




第3章 数值积分与数值微分

计算机学院 孙伟平



第3章

3.1 数值积分

3.1.1 机械求积公式和代数精度

3.1.2 求积公式的构造方法

3.1.3 Newton-Cotes 求积公式

3.1.4 复化求积法

3.1.5 Romberg 求积公式

3.2 数值微分

3.2.1 差商型数值微分

3.2.2 插值型数值微分


3.1 数值积分



艾萨克·牛顿
(Isaac Newton 1643年-1727年)
英国著名的物理学家、数学家



戈特弗里德·威廉·莱布尼茨
(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646年-1716年)
德国数学家




设函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $F'(x) = f(x)$, 理论上可以用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

然而在生产实践和科学研究中, 极少直接用上述公式进行求积。

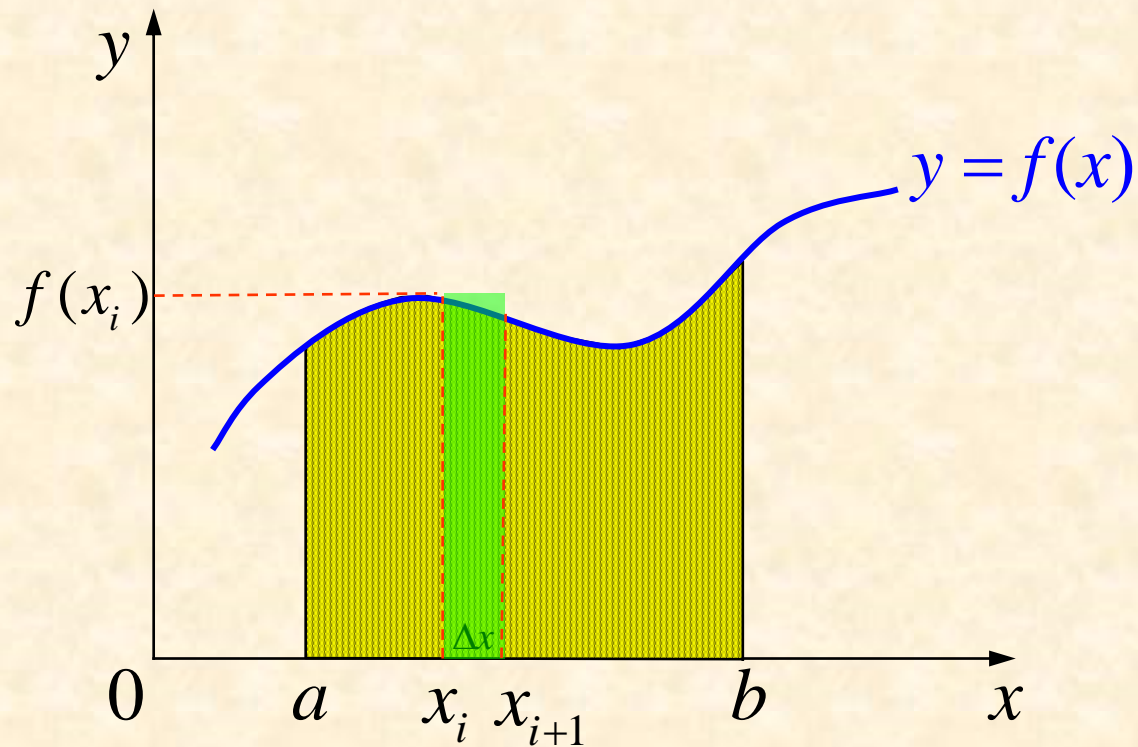
◆ 原函数无法用简单的初等函数表示出来

$$\int_a^b \sin x^2 dx, \quad \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b e^{-x^2} dx, \quad \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx$$

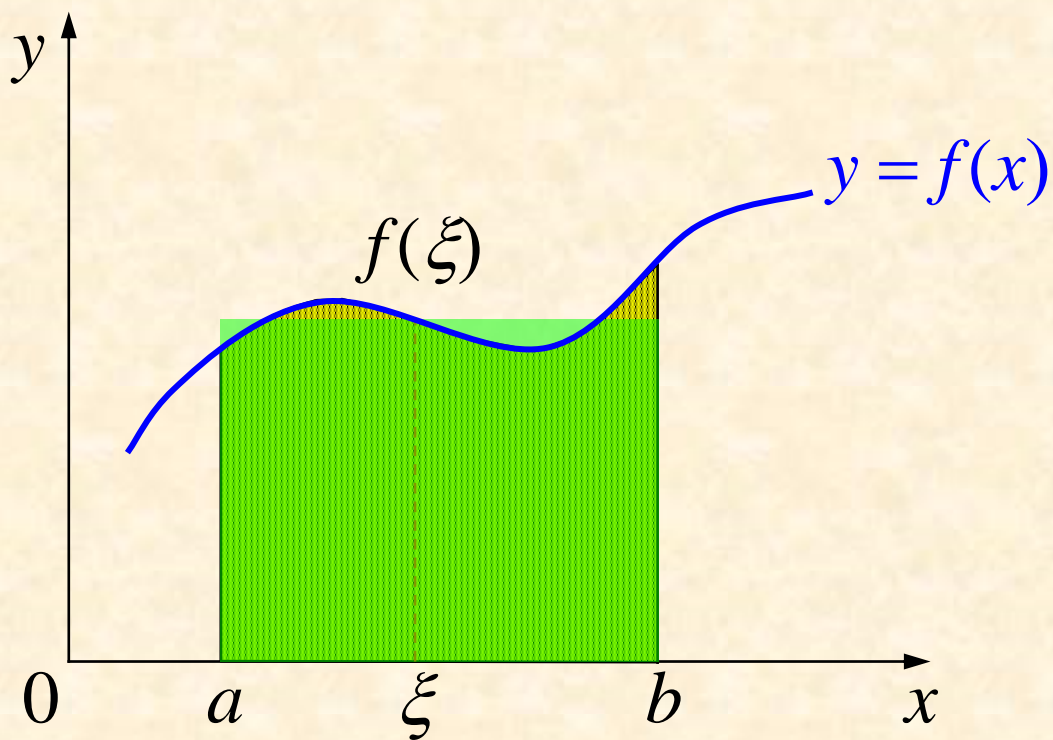
- 
- ◆ 被积函数 $f(x)$ 是以离散形式给出，无法得到它的原函数
 - ◆ $f(x)$ 的原函数能用初等函数表示，但表达式过于复杂，利用牛顿-莱布尼兹公式直接求积不方便

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \left[\frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8\sqrt{a^3}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| \right]_{x_0}^{x_1}$$

3.1.1 机械求积与代数精度



$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \Delta x f(x_i)$$



积分中值定理:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi)$$

$f(x)$ 在积分
区间 $[a, b]$ 上
的平均高度

未知

机械求积（续）

◆ 左矩形公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times f(a)$$

◆ 中矩形公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

◆ 右矩形公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times f(b)$$

$f(\xi)$ 的近似值

机械求积（续）

◆ 梯形公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$f(\xi)$ 的近似值

◆ 辛普森（Simpson）公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}$$

机械求积（续）

- ◆ 可以在积分区间 $[a, b]$ 中选择若干个节点 x_i ，用这些节点处的高度（函数值 $f(x_i)$ ）的**加权平均值**近似替代 $f(\xi)$ ，从而构造出如下所示的求积公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [k_0 f(x_0) + k_1 f(x_1) + \cdots + k_n f(x_n)]$$

其中加权系数： $k_0 + k_1 + \cdots + k_n = 1$

- ◆ 更一般的形式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

求积系数

求积节点

机械求积（续）

机械求积公式：
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

特点：

- ◆ 求积系数 A_i 仅与节点 x_i 和积分区间长度有关，与被积函数 $f(x)$ 的具体形式无关
- ◆ 公式具有通用性
- ◆ 避开了原函数的求解计算

代数精度

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \underline{R}$$

余项

为了衡量一个求积公式的精确程度，一般通过余项的大小来衡量。

例 用梯形公式和Simpson公式分别近似 $\int_0^2 f(x)dx$ 。

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0) + f(2)$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
积分的准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
T公式所得的值	<u>2</u>	<u>2</u>	4	8	16	8.389
S公式所得的值	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>2.67</u>	<u>4</u>	6.67	<u>6.421</u>

使得求积公式准确成立的多项式的次数，可以作为衡量求积公式精确程度的标准。

代数精度

定义 3.1 如果求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

对于一切次数 $\leq m$ 的多项式均准确成立，
而对于次数 $> m$ 的某个多项式不能准确成立，
则称该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度 (续)

如果机械求积公式对 $x^j, j = 0, 1, \dots, k$ 能准确成立, 则它对一切次数不超过 k 次的代数多项式均准确成立。

机械求积公式对一切 $x^j, (0 \leq j \leq k)$ 均准确成立, 则有:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_k x^k) dx \\ &= a_0 \int_a^b x^0 dx + a_1 \int_a^b x^1 dx + \dots + a_k \int_a^b x^k dx \\ &= a_0 \sum_{i=0}^n A_i x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^n A_i x_i^1 + \dots + a_k \sum_{i=0}^n A_i x_i^k \\ &= \sum_{i=0}^n A_i (a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \dots + a_k x_i^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b x^0 dx &= \sum_{i=0}^n A_i x_i^0 \\ \int_a^b x^1 dx &= \sum_{i=0}^n A_i x_i^1 \\ &\vdots \\ \int_a^b x^k dx &= \sum_{i=0}^n A_i x_i^k \end{aligned}$$

代数精度的求法

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

考查 $f(x) = 1, x, x^2, x^3 \dots$, 依次验证求积公式

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

是否成立，若第一个不成立的机械求积等式的 $f(x)$ 是 x^m ，则求积公式的代数精度为 $m - 1$ 。

代数精度 例题

例1 考查梯形公式的代数精度

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$$


◆ 零次多项式

设 $f(x) = c$ (常数)

$$\text{左边} = \int_a^b c dx = cx \Big|_a^b = c(b-a)$$

$$\text{右边} = (b-a) \times \frac{c+c}{2} = c(b-a)$$

} 梯形公式对一切零次多项式均准确成立


$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

◆ 一次多项式


设 $f(x) = cx + d$ (c, d 为常数)

$$\text{左边} = \int_a^b (cx + d) dx = \left. \frac{cx^2}{2} \right|_a^b + dx \Big|_a^b = \frac{c(b^2 - a^2)}{2} + d(b - a)$$

$$\text{右边} = (b - a) \times \frac{(ca + d) + (cb + d)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(b - a)[c(b + a) + 2d] = \frac{c(b^2 - a^2)}{2} + d(b - a)$$

梯形公式对一切一次多项式均准确成立



$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

◆ 二次多项式

设 $f(x) = cx^2 + dx + e$ (c, d, e 为常数)

$$\text{左边} = \int_a^b (cx^2 + dx + e) dx = \frac{cx^3}{3} \Big|_a^b + \frac{dx^2}{2} \Big|_a^b + ex \Big|_a^b$$

$$= \frac{c(b^3 - a^3)}{3} + \frac{d(b^2 - a^2)}{2} + e(b - a)$$

$$\text{右边} = (b-a) \times \frac{(ca^2 + da + e) + (cb^2 + db + e)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) [c(b^2 + a^2) + d(b+a) + 2e]$$

$$= \frac{c(b-a)(b^2 + a^2)}{2} + \frac{d(b^2 - a^2)}{2} + e(b-a)$$

不恒等


代数精度 例题

例2 已知 $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$, 试确定系数 A_0, A_1, A_2 , 使得上式的代数精度尽可能高。

解: 分别设 $f(x) = 1, x, x^2$, 则有:

$$\left. \begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_0 + A_2 &= 0 \\ A_0 + A_2 &= 2/3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_0 &= 1/3 \\ A_1 &= 4/3 \\ A_2 &= 1/3 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$


$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$

取 $f(x) = x^3$, 则左边 = 右边 = 0

取 $f(x) = x^4$, 左边 = $\int_{-1}^1 x^4 dx = 2/5 \neq$ 右边 = $2/3$

所以上述求积公式的代数精度为 3。

小练习：请写出积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 的**Simpson**公式。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$

其代数精度为 3。

代数精度（续）

定理3.1 对于任意给定的 $n + 1$ 个互异的积分节点

$$a \leq x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \leq b$$

总存在系数 A_0, A_1, \dots, A_n ，使得求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

的代数精度至少为 n 。

证：若已知插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ，则可构造 n 次代数多项式：

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \quad f(x) = L_n(x) + R(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b R(x) dx = 0$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) dx}_{= A_i} \right] + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \cdot \omega(x) dx$$

若 $f(x)$ 是不高于 n 次的代数多项式，则 $f^{(n+1)}(x) = 0$

3.1.2 求积公式的构造方法

1. 可以用代数精度为标准来构造求积公式。

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

如果上述求积公式具有 n 次代数精度。则

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b x^0 dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^0 \\ \int_a^b x^1 dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^1 \\ \dots \\ \int_a^b x^n dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^n \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 + \dots + A_n = b - a \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \dots \\ A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \dots + A_n x_n^n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \end{array} \right.$$

2. 插值型求积公式

设 $a \leq x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \leq b$, 根据 $[x_i, f(x_i)]$ 可以构造 n 次 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

去逼近 $f(x)$ 。因此

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx$$

插值型求积公式

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b l_i(x) dx \right] f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

定理3.2

◆ 给定 $n + 1$ 个积分节点 x_i 以及相应的函数值 $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。则求积公式:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

代数精度至少为 n 次



求积公式为插值型

证: 以 x_0, x_1, \dots, x_n 为插值节点的 Lagrange 插值基函数

$l_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 也是一个 n 次代数多项式, 如

果求积公式的代数精度至少有 n 次, 则:
$$\int_a^b l_i(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j \boxed{l_i(x_j)} = A_i = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

所以 求积公式为插值型



另一方面，若被积函数 $f(x)$ 是不大于 n 的代数多项式，设 $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

由于 $\sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) = x^k \quad k = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^n (a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \cdots + a_n x_i^n) l_i(x)$$

$$= a_0 \sum_{i=0}^n x_i^0 l_i(x) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^1 l_i(x) + \cdots + a_n \sum_{i=0}^n x_i^n l_i(x)$$

$$= a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b l_i(x) dx \right] f(x_i)$$

A_i

插值型求积公式 例题

例3 已知某求积公式 $\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{16f(1) + 12f(2) + 8f(4)}{9}$


试问该机械求积公式是插值型的吗？

解：根据已知的三个求积节点 $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$ 进行 Lagrange 插值，则插值基函数为：

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 8)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$


$$\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{16f(1) + 12f(2) + 8f(4)}{9}$$

$$l_0(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 8) \quad l_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) \quad l_2(x) = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 l_0(x) dx &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{64}{3} - 3 \times 16 + 8 \times 4 \right) = \frac{16}{9} \\ &= A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 l_1(x) dx &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_0^4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} - \frac{5}{2} \times 16 + 4 \times 4 \right) = \frac{4}{3} \\ &= A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 l_2(x) dx &= \frac{1}{6} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{6} \left[\frac{64}{3} - \frac{3}{2} \times 16 + 2 \times 4 \right] = \frac{8}{9} \\ &= A_2 \end{aligned}$$

所以原机械求积公式是插值型的求积公式。

3.1.3 Newton-Cotes 公式

1. 公式的推导

积分区间等分 \Rightarrow Cotes系数


2. 数值稳定性

3. 截断误差

4. 低阶Newton-Cotes公式

- 梯形公式
- Simpson公式
- Cotes公式

公式
截断误差



◆ 梯形公式:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

◆ 辛普森 (Simpson) 公式:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

积分节点等距——积分区间等分

系数是常数，与区间长度无关，与节点数有关


1. Newton-Cotes 公式

如果将积分区间 $[a, b]$ 分为 n 等分，其求积节点 x_i 为：

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

（上式中， $h = \frac{b-a}{n}$ 表示各等分小区间的宽度，称为**步长**。）

以上述 $n + 1$ 个求积节点为插值节点，构建被积函数 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$ 。



$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_n(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right] dx \\
 &= \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \right] \\
 &= (b-a) \sum_{i=0}^n \left[\frac{\int_a^b l_i(x) dx}{b-a} \cdot f(x_i) \right]
 \end{aligned}$$

C_i Cotes系数 与 i, n 有关

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$$

n阶Newton-Cotes公式

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad x_j = a + jh$$


$$C_i = \frac{\int_a^b l_i(x) dx}{b-a} \quad nh \quad dx = h dt$$

积分变量替换: $x = a + th$

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{b-a}{h} = n \end{cases}$$

$$C_i = \frac{1}{nh} \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(a + th) - (a + jh)}{(a + ih) - (a + jh)} \right] h dt$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} \right] dt$$



$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n [C_i f(x_i)]$$

$$\begin{aligned}
 C_i &= \frac{1}{n} \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} \right] dt \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{i-0} \cdots \frac{1}{i-(i-1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{i-(i+1)} \cdots \frac{1}{i-n} \right) \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n (t-j) \right] dt \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{i!} \left(-\frac{1}{1} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \cdots \left(-\frac{1}{n-i} \right) \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n (t-j) \right] dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{n \times i! \times (n-i)!} \int_0^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n (t-j) \right] dt$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

将积分区间 $[a, b]$ n 等分

Cotes系数

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^n C_i = 1$$

(习题3-7)

负数



2. Newton-Cotes公式的稳定性

在设计算法时，需要考虑

- 符合精度要求？
- 计算结果可靠？

算法的计算结果可靠，是指在运算过程中，舍入误差的积累不会对计算结果产生较大的影响。

数值稳定性：一个算法，如果在执行它的过程中舍入误差在一定条件下能够得到控制，则称它是数值稳定的；否则，称它是数值不稳定的。

Newton-Cotes公式的稳定性


Newton-Cotes 公式: $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$

如考虑计算 $f(x_i)$ 时产生的舍入误差 ε_i

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i [f(x_i) + \varepsilon_i]$$

则由舍入误差引起的积分误差为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left\{ (b-a) \sum_{i=0}^n C_i [f(x_i) + \varepsilon_i] \right\} - \left\{ (b-a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \right\} \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i \end{aligned}$$


$$\varepsilon = (b - a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=0}^n C_i = 1$$

记 $\varepsilon_{\max} = \max |\varepsilon_i|$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$|\varepsilon| = \left| (b - a) \sum_{i=0}^n C_i \varepsilon_i \right| \leq (b - a) \varepsilon_{\max} \sum_{i=0}^n |C_i|$$

$n \leq 7$ 时, C_i 皆为正, 故 $\sum_{i=0}^n |C_i| = \sum_{i=0}^n C_i = 1$

$|\varepsilon| \leq (b - a) \varepsilon_{\max} \longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差**有上界**

$n \geq 8$ 时, C_i 出现负数, $\sum_{i=0}^n |C_i|$ 随着 n 的增加而不断增大

$|\varepsilon|$ 无上界 \longrightarrow 由舍入误差引起的积分误差**无上界**

高阶**Newton-Cotes**公式不是数值稳定的, 不宜采用。

3. Newton-Cotes公式误差

把Lagrange余项代入积分式，得

$$R = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx$$

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{h^{n+1}(t - 0)(t - 1) \cdots (t - n)}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x) (t - 0)(t - 1) \cdots (t - n) dt \\ &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$


$$x = a + th$$

$$x_i = a + ih$$

$$x - x_i = (t - i)h$$

$$dx = h dt$$

积分区间
变为 $[0, n]$



定理3.3 对于 n 阶 Newton-Cotes 公式, 当 n 为偶数时, 其代数精度至少可以达到 $n + 1$ 。

证明:
$$R = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x)(t-0)(t-1)\cdots(t-n) dt$$

若 $f(x)$ 为 $n + 1$ 次代数多项式: $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n+1}x^{n+1}$

$$f^{(n+1)}(x) = a_{n+1}(n+1)!$$

$$R = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n a_{n+1}(n+1)!(t-0)(t-1)\cdots(t-n) dt$$

$$= a_{n+1}h^{n+2} \int_0^n (t-0)(t-1)\cdots(t-n) dt$$

n 为偶数, $n = 2m$ 变量替换: $u = t - m$

$$t = u + m, \quad dt = du, \quad t = 0 \quad u = -m; \quad t = n \quad u = m$$

$$\begin{aligned} R &= a_{n+1} h^{n+2} \int_{-m}^m (u+m)(u+m-1)\cdots(u+m-2m) du \\ &= a_{n+1} h^{n+2} \int_{-m}^m (u+m)(u+m-1)\cdots(u-m) du = 0 \end{aligned}$$

$$\text{设 } g(u) = (u+m)(u+m-1)\cdots(u-m+1)(u-m)$$

$$\begin{aligned} g(-u) &= (-u+m)(-u+m-1)\cdots(-u-m+1)(-u-m) \\ &= (-1)^{2m+1} (u-m)(u-m+1)\cdots(u+m-1)(u+m) = -g(u) \end{aligned}$$

即 n 为偶数时, n 阶Newton-Cotes积分公式对任意 n 次多项式均精确成立, 所以其代数精度至少可以达到 $n+1$ 。

4. 低阶Newton-Cotes公式

公式
截断误差

● 梯形公式	一等分	一阶
● Simpson 公式	二等分	二阶
● Cotes 公式	四等分	四阶

积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不变号, 则必存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得:

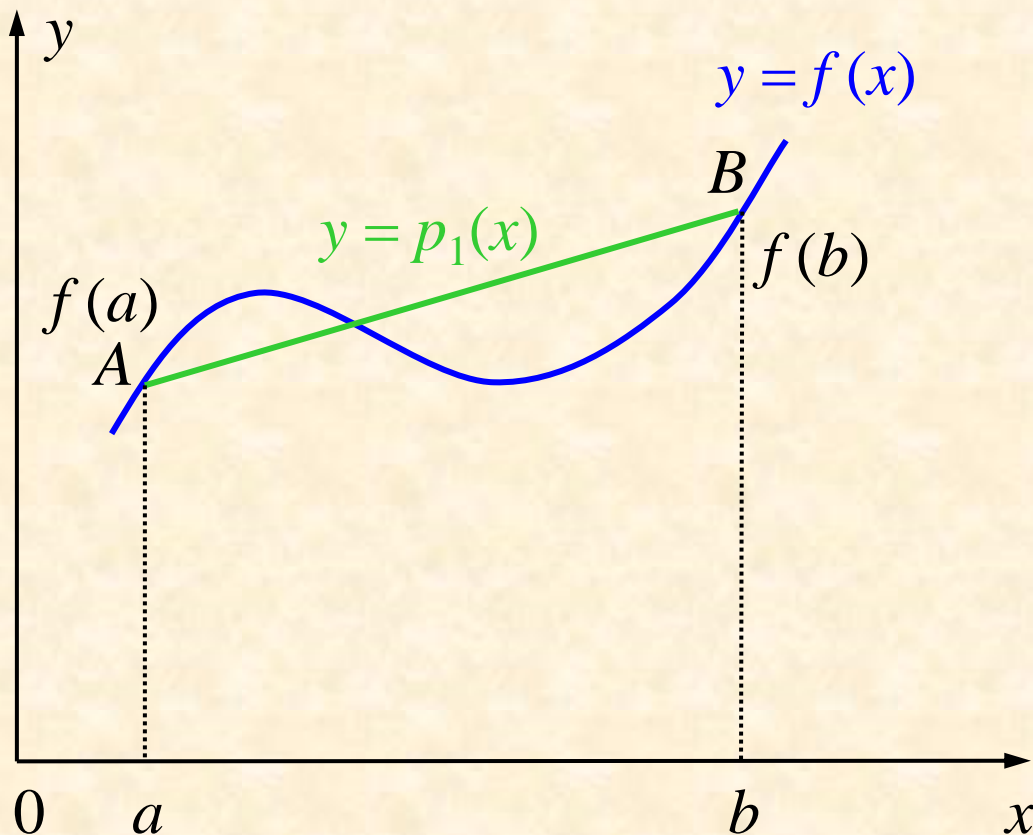
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = f(\eta) \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$$

梯形公式 T

- ◆ 若积分区间 $[a, b]$ 两端点处的函数值 $f(a), f(b)$ 为已知，可应用线性插值公式 $p_1(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分来近似替代 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，即牛顿-柯特斯公式中取 $n = 1$ 的情况。
- ◆ 当 $n = 1$ 时， $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = 1/2$ ，于是有：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx (b-a) \times \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right] \\ &\approx (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (h = b - a)\end{aligned}$$

梯形公式（续）



- ◆ 梯形公式的几何意义是用四边梯形的面积近似代替 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积。

梯形公式的余项

$$R = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x)(t-0)(t-1)\cdots(t-n) dt$$

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数。

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{h^{1+2}}{(1+1)!} \int_0^1 f^{(1+1)}(\xi_x)(t-0)(t-1) dt = \frac{h^3}{2} \int_0^1 f''(\xi_x)(t^2 - t) dt \\ &= \frac{h^3}{2} f''(\eta) \int_0^1 (t^2 - t) dt = \frac{h^3}{2} f''(\eta) \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{h^3}{2} f''(\eta) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = b - a \\ &\quad \left(-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \right) \end{aligned}$$

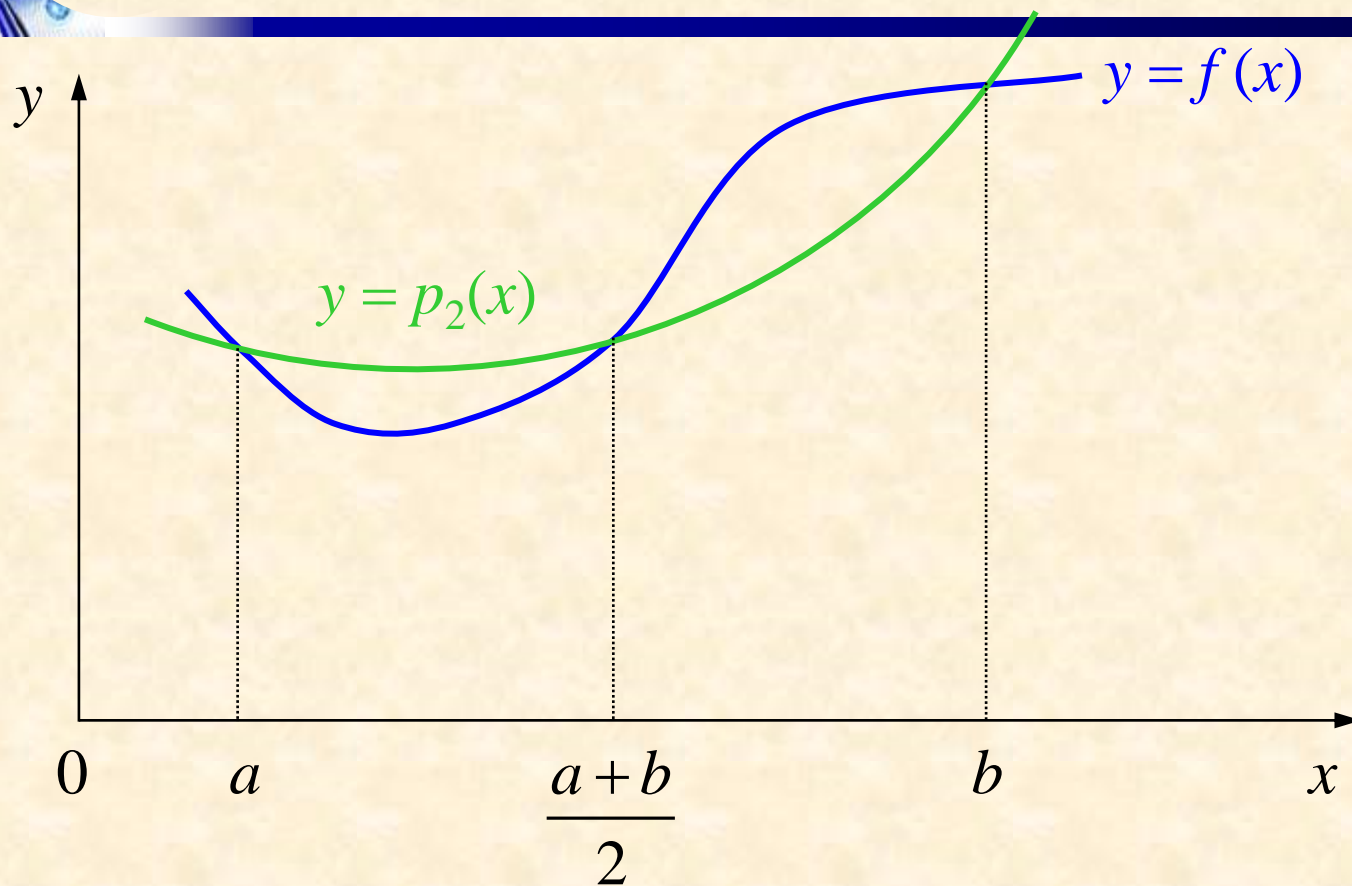
辛普森公式 S

◆ 若积分区间 $[a, b]$ 两端点以及积分区间中点 $(a + b)/2$ 处的函数值 $f(a), f(b), f[(a + b)/2]$ 为已知，可应用抛物线插值公式 $p_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分来近似替代 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，即牛顿-柯特斯公式中取 $n = 2$ 的情况。

◆ 当 $n = 2$ 时， $C_0^{(2)} = C_2^{(2)} = 1/6$ ， $C_1^{(2)} = 4/6$ ，从而：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx (b - a) \times \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right] \\ &\approx (b - a) \times \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \quad \left(h = \frac{b-a}{2}\right) \end{aligned}$$

辛普森公式（续）



- ◆ 辛普森公式的几何意义为用抛物线 $y = p_2(x)$ 围成的曲边梯形面积近似 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形的面积。



辛普森公式的余项（续）

由定理3.3可知，Simpson公式至少具有三次代数精度，因此只要把 $f(x)$ 表示为某个三次插值多项式与其余项之和，然后再求积分便可知Simpson公式的截断误差。

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有四阶连续导数。

辛普森公式的余项（续）

构造三次 Hermite 插值多项式满足：


$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H_3(b) = f(b), \quad H'_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

其截断误差为：

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \quad \xi_x \in (a,b)$$

$$\begin{aligned} \text{而且 } \int_a^b H_3(x) dx &= \frac{1}{6} (b-a) [H_3(a) + 4H_3(\frac{a+b}{2}) + H_3(b)] \\ &= \frac{1}{6} (b-a) [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \end{aligned}$$



$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b)$$

$$R_S = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx$$

不变号

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx$$


$x \in [a, b]$ 所以:
 $(x-a)(x-b) \leq 0$

作变量替换: $t = x - \frac{a+b}{2}$ 并记: $h = \frac{b-a}{2}$

$x = a, t = -h$
 $x = b, t = h$
 $dx = dt$

$$R_S = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_{-h}^h (t+h)t^2(t-h) dt$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_{-h}^h (t^2 - h^2)t^2 dt$$



$$R_s = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_{-h}^h (t^2 - h^2)t^2 \, dt$$

$$R_s = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_{-h}^h (t^4 - h^2 t^2) \, dt = \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_0^h (t^4 - h^2 t^2) \, dt$$

$$= \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!} \left(\frac{t^5}{5} - h^2 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!} \left(\frac{h^5}{5} - h^2 \frac{h^3}{3} \right)$$

$$= -\frac{2f^{(4)}(\eta)}{24} \cdot \frac{2h^5}{15}$$

$$= -\frac{h^5}{\mathbf{90}} \cdot f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\mathbf{2}}$$

$$\left(-\frac{(b-a)^5}{\mathbf{2880}} \cdot f^{(4)}(\eta) \right)$$

柯特斯公式 C

- ◆ 当 $n = 4$ 时，由四次 Lagrange 插值式推导而得的求积公式称为柯特斯（Cotes）公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx$$

$$(b-a) \times \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = a + h \\ x_2 = a + 2h \\ x_3 = a + 3h \\ x_4 = a + 4h = b \end{cases}$$

$$(h = \frac{b-a}{4})$$

柯特斯公式的余项

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有六阶连续导数。

柯特斯公式

代数精度为 5

$$\int_a^b f(x) dx \approx$$

$$(b-a) \times \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$$

其截断误差为：

$$R_C = -\frac{8h^7}{945} \cdot f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{4}$$
$$\left(-\frac{(b-a)^7}{1935360} \cdot f^{(6)}(\eta) \right)$$

三种求积公式及其余项

$$I \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

$$R_T = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) \quad h = b - a$$

$$I \approx (b-a) \times \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

$$R_S = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\eta) \quad h = \frac{b-a}{2}$$

$$I \approx (b-a) \times \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$$

$$R_C = -\frac{8h^7}{945} \cdot f^{(6)}(\eta) \quad h = \frac{b-a}{4}$$

三种求积公式及其余项

$$R_T = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) \quad h = b - a$$

若记 $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, 则 $|R_T| \leq \frac{M_2}{12} (b - a)^3$

$$R_S = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\eta) \quad h = \frac{b - a}{2}$$

若记 $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$, 则 $|R_S| \leq \frac{M_4}{2880} (b - a)^5$

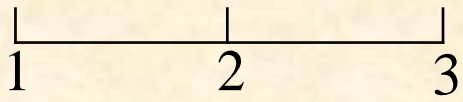
$$R_C = -\frac{8h^7}{945} \cdot f^{(6)}(\eta) \quad h = \frac{b - a}{4}$$

若记 $M_6 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(6)}(x)|$, 则 $|R_C| \leq \frac{M_6}{1935360} (b - a)^7$

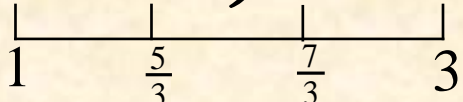
例 题

用 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的 Newton-Cotes 公式求 $\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}} dx$ 的近似值

解: 1) $n = 2$ 时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}} dx \approx (3-1) \cdot \left(\frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{4}{6} e^{-\frac{2}{2}} + \frac{1}{6} e^{-\frac{3}{2}} \right) = 0.766575505$$


2) $n = 3$ 时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}} dx \approx (3-1) \cdot \left(\frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} e^{-\frac{5}{6}} + \frac{3}{8} e^{-\frac{7}{6}} + \frac{1}{8} e^{-\frac{3}{2}} \right)$$
$$= 0.766916279$$


$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}} dx$ 的准确值为 0.7668009991...

回 顾

◆ 数值积分:

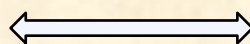
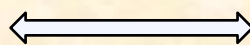
- 机械求积公式
- 代数精度
- 插值型求积公式
- **Newton-Cotes**公式
 - 梯形公式
 - Simpson**公式
 - Cotes**梯形公式

插值:

- 整体插值
- 分段插值

数值积分:

- 利用**Lagrange**插值得到积分公式



?

3.1.4 复化求积法

- ◆ **Newton-Cotes** 公式实质上是以积分区间内的等距节点为插值节点，通过构造被积函数的 **Lagrange** 插值多项式而推导出的求积公式。
- ◆ 在一定范围内，求积公式的代数精度随插值节点的增加而提高。
- ◆ 高次插值出现**Runge**现象。
- ◆ n 较大时，**Newton-Cotes** 系数不容易求解，且出现负数项，高阶**Newton-Cotes** 公式数值不稳定。

复化求积（续）

- ◆ 从余项的讨论看到，积分区间越小，求积公式的截断误差也越小。因此，我们经常把积分区间分成若干小区间，在每个小区间上采用次数不高的插值公式，构造出相应的求积公式，然后再把它们加起来得到整个区间上的求积公式，这就是复化求积公式的基本思想。
- ◆ 复化求积公式克服了高次 Newton-Cotes 公式计算不稳定的问题，其运算简单且易于在计算机上实现。
- ◆ 复化T公式，复化S公式，复化C公式

复化梯形公式


- ◆ 将区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分，积分节点表示为

$$x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- ◆ 小区间的长度称为**步长**：
$$h = \frac{b-a}{n}$$

- ◆ 每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分为：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

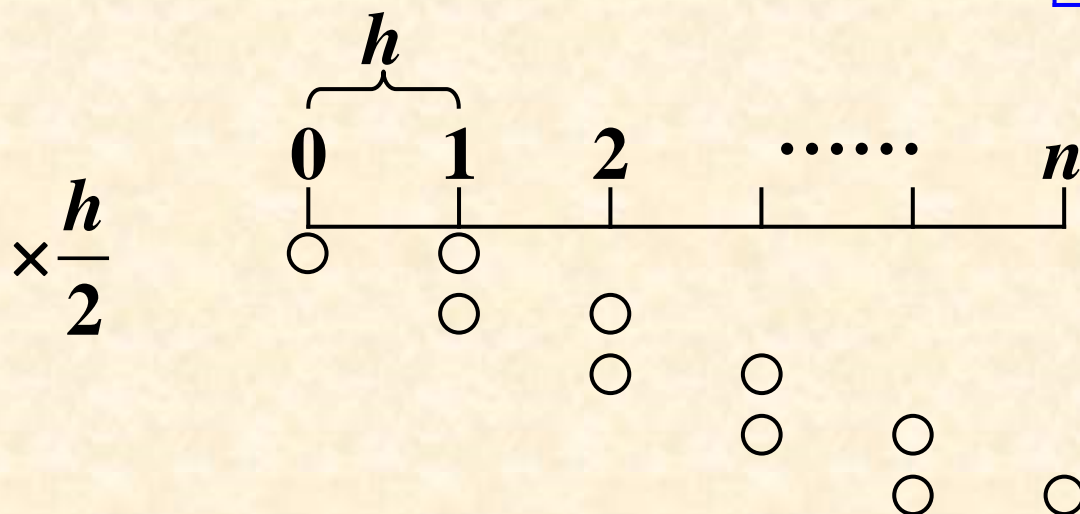
- ◆ $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分为每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分之和，即：

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

T_n

中间节点



复化辛普森公式

- 将区间 $[a, b]$ 划分为偶数等分 $n = 2m$ ，每个小区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ 上的积分为：

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx 2h \frac{f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})}{6}$$

其中步长 $h = (b - a)/n$

- $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分为每个小区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ 上的积分之和，即：

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx$$

$$\approx \frac{2h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

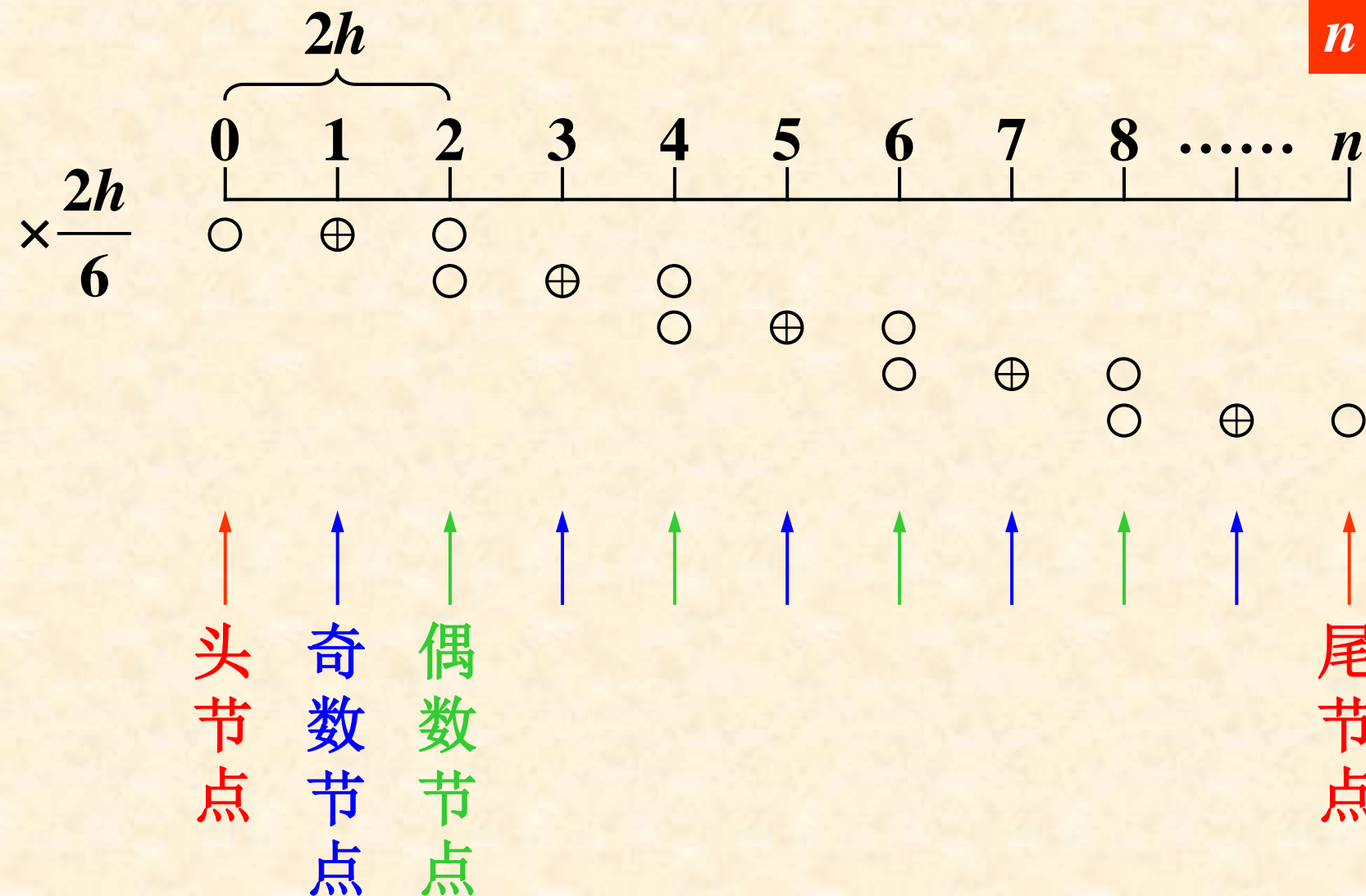
奇数节点

偶数节点

S_n

$$I \approx \frac{2h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

n 为偶数



复化柯特斯公式

- ◆ 将区间 $[a, b]$ 划分为偶数等分 $n = 4m$ ，每个小区间 $[x_{4i}, x_{4i+4}]$ 上的积分为：

$$\int_{x_{4i}}^{x_{4i+4}} f(x) dx \approx$$

步长 $h = \frac{b-a}{n}$

$$4h \frac{7f(x_{4i}) + 32f(x_{4i+1}) + 12f(x_{4i+2}) + 32f(x_{4i+3}) + 7f(x_{4i+4})}{90}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{4i}}^{x_{4i+4}} f(x) dx \approx$$

$$\frac{4h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+1}) + 12 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+2}) + 32 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+3}) + 14 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{4i}) + 7f(b) \right]$$

C_n

例 题

用复化梯形公式 T_7 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - \sin^2 x} \, dx$

解：步长 $h = \frac{b-a}{7} = \frac{\frac{\pi}{6} - 0}{7} = \frac{\pi}{42}$

$$T_7 = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^6 f(x_i) + f(b) \right]$$

其中： $x_i = a + ih = \frac{\pi}{42} i \quad i = 0, 1, 2, \dots, 7$

将数据代入求得： $T_7 = 1.035$

复化梯形公式的余项

- ◆ 梯形公式的余项:

$$R_T = -\frac{h^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad h = b - a$$

- ◆ 因此每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的余项: $h = \frac{b-a}{n}$

$$R_T^{(i)} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

- ◆ 复化梯形公式在整个区间 $[a, b]$ 上的截断误差:

$$\begin{aligned} R_{T_n} &= \sum_{i=0}^{n-1} R_T^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \right) \\ &= -\frac{nh^3}{12} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) = -\frac{nh^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a, b] \end{aligned}$$

复化辛普森公式的余项

◆ 辛普森公式的余项：

$$R_s = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{2}$$

◆ 复化辛普森公式的余项：

$$n = 2m$$

$$R_{S_n} = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

复化柯特斯公式的余项

◆ 柯特斯公式的余项:

$$R_C = -\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{4}$$

◆ 复化柯特斯公式的余项:

$$n = 4m$$

$$R_{C_n} = -\frac{m \cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

例 题

采用复化梯形公式和复化辛普森公式分别计算

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

要求计算结果的误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ ，试估算两种公式分别需要将积分区间划分的等份数。

被积函数: $f(x) = e^{x^2}$

积分区间: $[0, 1]$

' $e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

" $2(e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2}) = 2(1 + 2x^2)e^{x^2}$

''' $2[4xe^{x^2} + (1 + 2x^2) \cdot 2xe^{x^2}] = 4(3x + 2x^3)e^{x^2}$

(4) $4[(3 + 6x^2)e^{x^2} + (3x + 2x^3) \cdot 2xe^{x^2}] = 4(3 + 12x^2 + 4x^4)e^{x^2}$

$$f''(x) = 2(1 + 2x^2)e^{x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = 4(3 + 12x^2 + 4x^4)e^{x^2}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) = 2(1 + 2 \times 1^2)e^{1^2} = 6e$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f^{(4)}(x) = 4(3 + 12 \times 1^2 + 4 \times 1^4)e^{1^2} = 76e$$

$$|R_{T_n}| = \left| -\frac{nh^3}{12} f''(\eta) \right| \leq \frac{n(1/n)^3}{12} \cdot 6e = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

$$n^2 \geq e \cdot 10^6$$

$$n \geq \sqrt{e \cdot 10^6} = 10^3 \cdot \sqrt{e} \approx 1648.7 \quad \text{取 } 1649$$

$$|R_{S_n}| = \left| -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) \right| \leq \frac{(n/2) \cdot (1/n)^5}{90} \cdot 76e = \frac{76e}{180} \cdot \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

$$n^4 \geq \frac{76e}{90} \cdot 10^6$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{76e}{90} \cdot 10^6} \approx 38.9$$

取 40



步长的自动选取

- ◆ 从上述误差分析可以看到，复化积分的截断误差随着分割因子 n 的增大而减小，如何在求积分之前就确定 n 的值，使误差在允许范围之内？
- ◆ 尽管可以利用余项公式来估计 n ，但由于余项公式中含有被积函数的导数，而估计各阶导数的最大值往往比较困难，且用这种方法估计的误差上界一般偏大，在实际运用上很困难。
- ◆ 在实际计算中，最有效的方法是“事后估计误差法”，它自动选取积分步长，从而在求积过程中，根据精度要求，自动确定 n ，并算出近似值。

二分法

◆ 具体方法如下（假设使用复化梯形公式）

- 1、在积分区间 $[a, b]$ 上选用某个固定的 n ，用 T_n 近似计算 $\int_a^b f(x) dx$
- 2、在第 1 步的基础上将每个积分小区间分半处理，用 T_{2n} 近似计算 $\int_a^b f(x) dx$
- 3、判断 $|T_{2n} - T_n| \leq \varepsilon$ 是否成立，成立则表示 T_{2n} 满足精度要求，否则在第 2 步的基础上将积分小区间再分半，重复 2、3 步直至获得满足精度要求的结果

小区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 记小区间中点: $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

该区间二分前、后的积分值分别记为: T_{i1}, T_{i2}

$$T_{i1} = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

二分前的步长 $\frac{b-a}{n}$

$$T_{i2} = \frac{h/2}{2}[f(x_i) + f(x_{i+\frac{1}{2}})] + \frac{h/2}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_{i1} + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} T_{i2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} T_{i1} + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

二分点的被积函数值

例 题

用变步长的梯形法计算： $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解： (1) 对整个 $[0,1]$ 区间用梯形法计算。 $h = 1$

$$T_1 = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$a = 0, b = 1; f(0) = 1, f(1) = 0.8414710$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] \\ &= \frac{1}{2} (1 + 0.8414710) = 0.9207355 \end{aligned}$$

例 题 (续)

用变步长的梯形法计算: $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解: (1) 区间 $[0,1]$ $h=1$ $T_1 = 0.9207355$

(2) 将区间 $[0,1]$ 二分为 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2}, 1]$

$$f(\frac{1}{2}) = 0.9588510$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

$$= 0.9397933$$

例 题 (续)

用变步长的梯形法计算: $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解: (2) 将区间 $[0,1]$ 二分为 $[0,1/2]$ 和 $[1/2,1]$ $h = \frac{1}{2}$

$$T_2 = 0.9397933$$

(3) 将区间再次二分: $[0, \frac{1}{4}] [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] [\frac{3}{4}, 1]$

$$f(\frac{1}{4}) = 0.9896158, \quad f(\frac{3}{4}) = 0.90885168$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h}{2}[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})] = 0.9445135$$



3.1.5 Romberg求积公式

- ◆ 变步长的梯形法算法简单，但是收敛速度慢。
- ◆ 如何提高收敛速度，节省计算量？

- ◆ 复化梯形求积，积分区间分为 n 等分的截断误差为：

$$\begin{aligned} I - T_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right] = -\frac{h^2}{12} \sum_{i=0}^{n-1} [h f''(\xi_i)] \\ &\approx -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) \mathrm{d}x = -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] \end{aligned}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- ◆ 积分区间分为 $2n$ 等分的截断误差为：

$$\begin{aligned} I - T_{2n} &\approx -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2} \right)^2 [f'(b) - f'(a)] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] \right\} = \frac{1}{4} (I - T_n) \end{aligned}$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$4(I - T_{2n}) \approx I - T_n$$


$$3I - 3T_{2n} \approx T_{2n} - T_n$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \text{ —— 新的误差估计式}$$

叠加上误差，可得到比 T_{2n} 更精确的积分值：

$$\bar{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}T_{2n} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{h/2}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \\ &= \frac{h}{6} \left[2f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2f(b) \right] \end{aligned}$$



$$\frac{4}{3}T_{2n} = \frac{h}{6} \left[2f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2f(b) \right]$$

$$\frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$


$$= \frac{h}{6} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

$$\bar{T} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$\frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

$$= \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$


$$= S_{2n}$$


$$\frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

用复化梯形法二分前后的两个积分值按上式作线性组合，结果得到复化**Simpson**法的积分值。

$$\begin{aligned} R_{T_n} &= -\frac{nh^3}{12} f^{(2)}(\eta) = -\frac{h^2}{12} \cdot nh \cdot f^{(2)}(\eta) \\ &= -\frac{h^2}{12} \cdot (b-a) \cdot f^{(2)}(\eta) \approx -\frac{h^2}{12} \cdot [f'(b) - f'(a)] \propto h^2 \end{aligned}$$

微分中值定理



微分中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

$$\begin{aligned} R_{S_n} &= -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4}{90} \cdot \frac{1}{2} nh \cdot f^{(4)}(\eta) \\ &= -\frac{h^4}{180} \cdot (b - a) \cdot f^{(4)}(\eta) \approx -\frac{h^4}{180} \cdot [f'''(b) - f'''(a)] \propto \mathbf{h^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{C_n} &= -\frac{m \cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) = -\frac{8h^6}{945} \cdot \frac{1}{4} nh \cdot f^{(6)}(\eta) \\ &= -\frac{2h^6}{945} \cdot (b - a) \cdot f^{(6)}(\eta) \\ &\approx -\frac{2h^6}{945} \cdot [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] \propto \mathbf{h^6} \end{aligned}$$

龙贝格求积公式（续）

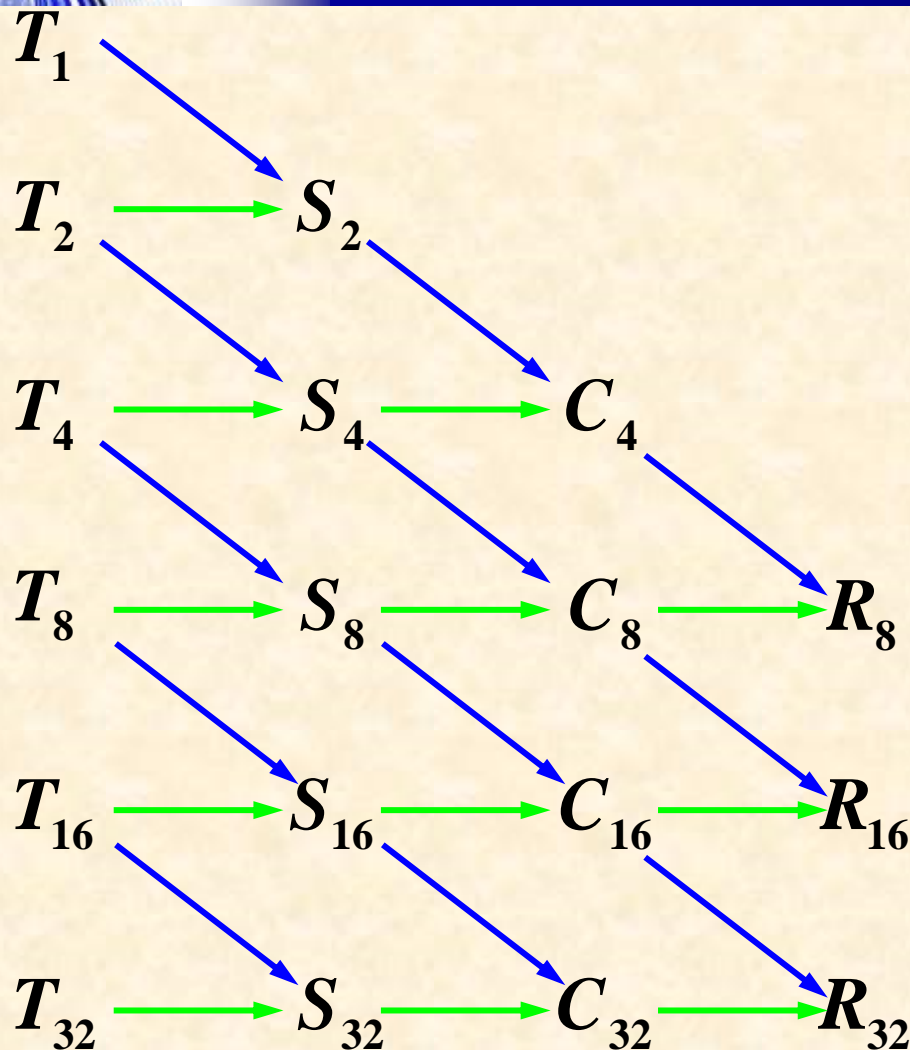
$$R_{T_n} \propto h^2 \longrightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

$$R_{S_n} \propto h^4 \longrightarrow \frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n = C_{2n}$$

$$R_{C_n} \propto h^6 \longrightarrow \frac{I - C_{2n}}{I - C_n} \approx \frac{1}{64} \longrightarrow \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n = R_{2n}$$

Romberg求积公式

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \quad C_{2n} = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \quad R_{2n} = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$



二分前的步长

$$T_{2n} = \frac{T_n}{2} + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

达到
精度
要求
了吗
?

逐次减半加速法

Romberg外推公式

例题

利用Romberg积分公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

k	$n = 2^k$	T_n	S_n	C_n	R_n
0	1	3.0000000			
1	2	3.1000000	3.1333333		
2	4	3.1311765	3.1415687	3.1421177	
3	8	3.1389885	3.1415925	3.1415941	3.1415858
4	16	3.1409416	3.1415926	3.1415926	3.1415926

$$T_1 = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$C_{2n} = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

$$R_{2n} = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

3.2 数值微分

问题 测得一个移动物体的距离 $S(t)$ 的数据如下

t	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
S(t)	12.07	19.91	30.11	42.13	55.85	72.00

求速度 $v(6)$ 和加速度 $a(6)$?

- 把导数表示成某些点函数值的线性组合-导数的定义
- 利用插值多项式近似函数，再求导

3.2.1 差商型数值微分

1. 向前差商数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Taylor展开式

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

得到误差

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\frac{h}{2} f''(x_0 + \theta h) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$



2. 向后差商数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Taylor展开式

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(x_0 - \theta h) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

得到误差

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{h}{2} f''(x_0 - \theta h) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$



3. 中心差商数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$= -\frac{h^2}{12} [f'''(x_0 + \theta_1 h) + f'''(x_0 - \theta_2 h)]$$

$$= -\frac{h^2}{6} f'''(x_0 + \theta h) \quad -1 \leq \theta \leq 1$$



4. 二阶中心差商数值微分公式

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0 + \theta_1 h)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0 - \theta_2 h)$$

$$f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_0 + \theta h)$$
$$-1 \leq \theta \leq 1$$

例 题

问题 测得一个移动物体的距离 $S(t)$ 的数据如下

t	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
S(t)	12.07	19.91	30.11	42.13	55.85	72.00

求速度 $v(6)$ 和加速度 $a(6)$?

$$\text{向前差商 } v(6) \approx \frac{S(7) - S(6)}{7 - 6} = 13.72$$

$$\text{向后差商 } v(6) \approx \frac{S(6) - S(5)}{6 - 5} = 12.02$$

$$\text{中心差商 } v(6) \approx \frac{S(7) - S(5)}{7 - 5} = 12.87$$

$$\text{二阶中心差商 } a(6) \approx \frac{S(7) - 2S(6) + S(5)}{1} = 1.70$$

3.2.2 插值型数值微分

对于列表函数

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

可以利用插值方法，得到函数的近似表达式：

$$f(x) \approx L_n(x)$$

于是取 $L'_n(x)$ 作为 $f'(x)$ 的近似。

必须指出，即使 $f(x)$ 与 $L_n(x)$ 的值相差不多，导数的近似值 $L'_n(x)$ 与导数的真值 $f'(x)$ 仍然可能差别很大，因而在使用求导公式时应特别注意误差分析。

误差分析

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$\omega_{n+1}(x)$

$$f'(x) - L_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

$$f'(x_k) - L_n'(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_k)$$

两点公式


给定两个节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0), f(x_1)$, 线性插值

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

记 $h = x_1 - x_0$,

$$L_1'(x) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)]$$

$$L_1'(x_0) = L_1'(x_1) = \frac{1}{h} [f(x_1) - f(x_0)]$$


$$f'(x_k) - L_n'(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}'(x_k)$$

◆ 带余项的两点公式为： $h = x_1 - x_0$,

$$f'(x_0) = L_1'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - x_1)$$

$$= \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2}f''(\xi)$$

三点公式

给定三个节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$


及其函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$
$$= \frac{1}{2h^2} [(x-x_1)(x-x_2)f(x_0) - 2(x-x_0)(x-x_2)f(x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_2)]$$

求 $L_2'(x)$,

分别令 $x = x_0, x_1, x_2$

$$L_2'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$
$$L_2'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)]$$
$$L_2'(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$


$$f'(x_k) - L_n'(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}'(x_k)$$

◆ 带余项的三点公式为：

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

第3章 小结

3.1 数值积分

3.1.1 机械求积公式和代数精度

3.1.2 求积公式的构造方法

3.1.3 Newton-Cotes 求积公式

3.1.4 复化求积法

3.1.5 Romberg 求积公式

- 代数精度
- 插值型求积公式
- Cotes系数
- T, S, C
- 复化T, 复化S, 复化C
- Romberg外推公式

3.2 数值微分

3.2.1 差商型数值微分

3.2.2 插值型数值微分

- 难点：误差分析-余项