Raport z ćwiczenia NUM1
numeryczne przybliżenie pochodnej funkcji

Bartosz Satoła

15.10.2024

Contents

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zbadanie błędu przybliżenia numerycznego pochodnej funkcji $f(x) = \sin(x^3)$, stosując dwie różne metody. Wyniki zostały porównane z dokładną wartością pochodnej (wyliczonej z odpowiednich wzorów używanych w analizie matematycznej) w celu oceny dokładności obu metod w zależności od kroku h.

2 Opis ćwiczenia

W ramach ćwiczenia zaimplementowano funkcje obliczające numerycznie pochodne funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ dla zmiennych typu `float` oraz `double`, z wykorzystaniem dwóch metod:

- Metody różnic w przód,
- Metody różnic centralnych.

Dla obu metod obliczono błędy bezwzględne przybliżeń pochodnej w punkcie $x = 0.2$, przy różnych krokach h, których wartości zostały rozłożone logarytmicznie. Wyniki zapisano do plików CSV, a następnie wygenerowano wykresy błędów przybliżenia w zależności od h.

3 Wstęp teoretyczny

Pochodna funkcji $f(x)$ może być przybliżona numerycznie na kilka sposobów. Dwie z najczęściej używanych metod to:

- **Metoda różnic w przód** polegająca na przybliżeniu pochodnej w punkcie x poprzez wartość funkcji w punkcie $x + h$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

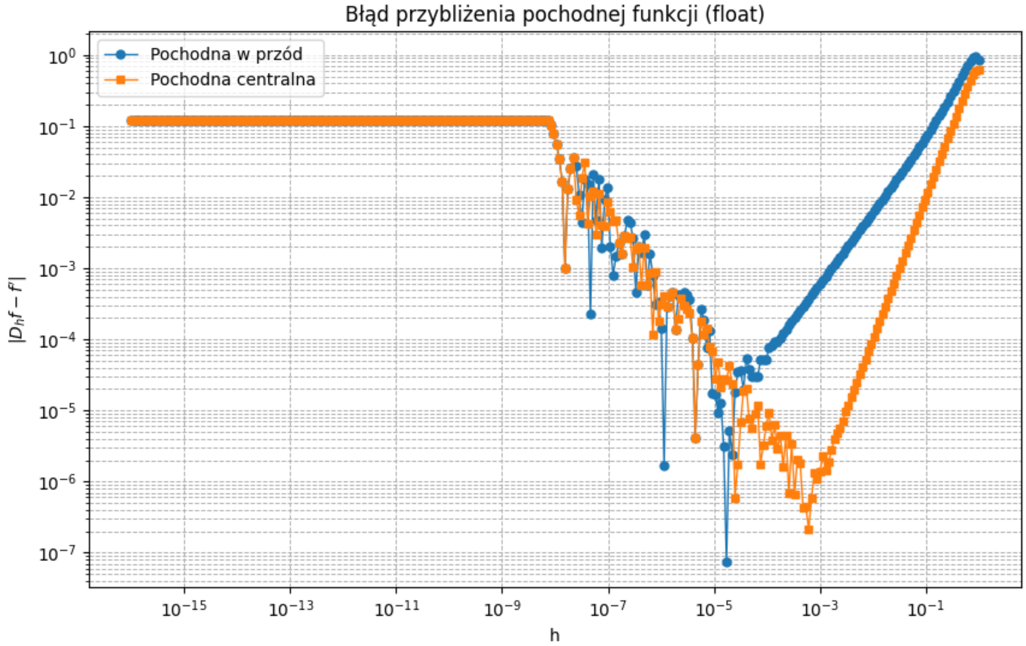
- **Metoda różnic centralnych** korzystająca z wartości funkcji w punktach $x + h$ oraz $x - h$, oferująca lepsze przybliżenie:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Teoretycznie metoda różnic centralnych powinna być dokładniejsza niż metoda różnic w przód, co oznacza, że błąd przybliżenia w tej metodzie powinien być mniejszy przy tym samym h.

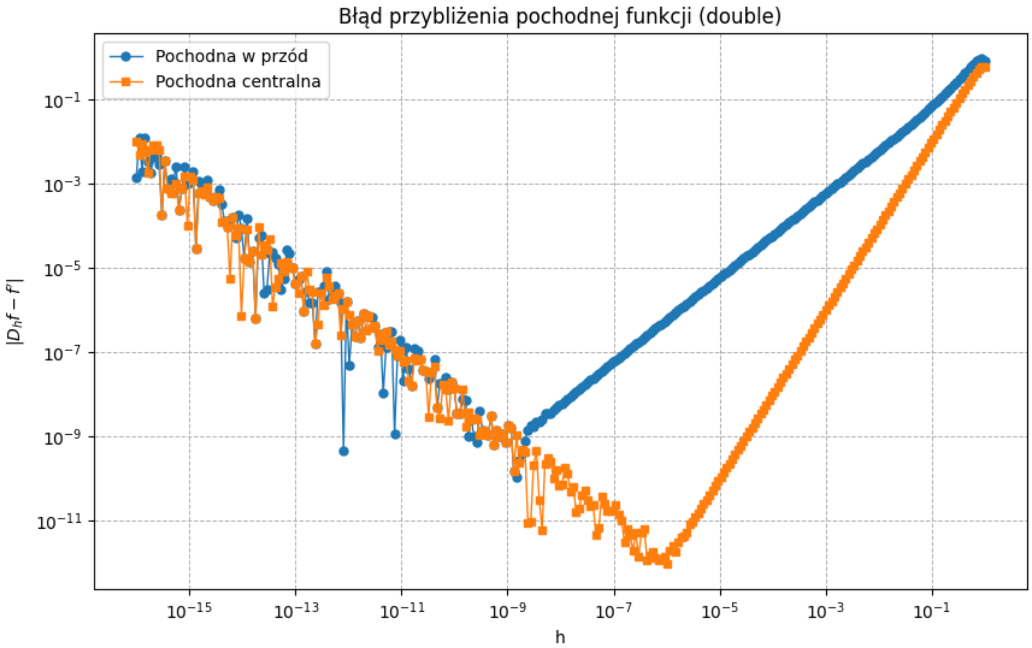
4 Omówienie wyników

Poniżej zamieszczono dwa wykresy przedstawiające błąd numerycznego przybliżenia pochodnej dla typów zmiennych `float` oraz `double` wykonane przy pomocy `matplotlib`. Oczekujemy, że metoda różnic centralnych zapewni dokładniejsze wyniki dla większych kroków h, a błąd będzie malał wraz ze zmniejszaniem h, dopóki błędy numeryczne wynikające z ograniczonej precyzji obliczeń nie zaczną dominować.



Wykres 1: Błąd przybliżenia pochodnej dla zmiennej `float`.

Na wykresie 1 widać, że dla zmiennej typu `float`, metoda różnic centralnych daje mniejsze błędy niż metoda różnic w przód, szczególnie dla większych kroków h. Jednakże przy bardzo małych wartościach h, błąd numeryczny zaczyna rosnąć z powodu ograniczeń precyzji obliczeń.



Wykres 2: Błąd przybliżenia pochodnej dla zmiennej `double`.

Na wykresie 2 dla zmiennej typu `double`, błędy są mniejsze niż dla typu `float`, co wynika z wyższej precyzji obliczeń. W obu przypadkach metoda różnic centralnych oferuje lepsze przybliżenie, ale również tutaj dla bardzo małych wartości h błąd numeryczny zaczyna rosnąć.

5 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że:

- Metoda różnic centralnych jest dokładniejsza niż metoda różnic w przód (zwłaszcza dla większych kroków `h`).
- Wraz ze zmniejszaniem kroku h błąd początkowo maleje. Jednak po przekroczeniu pewnej granicy rośnie z powodu ograniczeń precyzji obliczeń, szczególnie dla zmiennych typu `float`.
- Zmienna typu `double` oferuje większą dokładność numeryczną, co pozwala na uzyskanie lepszych wyników przy mniejszych krokach h.