - 1$$

   $g(x) = 0$을 만족하면서 $f(x)$를 최소화하는 x의 값을 찾아라.

Week 6

6. Singular Value Decomposition

1. 다음 행렬 A의 SVD를 구하고, 이를 outer product 꼴로 나타내어라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 다음 문장의 참 거짓을 판별하시오. (20-2 이지현교수님 선대 퀴즈 by 강민범 조교님)

   (1) 임의의 실행렬 A의 singular value는 $A^T A$의 eigenvalue이다.

   (2) 임의의 실행렬 A와 실수 k에 대하여 σ가 A의 singular value이면 $|k|\sigma$는 kA의 singular value이다.

   (3) 대칭 실행렬 A의 고유값 λ는 곧 A의 singular value이다.

3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$에 대하여 singular value를 $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$이라고 할 때, 다음을 보여라.

$$\sigma_n \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq \sigma_1 \|x\|_2$$

   이때 $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$이다.