Raport LAB 1 – Jakub Kwaśniak 331396

1. **Treść polecenia**

Znana jest funkcja celu:

- $\boldsymbol{f(x)=Ax+Bsin(x)}$
  $x\in(-4\pi,4\pi)$

- $\boldsymbol{g(x,y)=Cxy/(e^{**}(x^{**}2+y^{**}2))}$
  $x\in(-2,2)$
  $y\in(-2,2)$

Gdzie A, B, C to kolejne dodatnie cyfry numeru indeksu poczynając od jego końca. Np. dla 321037 A=7, B=3, C=1

- W moim rozwiązaniu A=6, B=9, C=3

Zaimplementować metodę gradientu prostego opisaną na wykładzie.
Użyć zaimplementowany algorytm do wyznaczenia ekstremów funkcji.

Zbadać wpływ następujących parametrów na proces optymalizacji:

- długość kroku uczącego
- limit maksymalnej liczby kroków algorytmu
- rozmieszczenie punktu startowego
  Zinterpretować wyniki w kontekście kształtu badanej funkcji.

2. Cel i opis eksperymentu:

W tym zadaniu badana jest skuteczność metody gradientu prostego dla wyznaczania ekstremów funkcji (optymalizacji funkcji kosztu/straty)
Wyniki zostały zbadane ze względu na 3 parametry:

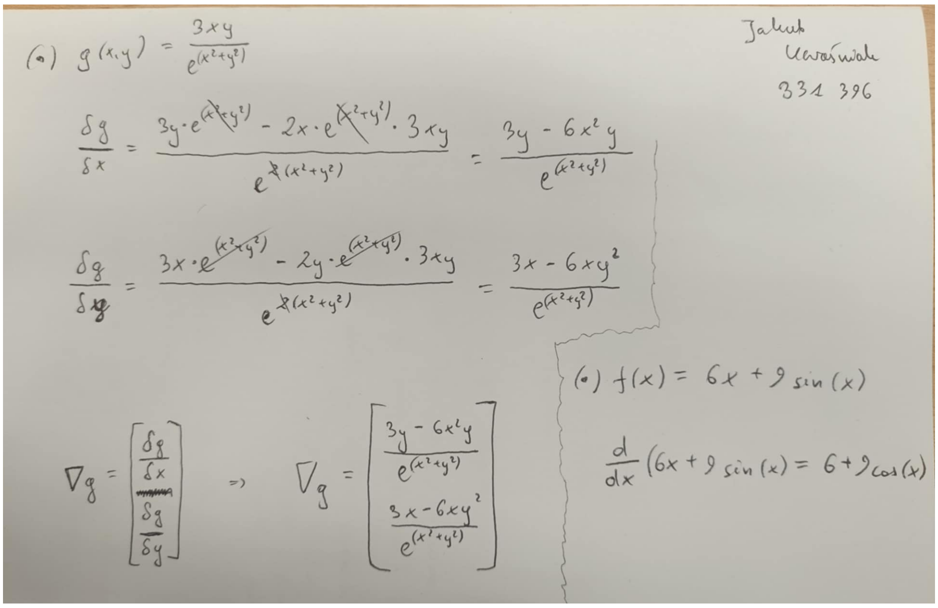
- długość kroku uczącego:
  - długość kroku uczącego ‘alpha’ mówi nam o rzędzie wielkości o jaki zmienione zostaną badane argumentu w 1 kroku optymalizacji funkcji

- limit maksymalnej liczby kroków algorytmu:
  - liczba kroków uczących algorytmu, czyli obrotów pętli – wpływa na to ile optymalizacji argumentów funkcji zostanie przeprowadzone w celu znalezienia ekstremów, mamy na celu zbadać jaka liczba kroków pozwoli uzyskać wynik bliski dokładnemu

- rozmieszczenie punktu startowego:
  - Punkt startowy dla funkcji każdorazowo wybierany był losowo z podanych w treści zadania przedziałów.

Jakość działania algorytmu dla dobranych parametrów można określić na podstawie wykresów z zaznaczoną ‘trajektorią’ znajdowania ekstremów oraz na podstawie porównania wyników z wynikami obliczonymi ręcznie bądź za pomocą dokładnych narzędzi matematycznych takich jak ‘wolfram alpha’.

W celu wykorzystania metody gradientu prostego, należy policzyć gradient dla wskazanych funkcji, czyli wektor pochodnych cząstkowych:



Jakub Uwaśniak
331 396

(a) $g(x,y) = \frac{3xy}{e^{(x^2+y^2)}}$

$$\frac{\delta g}{\delta x} = \frac{3y\cdot \cancel{e^{(x^2+y^2)}} - 2x\cdot \cancel{e^{(x^2+y^2)}}\cdot 3xy}{e^{\cancel{2}(x^2+y^2)}} = \frac{3y - 6x^2y}{e^{(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\delta g}{\delta y} = \frac{3x\cdot \cancel{e^{(x^2+y^2)}} - 2y\cdot \cancel{e^{(x^2+y^2)}}\cdot 3xy}{e^{\cancel{2}(x^2+y^2)}} = \frac{3x - 6xy^2}{e^{(x^2+y^2)}}$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\delta g}{\delta x} \\ \frac{\delta g}{\delta y} \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla g = \begin{bmatrix} \frac{3y - 6x^2y}{e^{(x^2+y^2)}} \\ \frac{3x - 6xy^2}{e^{(x^2+y^2)}} \end{bmatrix}$$

(b) $f(x) = 6x + 9\sin(x)$

$$\frac{d}{dx}(6x + 9\sin(x)) = 6 + 9\cos(x)$$

3. Odtworzenie wyników:

- Aktywacja środowiska wirtualnego oraz instalacja potrzebnych bibliotek:

```
python3 -m venv venv
source venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
```

- Uruchomienie skryptu:

```
python3 ../WSI-JAKUB-KWASNIAK/lab1/lab1_Jakub_Kwasniak.py
--function [‘f’/ ‘g’] -a [learning_rate] -l [limit_of_iterations]
```

  - Argument wywołania ‘function’ przyjmuje tylko 2 możliwe wartości – f lub g (w zależności od funkcji, którą chcemy optymalizować), wartość domyślna to ‘f’
  - Argument wywołania -a/--alpha przyjmuje wartość typu float
  - Argument wywołania -l/--limit przyjmuje wartość typu int

- Analiza wyników:

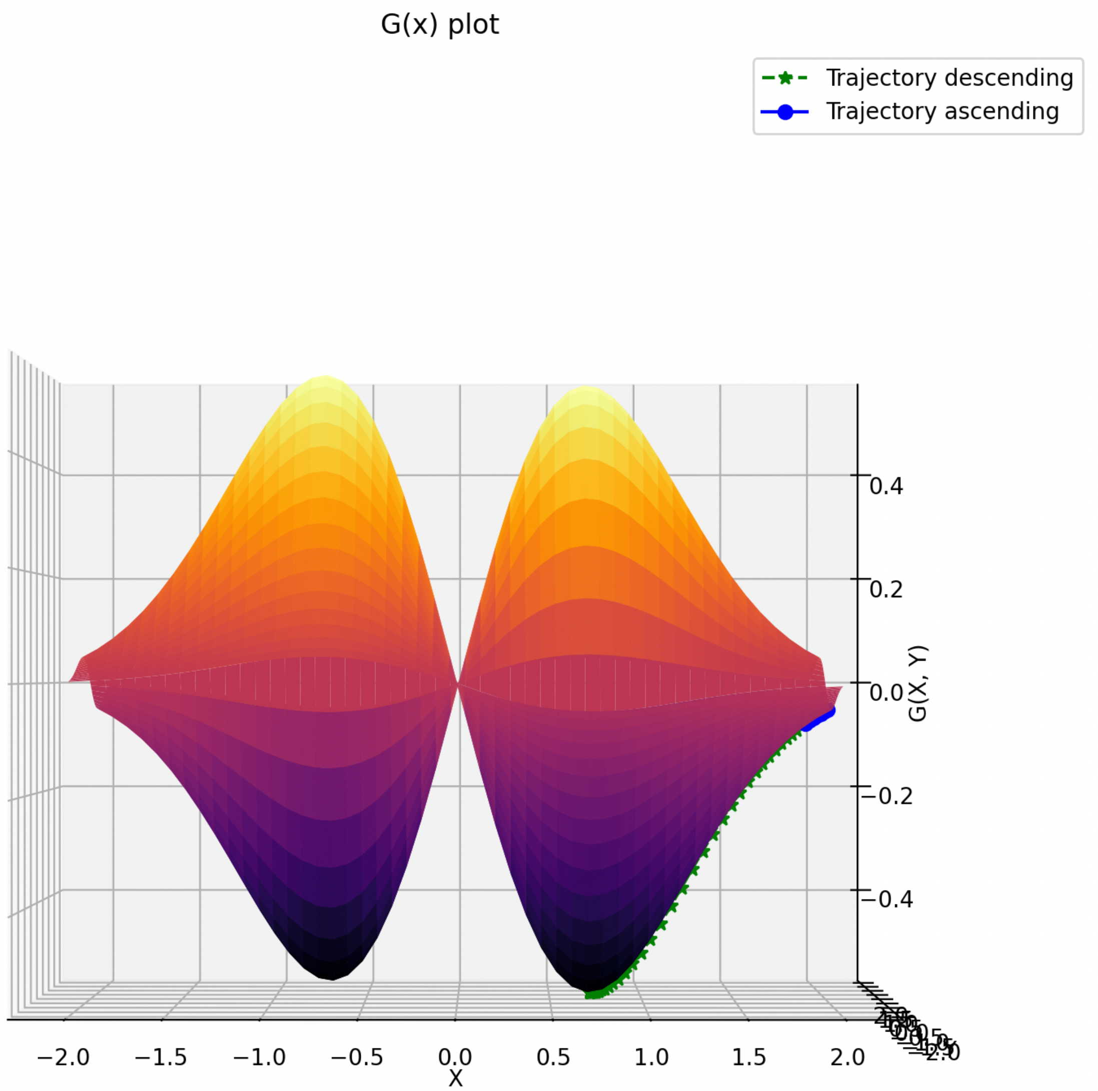
  - W terminalu wyświetlone zostaną wylosowane argumenty początkowe funkcji oraz wyznaczone metodą gradientu prostego ekstrema w notacji ([współrzędne], ekstremum)

4. Wyniki przeprowadzonego eksperymentu:

- Przykład 1:
  - Długość kroku uczącego ‘alpha’: 0.1
  - Limit maksymalnej liczby kroków algorytmu: 10 000

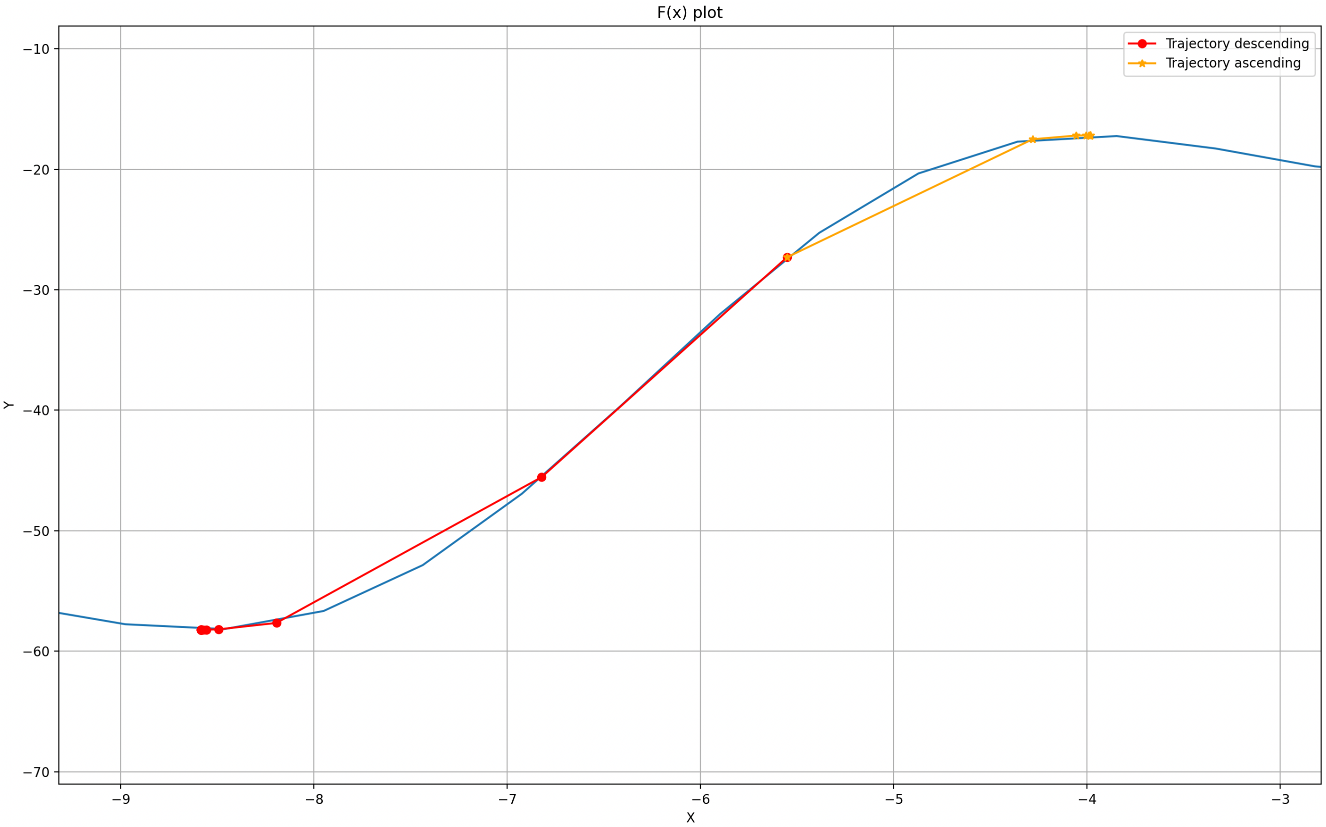
Funckja G(x, y):

```
Starting point:  [1.8408411644654512, -0.5772178114746165]
Function g has minimum ([ 0.70710678 -0.70710678], -0.5518191617571636)
Function g has maximum ([ 1.98390852 -0.5494406 ], -0.04721935420016936)
```



Funkcja F(x):

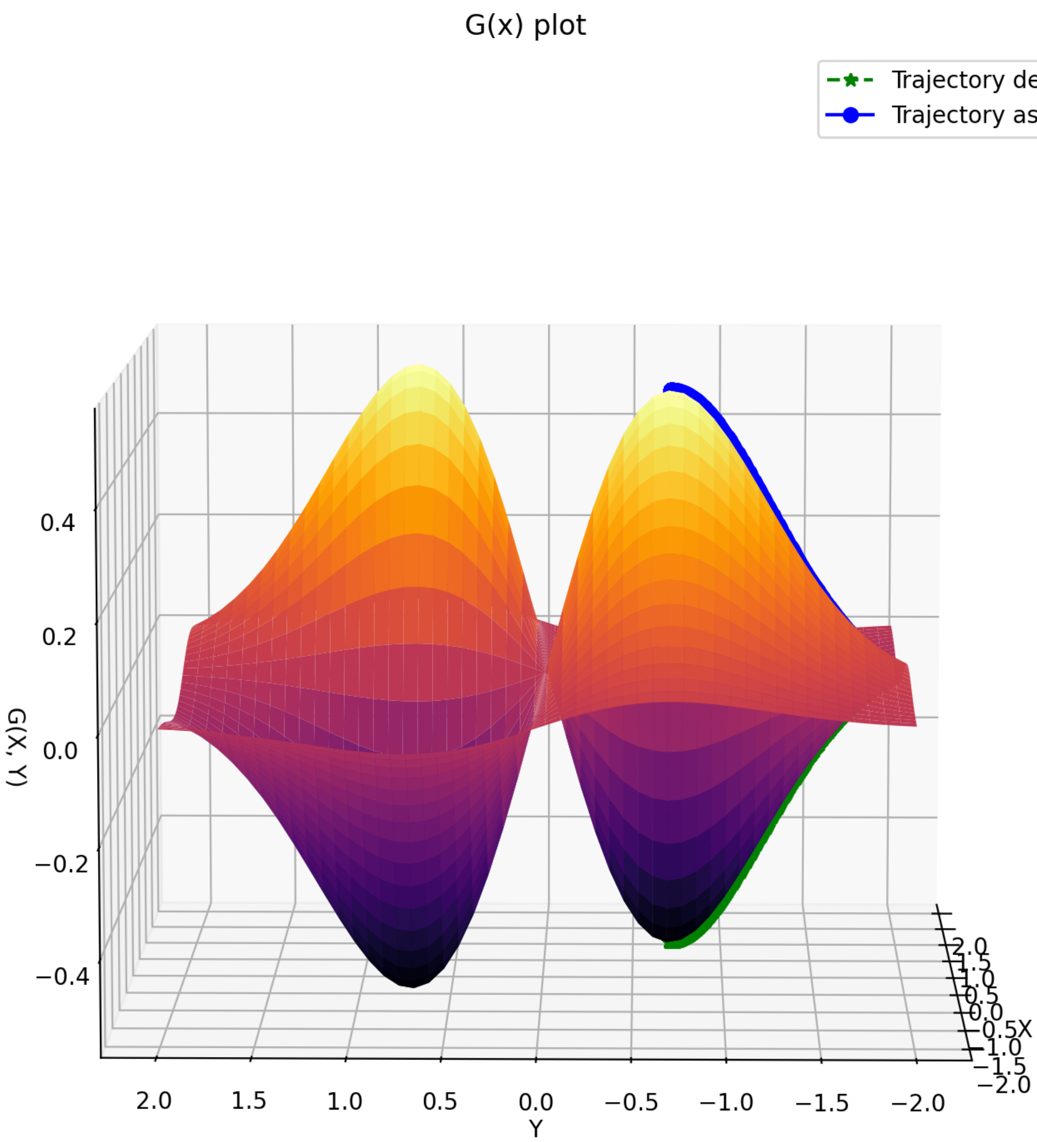
```
Starting point:   [-5.552069732711495]
Function f has minimum ([-8.58370929], [-58.21045967])
Function f has maximum ([-3.98266132], [-17.18776401])
```



- Przykład 2:
  - Długość kroku uczącego ‘alpha’: 0.01
  - Limit maksymalnej liczby kroków algorytmu: 1 000

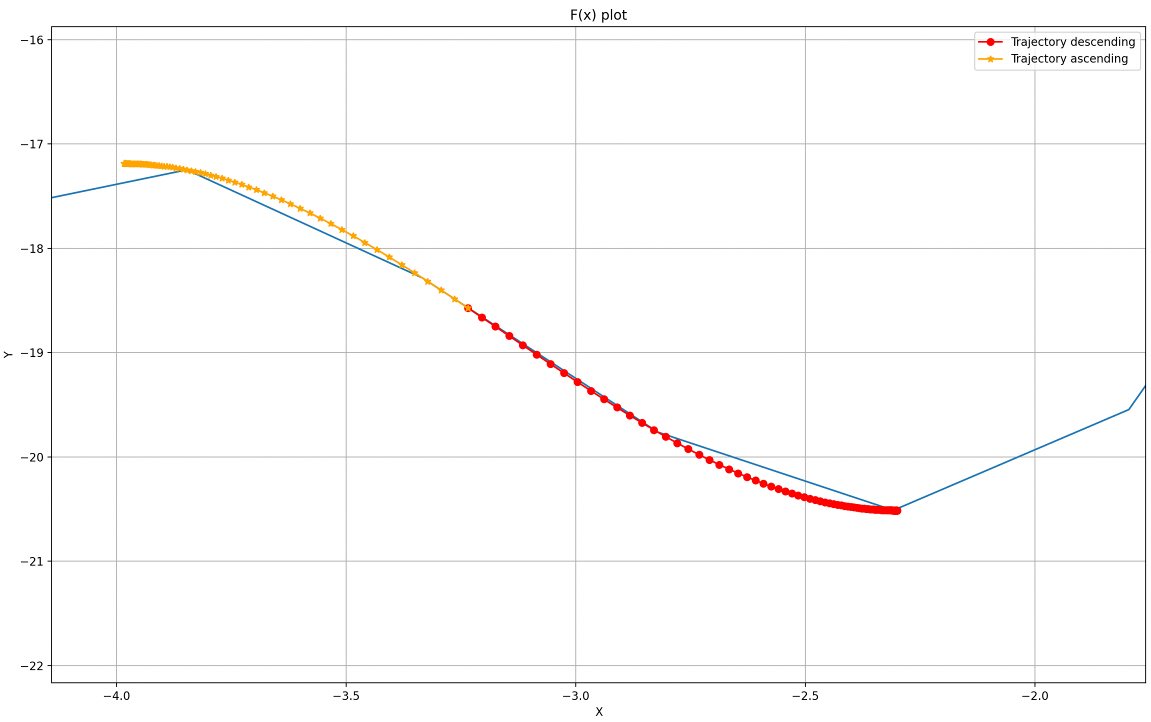
Funckja G(x, y):

```
Starting point:  [-0.07560943862421388, -1.9183131824109867]
Function g has minimum ([ 0.70710654 -0.70710838], -0.5518191617542678)
Function g has maximum ([-0.70710676 -0.70710693], 0.5518191617571395)
```



Funkcja F(x):

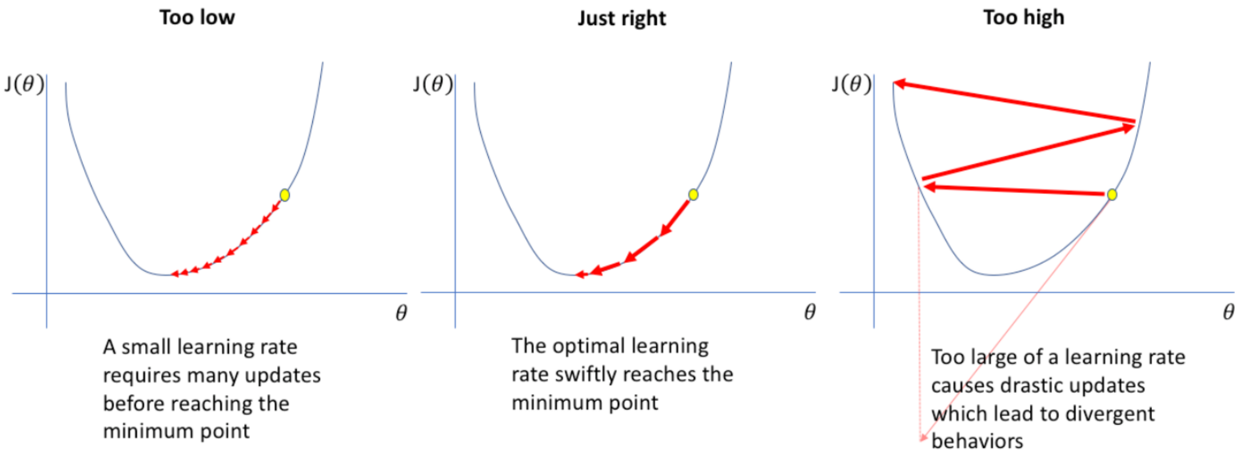
```
Starting point:  [-3.2345250340891933]
Function f has minimum ([-2.30052398], [-20.51134783])
Function f has maximum ([-3.98266132], [-17.18776401])
```



5. **Omówienie wyników eksperymentu - wnioski:**

- Długość kroku uczącego:
  - Optymalizując funkcję należy zbadać wiele różnych współczynników uczenia ‘alpha’ i dobrać najlepszy do badanej funkcji – dla każdej funkcji optymalna wartość współczynnika będzie inna.
  - Zbyt długi krok uczący spowoduje duże odchylenia między kolejnymi punktami wyznaczanej trajektorii poszukiwania ekstremów co może spowodować pominięcie ekstrema i wyznaczenie błędnego wyniku, z kolei zbyt krótki krok uczący spowoduje znaczący wzrost czasu wykonywania programu oraz będzie wymagał wykonania większej ilości iteracji w celu wyznaczenia ekstremów.

Współczynnik uczenia (learning rate) α



Źródło: „Regresja” Bootcamp Golem 2023, autorstwo: Weronika Piotrowska

- Limit maksymalnej liczby kroków algorytmu:
  - Za mała ilość iteracji/kroków algorytmu może spowodować uzyskanie błędnie wyznaczonego ekstremum - algorytm nie dojdzie do lokalnego bądź globalnego ekstremum a zatrzyma się w ‘trakcie drogi’.
  - Za duża ilość iteracji/kroków algorytmu może spowodować wzrost czasu wykonywania algorytmu oraz marnowanie mocy obliczeniowej - gdy ekstremum zostanie aproksymowane z dużą dokładnością -> gradient będzie bliski zeru, a więc kolejne iteracje spowodują nieznaczące zmiany w wyznaczonym ekstremum (wartość będzie oscylowała wokół już wyznaczonej).

- Rozmieszczenie punktu startowego:
  - Rozmieszczenie wylosowanego punktu startowego wpływa na długość wyznaczonej trajektorii dojścia algorytmu do ekstremum, czyli na ilość operacji potrzebną do wyznaczenia ekstremów
  - Rozmieszczenie wylosowanego punktu startowego wpływa również na to jakie ekstrema zostaną wyznaczone – lokalne czy globalne