CS 2020~2021 **第一学期**

“ 数值分析 ”考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试日期 **2020-11-21** 考试时长 **150 分钟**

专业班级 ______ 学号 ______ 姓名 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	15	15	8	15	21	16	10	100	
得分									

分数	
评卷人	

可使用无记忆功能简单计算器

解答内容不得超过装订线

一、分析题（15 分）

（1）已知 $x_1 = 1.25, x_2 = 0.180$ 是具有三位有效数字的近似值，试分析 $x_1^2 - x_2^2$ 计算结果的有效数字位数。(5 分)

（2）防洪水文监测中心每 5 分钟接受某水库的实时水位数据，由于某种故障，监测中心从 t 时刻起的连续 33 分钟内只收到 5 组水位数值，t 时刻起的第 3 个周期水位值缺失。试简要分析采用何种数值计算方法可填补第 3 周期的水位值。(5 分)

（3）试分析下述数值计算过程中近似计算结果 0.207 的截断误差与舍入误差，只需给出其估计式，不必计算出误差或误差限的值。(5 分)

$$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}dx \approx \frac{\sqrt{2}-1}{2}[\sqrt{1^2-1}+\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}] = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{1.414-1}{2} = 0.207$$

分数	
评卷人	

二、已知 $y=f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0.25,2.25]$的如下数据表：(3×5 分共 15 分)

x	0.25	1	2.25
y	0.5	1	1.5

（1）根据上述数据构造 $f(x)$ 的二次插值多项式 $P(x)$；

（2）利用余项公式估计以 $P(x)$ 计算 $f(0.75)$ 近似值的误差限；

（3）如果考虑 $f'(1) = 0.5$，试构造增加该数据后的三次 Hermite 插值多项式 $H(x)$，同时满足上述数据表以及该导数值，并写出该 Hermite 插值多项式的余项表达式。

分数	
评卷人	

三、对于机械求积公式: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}})$，（1）求其代数精度，（2）它是插值型的吗？简述其理由。（4+4=8 分）

分数	
评卷人	

四、（15 分）用某种数值积分法计算以下积分的近似值，精度要求 $e = 0.5\times10^{-3}$，若计算时事先估计步长，则 $e = 0.5\times10^{-2}$。写出求解过程，要求中间结果保留 4 位小数位： $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

解答内容不得超过装订线

分数	
评卷人	

五、(1) 使用下述公式求解微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = -12y, 0 < x \le 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$ 在 x=0.3 的数值解，取 h=0.1 计算。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 2f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hf(x_n, y_n))]$$

（2）分析其稳定性，给出分析过程。

（3）若初值准确，试分析上述 p（p>1）阶公式求解该方程的收敛性。（7+7+7=21 分）

解答内容不得超过装订线

分数	
评卷人	

六、通过解方程 $f(x)=x^4-2=0$ 求 $\sqrt[4]{2}$ 的近似值，有两种迭代格式：

A. $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^4-2}{4}$,　　B. $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^4-2}{4x_k^3}$

（1）判断以上两种迭代格式是否局部收敛？若收敛求其收敛速度；（2）选择其中收敛较快的格式求 $\sqrt[4]{2}$ 的近似值，写出迭代过程（$x_0=1$），使最终结果绝对误差限小于 0.5×10^{-2}．（8+8=16 分）

分数	
评卷人	

七、已知[a,b]中两两互异的 n+1 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，$l_0(x)$ 为以这些点为插值节点的 Lagrange 插值基函数，即：$l_0(x)=\prod_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$，

基于插值法证明：(10 分)

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$