Raport z zadania NUM5

Analiza metod iteracyjnych dla układu równań liniowych

Bartosz Satoła

28 listopada 2024

Spis treści

1 Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia było rozwiązanie układu równań liniowych opisanego równaniem:

$$A \cdot x = b,$$

gdzie macierz A ma specyficzną strukturę:

$$A = \begin{bmatrix} d & 0.5 & 0.1 & & & \\ 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & & \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0.1 & 0.5 & d & 0.5 \\ & & & 0.1 & 0.5 & d \end{bmatrix},$$

a wektor b to $[1, 2, 3, \ldots, N]^T$ o długości $N = 200$.

Macierz A jest macierzą pięciodiagonalną, co oznacza, że wartości różne od zera znajdują się wyłącznie na głównej przekątnej oraz na dwóch przekątnych powyżej i poniżej. Taka struktura pozwala na zoptymalizowane przechowywanie oraz efektywne obliczenia, ponieważ większość elementów macierzy to zera.

W zadaniu użyto dwóch metod iteracyjnych: **metody Jacobiego** oraz **metody Gaussa-Seidela**. Zadanie polegało na:

- Porównaniu obu metod pod względem szybkości zbieżności i dokładności.
- Analizie wpływu parametru d na zbieżność metod.
- Sprawdzeniu, czy macierz A spełnia warunki zbieżności, takie jak dominacja diagonalna i dodatnia określoność.
- Graficznej prezentacji błędu w kolejnych iteracjach.
- Zbadaniu przypadków, w których procedury iteracyjne mogą nie być zbieżne.

W szczególności metoda Gaussa-Seidela wymaga, aby macierz była **dodatnio określona**, co oznacza, że dla dowolnego niezerowego wektora x zachodzi:

$$x^T A x > 0.$$

Dodatnia określoność jest niezbędna do zapewnienia stabilności i zbieżności tej metody iteracyjnej. W przypadku metody Jacobiego, koniecznym warunkiem zbieżności jest dominacja diagonalna macierzy A, czyli:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i.$$

Oba te warunki zostały szczegółowo przeanalizowane w ramach ćwiczenia.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Macierz układu

Macierz A w zadaniu ma strukturę pięciodiagonalną, co oznacza, że wartości różne od zera znajdują się na:

- głównej przekątnej (d),
- pierwszej przekątnej powyżej i poniżej (0.5),
- drugiej przekątnej powyżej i poniżej (0.1).

Taka macierz jest rzadka, co pozwala na zoptymalizowane przechowywanie i obliczenia. W zadaniu zastosowano wstęgową reprezentację macierzy, ograniczając pamięć do przechowywania tylko pięciu wstęg.

2.2 Zbieżność metod iteracyjnych

Dla zbieżności metod iteracyjnych, takich jak Jacobi i Gauss-Seidel, konieczne są odpowiednie warunki na macierz A:

- **Dominacja diagonalna:** Metoda Jacobiego wymaga, aby macierz była dominująca diagonalnie, co oznacza, że każdy element głównej przekątnej jest większy (w sensie bezwzględnym) od sumy wartości z innych kolumn tego samego wiersza:

  $$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i.$$

- **Dodatnia określoność:** Metoda Gaussa-Seidela wymaga, aby macierz była dodatnio określona. Oznacza to, że dla każdego niezerowego wektora x zachodzi:

  $$x^T A x > 0.$$

  Dodatnia określoność jest również gwarantowana, jeśli wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie.

2.3 Metody iteracyjne

Metody iteracyjne, takie jak Jacobi i Gauss-Seidel, wykorzystują przybliżone obliczenia, tworząc sekwencję wektorów $x^{(k)}$, która zbiega do dokładnego rozwiązania x. Poniżej opisano kluczowe różnice między tymi metodami.

2.3.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego dzieli macierz A na:

$$A = D + R,$$

gdzie:

- D to macierz diagonalna (zawiera elementy głównej przekątnej),

- $R = A - D$ to macierz zawierająca pozostałe elementy (spoza głównej przekątnej).

Iteracyjny schemat Jacobiego wygląda następująco:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \cdot (b - R \cdot x^{(k)}),$$

co dla każdego elementu x_i można zapisać jako:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Zalety:

- Prosta implementacja.
- Możliwość łatwej równoległości obliczeń, ponieważ każdy $x_i^{(k+1)}$ jest obliczany niezależnie.

Wady:

- Wolniejsza zbieżność w porównaniu do metody Gaussa-Seidela.
- Wrażliwość na uwarunkowanie macierzy; wymaga dominacji diagonalnej dla zbieżności.

2.3.2 Metoda Gaussa-Seidela

Metoda Gaussa-Seidela różni się od Jacobiego tym, że natychmiast wykorzystuje nowo obliczone wartości $x_i^{(k+1)}$ w bieżącej iteracji:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Zalety:

- Szybsza zbieżność dzięki natychmiastowemu wykorzystaniu nowych wartości.
- Mniejsza liczba iteracji w porównaniu do metody Jacobiego.

Wady:

- Brak możliwości łatwej równoległości obliczeń.
- Wymaga, aby macierz była dodatnio określona, co ogranicza zakres jej zastosowania.

2.4 Podsumowanie oczekiwanych wyników

- Dla $d = 2, 3, 4$: Macierz A spełnia warunki dominacji diagonalnej i dodatniej określoności. Obie metody powinny być zbieżne, przy czym Gauss-Seidel powinien osiągać zbieżność szybciej.
- Dla $d = 0.5$: Macierz A nie spełnia warunków dominacji diagonalnej i dodatniej określoności. W takim przypadku metody iteracyjne mogą być rozbieżne.

3 Omówienie programu

Program został zaprojektowany w języku Python z uwzględnieniem optymalizacji dla macierzy pięciodiagonalnych. Implementacja obejmuje następujące kluczowe elementy:

1. **Tworzenie macierzy pięciodiagonalnej:**
   - Macierz A jest przechowywana w formacie wstęgowym jako tablica $5 \times N$, gdzie:
     - Główna przekątna (d) znajduje się w środkowym wierszu tablicy.
     - Pierwsza nadprzekątna (0.5) i pierwsza podprzekątna (0.5) są zapisywane odpowiednio w wierszach powyżej i poniżej głównej przekątnej.
     - Druga nadprzekątna (0.1) i druga podprzekątna (0.1) są przechowywane w skrajnych wierszach tablicy.
   - Taka reprezentacja zmniejsza zużycie pamięci z $O(N^2)$ do $O(5N)$.

2. **Operacje na macierzy wstęgowej:**
   - Operacje mnożenia macierzy przez wektor zostały zoptymalizowane, aby korzystać tylko z istotnych wstęg macierzy.
   - Dzięki temu złożoność obliczeniowa operacji została zredukowana do $O(N)$.

3. **Metody iteracyjne:**
   - **Metoda Jacobiego:** Implementacja iteracji korzysta wyłącznie z danych z wstęg. Nowe wartości $x^{(k+1)}$ są obliczane w całości na podstawie wartości $x^{(k)}$ z poprzedniej iteracji.
   - **Metoda Gaussa-Seidela:** Wartości $x^{(k+1)}$ są aktualizowane w miejscu, co pozwala na natychmiastowe wykorzystanie nowych wyników w bieżącej iteracji.
   - W obu metodach normy ∞ różnic między kolejnymi przybliżeniami są obliczane w celu monitorowania zbieżności.

4. **Obliczanie dokładnego rozwiązania:**
   - Dla porównania wyników metod iteracyjnych zastosowano funkcję `numpy.linalg.solve`, która wykorzystuje eliminację Gaussa do dokładnego rozwiązania układu.

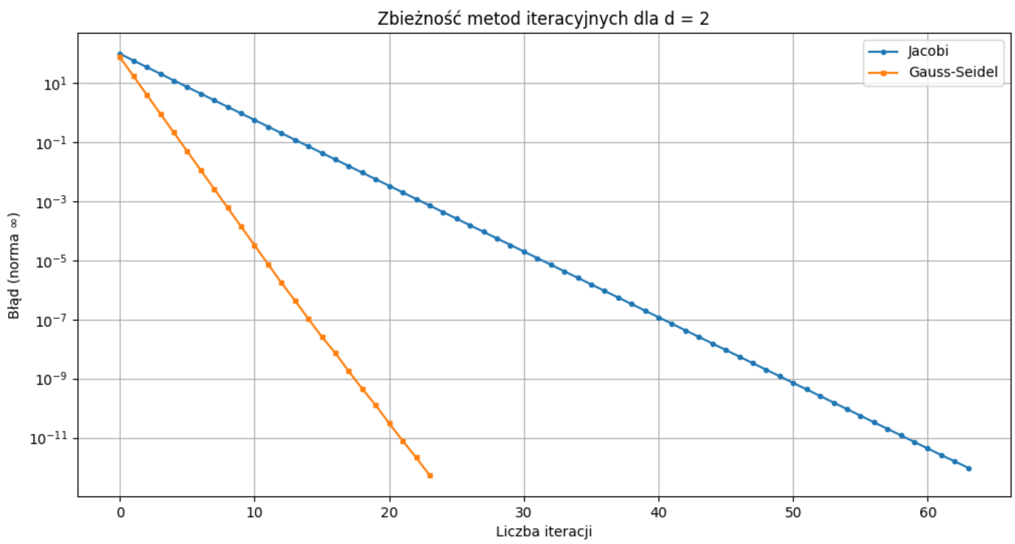
5. **Wizualizacja wyników:**
   - Wyniki są prezentowane graficznie w postaci wykresów przedstawiających zależność błędu (w normie ∞) od liczby iteracji.
   - Porównano szybkość zbieżności obu metod dla różnych wartości parametru d.

4 Przedstawienie wyników

Wyniki zostały przeanalizowane dla różnych wartości parametru d. Poniżej przedstawiono rezultaty dla kilku wartości d. Dla każdej z tych wartości został rozwiązany stosowny układ równań. Jednak z racji na długość rozwiązania, nie zostało ono zamieszczone w każdym przypadku. W celu zobaczenia pełnego rozwiązania należy uruchomić program `main.py`.

Istotny jest fakt, że w przypadkach $d = 2, 3, 4$ rozwiązanie zgadzało się z tym, zwróconym przez funkcję `numpy.linalg.solve`, z kolei dla $d = 0.5$ żadna z metod nie zwróciła poprawnego rozwiązania, co zresztą widać na wykresie.

- **Przypadek $d = 2$:**
  - Wyniki potwierdzają zbieżność obu metod iteracyjnych.
  - Metoda Gaussa-Seidela osiągnęła zbieżność szybciej niż metoda Jacobiego.



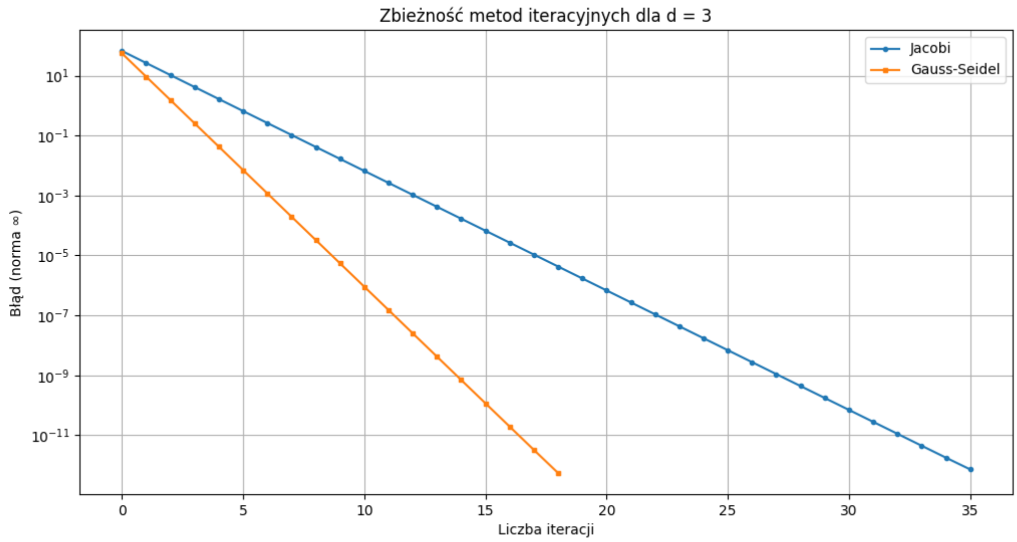
Rysunek: Zbieżność metod iteracyjnych dla $d = 2$.

Wyniki obliczeń:

```
--- d = 2 ---
Rozwiązanie dokładne:
[ 0.29582854  0.62922177  0.9373203   1.24982028  1.5625551   1.87499564
  ...
  60.65766947 81.77387418]
Rozwiązanie Jacobiego:
[ 0.29582854  0.62922177  0.9373203   1.24982028  1.5625551   1.87499564
  ...
  60.65766947 81.77387418]
Rozwiązanie Gaussa-Seidela:
[ 0.29582854  0.62922177  0.9373203   1.24982028  1.5625551   1.87499564
  ...
```

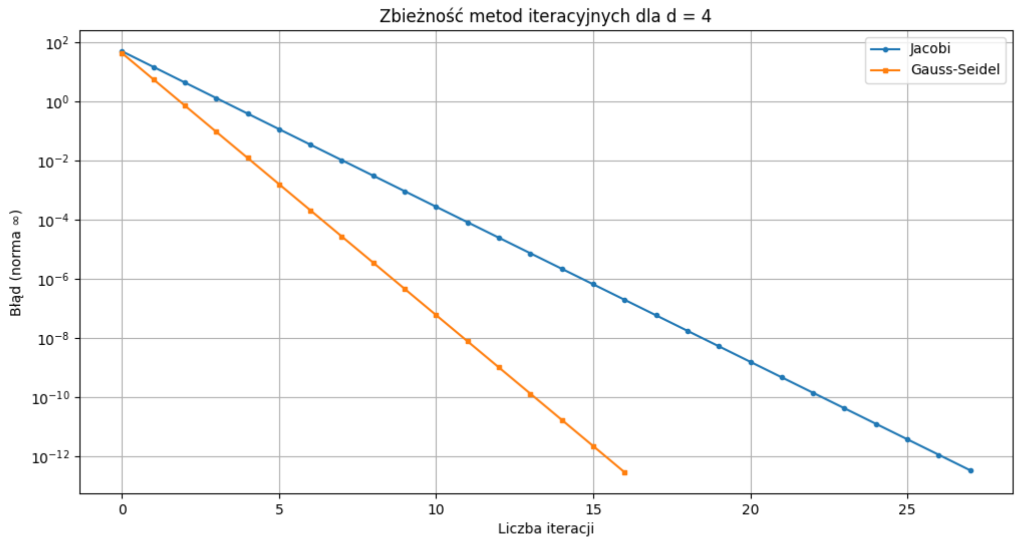
```
  60.65766947 81.77387418]
Norma końcowego błędu Jacobiego: 9.521272659185342e-13
Norma końcowego błędu Gaussa-Seidela: 5.329070518200751e-13
```

- **Przypadek** $d = 3$**:**
  - Obie metody iteracyjne były zbieżne.
  - Metoda Gaussa-Seidela wymagała mniejszej liczby iteracji niż metoda Jacobiego.



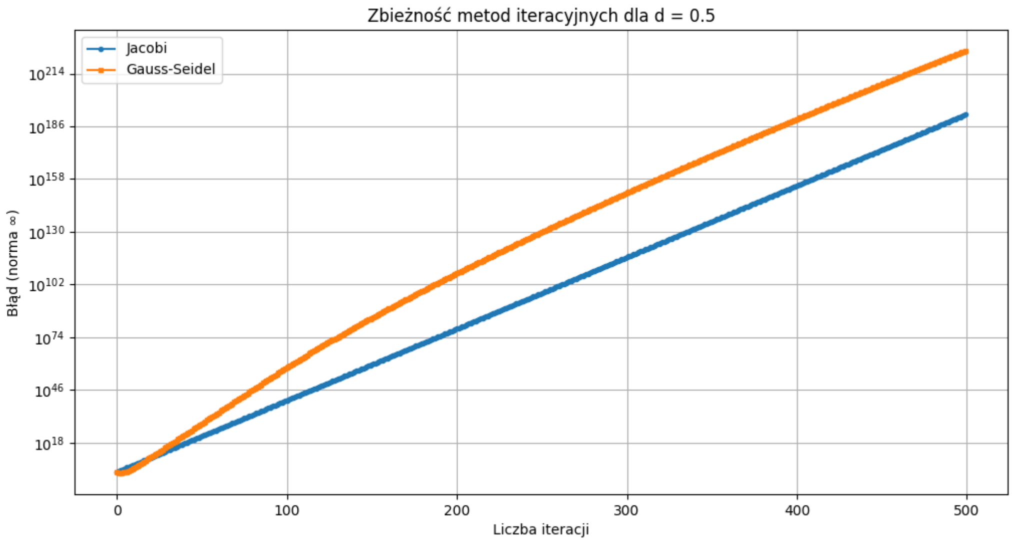
Rysunek: Zbieżność metod iteracyjnych dla $d = 3$.

- **Przypadek** $d = 4$**:**
  - Wartość $d = 4$ zapewniła najszybszą zbieżność obu metod.
  - Metoda Gaussa-Seidela ponownie była bardziej efektywna.



Rysunek: Zbieżność metod iteracyjnych dla $d = 4$.

- **Przypadek $d = 0.5$:**
  - Brak zbieżności obu metod iteracyjnych.
  - Wartość $d = 0.5$ nie spełniała warunków dominacji diagonalnej i dodatniej określoności.



Rysunek: Brak zbieżności metod iteracyjnych dla $d = 0.5$.

Wyniki obliczeń:

```
--- d = 0.5 ---
Rozwiązanie dokładne:
[ 141.24845112 -131.71774961  -37.65350752 ... 133.42318318 203.54886074
  -56.39125369]
Rozwiązanie Jacobiego:
[-8.56453537e+189 -1.58795653e+190 -2.33769802e+190 ... -7.73792000e+190
 -4.17710200e+190]
Rozwiązanie Gaussa-Seidela:
[ 1.41696879e+164 -2.75594844e+164 -3.49255503e+164 ... -1.80735246e+224
  2.73736239e+224]
Norma końcowego błędu Jacobiego: 1.462299035462992e+192
Norma końcowego błędu Gaussa-Seidela: 1.0725946057871731e+226
```

5 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyników metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidela można sformułować następujące wnioski:

5.1 Skuteczność metod iteracyjnych

- **Metoda Jacobiego:**
  - Skutecznie znajduje rozwiązanie układu równań liniowych, gdy macierz A spełnia warunek dominacji diagonalnej.
  - Ze względu na niezależność obliczeń poszczególnych elementów $x_i^{(k+1)}$, metoda jest odpowiednia dla równoległego przetwarzania obliczeń, co czyni ją użyteczną w dużych układach z zastosowaniem nowoczesnych technologii obliczeniowych.
  - Wolniejsza zbieżność w porównaniu do metody Gaussa-Seidela sprawia, że wymaga większej liczby iteracji, co może zwiększać czas obliczeń w mniej wydajnych środowiskach.
  - Nie wymaga, aby macierz A była dodatnio określona, co pozwala stosować ją w szerszym zakresie układów równań liniowych.
- **Metoda Gaussa-Seidela:**
  - Charakteryzuje się szybszą zbieżnością dzięki natychmiastowemu wykorzystaniu nowo obliczonych wartości $x_i^{(k+1)}$ w trakcie iteracji.
  - Wymaga, aby macierz była dodatnio określona, co ogranicza jej zastosowanie w układach, które nie spełniają tego warunku.
  - Skutecznie znajduje rozwiązanie układu równań liniowych w przypadkach, gdy macierz A spełnia zarówno warunek dominacji diagonalnej, jak i dodatniej określoności.
  - Brak równoległości w obliczeniach sprawia, że jest mniej efektywna w systemach wielordzeniowych lub rozproszonych, ale dobrze sprawdza się w tradycyjnych środowiskach obliczeniowych.

5.2 Zastosowanie metod iteracyjnych

- **Przypadki dobrze uwarunkowane:**
  - Dla $d = 2, 3, 4$ macierz A spełnia warunki dominacji diagonalnej i dodatniej określoności, co pozwala obu metodom iteracyjnym osiągnąć zbieżność.
  - Metoda Gaussa-Seidela była bardziej efektywna w tych przypadkach, osiągając zbieżność szybciej niż Jacobi.
  - Metoda Jacobiego wymagała większej liczby iteracji, ale również wykazała zbieżność, co potwierdza jej użyteczność w szerokim zakresie układów.
- **Przypadki źle uwarunkowane:**
  - Dla $d = 0.5$ macierz A nie spełniała warunku dominacji diagonalnej ani dodatniej określoności, co uniemożliwiło zbieżność obu metod iteracyjnych.
  - W takich przypadkach obie metody nie są stabilne, a iteracje prowadzą do rosnących błędów, co potwierdza konieczność sprawdzania warunków zbieżności przed zastosowaniem metod iteracyjnych.

5.3 Znaczenie wartości d

- Wyższe wartości d ($d \geq 2$) poprawiają dominację diagonalną macierzy A, co pozytywnie wpływa na stabilność i szybkość zbieżności metod iteracyjnych.
- Dla mniejszych wartości d, takich jak $d = 0.5$, brak dominacji diagonalnej i dodatniej określoności prowadzi do braku zbieżności. Pokazuje to, że parametry macierzy mają kluczowe znaczenie dla skuteczności metod iteracyjnych.

5.4 Ogólne wnioski

- Metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidela są skuteczne w przypadku dużych układów równań liniowych z dobrze uwarunkowanymi macierzami rzadkimi, takimi jak macierze pięciodiagonalne analizowane w tym zadaniu.
- Wybór metody iteracyjnej powinien uwzględniać właściwości macierzy:
  - Metoda Jacobiego jest bardziej elastyczna i mniej restrykcyjna, ale wolniejsza.
  - Metoda Gaussa-Seidela jest bardziej efektywna, ale wymaga spełnienia dodatkowych warunków, takich jak dodatnia określoność.