



数值分析 总复习

计算机学院 孙伟平



第1章 误差的基本概念

1.2.1 误差的来源

1.2.2 误差和误差限

- 绝对误差、绝对误差限
- 相对误差、相对误差限

1.2.3 有效数字

- 有效数字的定义
- 有效数字与误差限的关系

1.2.4 算术运算的误差与误差限

◆ 基本概念：

- 误差，误差限
- 有效数字

◆ 有效数字位数的多种判定方法

◆ 算术运算中误差限的估计公式

◆ 近似计算中应注意的一些原则

准确值 x 近似值 x^*

◆ 绝对误差 \mathcal{E}

$$\mathcal{E}(x^*) = x^* - x$$

◆ 相对误差 \mathcal{E}_r

$$\mathcal{E}_r(x^*) = \frac{\mathcal{E}(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

$$\mathcal{E}_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*}$$

◆ 绝对误差限 η

$$|\mathcal{E}(x^*)| = |x^* - x| \leq \eta$$

◆ 相对误差限 η_r

$$|\mathcal{E}_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \eta_r$$

有效数字的定义

定义：如果近似数 x^* 的绝对误差限不大于 0.5×10^{-j} 则称近似数 x^* 准确到小数点后第 j 位，从这个小数点后第 j 位数字直到最左边非 0 数字之间的所有数字都称为 x^* 的有效数字。

x^* 的绝对误差限不超过 x_{k+j} 这一位的半个单位

$$x^* = \pm x_1 x_2 \cdots x_k . x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_{k+j} \cdots x_{k+n}$$

\uparrow
 $\neq 0$

$$\eta \leq \underbrace{0.0000000 \cdots 05}_{j \text{ 个}}$$

j 个

x^* 的有效
数字位数
为 $k + j$ 位

有效数字的等效定义

一般地，将 x^* 转化成为计算机浮点数的形式：

$$x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$$

规格化
指数

如果

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \leq 0.5 \times 10^{m-l}$$

(其中 $1 \leq l \leq n$)

则 x^* 具有 l 位有效数字。

(3) 相对误差限与有效数字的关系

定理1.1 假设近似数 $x^* = \pm 0.x_1x_2 \cdots x_n \times 10^m$ ，其中 $x_1 \neq 0$ ， x^* 的有效数字的位数为 n ，则 x^* 的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$$

定理1.2 假设近似数 $x^* = \pm 0.x_1x_2 \cdots x_n \times 10^m$ ，其中 $x_1 \neq 0$ ， x^* 的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2(x_1 + 1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 具有 n 位有效数字。

算术运算中误差限的估计公式

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) \pm \varepsilon(y^*)$$

$$\eta(x^* \pm y^*) = \eta(x^*) + \eta(y^*)$$

$$\eta(x^* y^*) = |x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)$$

$$\eta_r(x^* y^*) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*)$$

$$\eta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{|x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)}{|y^*|^2}$$

$$\eta_r\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*) \quad y, y^* \neq 0$$

第2章 插值方法与曲线拟合

2.1 插值多项式的存在性与唯一性

2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值

- 插值基函数
- **Lagrange**插值公式 $L_n(x)$
- **插值余项**公式、推导及应用

2.3 牛顿 (Newton) 插值

- 差商-差商表
- **Newton**插值公式 $N_n(x)$
- 承袭性

2.4 赫密特 (Hermite) 插值

- 要满足函数值及导数值
 $H_{2n+1}(x)$

➤ 基函数

- 基函数方法，待定系数法等

➤ **插值余项**及推导

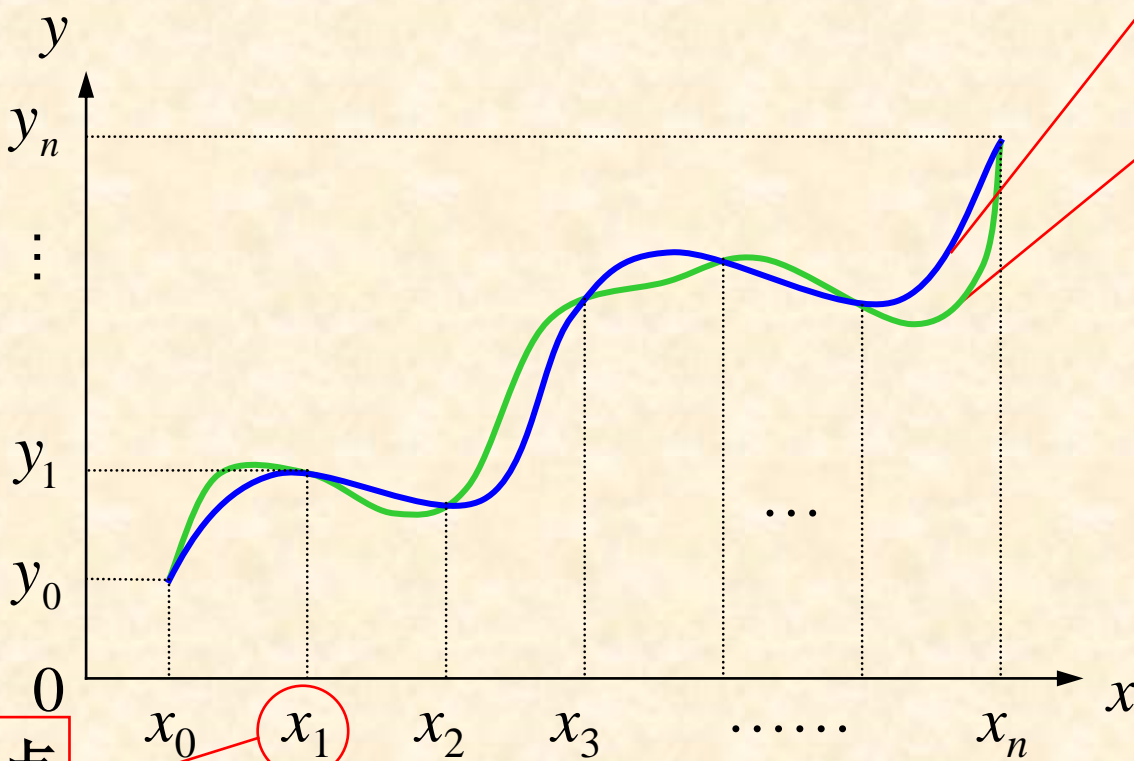
2.5 分段插值

- 思想
- 分段线性插值，分段三次H插值
- **误差分析**

2.7 曲线拟合的最小二乘法

- 最小二乘条件

- ◆ 建立一个简单的而便于计算的函数 $g(x)$ 使其近似的代替 $f(x)$ 。



插值节点

被插值函数 $f(x)$

插值函数 $g(x)$

插值条件

$$y_i = f(x_i)$$

主要研究 $g(x)$
为代数多项式

插值区间

Lagrange 插值

- ◆ 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; 求作一个次数不高于 n 的代数多项式:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足:

$$L_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

Lagrange 插值基函数

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- ◆ $l_i(x)$ 的最高次数与 $L_n(x)$ 相同
- ◆ $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的零点（共有 n 个）
- ◆ $l_i(x)$ 在 x_i 处取值为 1

Lagrange 插值误差分析

插值余项

◆ 插值余项（截断误差）：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\xi \in (a, b)$$

如果我们可以估算出：

$$\max_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$$

$$\omega_{n+1}(x)$$

则用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差的绝对值：

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

n次牛顿插值多项式

◆ 求作 n 次代数多项式:

$$\begin{aligned} N_n(x) = & c_0 \times \boxed{1} \longrightarrow \varphi_0(x) \\ & + c_1 \boxed{(x - x_0)} \longrightarrow \varphi_1(x) \\ & + c_2 \boxed{(x - x_0)(x - x_1)} \longrightarrow \varphi_2(x) \\ & + c_3 \boxed{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \longrightarrow \varphi_3(x) \\ & \vdots \\ & + c_n \boxed{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})} \longrightarrow \varphi_n(x) \end{aligned}$$

牛
顿
插
值
基
函
数

满足: $N_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

牛顿插值公式

$$\begin{aligned} c_0 \leftarrow f(x) &= f(x_0) \\ &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ c_1 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ c_2 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ c_3 \leftarrow &\vdots \\ &+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ c_n \leftarrow &+ f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

$$c_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i] \quad i = 0, 1, \dots, n$$

由插值多项式的唯一性可知： $N_n(x) = L_n(x)$
二者的余项也相等。



x_i	$f(x_i)$	一阶 差商	二阶差商	三阶差商	...	n阶差商
x_0	$f(x_0)$...	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$...	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$...	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

差商表

差商的性质

赫密特 (Hermite) 插值

- 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$ 上的函数值及一阶导数值:

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

求作一个次数不高于 $2n+1$ 次的插值多项式 $H(x)$, 满足以下 $2n+2$ 条件:

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- 称 $H(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式, 因其最高次数不超过 $2n+1$, 常记为 $H_{2n+1}(x)$
 - $H_{2n+1}(x)$ 不仅在节点处与 $f(x)$ 有相同的函数值, 且在
- 这些节点处与 $f(x)$ 相切

赫密特插值基函数

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + y'_i \beta_i(x)]$$

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$
$$\alpha'_i(x_j) = 0$$

$$\beta_i(x_j) = 0$$
$$\beta'_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次代数多项式

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均含因子 $(x - x_j)^2$

$$j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

赫密特插值余项

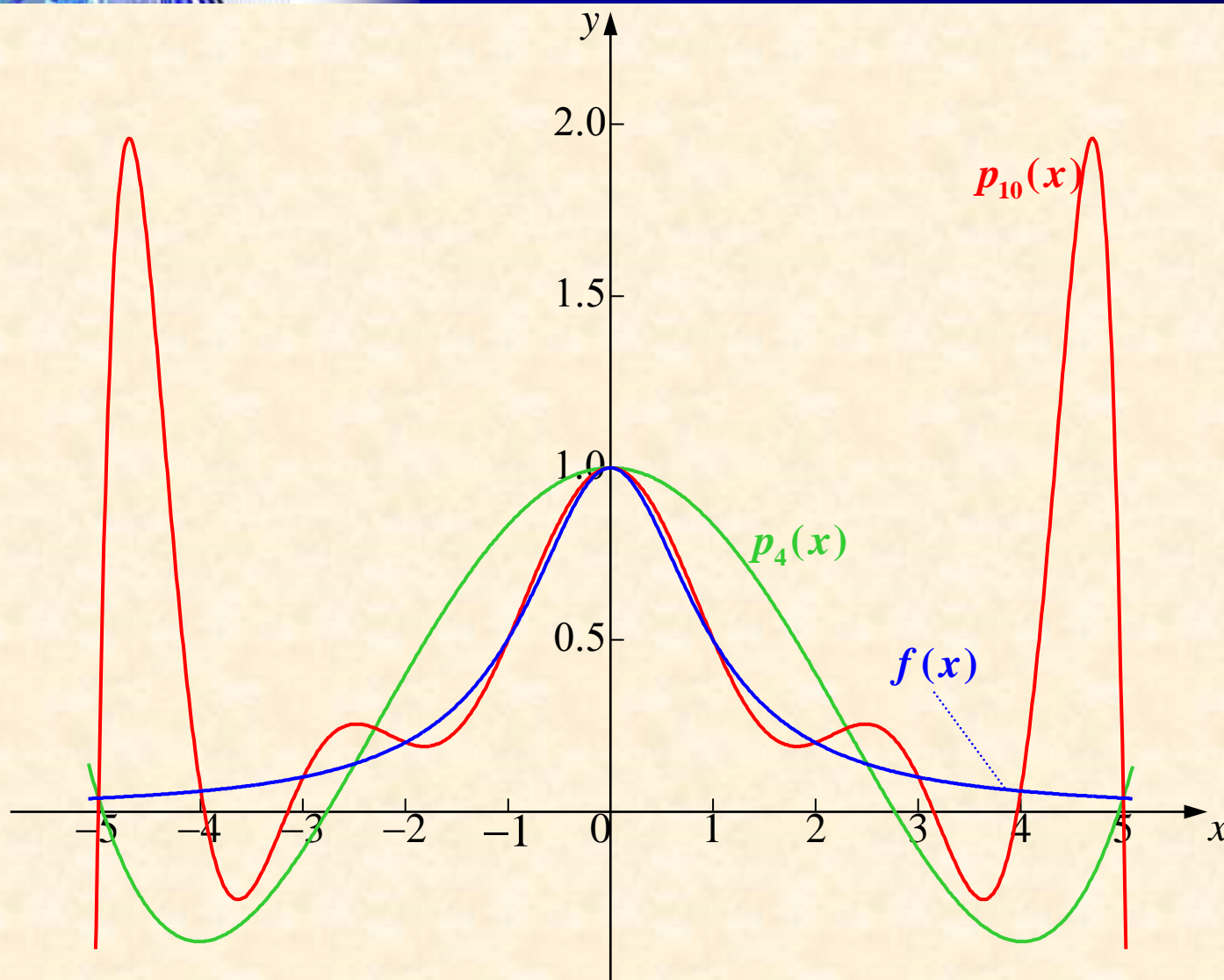
$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2 \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 满足以下 $2n+2$ 条件:

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Hermite插值余项的表达式会因实际插值条件不同而不同。

高次插值的 Runge 现象



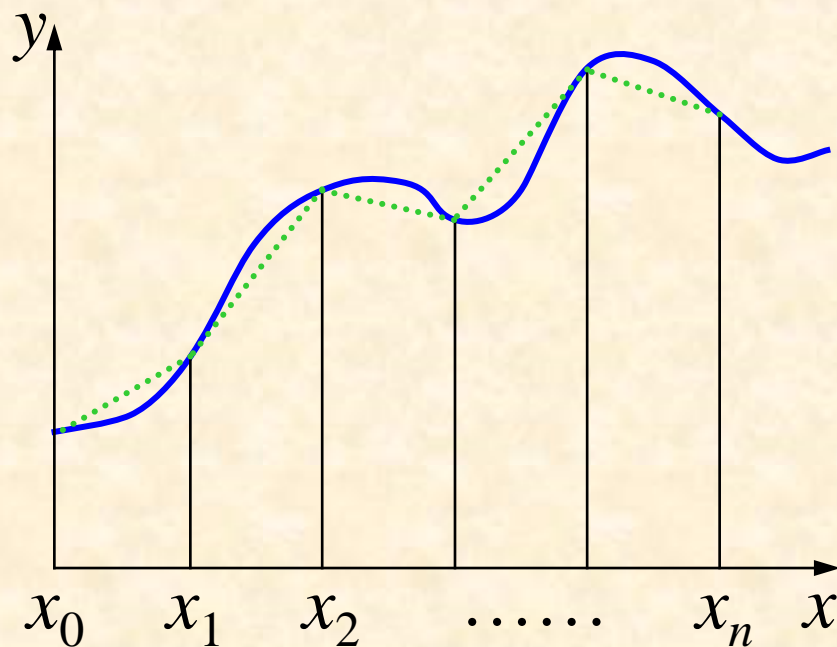
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

当插值节点数
达到一定程度
后，随着节点
个数的增加，
逼近精度越来越差

分段插值

- ◆ 将插值区间 $[a, b]$ 作一划分
 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
- ◆ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造次数较低的插值多项式 $p_i(x)$
- ◆ 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的插值函数 $g(x) = p_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}]$



分段线性插值

- ◆ 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i ，求作具有划分 Δ 的分段一次代数多项式 $S_1(x)$ ，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_1(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个一次插值多项式，则插值基函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \begin{matrix} x \in [x_i, x_{i+1}] \\ i = 0, 1, \dots, n-1 \end{matrix}$$



分段线性插值的插值余项:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad h = \max h_i$$

- ◆ 上式表明插值余项与 h 相关
- ◆ h 越小, 则分段线性插值的插值余项越小, 因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法

分段三次 (Hermite) 插值

- ◆ 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y'_i , 求作具有划分 Δ 的分段三次代数多项式 $S_3(x)$, 满足:

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S'_3(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式, 且:

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y'_i \end{cases} \quad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y'_{i+1} \end{cases}$$



分段三次 Hermite 插值的插值余项:

$$|f(x) - S_3(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

$$h = \max h_i$$

第3章 数值积分与数值微分

3.1 数值积分

3.1.1 机械求积公式和代数精度

3.1.2 求积公式的构造方法

3.1.3 Newton-Cotes 求积公式

3.1.4 复化求积法

3.1.5 Romberg 求积公式

3.2 数值微分

3.2.1 差商型数值微分

3.2.2 插值型数值微分

- 代数精度的概念、分析
- 插值型求积公式
- 求积公式的两种构造方法
- Cotes系数
- T, S, C 公式, 余项
- N-C公式的数值稳定性
- 复化T, 复化S, 复化C, 余项
- 变步长梯形公式
- Romberg算法

机械求积

- ◆ 可以在积分区间 $[a, b]$ 中选择若干个节点 x_i ，用这些节点处的高度（函数值 $f(x_i)$ ）的加权平均值近似替代 $f(\xi)$ ，从而构造出如下所示的求积公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [k_0 f(x_0) + k_1 f(x_1) + \cdots + k_n f(x_n)]$$

其中加权系数： $k_0 + k_1 + \cdots + k_n = 1$

- ◆ 更一般的形式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

求积系数

求积节点

代数精度

定义 3.1 如果求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

对于一切次数 $\leq m$ 的多项式均准确成立，
而对于次数 $> m$ 的某个多项式不能准确成立，
则称该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度的求法

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

考查 $f(x) = 1, x, x^2, x^3 \dots$, 依次验证求积公式

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

是否成立，若第一个不成立的机械求积等式的 $f(x)$ 是 x^m ，则求积公式的代数精度为 $m - 1$ 。

插值型求积公式

设 $a \leq x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \leq b$, 根据 $[x_i, f(x_i)]$ 可以构造 n 次 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

去逼近 $f(x)$ 。因此

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx$$

插值型求积公式

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b l_i(x) dx \right] f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

定理3.2


给定 $n + 1$ 个积分节点 x_i 以及相应的函数值 $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。则求积公式:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

代数精度至少为 n 次



求积公式为插值型



3.1.3 Newton-Cotes 公式

1. 公式的推导

积分区间等分 \Rightarrow Cotes系数

2. 数值稳定性（舍入误差）

3. 截断误差

4. 低阶Newton-Cotes公式

- 梯形公式
- Simpson公式
- Cotes公式

公式
截断误差


Newton-Cotes 公式

如果将积分区间 $[a, b]$ 分为 n 等分，其求积节点 x_i 为：

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

（上式中， $h = \frac{b-a}{n}$ 表示各等分小区间的宽度，称为**步长**。）

以上述 $n + 1$ 个求积节点为插值节点，构建被积函数 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$ 。



$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right] dx \\
 &= \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \right] \\
 &= (b-a) \sum_{i=0}^n \left[\frac{\int_a^b l_i(x) dx}{b-a} \cdot f(x_i) \right]
 \end{aligned}$$

C_i Cotes系数 与 n 有关

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \quad \boxed{\text{n阶Newton-Cotes公式}}$$

Cotes系数

n	$C_i^{(n)}$								
<u>1</u>	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
<u>2</u>	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
<u>3</u>	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
<u>4</u>	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^n C_i = 1$$

(习题3-7)

负数



Newton-Cotes公式的稳定性

在设计算法时，需要考虑

- 符合精度要求？
- 计算结果可靠？

算法的计算结果可靠，是指在运算过程中，舍入误差的积累不会对计算结果产生较大的影响。

数值稳定性：一个算法，如果在执行它的过程中舍入误差在一定条件下能够得到控制，则称它是数值稳定的；否则，称它是数值不稳定的。

Newton-Cotes公式的稳定性


Newton-Cotes 公式: $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$

如考虑计算 $f(x_i)$ 时产生的舍入误差 ε_i

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i [f(x_i) + \varepsilon_i]$$

则由舍入误差引起的积分误差为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left\{ (b-a) \sum_{i=0}^n C_i [f(x_i) + \varepsilon_i] \right\} - \left\{ (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \right\} \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i \end{aligned}$$


$$\varepsilon = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=0}^n C_i = 1$$

记 $\varepsilon_{\max} = \max |\varepsilon_i|$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$|\varepsilon| = \left| (b-a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i \right| \leq (b-a) \varepsilon_{\max} \sum_{i=0}^n |C_i|$$

$n \leq 7$ 时, C_i 皆为正, 故 $\sum_{i=0}^n |C_i| = \sum_{i=0}^n C_i = 1$

$|\varepsilon| \leq (b-a) \varepsilon_{\max} \longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差**有上界**

$n \geq 8$ 时, C_i 出现负数, $\sum_{i=0}^n |C_i|$ 随着 n 的增加而不断增大

$|\varepsilon|$ 无上界 \longrightarrow 由舍入误差引起的积分误差**无上界**

高阶**Newton-Cotes**公式不是数值稳定的, 不宜采用。

Newton-Cotes公式误差

把Lagrange余项代入积分式，得

$$R = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx$$

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{h^{n+1}(t - 0)(t - 1) \cdots (t - n)}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x)(t - 0)(t - 1) \cdots (t - n) dt \\ &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$x = a + th$$

$$x_i = a + ih$$

$$x - x_i = (t - i)h$$

$$dx = h dt$$

积分区间
变为 $[0, n]$

低阶N-C求积公式及其余项

$$I \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

• 梯形公式 代数精度1

$$R_T = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) \quad \left\| -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] \right.$$

$$h = b - a$$

$$I \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

• Simpson公式

代数精度3

$$R_S = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\eta) \quad h = \frac{b-a}{2}$$

$$I \approx (b-a) \times \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$$

• Cotes公式

代数精度5

$$R_C = -\frac{8h^7}{945} \cdot f^{(6)}(\eta) \quad h = \frac{b-a}{4}$$

复化求积公式余项

- 复化梯形公式的余项: n

$$R_{T_n} = -\frac{nh^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- 复化辛普森公式的余项:

$$n = 2m$$

$$R_{S_n} = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- 复化柯特斯公式的余项:

$$n = 4m$$

$$R_{C_n} = -\frac{m \cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

变步长复化求积

- ◆ 从上述误差分析可以看到，复化积分的截断误差（余项）随着分割因子 n 的增大而减小，可在求积分之前就确定 n 的值，使误差在允许范围之内。
- ◆ 尽管可以利用余项公式来估计 n ，但由于余项公式中含有被积函数的导数，而估计各阶导数的最大值往往比较困难，且用这种方法估计的误差上界一般偏大，在实际运用上很困难。
- ◆ 在实际计算中，一个有效的方法是“**变步长法**”，在求积过程中根据精度要求，逐步确定 n ，并算出近似值。

变步长方法（以复化梯形求积为例）

◆ 步骤

1、在积分区间 $[a, b]$ 上选用某个固定的 n ，用

$$T_n \text{ 近似计算 } \int_a^b f(x) dx$$

2、在第 1 步的基础上将每个积分小区间分半处

$$\text{理，用 } T_{2n} \text{ 近似计算 } \int_a^b f(x) dx$$

3、判断 $|T_{2n} - T_n| \leq \varepsilon$ 是否成立，成立则表示 T_{2n} 满足精度要求，否则在第 2 步的基础上将积分小区间再分半，重复 2、3 步直至获得满足精度要求的结果

二分点/半整数节点

小区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 记小区间中点: $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

该区间二分前、后的积分值分别记为: T_{i1}, T_{i2}

$$T_{i1} = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

二分前的步长 $\frac{b-a}{n}$

$$T_{i2} = \frac{h/2}{2}[f(x_i) + f(x_{i+\frac{1}{2}})] + \frac{h/2}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_{i1} + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} T_{i2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} T_{i1} + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

二分点的被积函数值



Romberg求积公式

- ◆ 变步长的梯形法算法简单，但是收敛速度慢。
- ◆ 如何提高收敛速度，节省计算量？
- ◆ 事后误差估计法

用 T_n 和 T_{2n} 得到新的近似式以及新的误差估计式。


◆ 复化梯形求积，积分区间分为 n 等分的截断误差为：

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} R_{T_n} &= I - T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right] = -\frac{h^2}{12} \sum_{i=0}^{n-1} [h f''(\xi_i)] \\ &\approx -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx = -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] \propto h^2 \end{aligned}$$

$$R_{T_{2n}} = I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n)$$


$$\Longrightarrow I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \text{ —— 新的误差估计式}$$



叠加上误差，可得到比 T_{2n} 更精确的积分值：

$$\bar{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \text{ —— 新的数值积分式}$$

类似的思想在其它章节也应用过.....



微分中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

$$\begin{aligned} R_{S_n} &= -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4}{90} \cdot \frac{1}{2} nh \cdot f^{(4)}(\eta) \\ &= -\frac{h^4}{180} \cdot (b - a) \cdot f^{(4)}(\eta) \approx -\frac{h^4}{180} \cdot [f'''(b) - f'''(a)] \propto h^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{C_n} &= -\frac{m \cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) = -\frac{8h^6}{945} \cdot \frac{1}{4} nh \cdot f^{(6)}(\eta) \\ &= -\frac{2h^6}{945} \cdot (b - a) \cdot f^{(6)}(\eta) \\ &\approx -\frac{2h^6}{945} \cdot [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] \propto h^6 \end{aligned}$$

龙贝格求积公式（续）

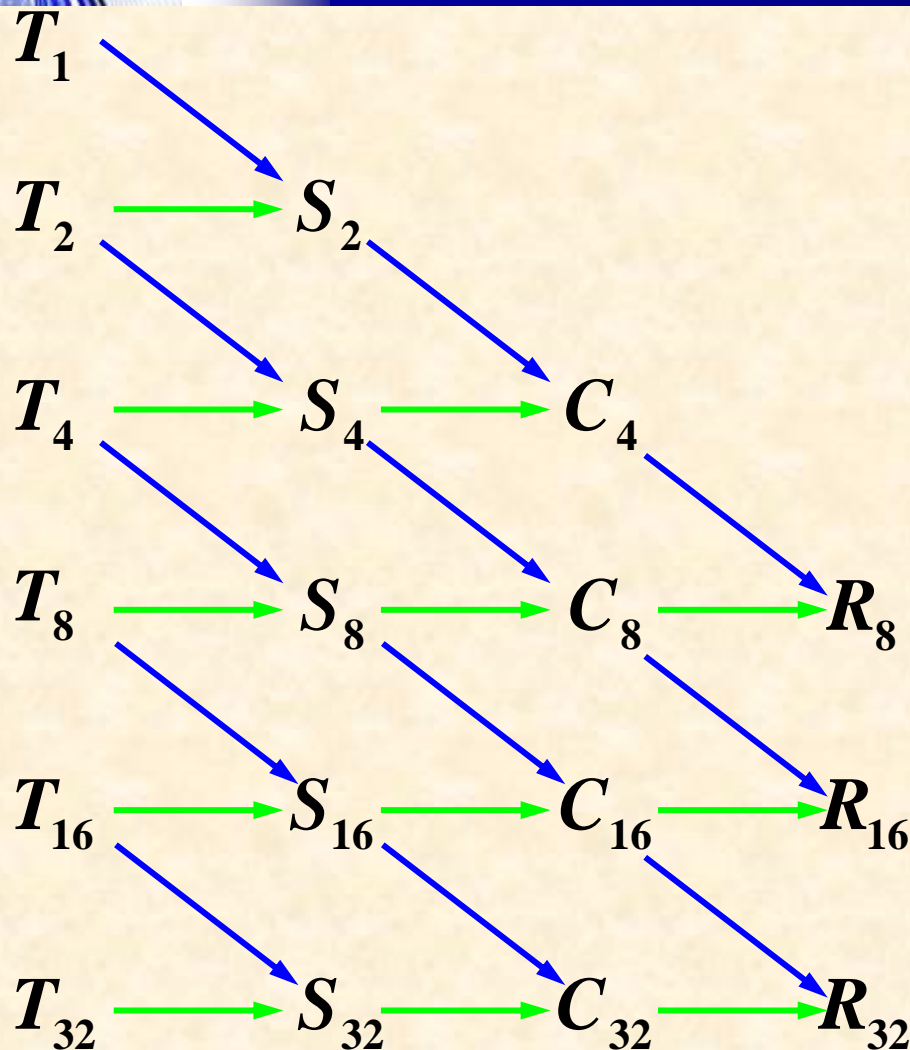
$$R_{T_n} \propto h^2 \longrightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

$$R_{S_n} \propto h^4 \longrightarrow \frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n = C_{2n}$$

$$R_{C_n} \propto h^6 \longrightarrow \frac{I - C_{2n}}{I - C_n} \approx \frac{1}{64} \longrightarrow \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n = R_{2n}$$

Romberg求积公式

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \quad C_{2n} = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \quad R_{2n} = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$



二分前的步长

$$T_{2n} = \frac{T_n}{2} + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

达到
精度
要求
了吗
?

逐次减半加速法

Romberg外推公式



第4章 常微分方程数值解法

4.1 欧拉方法


- 显式欧拉法、隐式欧拉法、二步欧拉法、梯形公式欧拉法
- 局部截断误差

4.2 改进的欧拉方法

4.3 龙格-库塔方法（二阶，经典四阶）

4.4 收敛性与稳定性

难点：局部阶段误差，收敛性分析，稳定性条件

- 
- $y(x_n)$: 待求函数 $y(x)$ 在 x_n 处的精确函数值
 - y_n : 待求函数 $y(x)$ 在 x_n 处的近似函数值

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \quad n = 1, 2, \dots$$

欧拉方法

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

改写成
递推式



$$\begin{cases} y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n, h), & n = 0, 1, 2, \dots \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

假设初值问题(1)的解 $y=y(x)$ 唯一存在且足够光滑. 对求解区域 $[a, b]$ 做等距剖分

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x_N=b$$

$h=(b-a)/N$ 称为剖分步长; 剖分节点

$$x_n = a + nh, \quad n=0, 1, \dots, N.$$

数值解法的目标就是求精确解 $y(x)$ 在剖分节点 x_n 上的值 $y(x_n)$ 的近似值 $y_n, n=1, 2, \dots, N$.

1. 四种欧拉方法
2. 局部截断误差



显式Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

隐式Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

二步Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

梯形公式Euler方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

改进的Euler方法

预报： $\bar{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

校正： $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\{f(x_n, y_n) + f[x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n)]\}$$

局部截断误差

- 为了简化分析某常微分方程数值算法的误差，现假设 $y_n = y(x_n)$ ，即在前一步 y_n 准确的前提下，估计：

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

- 称上述误差 T_{n+1} 为该常微分方程数值算法的局部截断误差。
- 如果某个常微分方程数值算法的局部截断误差可表示为 $O(h^{p+1})$ ，则称该数值算法的精度是 p 阶。精度阶数越高，方法的精度越好。
- 利用泰勒展开来分析。

梯形公式欧拉法:

$y(x_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

求证梯形公式欧拉法的精度为2阶。

(1) 泰勒公式 $y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3)$

(2) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

(3) 令 $y_n = y(x_n)$, 令隐式欧拉法右边的 $y_{n+1} = y(x_{n+1})$

(4)
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y(x_n) + (h/2)(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) \\ &= y(x_n) + (h/2)[y'(x_n) + (y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2))] \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + (h^2/2)y''(x_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

(5) $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

2 阶精度



各种欧拉法的精度比较

方法	精度
显式欧拉法	1
隐式欧拉法	1
二步欧拉法	2
梯形公式欧拉法	2
改进的欧拉法	2
变形的欧拉法	2
p阶R-K方法	p

4.4 收敛性与稳定性

- ◆ 收敛性和稳定性是从不同的角度来考量算法的可靠性。
- ◆ 本节只考虑单步显式方法的收敛性和单步方法的稳定性。

而且稳定性的分析只针对特定模型进行。

- ◆ 重点：
 - 定义
 - 判定定理及应用

单步法的收敛性

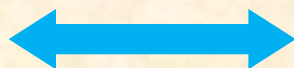
定义： 求解某初值问题的单步数值法，对任意固定的 $x_n = x_0 + nh$ 当 $h \rightarrow 0$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时，它的近似解趋近于精确解 $y(x_n)$ ，即：

$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_n = y(x_n)$$

则称该单步法是收敛的。

定义： 称 $|y(x_n) - y_n|$ 为单步法的近似解 y_n 的**整体截断误差**。

单步法收敛



$h \rightarrow 0$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时， y_n 的整体截断误差 $\rightarrow 0$

收敛性定理

(定理4.2)

若单步法 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ 满足以下条件:

- ◆ 具有 p 阶精度 (局部截断误差) ;
- ◆ 增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件:

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, \bar{y}, h)| \leq L_\varphi |y - \bar{y}|$$

- ◆ 初值 y_0 是准确的。

则该单步法的整体截断误差为: $|y(x_n) - y_n| = O(h^p)$

若某单步法满足以上条件, 则该方法是收敛的。

单步法的稳定性

定义：设在节点 x_n 处用数值算法得到的理想数值解为 y_n ，而实际计算得到的近似解为 \tilde{y}_n ，称差值：


$$\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$$

为第 n 步的数值解的**扰动**。

定义：若一种数值方法在节点 x_n 处的数值解 y_n 的扰动 $\delta_n \neq 0$ ，而在以后各节点 y_m ($m > n$) 上产生的扰动为 δ_m ，如果：

$$|\delta_m| \leq |\delta_n| \quad (m = n + 1, n + 2, \dots)$$

则称该数值方法是**稳定**的。



隐式欧拉法: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

考察模型方程: $y' = \lambda y \quad (\lambda < 0)$

隐式欧拉法 $y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$

化简为: $y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n$

假设 y_n 上有扰动 δ_n , 则 y_{n+1} 的扰动为:

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} \delta_n$$

隐式欧拉法稳定 $\longleftrightarrow |\delta_{n+1}| \leq |\delta_n| \longleftrightarrow \left| \frac{1}{1-h\lambda} \right| \leq 1 \quad \lambda < 0$

$\forall h > 0$, 上式均成立, 所以隐式欧拉法稳定是恒稳定的。



第5章 方程求根

5.1 二分法

5.2 迭代法及其收敛性

- 迭代法的基本概念
- **收敛性**判定定理（定理5.3）
- 迭代过程的误差分析（定理5.4）
- **局部收敛性**（定理5.5）

5.3 迭代法的收敛速度与加速


- **P阶收敛定义**
- **判定定理**（定理5.6, 5.7）

5.4 牛顿法

- 牛顿迭代公式
- 牛顿法的**收敛性**与**收敛速度**（定理5.8, 5.9）
- 初始值的选取
- 牛顿下山法

复习与考试

- ◆ 复习：理解基本概念，掌握基本方法
误差（余项）：结论、证明、分析与应用
收敛性、稳定性
多做题：例题（课件，教材）、作业
举一反三
- ◆ 考试：
 - 题型：简答，计算，证明
 - 时间、地点：参见学院通知
 - 工具：无记忆功能简单计算器



◆ 归纳与演绎

本课程第2章-第5章分别讨论了不同数学问题的数值计算方法：

函数逼近（插值与拟合）

数值积分与数值微分

常微分方程初值问题数值解法

非线性方程求根问题

横向比较
纵向比较

比如误差分析（截断误差，余项，代数精度，收敛性，稳定性，局部截断误差，整体截断误差，收敛性与收敛速度等）

泰勒展开