Fizyka
Zestaw 6

Jan Kwinta

2022-12-20

Zadanie 2. Obliczyć potencjał $V(x, y, z)$ jednorodnie naładowanego (ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ) cienkiego dysku o środku w poczatku układu i promieniu R leżącego w płaszczyźnie xy.

(a) znaleźć ogólne wyrażenie (przy pomocy całki) na potencjał w dowolnym punkcie $P(x, y, z)$

$$V_P(x, y, z) = k \int \frac{\sigma dS}{\left|\vec{OP} - \vec{\xi}\,\right|}$$

$$V_P(x, y, z) = k \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r \; dr}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}}$$

$$V_P(x, y, z) = 2k\pi\sigma \int_0^R \frac{r \; dr}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}}$$

Dla dowolnego punktu $P(0, 0, z)$ całka z powyższego podpunktu ma postać:

$$V_P(0, 0, z) = k \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r}{\sqrt{z^2 + r^2}} \; dr$$

$$V_P(0, 0, z) = 2k\pi\sigma \int_0^R \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} \; dr = 2k\pi\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right)$$

Zadanie 5. Policzyć energię elektrostatyczną układu trzech ładunków punktowych $Q_1 = 1e$, $Q_2 = 4e$, i $Q_3 = 2e$, umieszczonych odpowiednio w punktach $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,4,0)10^{-10}$**m** i $P_3 = (3,0,0)10^{-10}$**m**.

$$E_{123} = \frac{k}{2}\left[Q_1\left(\frac{kQ_2}{r_{12}} + \frac{kQ_3}{r_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{kQ_1}{r_{12}} + \frac{kQ_3}{r_{23}}\right) + Q_3\left(\frac{kQ_1}{r_{13}} + \frac{kQ_2}{r23}\right)\right]$$

Obliczmy:

$$r_{12} = |\vec{r_1} - \vec{r_2}| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-4\cdot 10^{-10})^2 + (0-0)^2} = 4\cdot 10^{-10}\mathbf{m}$$

$$r_{13} = |\vec{r_1} - \vec{r_3}| = \sqrt{(0-3\cdot 10^{-10})^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 3\cdot 10^{-10}\mathbf{m}$$

$$r_{23} = |\vec{r_2} - \vec{r_3}| = \sqrt{(0-3\cdot 10^{-10})^2 + (4\cdot 10^{-10}-0)^2 + (0-0)^2} =$$
$$= \sqrt{10^{-20}\,(9+16)} = 5\cdot 10^{-10}\mathbf{m}$$

Zatem energia elektrostatyczna układu jest równa:

$$E_{123} = \frac{k}{2}\left[1e\left(\frac{k\cdot 4e}{4\cdot 10^{-10}} + \frac{k\cdot 2e}{3\cdot 10^{-10}}\right) + \right.$$
$$\left. +4e\left(\frac{k\cdot 1e}{4\cdot 10^{-10}} + \frac{k\cdot 2e}{5\cdot 10^{-10}}\right) + 2e\left(\frac{k\cdot 1e}{3\cdot 10^{-10}} + \frac{k\cdot 4e}{5\cdot 10^{-10}}\right)\right]$$

$$E_{123} = \frac{k}{2}\left[1e\left(\frac{3k\cdot 4e + 4k\cdot 2e}{12\cdot 10^{-10}}\right) + \right.$$
$$\left. +4e\left(\frac{5k\cdot 1e + 4k\cdot 2e}{20\cdot 10^{-10}}\right) + 2e\left(\frac{5k\cdot 1e + 3k\cdot 4e}{15\cdot 10^{-10}}\right)\right]$$

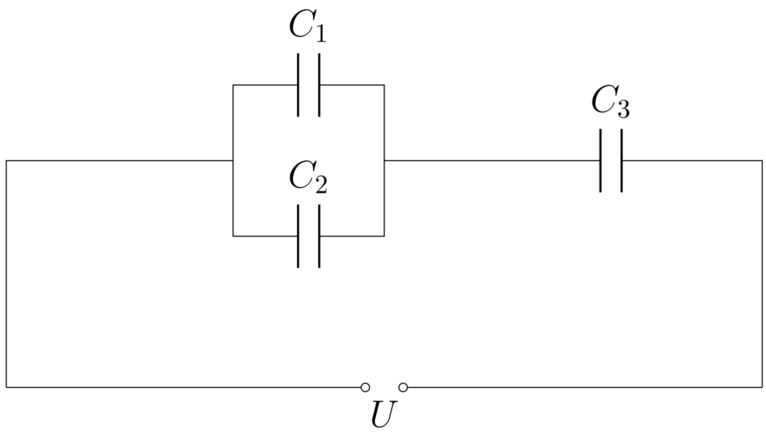
$$E_{123} = \frac{k}{2}\left[1e\left(\frac{12ke + 8ke}{12 \cdot 10^{-10}}\right) + 4e\left(\frac{5ke + 8ke}{20 \cdot 10^{-10}}\right) + 2e\left(\frac{5ke + 12ke}{15 \cdot 10^{-10}}\right)\right]$$

$$E_{123} = \frac{k}{2}\left(\frac{20ke^2}{12 \cdot 10^{-10}} + \frac{52ke^2}{20 \cdot 10^{-10}} + \frac{34ke^2}{15 \cdot 10^{-10}}\right)$$

$$E_{123} = k^2e^2\left(\frac{10}{12} + \frac{26}{20} + \frac{17}{15}\right)\frac{1}{10^{-10}}$$

$$E_{123} = \frac{49}{15 \cdot 10^{-10}}k^2e^2 = 3.2(6) \cdot 10^{10} \cdot k^2e^2$$

Zadanie 6. Układ trzech kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 1\mu$F, $C_2 = 2\mu$F i $C_3 = 3\mu$F został podłaczony do stałego napięcia $U = 1$V. Znaleźć ładunek, napiecie i energię elektrostatyczną dla każdego z kondensatorów oraz pojemność zastępczą układu.



U_{1+2} - napięcie na połączonych szeregowo kondensatorach 1 i 2.

U_1 - napięcie na kondensatorze 1.

U_2 - napięcie na kondensatorze 2.

U_3 - napięcie na kondensatorze 3.

C_{Z12} - pojemność zastępcza za kondensatory 1 i 2.

C_{Z123} - pojemność zastępcza za wszystkie kondensatory.

Q_C - ładunek całkowity.

Q_{1+2} - ładunek na połączonych szeregowo kondensatorach 1 i 2.

Q_1 - ładunek kondensatora 1.

Q_2 - ładunek kondensatora 2.

Q_3 - ładunek kondensatora 3.

$$U = U_{1+2} + U_3 = 1\text{V}$$
$$C_{Z12} = C_1 + C_2 = 3\mu\text{F}$$
$$\frac{1}{C_{Z123}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{Z12}}$$

$$C_{Z123} = \frac{C_3 C_{Z12}}{C_3 + C_{Z12}} = \frac{3 \cdot 3}{3+3} = \frac{9}{6} = 1,5\mu\text{F}$$

Łączenie szeregowe:

$$Q_C = C_{Z123} \cdot U = 1,5\mu\text{C}$$
$$Q_{1+2} = Q_3 = Q_C = 1,5\mu\text{C}$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{U_3} \Rightarrow U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{1,5\mu\text{C}}{3\mu\text{F}} = 0,5\text{V}$$

$$U_{1+2} = \frac{Q_3}{C_3} = U - U_3 = 0,5\text{V}$$

Łączenie równoległe:

$$Q_{1+2} = Q_1 + Q_2$$
$$U_1 = U_2 = U_{1+2} = 0,5\text{V}$$

$$Q_1 = U_1 \cdot C_1 = 0,5\text{V} \cdot 1\mu\text{F} = 0,5\mu\text{C}$$
$$Q_2 = U_2 \cdot C_2 = 0,5\text{V} \cdot 2\mu\text{F} = 1\mu\text{C}$$

Obliczmy energię każdego z kondensatorów:

$$E_1 = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2} = \frac{1\mu\text{F} \cdot (0,5\text{V})^2}{2} = 0,125\mu\text{J}$$

$$E_2 = \frac{C_2 \cdot U_2^2}{2} = \frac{2\mu\text{F} \cdot (0,5\text{V})^2}{2} = 0,25\mu\text{J}$$

$$E_3 = \frac{C_3 \cdot U_3^2}{2} = \frac{3\mu\text{F} \cdot (0,5\text{V})^2}{2} = 0,375\mu\text{J}$$