第5章 方程求根

计算机学院 孙伟平

方程求根

5.0 方程求根概述

5.1 二分法

5.2 迭代法及其收敛性

5.3 迭代法的收敛速度及加速处理

5.4 牛顿法

引言

科研工作或生产实践中遇到的数学问题，常常需要求解一元（单个变量）的方程（或方程组）

$$f(x)=0$$

- 当 $f(x) = ax+b$，称上式为线性方程；
- 如果 $f(x)$ 为某个 n 次多项式 $p_n(x)$，称上式为 n 次多项式方程或代数方程；
- 若 $f(x)$ 不是 x 的线性函数，则称上式为非线性方程；
- 若 $f(x)$ 中有无法用自变数的多项式或开方表示的函数，则称上式为超越方程。指数方程、对数方程、三角方程等。

$f(x)=0$

- 方程的根 x^* 又称 $f(x)$ 的零点，它可以是实数，也可以是复数，我们主要学习实根的求法。
- 对于次数 $n \le 4$ 的多项式方程，它的根可以用公式表示，但是对于 $n=3, 4$，其根的表达形式复杂。
- 理论上已证明，对于次数 ≥ 5 的多项式方程，它的根一般不能用解析表达式表示，需要借助群论的相关知识解决。
- 超越方程的求解无法利用代数几何来进行。大部分的超越方程求解没有一般的公式，很难求得解析解。
- 实际应用中，不一定必须得到方程根的解析表达式，只要得到满足一定精度要求的根的近似值就可以了。

方程求根问题

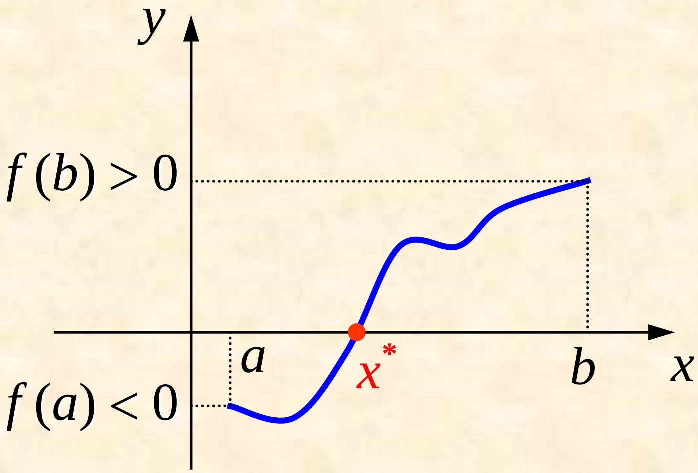
- 根的存在性：方程有没有根？如果有根，有几个根？
- 哪儿有根：求出有根的大致区间，即将 x 的取值范围划分为若干个小区间，使得每个区间或是没有根，或是只有一个根。
- 根的精确化：上述有根区间内的任一点均可看作方程根的较为粗略的近似值，在此基础上设法逐步把根精确化，直到满足精度要求为止。

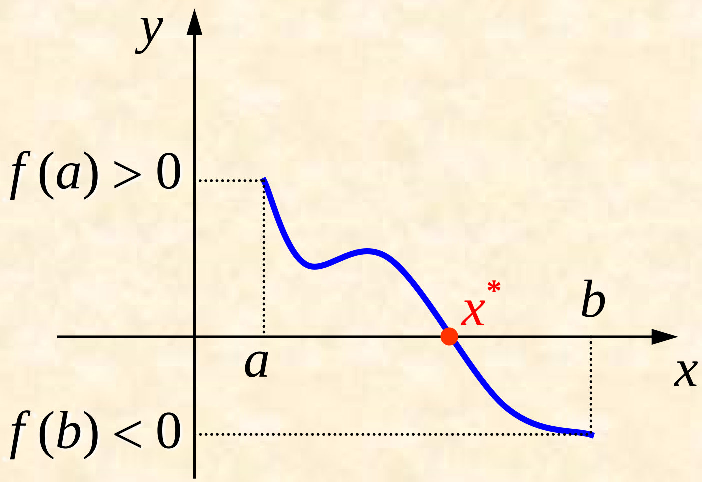
迭代法

5.1 二分法

零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个根。





区间 $[a, b]$ 内如果至少有一个根，则称该区间为有根区间。通常可以用逐次搜索法求 $f(x) = 0$ 的有根区间。

逐次搜索法

在 x 的不同取值点上计算 $f(x)$，观察 $f(x)$ 的符号，只要在相邻两点函数值 $f(x)$ 反号，则以该两点为点的区间必然是有根区间。

例：求方程 $f(x) = x^3 - 11.1x^2 + 38.8x - 41.77 = 0$ 的有根区间.

解：取步长为 1 对方程的根进行搜索，结果如下：

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ 符号	−	−	+	+	−	−	+

因此方程 $f(x) = 0$ 有三个有根区间，分别为：

[1, 2]、[3, 4]、 [5, 6]

二分法

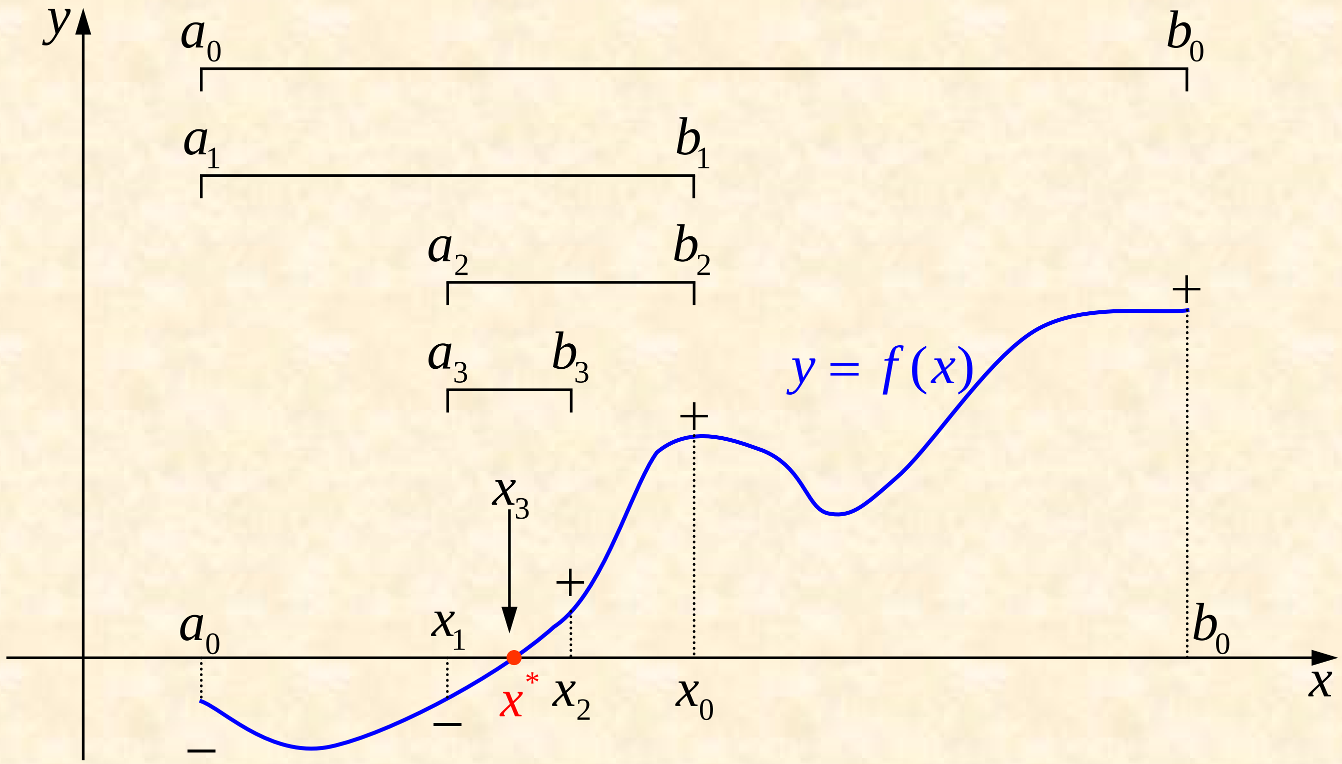
- 逐步将较大的有根区间进行二分，通过判断分割点处的函数值的符号，将原来较大的有根区间不断折半缩小，直至有根区间缩小到容许的误差范围内。
- 取一系列二分后，最后得到的有根区间的中点作为方程根的近似值。

二分法（续）

假设已找到 $f(x)$ 的较为粗略的有根区间 $[a_0, b_0]$，即 $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$，并且 $f(x)$ 在 $[a_0, b_0]$ 上连续。

- 取中点 $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ 将区间 $[a_0, b_0]$ 分成两半，检查 $f(x_0)$ 与 $f(a_0)$ 是否同号。
  - 同号：说明根 x^* 在 x_0 的右侧，取 $a_1 = x_0, b_1 = b_0$ 得到只原有根区间一半长度的新有根区间 $[a_1, b_1]$。
  - 异号：说明根 x^* 在 x_0 的左侧，取 $a_1 = a_0, b_1 = x_0$ 得到只原有根区间一半长度的新有根区间 $[a_1, b_1]$。
- 重复上述过程，取 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ 将区间 $[a_1, b_1]$ 分半，确定根 x^* 在 x_1 的哪一侧，得到新区间 $[a_2, b_2]$。

二分法（续）



二分法（续）

- 这样便可以得到一系列有根区间：

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

其中每一个区间的宽度都是前一个区间长度的一半，因此 $[a_n, b_n]$ 的宽度为：

$$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2^2}(b_{n-2}-a_{n-2})=\cdots=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$$

- 取每个有根区间的中点 $x_i=(a_i+b_i)/2$ 作为 x^* 的近似值，则在二分过程中，可以得到一系列精度越来越高的方程根的近似值序列：

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

- 显然，当 $n \to \infty$ 时，必然有：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = x^*$$

- 对于有限次二分后得到的 x_n，它是准确根 x^* 的近似值，且它的绝对误差为：

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

- 如果给定了某个精度要求ε，则二分法的二分过程一直要持续到新的有根区间长度的一半不大于 ε.

二分法的特点

- 二分法计算过程简单，程序容易实现，可以在大范围内求根。
- 若方程$f(x)=0$在区间[a,b]上根多于1个时, 只能求出其中的一个根。
- 若方程$f(x)=0$在区间[a,b]上有偶数个重根时，不满足$f(a)f(b)<0$。
- 二分法收敛较慢，其收敛速度仅与一个以 1/2 为比值的等比级数相同。
- 二分法一般用于求根的初始近似值，然后再使用其它的求根方法对根精确化。

例 题

- 求方程 $f(x) = x^3 - e^{-x} = 0$ 的一个实根，要求精确到小数点后第 3 位。

解：因为 $f(0) < 0$, $f(1) > 0$。 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 区间内有根，由精度要求可知：

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即： $2^n \ge 10^3 \longrightarrow n \ge 9.968$

所以需要将区间 $(0, 1)$ 二分 10 次才能找到满足精度要求的近似根。各次计算结果见下表

n	a_n		b_n		x_n	$f(x_n)$ 符号
0	0.0000	-	1.0000	+	0.5000	-
1	0.5000	-	1.0000	+	0.7500	-
2	0.7500	-	1.0000	+	0.8750	+
3	0.7500	-	0.8750	+	0.8125	+
4	0.7500	-	0.8125	+	0.7812	+
5	0.7500	-	0.7812	+	0.7656	-
6	0.7656	-	0.7812	+	0.7734	+
7	0.7656	-	0.7734	+	0.7695	-
8	0.7695	-	0.7734	+	0.7714	-
9	0.7714	-	0.7734	+	0.7724	-
10	0.7724	-	0.7734	+	0.7729	+

5.2 迭代法及其收敛性

5.2.1 迭代法的基本概念

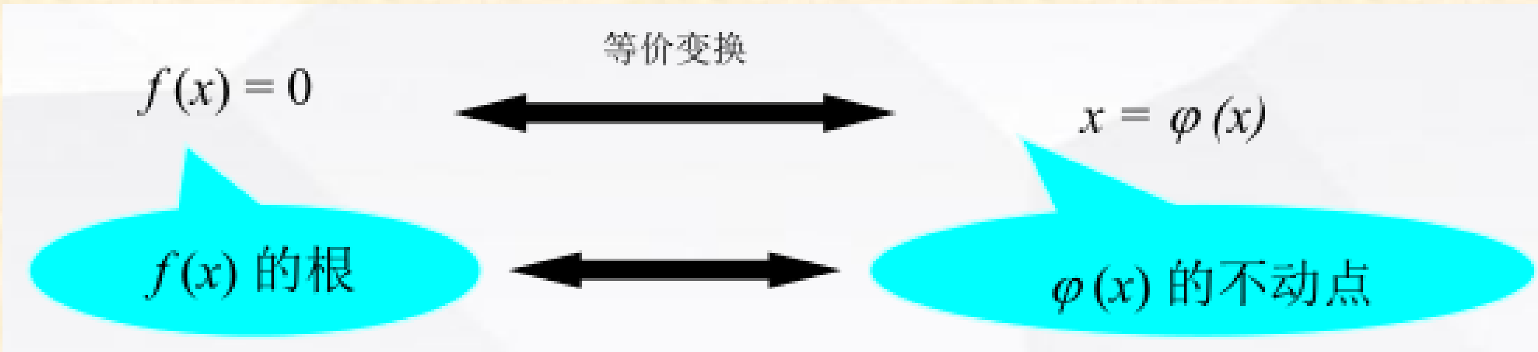
- 迭代法的基本概念
- 迭代法的几何意义
- 迭代法的构造

5.2.2 迭代法的收敛性

- 收敛性分析
- 收敛定理（定理5.3）
- 迭代过程的误差估计（定理5.4）
- 局部收敛性（定理5.5）

5.2.1 迭代法的基本概念

（简单）迭代法又称逐次逼近法，其基本思想是构造不动点方程，以求得近似根。



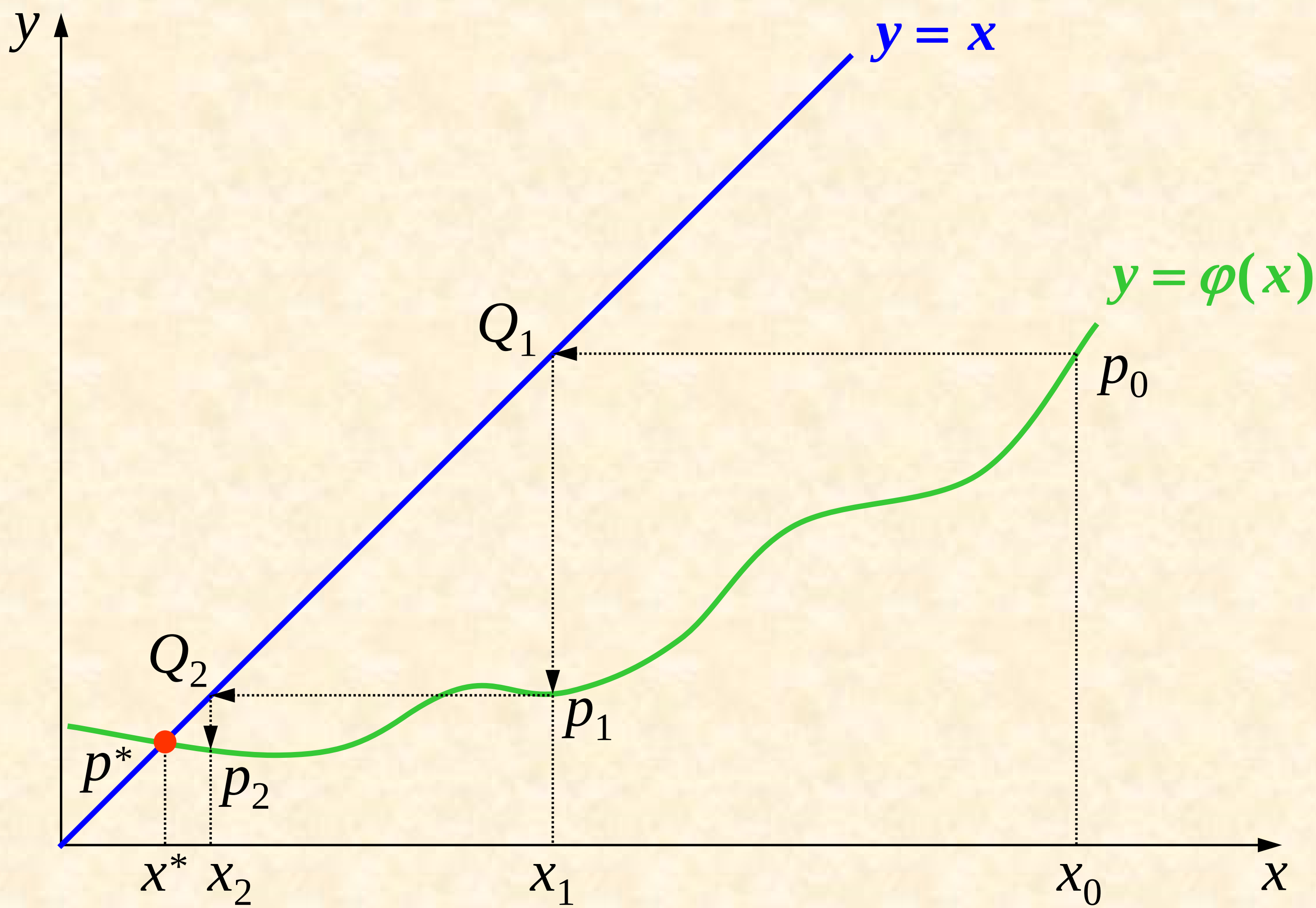
（如果 x^* 满足 $x^*=\varphi(x^*)$，则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点）

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k)$

可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即 x^* 是 φ 的不动点，也就是 f 的根。

迭代法的几何意义



迭代法的构造

- 方程 $f(x)=0$ 等价变换为 迭代方程 $x=\varphi(x)$ （ $\varphi(x)$称为迭代函数）.
- 建立如下迭代格式： $x_{n+1}=\varphi(x_n) \qquad n=0,1,2,\cdots$
- 当给定初值 x_0 后，由迭代格式可求得一系列准确根的近似值，组成迭代序列 $\{x_n\}$。
- 针对某个方程 $f(x)=0$，可以构造出不同的迭代方程。

$$x^3+4x^2-10=0 \qquad x\in[1,2] \quad \Longrightarrow$$

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{10-x^3} \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^{\,3}}$$

$$x=\sqrt{\frac{10}{x}-4x} \qquad x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n}-4x_n}$$

$$x=x-x^3-4x^2+10 \qquad x_{n+1}=x_n-x_n^{\,3}-4x_n^{\,2}+10$$

5.2.2 迭代法的收敛性

- 如何构造不动点方程，由 $f(x)=0$ 变换为 $x=\varphi(x)$ ？
- 如何选择合适的初值 x_0 ？
- $n\to\infty$ 时，迭代产生的序列 $\{x_n\}$ 是否收敛到 x^* ？

如果迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则 A 是方程的准确根：

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(\lim_{n\to\infty}x_n)=\varphi(A)$$

- 如果迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛，则有限次迭代得到的近似根的误差如何估计？
- 针对某个方程 $f(x)=0$，可以构造出不同的迭代公式，只有满足一定条件的迭代公式才收敛。

举 例

- 求解如下方程在[1,2]内的一个实根，取 $x_0 = 1.5$

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

解: (1)

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^{\ 3}}$$

(2)

$$x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x} \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n} - 4x_n}$$

(3)

$$x = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\ 3} - 4x_n^{\ 2} + 10$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^{\ 3}} \qquad x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n}-4x_n} \qquad x_{n+1}=x_n-x_n^{\ 3}-4x_n^{\ 2}+10$$

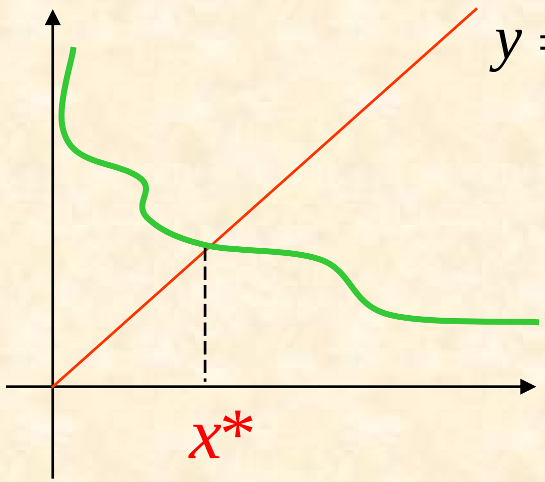
K	x_k(第1种形式)	x_k(第2种形式)	x_k(第3种形式)
1	1.2869538	0.8165	-0.875
2	1.4025408	2.9969	6.732
3	1.3454584	-8.65	-469.7
4	1.3251703		$1.03*10^8$
5	1.3600942		
…	…		
23	1.3652300		
24	1.3652300		
25	1.3652300		

可见迭代公式不同,收敛情况也不同. 第1种形式收敛，第2种形式计算过程出现负数开平方，第3种形式也不收敛.

只有收敛的的迭代过程才有意义，为此我们首先要研究$\varphi(x)$的不动点的存在性及迭代法的收敛性.

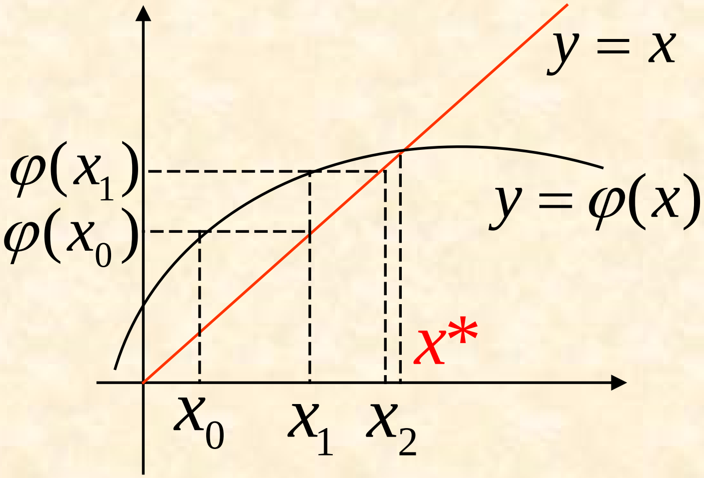
迭代法的收敛性

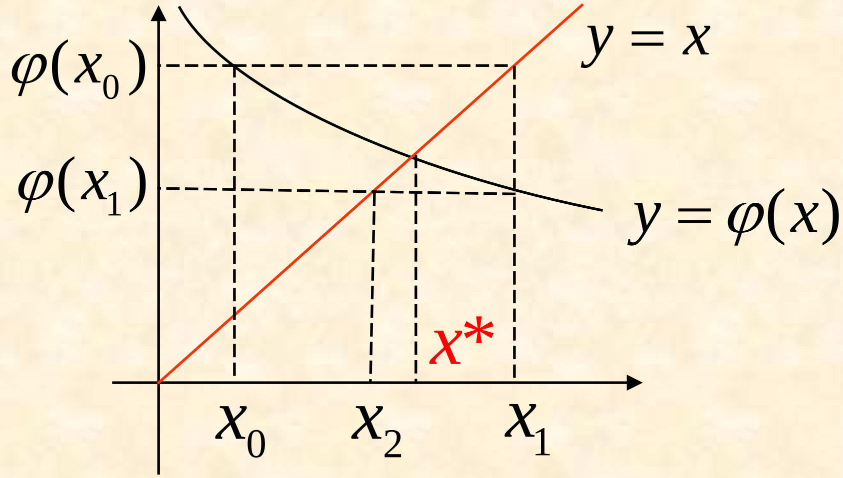
$$x = \varphi(x)$$

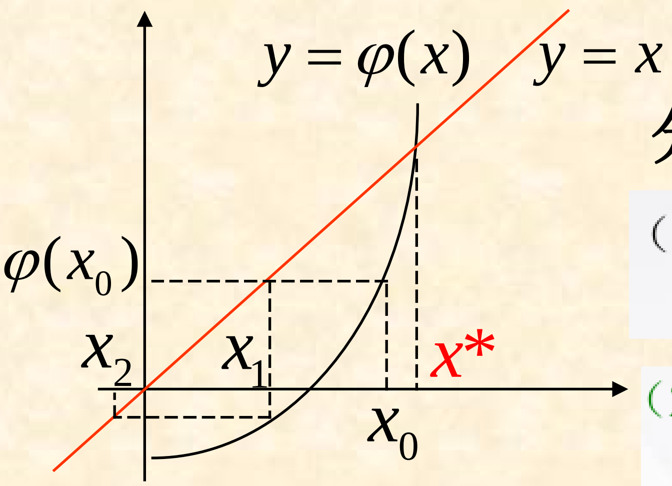


- 求迭代方程的解从几何上来看，就是求直线 $y = x$ 与曲线 $y = \varphi(x)$ 的交点的横坐标。
- 下面从几何的角度来分析迭代方程不动点的存在性和收敛性问题。

迭代法的收敛性







分析：什么样的迭代函数能够收敛呢？

（1）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，则迭代函数 $y=\varphi(x)$曲线走势平坦，即 $|\varphi'(x)| < 1$

（2）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 发散，则迭代函数$y=\varphi(x)$ 曲线走势陡峭，即 $|\varphi'(x)| \geq 1$

收敛定理（定理5.3）

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，并且：

- 若 $x \in [a, b]$ 时， $\varphi(x) \in [a, b]$
- 存在某个小于 1 的正数 L，使得 $\forall x \in [a, b]$，有：

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

则迭代方程 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且仅有一个根 x^*，并且对任意选取的初始值 $x_0 \in [a, b]$，迭代过程生成的序列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

证明：存在性

设 $g(x) = x - \varphi(x)$　　$\varphi'(x)$ 连续，故 $g(x)$ 连续。

由 $\varphi(x) \in [a,b]$ 可知

$$g(a) = a - \varphi(a) \le 0 \qquad g(b) = b - \varphi(b) \ge 0$$

由零点定理知，必存在零点 $x^* \in [a,b]$ 使得 $g(x^*) = 0$，

即　$x^* - \varphi(x^*) = 0$，　$x^* = \varphi(x^*)$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

唯一性

假设存在另外一点 $\bar{x} \in [a,b]$ 也满足 $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$

$$x^* - \bar{x} = \varphi(x^*) - \varphi(\bar{x}) = \varphi'(\xi)(x^* - \bar{x}) \qquad \xi \in [x^*, \bar{x}]$$

或 $[\bar{x}, x^*]$

$$\underbrace{\boxed{[1-\varphi'(\xi)]}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\boxed{(x^* - \bar{x})}}_{=0} = 0$$

$$\bar{x} = x^*$$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

收敛性

由迭代格式和微分中值定理可知：

$$x_n - x^* = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_{n-1} - x^*) \qquad \xi \in [x^*, x_{n-1}] \text{ 或 } [x_{n-1}, x^*]$$

故
$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{n-1} - x^*| \\ &\le L|x_{n-1} - x^*| \\ &\le L^2|x_{n-2} - x^*| \\ &\vdots \\ &\le L^n|x_0 - x^*| \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n|x_0 - x^*| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

例 题

用迭代法求 $x^3+2x-5=0$ 在区间 [1, 2] 内的近似根，结果保留 5 位小数。

解：将方程改写成：$x=\varphi(x)=\sqrt[3]{5-2x}$，迭代格式为

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{5-2x_n}$$

因为 $\forall x\in[1,2],\ \varphi(x)\in[1,2]$

且 $|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{(5-2x)^{\frac{2}{3}}}\right|=\frac{2}{3}\left|\frac{1}{(5-2x)^{\frac{2}{3}}}\right|$

$$\max_{1\le x\le 2}|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{1}{(5-2\times 2)^{\frac{2}{3}}}\right|=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1}}\le\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{3}<1$$

故迭代过程必收敛。

取 $x_0 = 1$，通过迭代可得：

$$x_1 = 1.44224 \qquad x_8 = 1.32814$$
$$x_2 = 1.28472 \qquad x_9 = 1.32831$$
$$x_3 = 1.34489 \qquad x_{10} = 1.32825$$
$$x_4 = 1.32195 \qquad x_{11} = 1.32827$$
$$x_5 = 1.33064 \qquad x_{12} = 1.32826$$
$$x_6 = 1.32763 \qquad x_{13} = 1.32826$$
$$x_7 = 1.32860$$

迭代过程的误差估计（定理5.4）

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，并且：

- 若 $x \in [a, b]$ 时， $\varphi(x) \in [a, b]$
- 存在某个小于 1 的正数 L，使得 $\forall x \in [a, b]$，有：

$$\left|\varphi'(x)\right| \le L < 1$$

则有误差估计式：

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$n = 1,2,3,\cdots$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\boxed{\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|} \quad \boxed{\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|}$$

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|(x_{n+1} - x^*) - (x_n - x^*)\right| \ge \left|x_n - x^*\right| - \left|x_{n+1} - x^*\right|$$

$$\ge \left|x_n - x^*\right| - L\left|x_n - x^*\right| = (1-L)\left|x_n - x^*\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{n+1} - x_n\right|$$

$\boxed{|a| - |b| \le |a-b| \le |a| + |b|}$

或 $\boxed{|b| - |a|}$

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\right| = \left|\varphi'(\xi)\cdot(x_n - x_{n-1})\right|$$

$$\le L\cdot\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$\le L^2\cdot\left|x_{n-1} - x_{n-2}\right|$$

$$\vdots$$

$$\le L^n\cdot\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad \left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

由第一个式子可知，只要两次相邻的迭代值相差足够小，就可以保证最后一次迭代得到的近似值 x_n 足够精确。

迭代终止条件： $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$

$\left|\varphi'(x)\right| \le L < 1$

如果 $\dfrac{L}{1-L} \le 1$ 即 $L \le \dfrac{1}{2}$ 时，有

L 较大时不适用

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$$

第二个式子用 $\left|x^* - x_n\right| \le \dfrac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon$ 用来大致估计需要进行迭代的次数 n.

迭代法的基本步骤

- 选定初始近似值 x_0，确定 $f(x)=0$ 的等价形式。

  $x=\varphi(x)$，构造迭代方程 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$

- 将 x_0 代入迭代方程，计算 $x_1=\varphi(x_0)$
- 检查 $|x_1-x_0|\le\varepsilon$，如成立，则迭代终止，方程的近似根为 x_1；如不成立，则将 x_1 代入迭代方程，重复以上迭代、检查的步骤。

如果迭代次数超过预先指定的次数 N 后，仍然不能满足精度要求，则终止迭代，所构造的迭代函数 $\varphi(x)$ 发散。

局部收敛性

◈ 例：求解方程 $x^4-3x-2=0$ 在[1,2]内的一个实根。

(1) 取 $x_0=1.5$， $\varphi_1(x)=\sqrt[4]{3x+2}$ $\Rightarrow$ $x_{n+1}=\sqrt[4]{3x_n+2}$

计算得：

n	x_n	**n**	x_n
0	1.5	6	1.618030
1	1.596178	7	1.618033
2	1.614247	8	1.618034
3	1.617363	9	1.618034
4	1.617915	…	
5	1.618013		

该迭代格式收敛，且收敛于[1,2]内的一个实根。

◈ 求解方程 $x^4-3x-2=0$ 在[1,2]内的一个实根。

(2) 取 $x_0=1.5$，$\varphi_2(x)=\dfrac{1}{3}(x^4-2)$ $\Rightarrow$ $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}(x_n{}^4-2)$

计算得:

n	x_n	**n**	x_n	**n**	x_n
0	1.5	6	-0.616483	12	-0.618032
1	1.020833	7	-0.618520	13	-0.618035
2	-0.304676	8	-0.617881	14	-0.618034
3	-0.663794	9	-0.618082	15	-0.618034
4	-0.601951	10	-0.618019	…	
5	-0.622902	11	-0.618039		

该迭代格式收敛，但不是收敛于[1,2]内的一个实根。

- 求解方程 $x^4-3x-2=0$ 在[1,2]内的一个实根。

(3) 取 $x_0=1.7$，$\varphi_2(x)=\frac{1}{3}(x^4-2)$ $\Rightarrow$ $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n{}^4-2)$

计算得:

$x_1=2.117367$　　$x_2=6.033156$　　$x_3=440.9617$

该迭代格式发散。

(1) 取 $x_0 = 1.5$， $\varphi_1(x) = \sqrt[4]{3x+2}$ 收敛

(2) 取 $x_0 = 1.5$， $\varphi_2(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 2)$ 收敛于区域外的根

(3) 取 $x_0 = 1.7$， $\varphi_2(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 2)$ 发散

- 可以验证：

$$\varphi_1'(1.5) < 1 \qquad \varphi_2'(1.5) > 1 \qquad \varphi_2'(1.7) > 1$$

- 由此例可知，虽然简单迭代法的构造容易，然而其收敛性不但取决于迭代函数φ **(*x*)**，也取决于初值x_0的选取。
- 从而引入简单迭代法的局部收敛性。

局部收敛性定义与判定定理

定义： 如果在准确根 x^* 的某个邻域 $\Delta: |x - x^*| \le \delta$内，迭代过程对于任意选定的初值 $x_0 \in \Delta$均收敛，则称这种在根的邻近所具有的收敛性为**局部收敛性**。

定理： 设迭代函数 $\varphi(x)$ 在准确根 x^* 邻近有连续的一阶导数，且

定理5.5

$$\boxed{|\varphi'(x^*)| < 1}$$

则迭代过程 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 具有局部收敛性。

构造不同的迭代法求：$x^2-3=0$ 的根 $x^*=\sqrt{3}$

解：(1) $\varphi(x)=\dfrac{3}{x}$，迭代方程为 $x_{n+1}=\dfrac{3}{x_n}$

$$\varphi'(x)=-\frac{3}{x^2},\qquad \varphi'(x^*)=-1$$

(2) $\varphi(x)=x-\dfrac{x^2-3}{4}$，迭代方程为 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-3}{4}$

$$\varphi'(x)=1-\frac{x}{2},\qquad \varphi'(x^*)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1$$

(3) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$，迭代方程为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right),\qquad \varphi'(x^*)=0<1$$

若取 $x_0 = 2.0$，分别用上述三种迭代方法计算，结果见下表（准确根 $x^* = 1.73205080757\ldots$）

n	x_n	$x_{n+1} = \dfrac{3}{x_n}$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 3}{4}$	$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{3}{x_n}\right)$
0	x_0	2.0	2.0	2.0
1	x_1	1.5	1.75	1.75
2	x_2	2.0	1.734375000	1.732142857
3	x_3	1.5	1.732360840	1.732050810
4	x_4	2.0	1.732092320	1.732050808
5	x_5	1.5	1.732056369	
6	x_6	2.0	1.732051553	
7	x_7	1.5	1.732050907	
8	x_8	2.0	1.732050821	

5.3 收敛速度及收敛过程的加速

定义： 设序列 $\{x_n\}$ 是收敛于 $f(x)=0$ 的准确根 x^* 的迭代序列，记各步的迭代误差为 $\varepsilon_n = x_n - x^*$，

如果存在某个实数 p 和非零常数 C，使得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,p}} = C$$

渐近误差常数

p 越大，收敛越快

则称序列 $\{x_n\}$ 是 p 阶收敛的。

- $p=1,\ 0<C<1$时，序列 $\{x_n\}$ 是线性收敛
- $p=1,\ C=0$ 时，序列 $\{x_n\}$ 是超 p 阶收敛
- $p>1$时，序列 $\{x_n\}$ 是超线性收敛
- $p=2$时，序列 $\{x_n\}$ 是平方收敛

定理5.6

定理： 对于迭代过程 $x_{n+1}=\varphi(x)$，如果迭代函数 $\varphi(x)$ 在准确根 x^* 的邻近有连续的二阶导数，且：

$$|\varphi'(x^*)|<1$$

则有：

- 当 $\varphi'(x^*)\neq 0$ 时，迭代过程为线性收敛；
- 当 $\varphi'(x^*)=0$ 而 $\varphi''(x^*)\neq 0$ 时，迭代过程为平方收敛；
- 当 $\varphi'(x^*)=0,\ \varphi''(x^*)=0,\cdots,\ \varphi^{(p-1)}(x^*)=0$ 而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 时，迭代过程为 p 阶收敛。

迭代过程的加速

设迭代方程 $x=\varphi(x)$ 的准确根为 x^*，由微分中值定理可知：

$$x^* - x_{n+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi)(x^* - x_n)$$

如果迭代函数 $\varphi(x)$ 收敛，在 x^* 的某个邻域 Δ 内有 $\varphi'(x) < 1$，当有根区间较小或 $\varphi'(x)$ 在 Δ 内变化较平缓时，可近似将 $\varphi'(x)$ 取某个定值 a。

$$x^* - x_{n+1} \approx a(x^* - x_n)$$

$$x^* \approx \frac{1}{1-a}x_{n+1} - \frac{a}{1-a}x_n$$

$$x^* - x_{n+1} \approx \boxed{\frac{a}{1-a}(x_{n+1} - x_n)}$$

x_{n+1} 的大致误差，可以在 x_{n+1} 的基础上叠加上这个误差，从而得到比 x_{n+1} 本身更精确的近似值

$$x^* - x_{n+1} \approx \frac{a}{1-a}(x_{n+1} - x_n)$$

- 经过加速处理后，迭代过程为：

迭代： $\tilde{x}_{n+1} = \varphi(x_n)$

加速： $x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} + \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{n+1} - x_n)$

不便之处

- 迭代终止条件仍为： $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$

a 的确定需要求解迭代函数的导函数 $\varphi'(x)$

埃特金（Atiken）加速

$$x_{n+1}^{(1)} = \varphi(x_n) \longrightarrow x^* - x_{n+1}^{(1)} \approx a(x^* - x_n)$$

$$x_{n+1}^{(2)} = \varphi\left(x_{n+1}^{(1)}\right) \longrightarrow x^* - x_{n+1}^{(2)} \approx a\left(x^* - x_{n+1}^{(1)}\right)$$

所以：

$$\frac{x^* - x_{n+1}^{(1)}}{x^* - x_{n+1}^{(2)}} \approx \frac{x^* - x_n}{x^* - x_{n+1}^{(1)}}$$

展开得：
$$\left(x^* - x_{n+1}^{(1)}\right)^2 \approx \left(x^* - x_n\right)\left(x^* - x_{n+1}^{(2)}\right)$$

即：
$$\left(x^*\right)^2 - 2x_{n+1}^{(1)}x^* + \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2$$

$$\approx \left(x^*\right)^2 - \left(x_n + x_{n+1}^{(2)}\right)x^* + x_n x_{n+1}^{(2)}$$

$$\left(x^*\right)^2 - 2x_{n+1}^{(1)}x^* + \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2 \approx \left(x^*\right)^2 - \left(x_n + x_{n+1}^{(2)}\right)x^* + x_n x_{n+1}^{(2)}$$

$$x^* \approx \frac{x_n x_{n+1}^{(2)} - \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= \frac{\left(x_{n+1}^{(2)}\right)^2 - 2x_{n+1}^{(1)}x_{n+1}^{(2)} + x_n x_{n+1}^{(2)} - \left(x_{n+1}^{(2)}\right)^2 + 2x_{n+1}^{(2)}x_{n+1}^{(1)} - \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= \frac{x_{n+1}^{(2)}\left(x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n\right) - \left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= x_{n+1}^{(2)} - \frac{\left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

埃特金（Atiken）加速（续）

$$\left.\begin{aligned} &\text{迭代：}\quad x_{n+1}^{(1)} = \varphi(x_n) \\ &\text{迭代：}\quad x_{n+1}^{(2)} = \varphi\left(x_{n+1}^{(1)}\right) \end{aligned}\right\}\text{两次迭代}$$

$$\text{加速：}\quad x_{n+1} = x_{n+1}^{(2)} - \frac{\left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

- 加速公式中不再含有与 $\varphi'(x)$ 相关的系数 a
- 需要两次迭代再能得到下一步的近似值
- 某些发散的迭代公式经埃特金法加速处理后，能够获得较好的收敛性

例 题

5.4 牛顿法

假设已知 $f(x)=0$ 的某个初始近似根为 x_0，且在 x_0 的一个适当小的邻域内 $f(x)$ 可微，将 $f(x)$ 在点 x_0 附近用泰勒公式展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

如果仅取上述泰勒展开式的前两项，忽略 $(x-x_0)^2$ 及其后的各项，则可以得到 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似线性展开式：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

假设 $f'(x_0) \neq 0$，则上式的解为：

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

如果将上面公式求得的 x 作为原方程的一个新的近似根 x_1，将 $f(x)$ 在 x_1 附近作近似线性展开，可求得另一个新的近似根 x_2 。如此重复上述过程，可得到一般的迭代公式：

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

牛顿迭代公式

这种迭代方法称为牛顿法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

显然，牛顿法对应的方程为：

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{其中：} f'(x) \neq 0$$

牛顿法的迭代函数为： $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

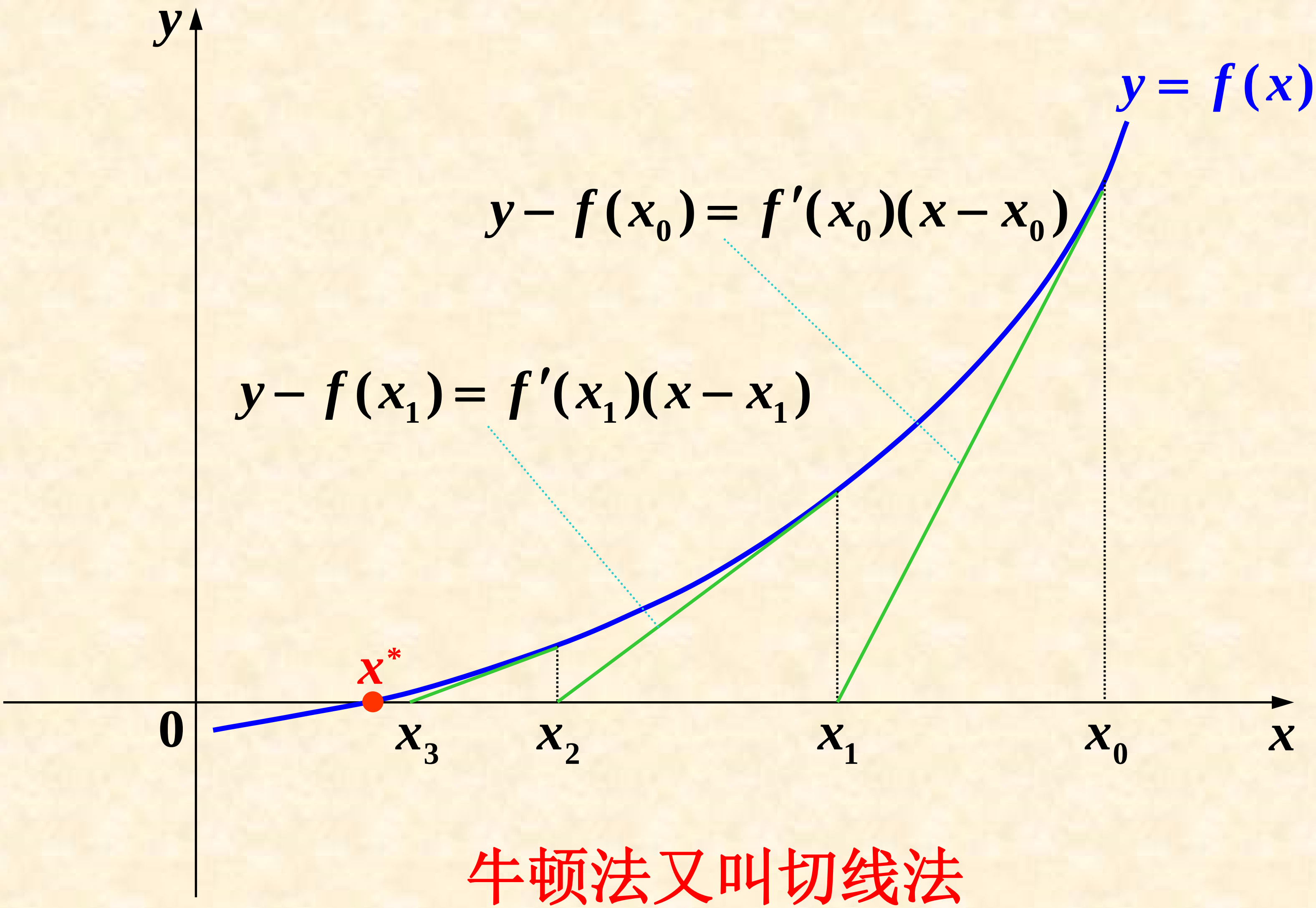
由于： $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

如果 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的一个单根，即：

$$f(x^*) = 0 \quad \text{而} \quad f'(x^*) \neq 0$$

则 $\varphi'(x^*) = 0$，因此 x^* 的邻近迭代过程具有局部收敛性

牛顿法的几何意义



牛顿法又叫切线法

牛顿法的计算步骤

- 选择合适的初始近似根 x_0，计算 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$
- 将 x_0 代入迭代公式：$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

  求得一个新的近似根 x_1，并计算 $f(x_1)$ 和 $f'(x_1)$
- 检查 $|x_1 - x_0| \le \varepsilon$ 且 $f'(x_1) \ne 0$，如成立，则迭代终止，方程的近似根 x_1；如不成立，则将 x_1 代入迭代方程，重复前述步骤
  - 求得达到精度要求的近似根
  - 超过预定的迭代次数 N 后仍未达到精度要求
  - 迭代过程中存在 $f'(x_k) = 0$，此时应终止迭代

牛顿法的收敛速度

设 x^*是 $f(x)=0$ 的一个准确**单根**， $f(x)$ 在 x^* 附近具有连续的二阶导数，且 $f''(x^*)\neq 0$，则牛顿法具有二阶收敛速度，即**牛顿法是平方收敛**。

牛顿法的迭代函数为：$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'(x)\times f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\boxed{\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}}$$

$$\varphi''(x)=\frac{f'(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}+\boxed{\frac{f(x)f'''(x)}{[f'(x)]^2}}-\boxed{\frac{2f(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}f''(x)}$$

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0$$

$$\boxed{f(x^*)=0,\quad f'(x^*)\neq 0}$$

牛顿法举例

- 假设 $a \geq 0$，求平方根 $\sqrt{a}$ 的过程可化为解方程：

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

- 若用牛顿法求解，由牛顿迭代公式可得：

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

则迭代公式为： $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$

- 每步迭代只做一次除法和一次加法再做一次移位即可，计算量少，收敛速度又较快，是计算机求解开方的一个实用有效的方法

例 题

用牛顿法解方程 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$，要求误差不超过 10^{-6}

解：由于 $f(1)=-7$， $f(2)=16$， $f(1)\cdot f(2)<0$

又： $f'(x)=3x^2+4x+10=x^2+2x^2+4x+2+8$

$$=x^2+2(x+1)^2+8>0$$

另： $f''(x)=6x+4$

即： $f''(1)=10,\qquad f''(2)=16$

$f''(x)\subset[10,16]$，所以： $f''(x^*)\neq 0$

事实上：$f''(x)$ 在 $[1,2]$ 区间上为单调增函数，

且最大值为 16

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20=x(x+1)^2+9x-20$$
$$f'(x)=3x^2+4x+10=x^2+2(x+1)^2+8>0$$
$$f''(x)=6x+4\in[10,16]$$

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}>0$$ $\varphi(x)$ 单调增，其最值为：

最大值 $\varphi(2)=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\dfrac{2^3+2\times2^2+10\times2-20}{3\times2^2+4\times2+10}\approx1.47$

最小值 $\varphi(1)=1-\dfrac{f(1)}{f'(1)}=1-\dfrac{1^3+2\times1^2+10\times1-20}{3\times1^2+4\times1+10}\approx1.41$

$$\varphi'(1)=\frac{f(1)f''(1)}{[f'(1)]^2}=\frac{-7\times10}{17^2}\approx-0.242$$

$$\varphi'(1.5)=\frac{f(1.5)f''(1.5)}{[f'(1.5)]^2}=\frac{2.875\times13}{22.75^2}\approx0.07$$

满足收敛定理要求的条件

$$\varphi'(2)=\frac{f(2)f''(2)}{[f'(2)]^2}=\frac{16\times16}{30^2}\approx0.284$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

取初值 $x_0 = 2.0$，建立牛顿迭代方程：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

$n = 0 \quad x_1 = 1.46666667 \quad |x_1 - x_0| \approx 0.533 > 10^{-6}$

$n = 1 \quad x_2 = 1.37151201 \quad |x_2 - x_1| \approx 9.515 \times 10^{-2} > 10^{-6}$

$n = 2 \quad x_3 = 1.36881022 \quad |x_3 - x_2| \approx 2.702 \times 10^{-3} > 10^{-6}$

$n = 3 \quad x_4 = 1.36880811 \quad |x_4 - x_3| \approx 2.11 \times 10^{-6} > 10^{-6}$

$n = 4 \quad x_5 = 1.36880811 \quad |x_5 - x_4| \approx 0 < 10^{-6}$

例 题

如取初值 $x_0 = 1.5$，则由牛顿迭代方程：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

可计算得：

$n = 0$	$x_1 = 1.37362637$	$\lvert x_1 - x_0 \rvert \approx 0.126 > 10^{-6}$
$n = 1$	$x_2 = 1.36881482$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert \approx 4.812 \times 10^{-3} > 10^{-6}$
$n = 2$	$x_3 = 1.36880811$	$\lvert x_3 - x_2 \rvert \approx 6.71 \times 10^{-6} > 10^{-6}$
$n = 3$	$x_4 = 1.36880811$	$\lvert x_4 - x_3 \rvert \approx 0 < 10^{-6}$

可见选择有根区间的中点，在相同的精度要求下所需的迭代次数较少

牛顿法初值的选取

- 牛顿法是一种局部收敛的算法，如果初值 x_0 选择的不恰当，就有可能得不到收敛的迭代序列
- 为使牛顿法收敛，必须满足：用迭代公式算出的 x_1 比 x_0 更靠近准确根 x^*
- 如果 $f'(x_0) = 0$，则不能运用牛顿迭代公式，可以想象，如果 $f'(x_0)$ 非常小的话，也不能得到很快的收敛序列

牛顿法初值的选取（续）

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow \underbrace{x_1 - x^*}_{\varepsilon_1} = (\underbrace{x_0 - x^*}_{\varepsilon_0}) - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^*)} = 1 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2 = 0$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) = \boxed{-\frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)^2}{2f'(x_0)(x^* - x_0)} = -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0) = 0 \longrightarrow x^* - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(\eta)}$$

如果 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 x_0 附近变化不剧烈的话，并且 $f''(x_0) \neq 0$，则可近似的认为：

$$f''(\xi) \approx f''(x_0) \qquad f'(\eta) \approx f'(x_0)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)\left(-\dfrac{f(x_0)}{f'(\eta)}\right)}{2f'(x_0)} = \frac{f''(\xi)\cdot f(x_0)}{2f'(x_0)\cdot f'(\eta)} \approx \frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx \frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

为了满足 x_1 比 x_0 更靠近准确根 x^*，必须有：

$$|\varepsilon_1| < |\varepsilon_0|$$

即：

$$\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}\right| < 1$$

从而：

$$\boxed{[f'(x_0)]^2 > \frac{1}{2}|f''(x_0)|\cdot|f(x_0)|}$$ 条件 1

$$\boxed{f''(x_0) \neq 0}$$ 条件 2

牛顿下山法

- 因为牛顿法是一个局部收敛方法，通常要求 x_0 选择在 x^* 附近，才保证迭代序列收敛
- 为扩大收敛范围，使对任意迭代序列收敛，通常可引入参数，并将牛顿迭代公式改为：

下山因子

$0 < \lambda_n < 1$

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

下山条件

- 为保证迭代序列收敛，必须有 $|f(x_{n+1})| \le |f(x_n)|$
- 通常取 $\lambda_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \cdots$，一旦满足下山条件，则随后的迭代序列必收敛，但它只是线性收敛

第5章 小结

5.1 二分法

5.2 迭代法及其收敛性

- 迭代法的基本概念
- 收敛性判定定理
- 局部收敛性

5.3 迭代法的收敛速度及加速处理

- P阶收敛定义
- 判定定理
- 埃特金加速

5.4 牛顿法

- 牛顿迭代公式
- 牛顿法的收敛性与收敛速度
- 初始值的选取
- 牛顿下山法