Metody Numeryczne
Zadanie 11

Jan Kwinta

2023-01-02

Chcemy obliczyć $I = \int_0^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x} dx$ z dokładnością do 10^{-7}

Rozbicie całki

$$I = I_1 + I_{\text{ogon}} = \int_0^A \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x} dx + \int_A^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x} dx$$

Zauważyć można, że:

$$\left|I_{\text{ogon}}\right| \leq \int_A^\infty \left|\sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\right| e^{-x} dx \leq \int_A^\infty e^{-x} dx = e^{-A}$$

Dla $A = 20$:

$$e^{-A} = e^{-20} \approx 2.06115 \cdot 10^{-9} < 10^{-7}$$

więc z punktu widzenia problemu numerycznego możemy przyjąć, że:

$$I = \int_0^{20} \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x} dx$$

z błędem mniejszym niż 10^{-7}.

Wzór trapezów.

Podzielmy przedział całkowania $[0, 20]$ na $2^{18} = 262144$ równych części o długościach 0.0000762939453125 każda. Suma pól trapezów prostokątnych, których ramionami są te odcinki na osi OX jest w przybliżeniu równa I.

$$I' = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} =$$
$$= \frac{b-a}{2n} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Czyli w naszym przypadku:

$$I' = \frac{20}{2 \cdot 262144}(f(0) + 2f(0.0000762939453125) + \ldots$$
$$+2f(20 - 0.0000762939453125) + f(20)) \approx -0.2172746500793042$$

Aby uzyskać lepsze przybliżenie zastosujemy metodę Romberga.

Metoda Romberga.

Obliczone przez nas I' jest w istocie wyrazem $R_{0,18}$ tzw. tablicy Romberga. Błąd wyniku metody Romberga dla wyrazu $R_{n,m}$ równy jest co najwyżej rzędu

$$\left(\frac{b-a}{2^n}\right)^{2m+2}$$

Czyli dla wyrazu $R_{0,18}$ wynosi $\left(\frac{20}{1}\right)^{38}$ a więc dużo więcej niż byśmy chcieli. Żeby błąd był rzędu 10^{-7} to:

$$10^{-7} > \left(\frac{20}{2^n}\right)^{38} \Rightarrow n > 5$$

musimy obliczyć wyraz na przykład $R_{5,18}$, czyli potrzeba wyznaczyć tablicę Romberga.

$$R_{5,18} = -0.21727508449710806 = I \pm \epsilon,\ \epsilon < 10^{-7}$$