




第2章 插值方法与曲线拟合

计算机学院 孙伟平

回 顾

- ◆ 基本概念：
 - 误差，误差限
 - 相对误差，相对误差限
 - 绝对误差，绝对误差限
 - 有效数字
- ◆ 有效数字位数的判定方法
- ◆ 算术运算中误差限的估计
- ◆ 近似计算中应注意的一些原则



第2章

2.1 插值多项式的存在性与唯一性

2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值

2.3 牛顿 (Newton) 插值

2.4 赫密特 (Hermite) 插值

2.5 分段插值

2.7 曲线拟合的最小二乘法



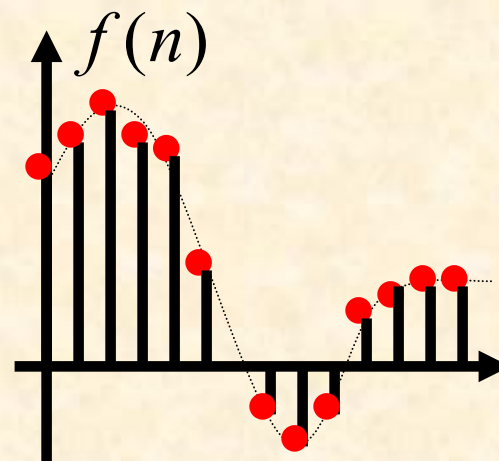
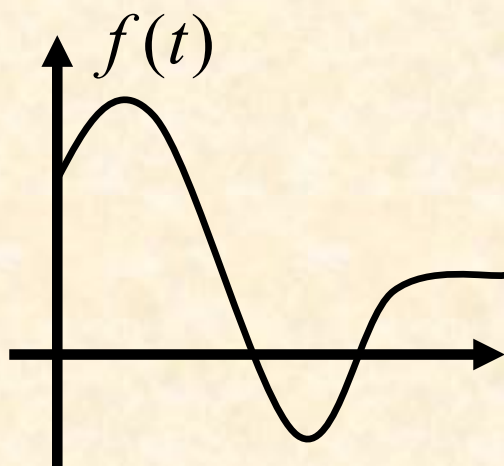
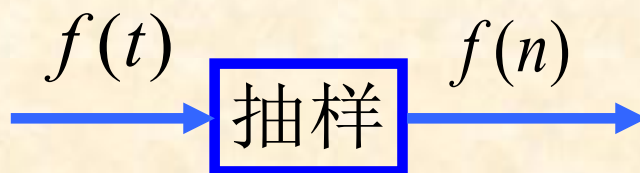


127	170	93
99	165	87

通过某个点周围若干个已知点的值，以及周围点和此点的位置关系，根据一定的公式，算出此点的值，就是插值。

127		170		93	
99		165		87	

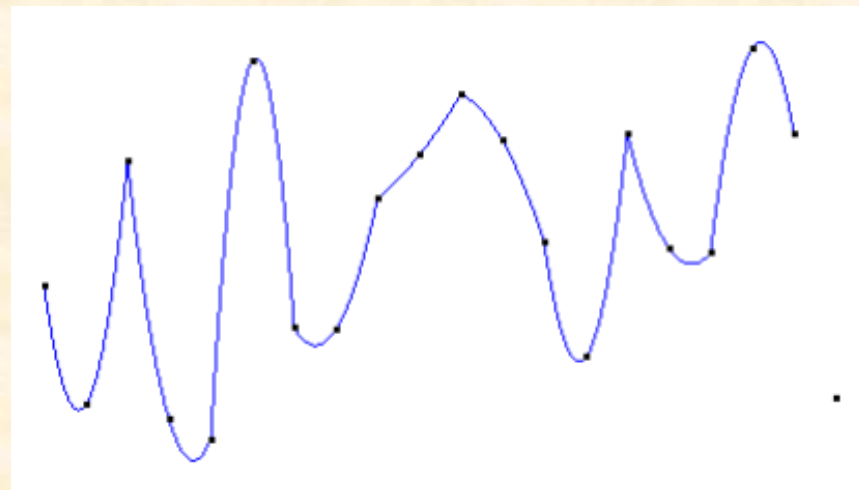
计算未知点的时候，需要周围多少个点参与，公式如何。不同的方案选择，就是不同的插值算法。



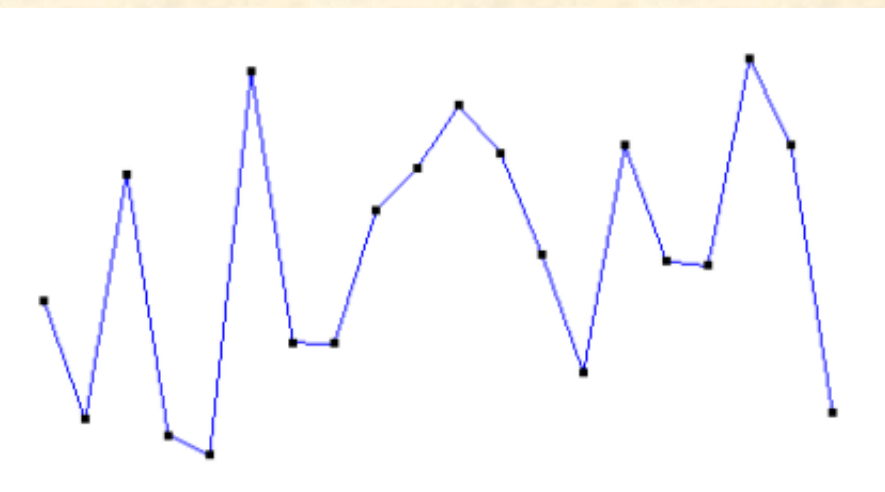
$f(n) \rightarrow f(t)?$

时域内插公式

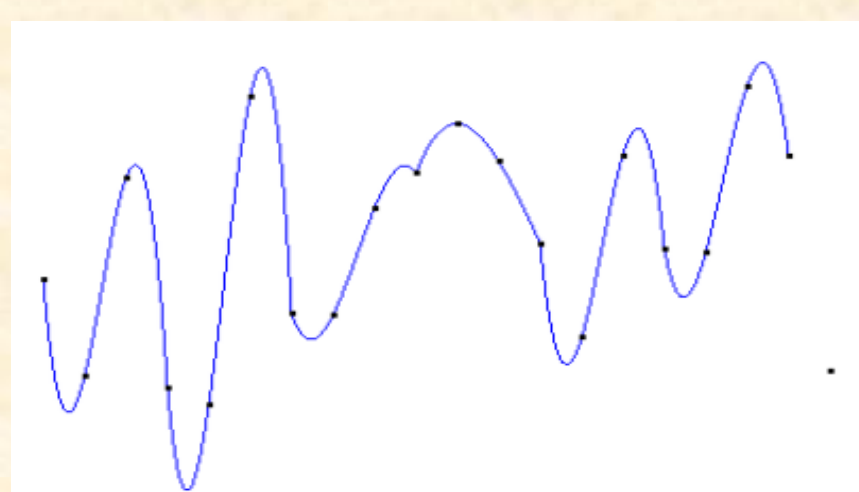
$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \omega_c (t - n)}{\omega_c (t - n)}$$



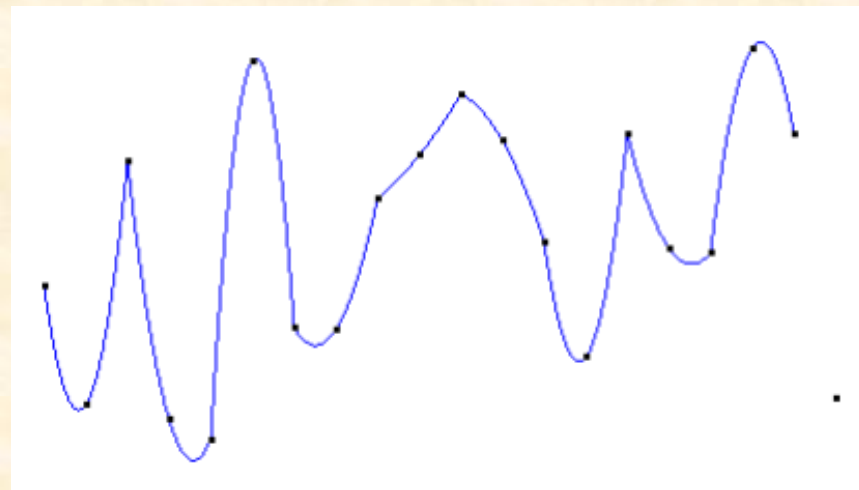
分段抛物线插值



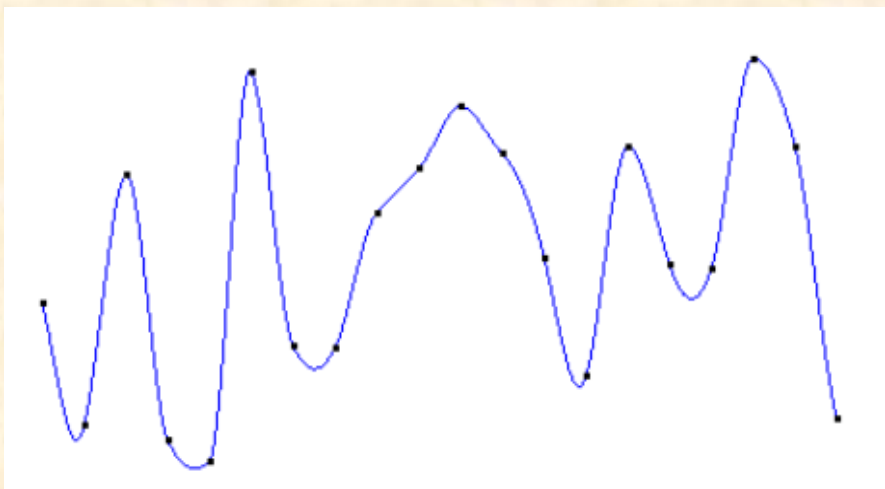
分段线性插值



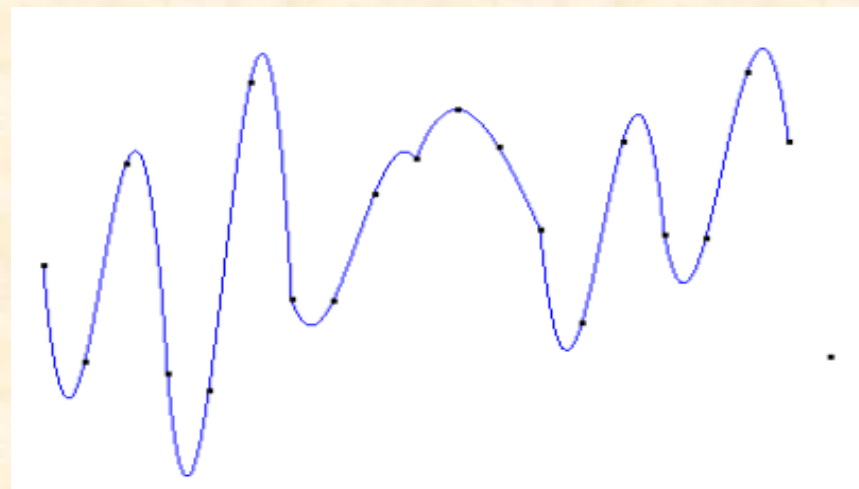
分段四次多项式插值



分段抛物线插值



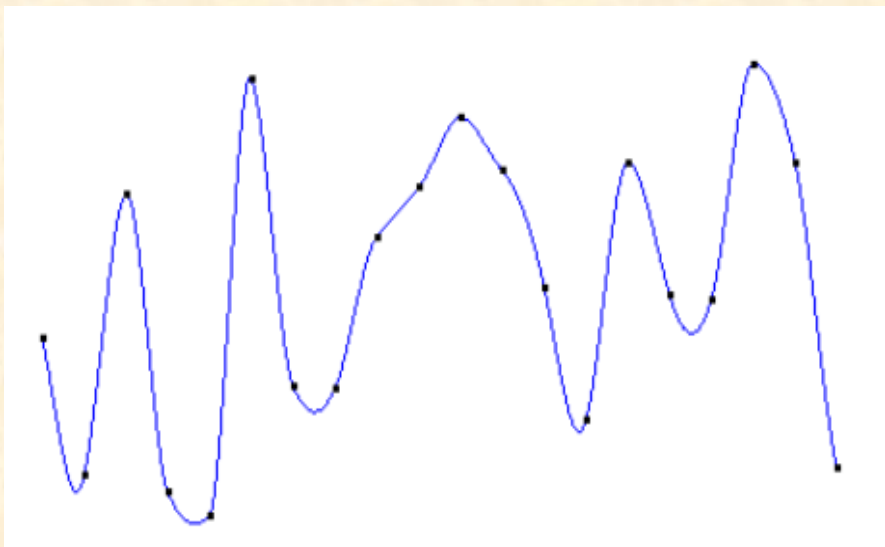
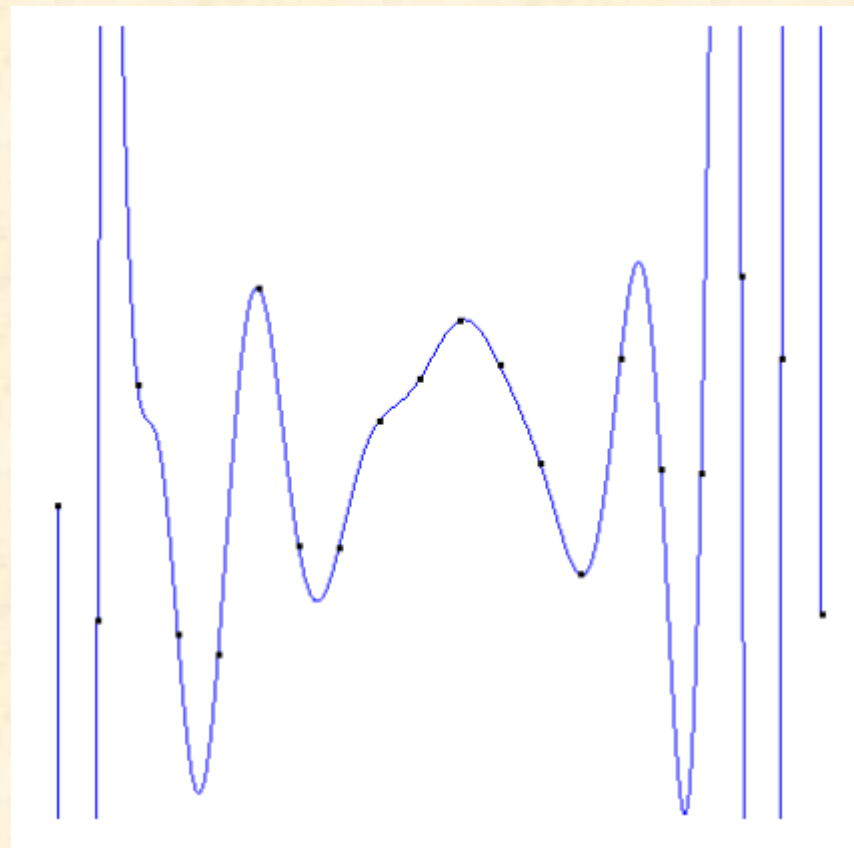
光滑性更好



分段四次多项式插值



20次的拉格朗日插值



分段三次Hermite插值



概述

在实际生产和科学实验中，插值法是函数逼近的重要方法之一，有着广泛的应用。

- ◆ 函数 $y = f(x)$ 的显式表达式未知， x 与 y 的取值是通过实验或观测得到的一组离散数据。
- ◆ 函数 $y = f(x)$ 的表达式非常复杂，不便于进行计算和研究。

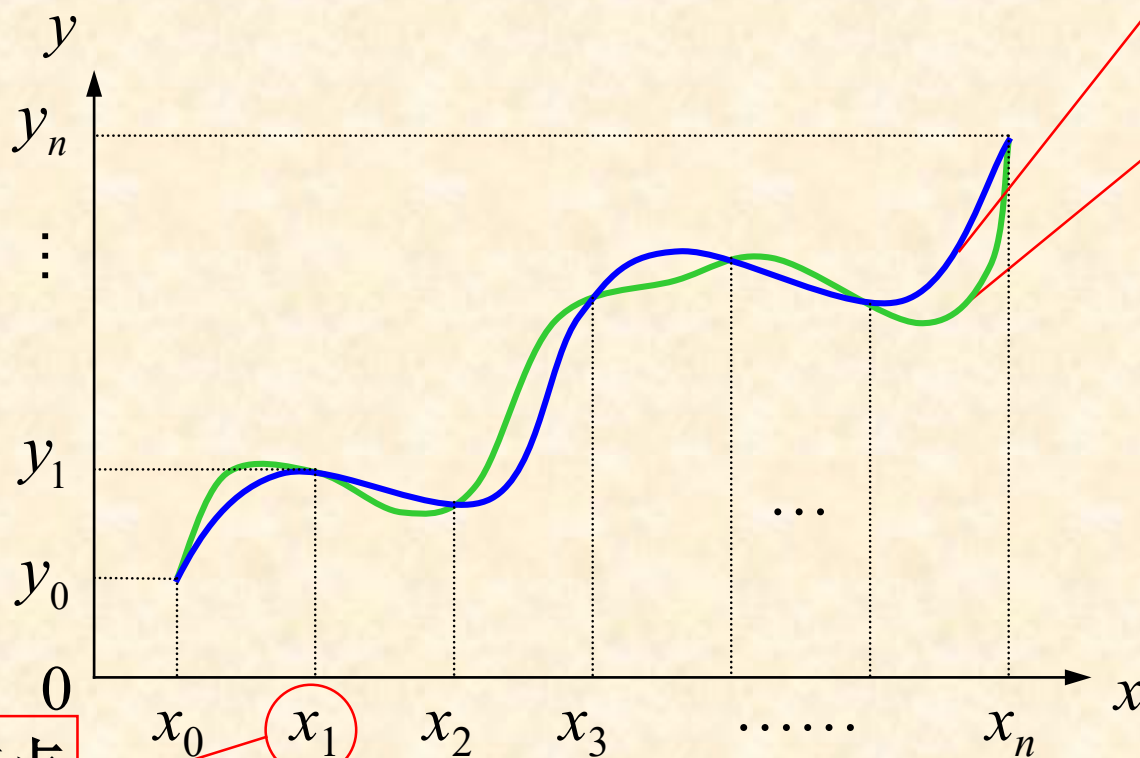
例如:

i	0	1	2	3	10
x_i	0.46	0.47	0.48	0.49	0.56
$y_i=f(x_i)$	0.48465	0.49374	0.50298	0.52012	0.61478

求当 $x_i=0.4773$ 时 $y=f(x)$ 的函数值?

求
$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x + \tan x) + e^{x^2 \sin x}}}{3 \arctan^2 x} \int_2^{5x} e^{-t^2} dt$$

- ◆ 于是人们希望建立一个简单的而便于计算的函数 $g(x)$ 使其近似的代替 $f(x)$ 。



插值节点

被插值函数 $f(x)$

插值函数 $g(x)$

插值条件

$$y_i = f(x_i)$$

主要研究 $g(x)$
为代数多项式

插值区间

2.1 插值多项式的存在唯一性

- ◆ 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; 确定一个次数不高于 n 的代数多项式:


$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足:

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

即共有 $n+1$ 个限定条件:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases}$$



由 $p_n(x_0) = y_0$ 得: $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0$

由 $p_n(x_1) = y_1$ 得: $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1$

\vdots

由 $p_n(x_n) = y_n$ 得: $a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n$

这是关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的 (**n+1** 元一次) 线性方程组, 可以由克莱姆法则进行求解。




$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

如果其系数行列式
不等于零，则方程
组的解存在且唯一。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$



由于 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $n+1$ 个互异的节点，即：

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j$$

◆ 因此范德蒙行列式 $V \neq 0$ ，上述方程组有唯一解。

◆ 结论：插值多项式存在且唯一。

◆ 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ ；确定一个次数不高于 n 的代数多项式：
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$
满足：
$$p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$
这样的插值多项式存在且唯一。



$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & y_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

◆ 尽管采用直接求解线性方程组的方法可以确定插值多项式 $p_n(x)$ ，但是当 n 较大时，这种方法的计算量非常大。



插值问题的目标

被插值函数 $f(x)$

插值节点 $x_i, i = 0, 1, \dots, n$

插值条件 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$

插值函数 $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

◆ 由简入繁 $n=1 \quad 2 \Rightarrow n$

● 线性插值 ● 抛物线插值 ● Lagrange插值

◆ 分析已有方法的优缺点

● Newton插值

◆ 针对新的需求

● Hermite插值

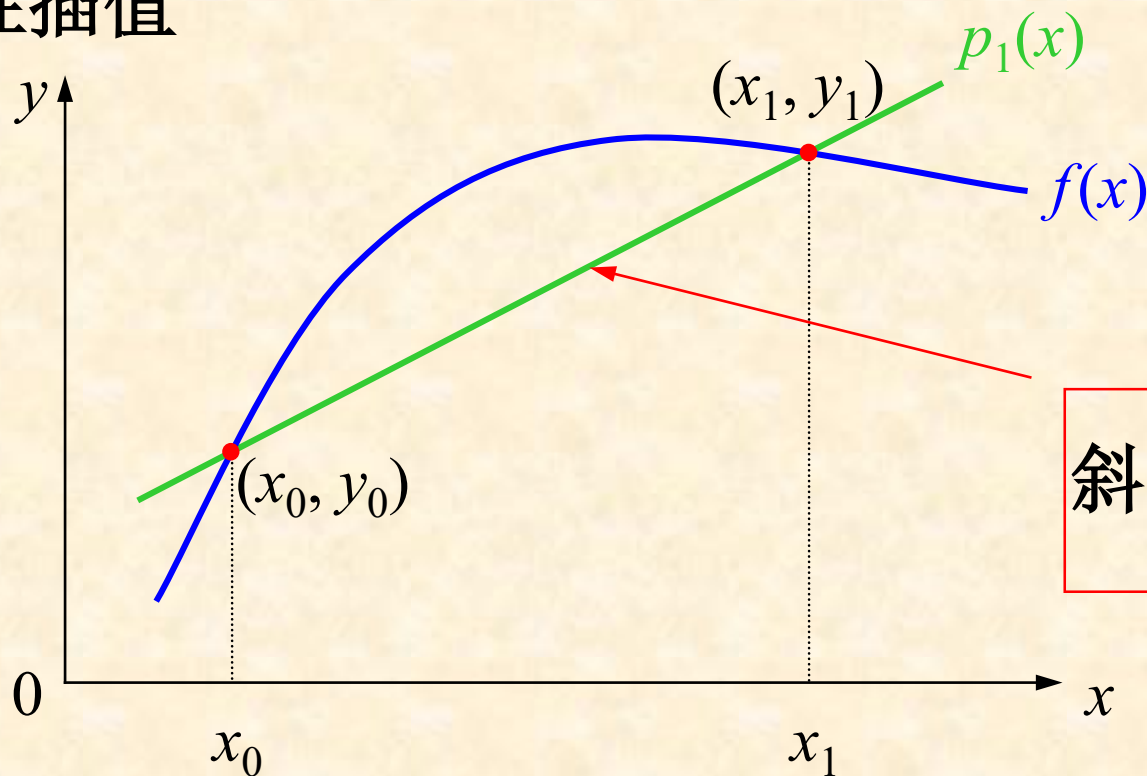
◆ 站得更高

● 分段插值

科学研究之路

2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值


◆ 线性插值



$$\text{斜率 } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

点斜式: $y = y_0 + k(x - x_0)$

$p_1(x)$


$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= \frac{x_1 - x_0 - (x - x_0)}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} y_0 + \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}} y_1$$

线性插
值基函数


$$l_0(x) \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$l_1(x) \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$p_1(x)$ 可表示为插值基函数的线性组合

$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 均为
一次代数多项式


$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

◆ 例1 已知 $\ln 2.00 = 0.6931$, $\ln 3.00 = 1.0986$, 试用线性插值法求 $\ln 2.718$

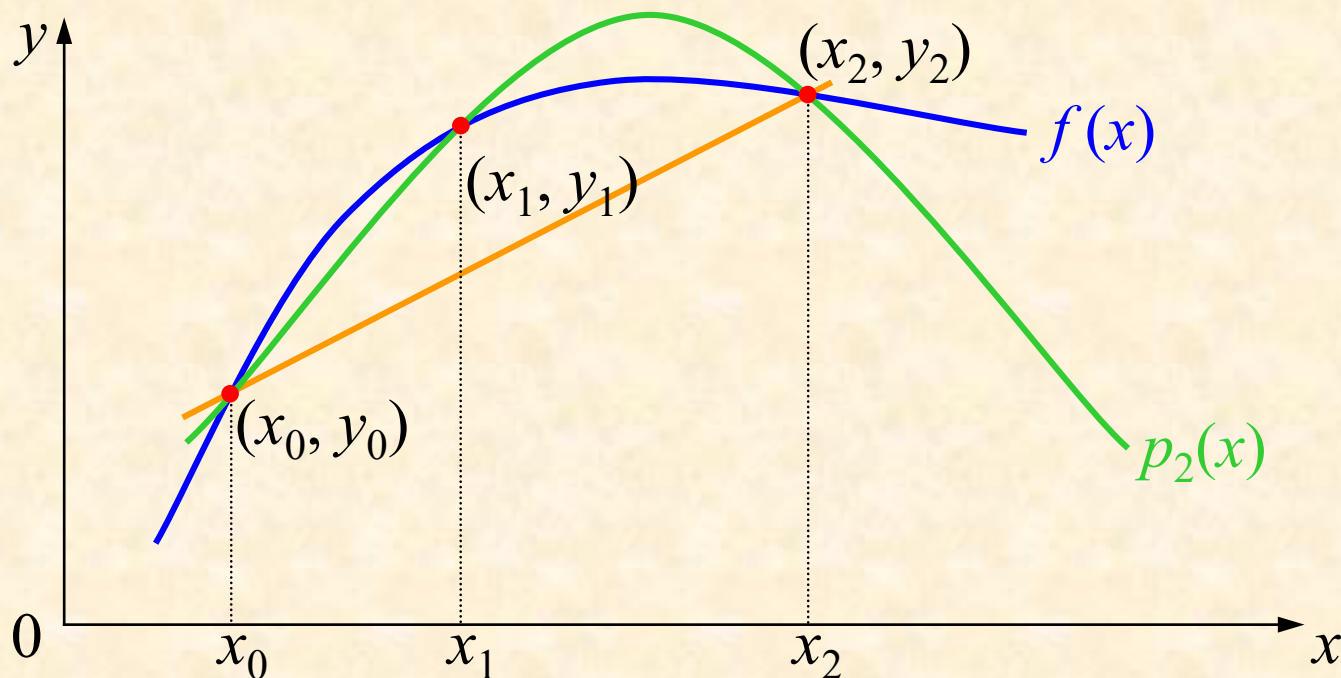
$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3.00 \\ y_1 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x - 3.00}{2.00 - 3.00} \times 0.6931 + \frac{x - 2.00}{3.00 - 2.00} \times 1.0986 \\ &= 0.4055x - 0.1179 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 2.718 &\approx p_1(2.718) = 0.4055 \times 2.718 - 0.1179 \\ &\approx 0.9842 \end{aligned}$$

抛物线插值

- ◆ 线性插值只有在小的插值区间且在该区间上 $f(x)$ 变化较平稳时才较精确。
- ◆ 抛物线插值采用二次曲线替代复杂的未知曲线，可在一定程度上克服线性插值的上述缺陷。



思考：可否由线性插值自行推导出
抛物线插值的公式？

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1)$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

线性插
值基函数

$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 均为一次代数多项式

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} l_0(x) & \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases} \\ l_1(x) & \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

抛物线插值基函数

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$


$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ 均为
二次代数
多项式

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \\ l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \\ l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_0) = 0 \\ l_2(x_1) = 0 \\ l_2(x_2) \stackrel{25}{=} 1 \end{cases}$$


$$l_1(x_0) = 0 \quad l_1(x_1) = 1 \quad l_1(x_2) = 0$$

因为 $l_1(x)$ 为二次代数多项式，且 x_0, x_2 为它的两个零点，故可设：

$$l_1(x) = k(x - x_0)(x - x_2)$$

其中 k 为待定系数。

又因为 $l_1(x_1) = 1$ 所以：

$$k(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

从而：

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

◆ 例2 已知 $\ln 2.00 = 0.6931$, $\ln 2.50 = 0.9163$, $\ln 3.00 = 1.0986$, 用抛物线插值法求 $\ln 2.718$

$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2.50 \\ y_1 = 0.9136 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3.00 \\ y_2 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - 2.50)(x - 3.00)}{(2.00 - 2.50)(2.00 - 3.00)} \times 0.6931 \\ &\quad + \frac{(x - 2.00)(x - 3.00)}{(2.50 - 2.00)(2.50 - 3.00)} \times 0.9136 \\ &\quad + \frac{(x - 2.00)(x - 2.50)}{(3.00 - 2.00)(3.00 - 2.50)} \times 1.0986 \\ &= -0.071x^2 + 0.7605x - 0.5439 \end{aligned}$$


$$\ln 2.718 \approx p_2(2.718)$$

$$\approx -0.071 \times 2.718^2 + 0.7605 \times 2.718 - 0.5439$$
$$\approx 0.9986$$

比较：

$$\ln 2.718 = 0.999896 \dots\dots$$

线性插值： $\ln 2.718 \approx 0.9842 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 1.57\%$

抛物线插值： $\ln 2.718 \approx 0.9986 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

Lagrange 插值

- ◆ 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; 求作一个次数不高于 n 的代数多项式:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足:

$$L_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$



$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Lagrange
插值基函数

- ◆ $l_i(x)$ 的最高次数与 $L_n(x)$ 相同
- ◆ $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的零点（共有 n 个）
- ◆ $l_i(x)$ 在 x_i 处取值为 1

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

因为 $l_i(x)$ 为 n 次代数多项式, 且 $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的 n 个零点, 故可设:

$$l_i(x) = k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$


$$= k \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)$$

k 为待定系数。

又因为 $l_i(x_i) = 1$ 所以:

$$1 = k \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \longrightarrow k = 1 / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$$= y_0 \prod_{j=0, j \neq 0}^n \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{j=0, j \neq 1}^n \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + y_2 \prod_{j=0, j \neq 2}^n \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \\ + \cdots + y_n \prod_{j=0, j \neq n}^n \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

$$= \sum_{i=0}^n y_i \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)}$$



Lagrange 插值 分析

- ◆ Lagrange插值多项式结构对称、简单、优雅。
- ◆ 只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式。
- ◆ 易于计算机实现。
- ◆ 问题： Lagrange插值的误差是多少？

Lagrange 插值误差分析

插值余项

◆ 在插值节点处:

$$L_n(x) = f(x), \quad x = x_0, x_1, \dots, x_n$$

◆ 在非插值节点处, 一般有:

$$L_n(x) \neq f(x), \quad x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$$

◆ 插值余项 (截断误差):


$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$\xi \in (a, b)$

$\omega_{n+1}(x)$

$\omega(x)$

$f(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 内有 $n+1$ 阶导数



$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \omega(x)$$

证：设 x 为插值区间 $[a, b]$ 中的任意一点，若 x 为插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n ，显然：左边 = 右边 = 0

若 x 为非插值节点，则构造如下辅助函数 自变量为 t

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)]$$

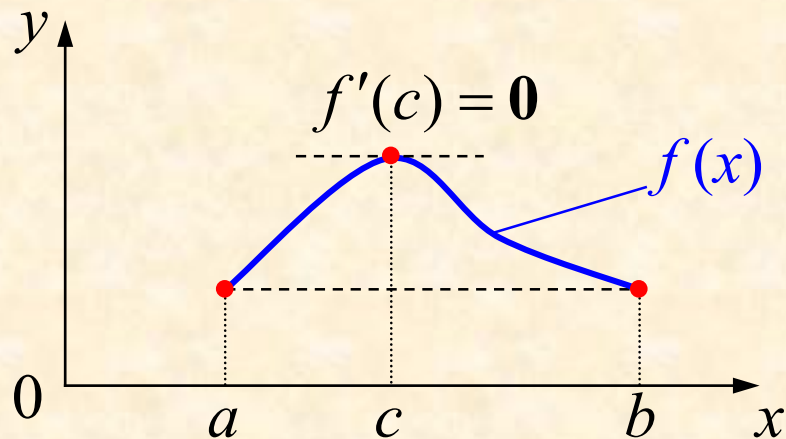
$$t = x_0, x_1, \dots, x_n \text{ 时 } f(t) = L_n(t), \omega(t) = 0 \longrightarrow F(t) = 0$$

$$t = x \text{ 时 } F(x) = \left[1 - \frac{\omega(x)}{\omega(x)} \right] [f(x) - L_n(x)] = 0$$

所以 $F(t)$ 至少有 $n + 2$ 个零点： x, x_0, x_1, \dots, x_n

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x) - L_n(x)]$$

罗尔定理 $f(x)$ 为在区间 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(a) = f(b)$, 则至少存在一点 $c \in (a, b)$ 满足: $f'(c) = 0$



$F'(t)$ 在 $F(t)$ 的任意两个相邻零点之间至少存在一点 $\tilde{\xi}$ 满足: $F'(\tilde{\xi}) = 0$, $F'(t)$ 有 $n+1$ 个零点


反复运用

罗尔定理

$F''(t)$ 有 n 个零点

.....

$F^{(n+1)}(t)$ 有 1 个零点 $F^{(n+1)}(\xi) = 0$



$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)]$$


$L_n(t)$ 为 n 次代数多项式 $\longrightarrow L_n^{(n+1)} = 0$

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \prod_{i=0}^n (t - x_i) = (t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n) \\ &= t^{n+1} + k_n t^n + \cdots + k_1 t + k_0\end{aligned}$$

$$\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)] = 0$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}_{\omega(x)}$$



$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \omega(x)$$

- ◆ 应当指出，余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用。
- ◆ ξ 在 (a, b) 内的具体位置通常不可能给出。
- ◆ 如果我们可以估算出：

$$\max_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$$

则用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差的绝对值：

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$



例3 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

已知 $\ln 2.00 = 0.6931$, $\ln 2.50 = 0.9163$, $\ln 3.00 = 1.0986$,
用抛物线插值法求得 $\ln 2.718 \approx 0.9986$, 试估算其相对误差

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} \quad (\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{2.00 < x < 3.00} |(\ln x)'''| = \frac{2}{(2.00)^3} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \longrightarrow \quad M_3$$

$$|R_2(2.718)| \leq \frac{0.25}{3!} \times$$

$$|(2.718 - 2.00)(2.718 - 2.50)(2.718 - 3.00)| \approx 0.001839$$

$$|\varepsilon_r(\ln 2.718)| \approx 0.001839 / 0.9986 \approx 0.00184 = 0.184\%$$

对比前例: $|\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

例4.1 已知 $\ln x$ 的函数表如下 ($\ln 11.25 = 2.420368$)

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用抛物线插值法计算 $\ln 11.25$ 的近似值，并估计误差。

(1) 取节点 $x_0=10, x_1=11, x_2=12$, 计算 $\ln 11.25$ 的近似值。

得 $\ln 11.25 = 2.420426$ $|R_2(11.25)| \leq 0.000078$

实际上，根据准确值计算得 $|R_2(11.25)| = 0.000058$

(2) 取节点 $x_1=11, x_2=12, x_3=13$, 计算 $\ln 11.25$ 的近似值。

得 $\ln 11.25 = 2.420301$ $|R_2(11.25)| \leq 0.000082$

实际上，根据准确值计算得 $|R_2(11.25)| = 0.000067$

例4.2 已知 $\ln x$ 的函数表如下 ($\ln 11.25 = 2.420368$)

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用三次多项式插值法计算 $\ln 11.25$ 的近似值，并估计误差。

节点 $x_0=10, x_1=11, x_2=12, x_3=13$

得 $\ln 11.25 = 2.420374$ $|R_3(11.25)| \leq 0.000010$

对比例4.1两次抛物线插值的结果：

$\ln 11.25 = 2.420426$ $|R_2(11.25)| \leq 0.000078$

$\ln 11.25 = 2.420301$ $|R_2(11.25)| \leq 0.000082$

Lagrange 插值误差分析（补）


由于 $f(x)$ 的高阶导数一般无法确定，实用的截断误差估计可以采用以下的事后误差分析方法：

$n + 1$ 个插值节点：
$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

增加一个节点 x_{n+1} ，用 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 这 $n + 1$ 个插值节点进行插值，其截断误差为：

$$f(x) - \tilde{L}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi})}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$$

如果 $f(x)$ 在插值区间变化不剧烈，则 $f^{(n+1)}(\xi) \approx f^{(n+1)}(\tilde{\xi})$


$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\frac{f(x) - L_n(x)}{f(x) - \tilde{L}_n(x)} \approx \frac{x - x_0}{x - x_{n+1}}$$

$$f(x) \approx \frac{x - x_{n+1}}{x_0 - x_{n+1}} L_n(x) + \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} \tilde{L}_n(x) \quad (*)$$

—— 新的近似式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}} [L_n(x) - \tilde{L}_n(x)] \quad (**)$$

—— 新的误差估计式

例4.3 已知 $\ln x$ 的函数表如下

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用抛物线插值法计算 $\ln 11.25$ 的近似值，并估计误差。

(1) 取节点 $x_0=10, x_1=11, x_2=12$, 得 $\ln 11.25=2.420426$

(2) 取节点 $x_1=11, x_2=12, x_3=13$, 得 $\ln 11.25=2.420301$

(3) 用公式 (*) 再计算 $\ln 11.25$ 的近似值，得

$\ln 11.25=2.420374$ —结果同三次多项式插值！

用公式 (**) 再计算误差，得

$$R_2(11.25) \approx 0.000052 \quad (|R_2(11.25)| \leq 0.000010)$$

整理思路，继续赶路……

回顾拉格朗日插值：

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \quad y_i = f(x_i)$$

简单 复杂

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

n 次多项式
与所有节点有关

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \omega(x)$$

2.3 牛顿 (Newton) 插值

Lagrange 插值:

- ◆ 优点: 公式对称简单, 规律性强, 便于记忆和编程
- ◆ 缺点: 每增加一个节点, 原有的插值基函数 $l_i(x)$ 必须重新计算, 从而不具有承袭性

Newton 插值:

- ◆ 优点: 具有承袭性, 能够利用以前计算的结果
- ◆ 不足: 公式结构不对称, 不便于记忆

n次牛顿插值多项式

◆ 求作 n 次代数多项式:


$$\begin{aligned} N_n(x) = & c_0 \times \boxed{1} \longrightarrow \varphi_0(x) \\ & + c_1 \boxed{(x - x_0)} \longrightarrow \varphi_1(x) \\ & + c_2 \boxed{(x - x_0)(x - x_1)} \longrightarrow \varphi_2(x) \\ & + c_3 \boxed{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \longrightarrow \varphi_3(x) \\ & \vdots \\ & + c_n \boxed{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})} \longrightarrow \varphi_n(x) \end{aligned}$$

牛
顿
插
值
基
函
数

满足: $N_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

承袭性


$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = (x - x_0), \quad \varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \dots$$

$$N_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i\varphi_i(x)$$

将 x_0, x_1, \dots, x_n 分别代入 $N_n(x)$

利用 $N_n(x_i) = f(x_i)$ 即可确定系数 c_0, c_1, \dots, c_n

$$x = x_0 \quad N_n(x_0) = c_0 = f(x_0)$$

$$x = x_1 \quad N_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} x = x_2 \quad N_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f(x_2) \end{aligned}$$

只跟**第一个**插值节点
及其函数值有关

$$c_0 = f(x_0)$$

只跟**前两个**插值节点
及其函数值有关

$$c_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

只跟**前三个**插值节点
及其函数值有关

$$c_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

c_i 跟**前*i*+1**个插值节点及其函数值有关

c_i 可表示为 $f(x_j), j = 0, 1, \dots, i$ 的**线性组合**

差商

- ◆ 给定区间 $[a, b]$ 中两两互不相同的点 x_0, x_1, x_2, \dots
及在这些点处相应的函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$

记:

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$f(x)$ 在 x_i 处的零阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

一阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

二阶差商

\vdots

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

k 阶差商



x_i	$f(x_i)$	一阶 差商	二阶差商	三阶差商	...	n阶差商
x_0	$f(x_0)$...	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$...	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$...	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

差商表



◆ 例:

x_i	5	7	11	13	21
$f(x_i)$	150	392	1452	2366	9702

◆ 差商表为:

x_i	零阶差商	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
5	150				
7	392	121			
11	1452	265	24		
13	2366	457	32	1	
21	9702	917	46	1	0

差商的性质

◆ 差商与函数值的关系为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$

k 阶差商是其各节点处函数值的线性组合

证明： $k = 1$ 时：

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$


$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$

假设 $k = n - 1$ 时也成立，即：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})}$$

考查 $k = n$ 时：


$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \\ &= \frac{1}{x_n - x_0} \left[\sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \right] \end{aligned}$$



$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{x_n - x_0} \left[\sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \left[\frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \right. \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})(x_j - x_n)} \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \\ \left. - \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \frac{1}{x_n - x_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j) [(x_j - x_0) - (x_j - x_n)]}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$



$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \frac{1}{x_n - x_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j) [(x_j - x_0) - (x_j - x_n)]}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

$$= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

可见 $k = n$ 时也成立。由数学归纳法可知：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$

◆ 差商的值与节点的排列顺序无关

$$f[x_0, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

◆ 若 $f[x, x_0, x_1, \dots, x_k]$ 是 x 的 n 次多项式, 则

$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x}$$

$x = x_{k+1}$ 时 $f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_{k+1}, x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$

n 次代数多项式含有因子 $x - x_{k+1}$

所以: $f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式。

◆ 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式, 且 $n \geq m$, 则:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$$

$f[x] = f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式

$f[x, x_0]$ 是 x 的 $m-1$ 次代数多项式

$f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 $m-2$ 次代数多项式

⋮

$f[x, x_0, \dots, x_{m-1}]$ 是 x 的 0 次代数多项式

$$f[x, x_0, \dots, x_{m-1}] = c \longrightarrow \begin{aligned} & f[x_m, x_0, \dots, x_{m-1}] \\ & = f[x_0, \dots, x_{m-1}, x_m] = c \end{aligned}$$

$$f[x, x_0, \dots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_m] - f[x, x_0, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x} = 0$$

从 $f[x, x_0, \dots, x_m]$ 起所有的高阶差商均为 0, 故:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$$

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x, x_0]}{x_1 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x, x_0, x_1]}{x_2 - x}$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$


牛顿插值公式

$$\begin{aligned} c_0 \leftarrow f(x) &= f(x_0) \\ &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ c_1 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ c_2 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ c_3 \leftarrow &+ \vdots \\ &+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ c_n \leftarrow &+ f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

一般的: $c_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i] \quad i = 0, 1, \dots, n$

- 
- ◆ 由插值多项式的唯一性可知： $N_n(x) = L_n(x)$ ，因此二者的余项也应相等。

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}$$


$$= \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

对 $f(x)$ 没有限制，但...

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}$$

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}$$

$$f[x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$



例1 给定数据表 $f(x) = \ln x$

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

- ◆ 构造差商表
- ◆ 用二次 Newton 插值多项式, 近似计算 $f(2.718)$ 的值
- ◆ 写出四次 Newton 插值多项式 $N_4(x)$



解：由已知可构造如下差商表

x_i	$f[x_i]$	一阶 差商	二阶 差商	三阶 差商	四阶 差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	-0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	-0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	-0.0639388	0.0170750	-0.0055806

2.718 →

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

$N_2(x)$ 有多种形式，如果取 $x_0=2.4$, $x_1=2.6$, $x_2=2.8$:

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	-0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	-0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	-0.0639388	0.0170750	-0.0055806

$$N_2(x) = 0.8754687 + 0.4002135(x - 2.40) \\ - 0.0741838(x - 2.40)(x - 2.60)$$

$$f(2.718) \approx N_2(2.718) \approx 0.9999529$$

$$\ln 2.718 = 0.9998963 \dots$$

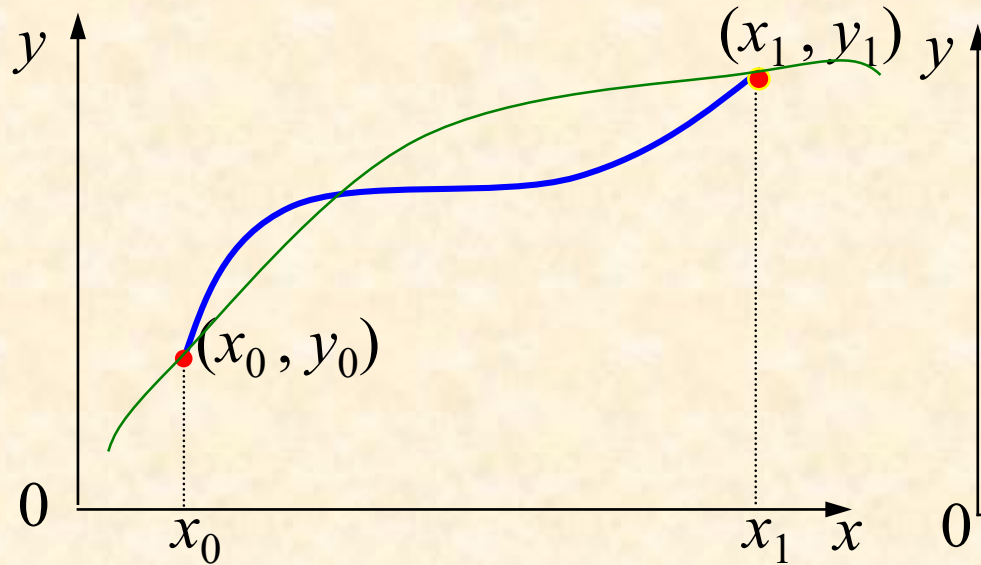
$$\varepsilon_r \approx 0.037\%$$



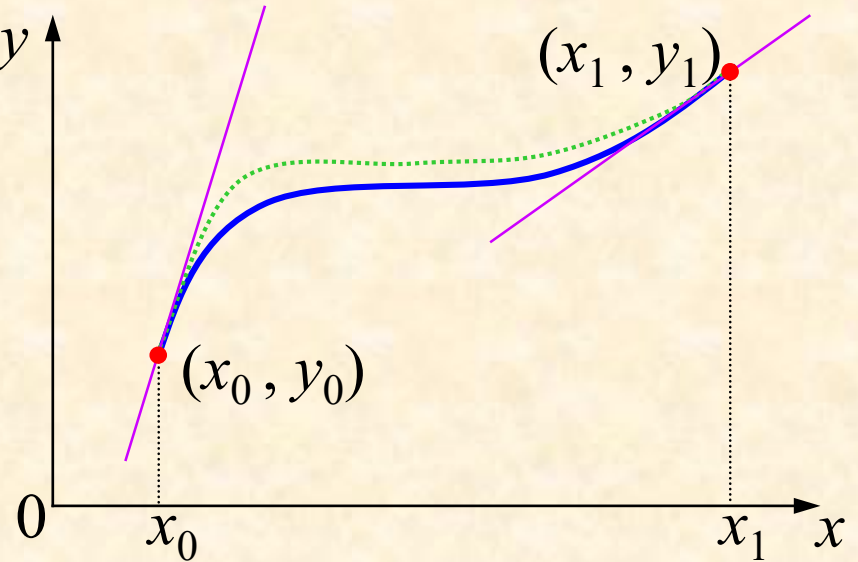
x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	-0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	-0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	-0.0639388	0.0170750	-0.0055806

$$\begin{aligned}N_4(x) = & 0.7884574 \\& + 0.4350565(x - 2.20) \\& - 0.0871075(x - 2.20)(x - 2.40) \\& + 0.0215395(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60) \\& - 0.0055806(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60)(x - 2.80)\end{aligned}$$

插值条件



Lagrange插值
Newton插值



Hermite插值

2.4 赫密特 (Hermite) 插值

- 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$ 上的函数值及一阶导数值:

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

求作一个次数不高于 $2n+1$ 次的插值多项式 $H(x)$, 满足以下 $2n+2$ 条件:

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- 称 $H(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式, 因其最高次数不超过 $2n+1$, 常记为 $H_{2n+1}(x)$
 - $H_{2n+1}(x)$ 不仅在节点处与 $f(x)$ 有相同的函数值, 且在
- 这些节点处与 $f(x)$ 相切。

基函数

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + y'_i \beta_i(x)]$$

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$
$$\alpha'_i(x_j) = 0$$

$$\beta_i(x_j) = 0$$
$$\beta'_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次代数多项式

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均含因子 $(x - x_j)^2$

$$j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

赫密特插
值基函数



$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

设 $\begin{cases} \alpha_i(x) = (a_1x + b_1)l_i^2(x) \\ \beta_i(x) = (a_2x + b_2)l_i^2(x) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n$ 待定系数法


$$\alpha_i(x_i) = 1, \quad \alpha_i'(x_i) = 0$$

$$\beta_i(x_i) = 0, \quad \beta_i'(x_i) = 1$$

$$\begin{cases} \alpha_i(x_i) = (a_1x_i + b_1)l_i^2(x_i) = 1 \\ \alpha_i'(x_i) = a_1l_i^2(x_i) + (a_1x_i + b_1) \cdot 2l_i(x_i) \cdot l_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2l_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$l_i(x_i) = 1$$



$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$


$$\ln l_i(x) =$$

$$\ln(x - x_0) + \cdots + \ln(x - x_{i-1}) + \ln(x - x_{i+1}) + \cdots + \ln(x - x_n) \\ - \ln(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

$$\frac{l'_i(x)}{l_i(x)} = \frac{1}{x - x_0} + \cdots + \frac{1}{x - x_{i-1}} + \frac{1}{x - x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}$$

$$l'_i(x) = l_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x - x_j}$$

$$l'_i(x_i) = l_i(x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$



$$\begin{cases} a_1 x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2l'_i(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$l'_i(x_i) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 = -2 \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 x_i + b_1 + a_1 x = 1 + a_1 x$$

$$a_1 x + b_1 = 1 + a_1 (x - x_i) = 1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\alpha_i(x) = (a_1 x + b_1) l_i^2(x)$$

$$= \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x)$$


$$\beta_i(x_i) = 0, \quad \beta'_i(x_i) = 1$$

$$\beta_i(x) = (a_2x + b_2)l_i^2(x) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} \beta_i(x_i) = (a_2x_i + b_2)l_i^2(x_i) = 0 \\ \beta'_i(x_i) = a_2l_i^2(x_i) + (a_2x_i + b_2) \cdot 2l_i(x_i) \cdot l'_i(x_i) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2x_i + b_2 = 0 \\ a_2 + 0 \times 2l'_i(x_i) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{red arrow}} \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = -x_i \end{cases}$$

所以: $\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \left\{ y_i \underbrace{\left[1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x)}_{\alpha_i(x)} + y'_i \underbrace{(x - x_i) l_i^2(x)}_{\beta_i(x)} \right\}$$

回顾：赫密特插值

基函数法 \Rightarrow 待定系数法

\searrow 借用了拉格朗日基函数



插值余项（定理2.4）

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2 \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

赫密特插值的唯一性（定理2.5）

例 题

设 $f(x) \in C^4[0, 2]$, 满足

x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$, 并给出余项。

记 $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 0$



x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

$$y_0 = 1, y_1 = 0,$$

$$y_2 = 3, y_3 = 0$$

◆ 方法一（基函数+待定系数法）

$$\begin{aligned}\text{设 } H_3(x) &= y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x) \\ &= \varphi_0(x) + 3\varphi_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= c(x-1)^2(x-2) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = dx(x-1)^2 = \frac{1}{2}x(x-1)^2$$

$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=1$	
1	0	0	0	φ_0
0	1	0	0	φ_1
0	0	1	0	φ_2
0	0	0	1	φ_3

$$\text{故 } H_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1)^2 = (x-1)^2(x+1)$$

x	0	1	2
f	1	0	3
f'		0	

◆ 方法二（待定系数法）

设 $H_3(x) = (x-1)^2(ax+b)$

$$\begin{matrix} H_3(0)=1 \\ H_3(2)=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

故 $H_3(x) = (x-1)^2(x+1)$

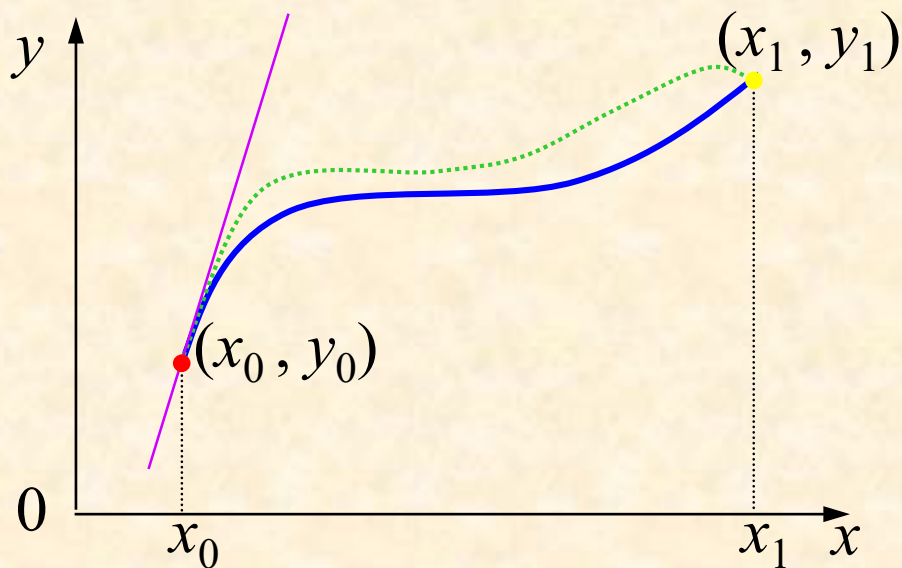
余项

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x(x-1)^2(x-2)$$

教材例题2.6, 2.8

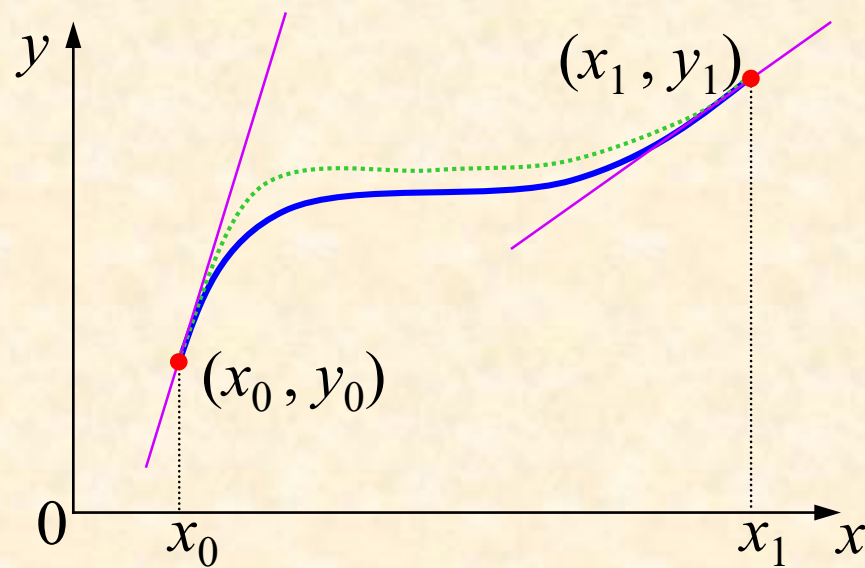
求作 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$ 满足:


$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$



求作 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足:

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H'_3(x_0) = y'_0 \\ H'_3(x_1) = y'_1 \end{cases}$$





1. 首先讨论 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 这种特殊情况。设


$$H_2(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x)$$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x)$ 为基函数，它们均为二次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \end{cases}$$

显然满足插值条件：

$$H_2(0) = y_0, \quad H_2(1) = y_1, \quad H'_2(0) = y'_0$$



$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \end{cases}$$

设 $\alpha_0(x) = (x-1)(ax+b)$

$$\alpha_0(0) = -b = 1 \quad \longrightarrow \quad b = -1$$

$$\alpha'_0(x) = (ax+b) + a(x-1)$$

$$\alpha'_0(0) = b - a = 0 \quad \longrightarrow \quad a = b = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0(0) = -b = 1 \\ \alpha'_0(0) = b - a = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \alpha_0(x) &= (x-1)(-x-1) \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

设 $\alpha_1(x) = x(ax+b)$

$$\alpha_1(1) = a + b = 1$$

$$\alpha'_1(x) = (ax+b) + ax$$

$$\alpha'_1(0) = b = 0 \quad \longrightarrow \quad a = 1$$


$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1(1) = a + b = 1 \\ \alpha'_1(0) = b = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \alpha_1(x) &= x(x+0) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

设 $\beta_0(x) = ax(x-1)$

$$\beta'_0(x) = a[(x-1) + x] = a(2x-1)$$

$$\beta'_0(0) = -a = 1 \quad \longrightarrow \quad a = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta'_0(0) = -a = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \beta_0(x) &= -x(x-1) \\ &= x(1-x) \end{aligned}$$


$$\alpha_0(x) = 1 - x^2, \quad \alpha_1(x) = x^2, \quad \beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$H_2(x) = y_0(1 - x^2) + y_1x^2 + y'_0x(1 - x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

◆ 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

$$x_0 \leq x \leq x_1 \longrightarrow 0 \leq x - x_0 \leq x_1 - x_0 \longrightarrow 0 \leq \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \leq 1$$


$$\text{记: } h = x_1 - x_0, \quad X = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{则: } x = x_0 + hX, \quad dx = h dX$$

显然: $x = x_0$ 时 $X = 0$, $x = x_1$ 时, $X = 1$

$$f(x) = f(x_0 + hX) \triangleq F(X) \quad F'(X) = \frac{dF(X)}{dX} \cdot \frac{dx}{dX} = hf'(x)$$

$$x = x_0: F(0) = f(x_0) = y_0 \quad F'(0) = hf'(x_0) = hy'_0$$

$$x = x_1: F(1) = f(x_1) = y_1$$


$$\alpha_0(x) = 1 - x^2$$

$$\alpha_1(x) = x^2$$

$$\beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$X = \frac{x - x_0}{h}$$

$$p_2(X) = y_0(1 - X^2) + y_1X^2 + \textcolor{red}{h}y'_0X(1 - X), \quad 0 \leq X \leq 1$$

$$\boxed{p_2\left(\frac{x - x_0}{h}\right)} = y_0 \left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h} \right)^2 \right] + y_1 \left(\frac{x - x_0}{h} \right)^2$$

$\textcolor{red}{H_2(x)}$

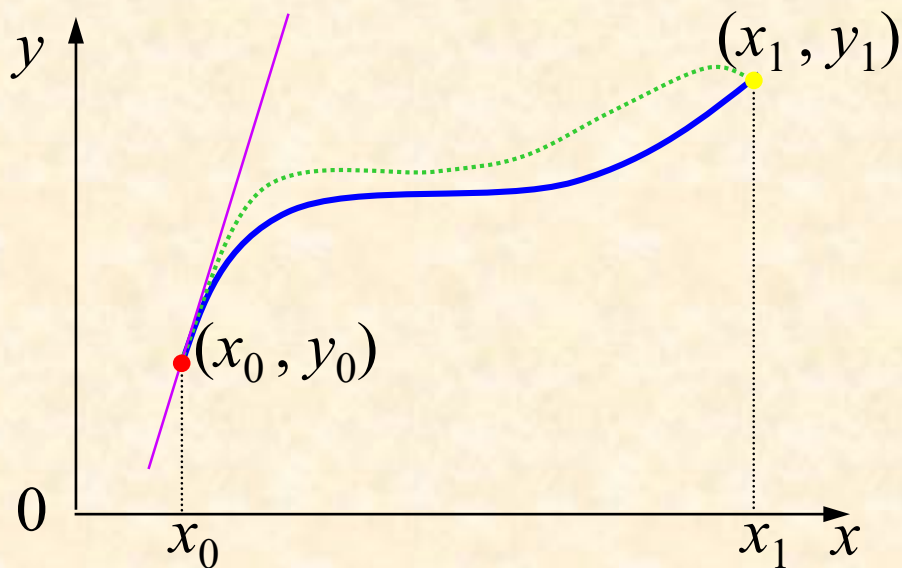
$$+ \textcolor{red}{h}y'_0 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \right]$$

$$\boxed{H_2(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + hy'_0\beta_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right)}$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

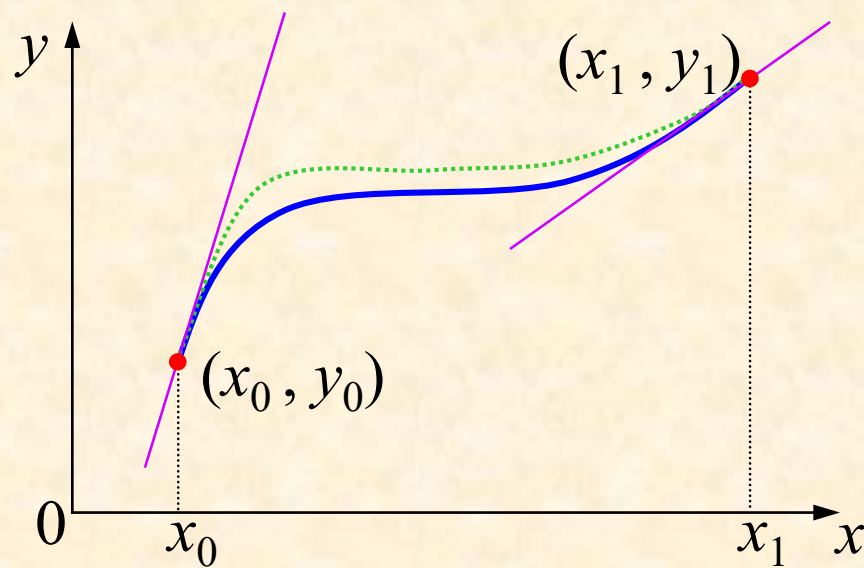
求作 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$ 满足:

$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$



求作 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足:

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H'_3(x_0) = y'_0 \\ H'_3(x_1) = y'_1 \end{cases}$$





2. 先讨论 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 这种特殊情况。设：

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x) + y'_1\beta_1(x)$$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 为基函数，它们均为三次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

显然满足插值条件：

$$H_3(0) = y_0, H_3(1) = y_1, H'_3(0) = y'_0, H'_3(1) = y'_1$$

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

设 $\alpha_0(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$\alpha_0(0) = -c = 1 \longrightarrow c = -1$$

$$\alpha'_0(x) = (ax^2 + bx + c) + (x-1)(2ax + b)$$

$$\alpha'_0(0) = c - b = 0 \longrightarrow b = c = -1$$

$$\alpha'_0(1) = a + b + c = 0 \longrightarrow a = -(b + c) = 2$$

$$\alpha_0(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1) = (x-1)^2(2x+1)$$

设 $\alpha_1(x) = x(ax^2 + bx + c)$


$$\alpha_1(1) = a + b + c = 1 \longrightarrow a + b = 1 \longrightarrow b = 3$$

$$\alpha'_1(x) = (ax^2 + bx + c) + x(2ax + b)$$

$$\alpha'_1(0) = c = 0 \longrightarrow c = 0$$

$$\alpha'_1(1) = (a + b + c) + (2a + b) = 0 \longrightarrow a = -(a + b) - 1 = -2$$

$$\alpha_1(x) = x(-2x^2 + 3x) = x^2(-2x + 3)$$



$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

设 $\beta_0(x) = x(x-1)(ax+b)$

$$\beta'_0(x) = (2x-1)(ax+b) + (x^2-x)a$$

$$\beta'_0(0) = -b = 1 \quad \longrightarrow \quad b = -1$$

$$\beta'_0(1) = a + b = 0 \quad \longrightarrow \quad a = -b = 1$$

$$\beta_0(x) = x(x-1)(x-1) = \mathbf{x(x-1)^2}$$


设 $\beta_1(x) = x(x-1)(ax+b)$

$$\beta'_1(x) = (2x-1)(ax+b) + (x^2-x)a$$

$$\beta'_1(0) = -b = 0 \quad \longrightarrow \quad b = 0$$

$$\beta'_1(1) = a + b = 1 \quad \longrightarrow \quad a = 1$$

$$\beta_1(x) = x(x-1)x = \mathbf{x^2(x-1)}$$



$$\begin{cases} \alpha_0(x) = (x-1)^2(2x+1) \\ \alpha_1(x) = x^2(-2x+3) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(x) = x(x-1)^2 \\ \beta_1(x) = x^2(x-1) \end{cases}$$

$$H_3(x) = y_0(x-1)^2(2x+1) + y_1x^2(-2x+3) \\ + y'_0x(x-1)^2 + y'_1x^2(x-1)$$


$$0 \leq x \leq 1$$

◆ 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

记: $h = x_1 - x_0$

$$H_3(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ + hy'_0\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + hy'_1\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$



$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2$$

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x - x_0)(x - x_1)]^2 \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$g(x) = [(x - x_0)(x - x_1)]^2$$


$$g'(x) = 2(x - x_0)(x - x_1)[(x - x_1) + (x - x_0)]$$

$$= 4(x - x_0)(x - x_1) \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) = 0$$

$$x = x_0, x_1 \text{ 时, } g(x) = 0$$

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \text{ 时, } g(x) = \left[\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0 \right) \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 \right) \right]^2$$

$$= \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{2} \right) \left(-\frac{x_1 - x_0}{2} \right) \right]^2 = \frac{h^4}{16} \quad \text{最大值}$$


$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x - x_0)(x - x_1)]^2$$

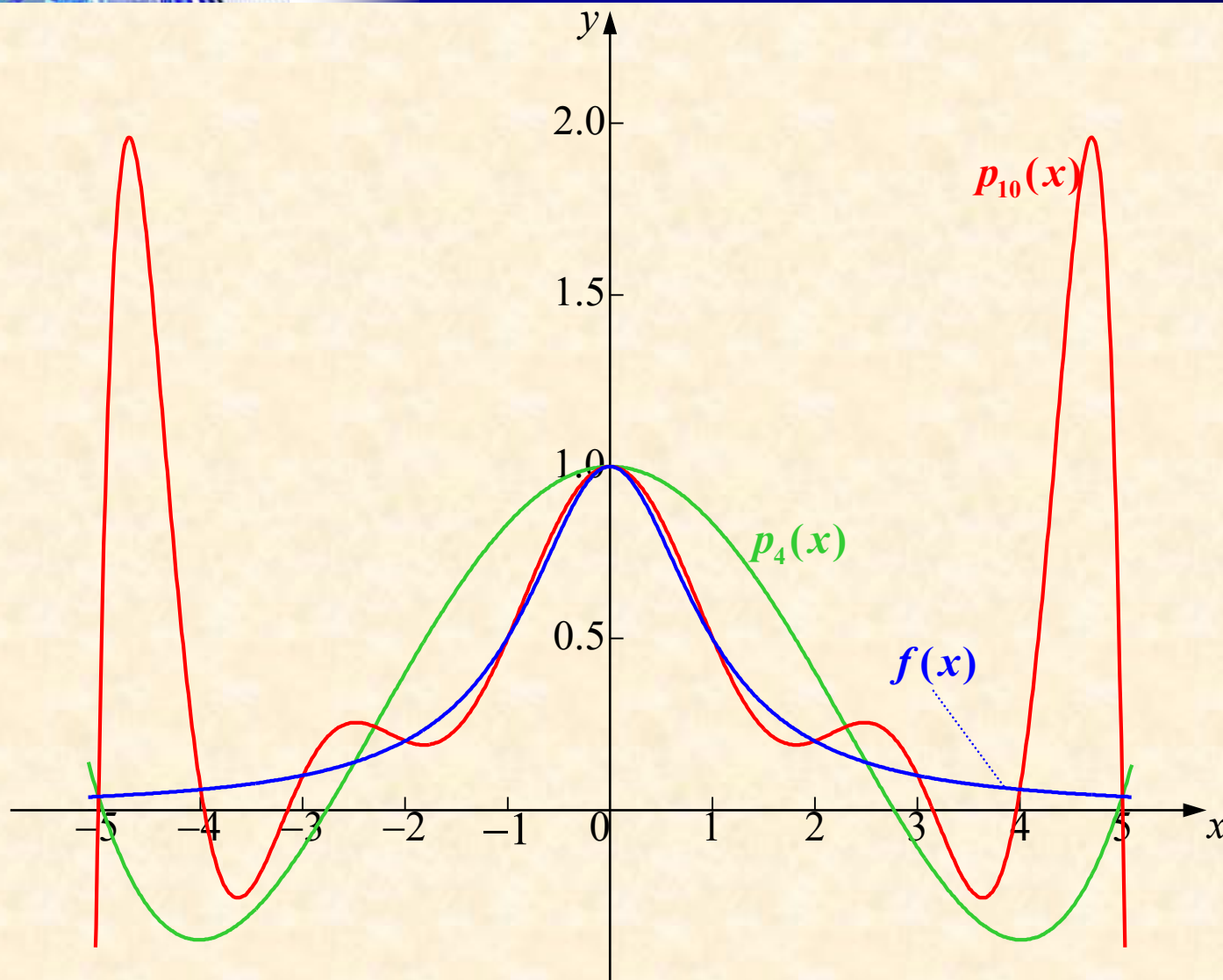
$$|R_3(x)| = |f(x) - H_3(x)|$$

$$\leq \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \right| \cdot \frac{h^4}{16}$$

$$\leq \frac{h^4}{\mathbf{384}} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f^{(4)}(x)|$$

$$h = x_1 - x_0$$

高次插值的 Runge 现象



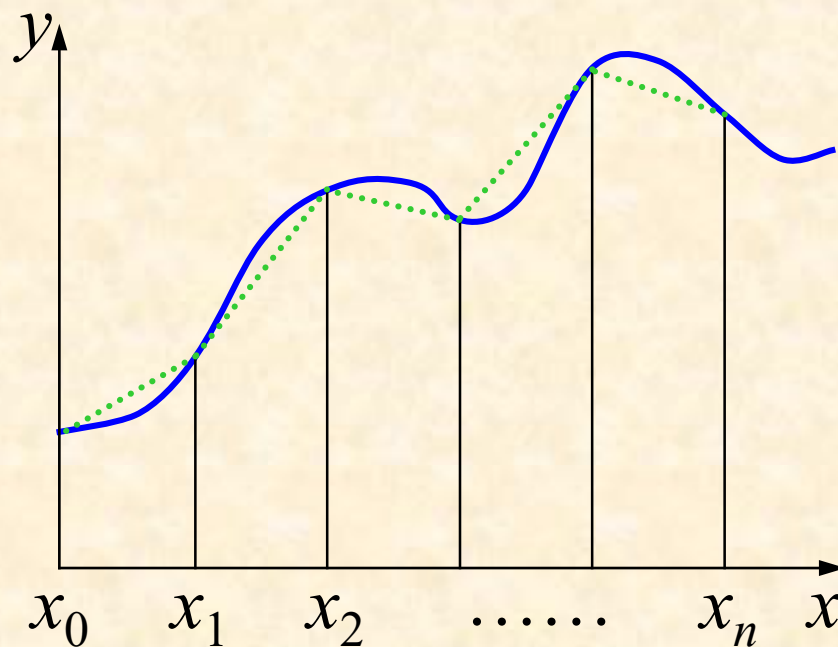
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

当插值节点数达到一定程度后，随着节点个数的增加，逼近精度越来越差

2.5 分段插值

- ◆ 将插值区间 $[a, b]$ 作一划分
 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
- ◆ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造次数较低的插值多项式 $p_i(x)$
- ◆ 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的插值函数 $g(x) = p_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}]$



本节内容

- ◆ 分段线性插值
- ◆ 分段三次Hermite插值

分段插值的公式：在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上同前面所学的线性插值、三次Hermite插值；

难点：分段插值的误差。

分段线性插值

- ◆ 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i ，求作具有划分 Δ 的分段一次代数多项式 $S_1(x)$ ，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_1(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个一次插值多项式，则插值基函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ 均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$
$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

分段线性插值的误差

n 次Lagrange插值的余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

令 $n=1$, 考虑分段线性插值。当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$[(x - x_i)(x - x_{i+1})]' = (x - x_i) + (x - x_{i+1}) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

分段线性插值的误差

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$|f(x) - S_1^{[i]}(x)|$$

$$\leq \frac{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|}{2!} \cdot \left| \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i \right) \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) \right|$$

$$= \frac{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|}{2} \cdot \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot \frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{8} h_i^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \quad (h_i = |x_{i+1} - x_i|) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

定理 2.6

分段线性插值的误差:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad h = \max h_i$$

- ◆ 上式表明插值余项与 h 相关
- ◆ h 越小, 则分段线性插值的插值余项越小, 因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法


分段三次Hermite插值

- ◆ 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y'_i ，求作具有划分 Δ 的分段三次代数多项式 $S_3(x)$ ，满足：

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S'_3(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y'_i \end{cases} \quad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y'_{i+1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha_0(x) = (x-1)^2(2x+1) \\ \alpha_1(x) = x^2(-2x+3) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(x) = x(x-1)^2 \\ \beta_1(x) = x^2(x-1) \end{cases}$$

$$H_3(x) = y_0 \alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \quad \text{例题2.8}$$

$$+ h y'_0 \beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h y'_1 \beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \quad h = x_1 - x_0$$

$$S_3^{[i]}(x) = y_i \alpha_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1} \alpha_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$+ h_i y'_i \beta_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + h_i y'_{i+1} \beta_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

定理 2.7

分段三次 Hermite 插值的误差:

$$\left| f(x) - S_3(x) \right| \leq \frac{1}{384} h^4 \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right| \quad h = \max h_i$$

- ◆ h 足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的误差远小于分段线性插值的误差，因此前者的插值精度更高
- ◆ 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的插值曲线更光滑

分段插值法

- ◆ 简单
- ◆ 只要插值节点的间距充分小，分段插值收敛性有保证，不会出现Runge现象。
- ◆ 局部性
- ◆ 分段低次lagrange插值在插值节点处曲线不光滑。
- ◆ 三次Hermite插值要求给出插值节点处的导数值。其光滑性也不高。

例 题

例1 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，将区间 $[-5, 5]$ 分为10等分。


用分段线性插值法求 $f(3.5)$ 的近似值，并估计误差。

解：取 $x_i = 3, x_{i+1} = 4$ ，则 $y_i = \frac{1}{10}, y_{i+1} = \frac{1}{17}$

$$s_1(3.5) = \frac{1}{10} \times \frac{3.5-4}{3-4} + \frac{1}{17} \times \frac{3.5-3}{4-3} = \frac{27}{340}$$

本题中 $h = 1$ 。当 $x \in [3, 4]$ 时

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{3 \leq x \leq 4} |f''(x)|$$

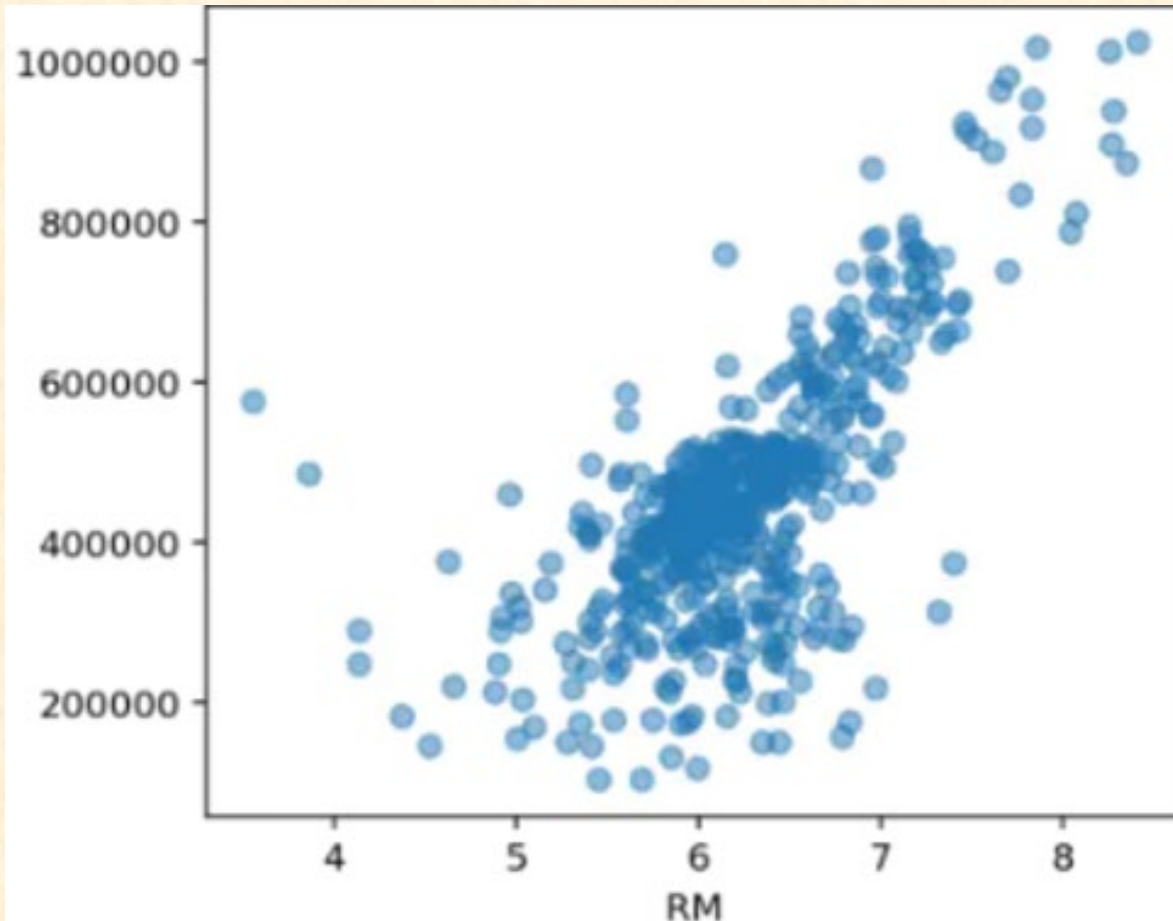

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

当 $x \in [3, 4]$ 时 $f'''(x) \leq 0$, 且 $f''(x) > 0$

$$|f(3.5) - s_1(3.5)| \leq \frac{1}{8} \max_{3 \leq x \leq 4} |f''(x)| = \frac{1}{8} f''(3) = 0.0065$$

2.7 曲线拟合的最小二乘法



波士顿房价预测项目：此项目的数据于1978年开始统计，共506个数据点，涵盖了麻省波士顿不同郊区房屋14种特征的信息。



◆ 函数的逼近方式

- 插值 —— 满足给定的插值条件
- 拟合 —— 反映给定数据的分布

◆ 曲线拟合：给定函数类 H ，按照某种准则，找到一条曲线，既能反映给定数据的总体分布形式，又不致于出现局部较大的波动。

最小二乘法

- ◆ 给定数据点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，记

$$\varepsilon_i = y_i - g(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

称为残差。

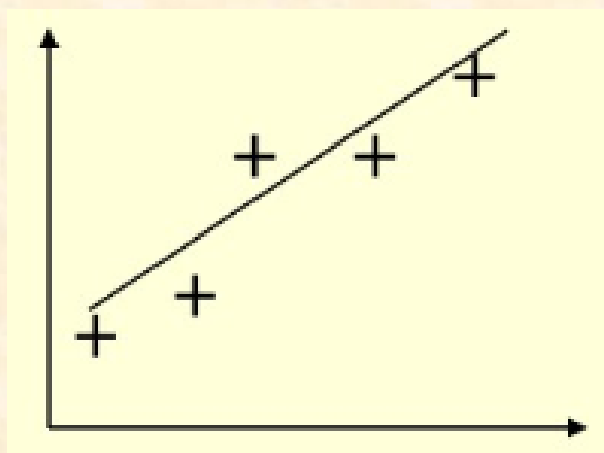
- ◆ 曲线拟合的最小二乘法：函数类 H 中找一个函数 $g(x)$ 使得残差的平方和最小，即

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \min_{h(x) \in H} \sum_{i=1}^N (y_i - h(x_i))^2$$

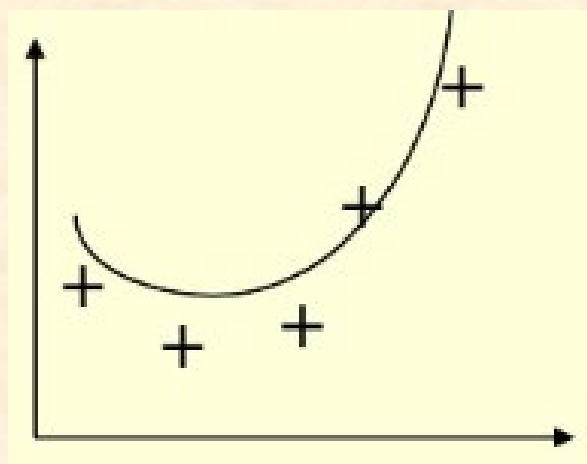
—— 最小二乘条件

最小二乘法

- ◆ 函数类 $H \Rightarrow g(x)$ 的形式
- ◆ 通常对给定的数据描图，通过图来寻找数据的分布规律，进而确定 $g(x)$ 的形式。



$$g(x) = ax + b$$



$$g(x) = a + bx + cx^2$$

2.7.1 直线拟合

- ◆ 给定数据点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，求作一次式

$$g(x) = ax + b$$


使得如下的残差最小：

$$\sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

- ◆ 记
$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

- ◆ 上述问题可归结为求二元函数 $Q(a, b)$ 的极值。

即
$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0$$


$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0 \quad \sum_{i=1}^N 2[y_i - (a + bx_i)] \times (-1) = 0$$

$$a \sum_{i=1}^N 1 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$Na + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0 \quad \sum_{i=1}^N 2[y_i - (a + bx_i)] \times (-x_i) = 0$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (2)$$

2.7.2 多项式拟合


- ◆ 给定数据点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，求作m次多项式

$$g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

使得如下的残差最小：

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right]^2$$

- ◆ Q 是 $m+1$ 元函数, $Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$
- ◆ 上述问题可归结为求 $m+1$ 元函数 Q 的极值。



$$Q = \sum_{i=1}^N [y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j]^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{2m} = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i \end{array} \right. \quad (3)$$

多项式拟合

- ◆ 给定数据 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$, 求作 m 次多项式

$$g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$


- ◆ 记 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m$

$$g(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x)$$

- ◆ 记 $\varphi_i = (\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_N)), \quad 0 \leq i \leq m$

$$f = (y_1, \dots, y_N)$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{l=1}^N \varphi_i(x_l) \varphi_j(x_l), \quad (f, \varphi_i) = \sum_{l=1}^N y_l \varphi_i(x_l)$$



$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m$$

$$\varphi_i = (\varphi_i(x_0), \varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_N)), \quad 0 \leq i \leq m$$

$$f = (y_0, y_1, \dots, y_N)$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N 1 \times 1 = N$$


$$(\varphi_m, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N x_i^m \times 1 = \sum_{i=1}^N x_i^m$$

(3)的第一个
方程

$$a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \dots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$(\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N x_i \times 1 = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$(f, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N y_i \times 1 = \sum_{i=1}^N y_i$$



$$a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) a_0 + (\varphi_1, \varphi_0) a_1 + \cdots + (\varphi_m, \varphi_0) a_m = (f, \varphi_0)$$

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_0) a_j = (f, \varphi_0)$$

$$((\varphi_0, \varphi_0), (\varphi_1, \varphi_0), \cdots, (\varphi_m, \varphi_0)) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (f, \varphi_0)$$

类似地，可以表示**(3)**中其他方程。



$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{2m} = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_0) a_j = (f, \varphi_0) \\ \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_1) a_j = (f, \varphi_1) \\ \dots \\ \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_m) a_j = (f, \varphi_m) \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

正规方程组

多项式拟合

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k) \quad (4)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

- ◆ 正规方程组(4)是否有解？
- ◆ 该解是否是残差函数Q的最小值点？

定理2.8 正规方程组(4)的解存在且唯一，而且其解就是使 $Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$ 达到最小值的极值点。

例 题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3.2	-2.1	-1.2	0.1	0.9	2.1	3.3	4

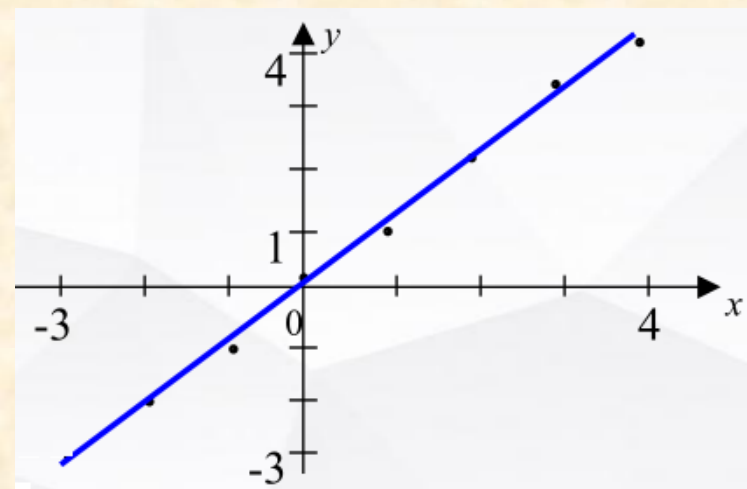
解：绘草图，确定拟合曲线类型。

从草图可判定拟合曲线为直线，因此设

$$g(x) = a + bx$$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^8 [y_i - (a + bx_i)]^2$$

按最小二乘条件，令其偏导数为零得到二元一次方程组，得到 a, b 的值。



例 题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3.2	-2.1	-1.2	0.1	0.9	2.1	3.3	4

解：绘草图，确定拟合曲线类型。

从草图可判定拟合曲线为直线，可设

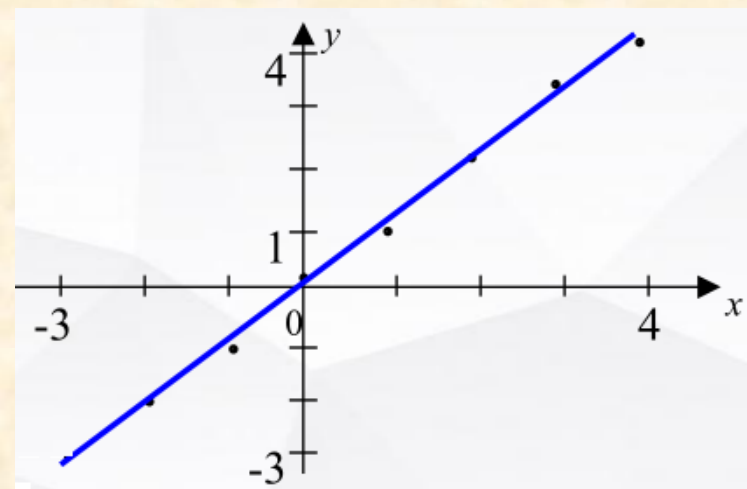
$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$$

$$g(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\varphi_1 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$f = (-3.2, -2.1, -1.2, 0.1, 0.9, 2.1, 3.3, 4)$$



例1 (续)

$$\varphi_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad \varphi_1 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$f = (-3.2, -2.1, -1.2, 0.1, 0.9, 2.1, 3.3, 4)$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = 8 \quad (\varphi_1, \varphi_0) = 4 \quad (f, \varphi_0) = 3.9$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = 4 \quad (\varphi_1, \varphi_1) = 44 \quad (f, \varphi_1) = 46$$

$$\begin{cases} 8a_0 + 4a_1 = 3.9 \\ 4a_0 + 44a_1 = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -0.0369 \\ a_1 = 1.0488 \end{cases}$$

从而拟合直线为: $g(x) = a_0 + a_1x = -0.0369 + 1.0488x$

例 题 (提高)

例2 对下列数据求形如 $y=ae^{bx}$ 的拟合曲线

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6
z_i	2.72785	3.02042	3.31054	3.60005	3.89386	4.18358	4.47506	4.76729

设 $z=\ln y$, 则 $z=A+bx$, 其中 $A=\ln a$, 由 $z_i=\ln y_i$ 得

对 $z(x)$ 作线性拟合曲线, 取 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$.

$$\varphi_0=(1,1,1,1,1,1,1,1)^T, \quad \varphi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8)^T,$$

$$z=(2.72785, 3.02042, 3.31054, 3.60005, 3.89386, 4.18358, 4.47506, 4.76729)^T,$$

$$\begin{cases} 8A + 36b = 29.97865 \\ 36A + 204b = 147.13503 \end{cases}$$

解得 $A^*=2.43686, b^*=0.29122$, 于是有 $a^*=e^{A^*}=11.43707$

第2章 小结

- Lagrange插值
 - Newton插值
 - Hermite插值
 - 分段插值
 - 直线拟合
 - 多项式拟合
- ◆ 插值基函数
 - ◆ 差商
 - ◆ 插值余项-误差估计
 - ◆ 不同插值方法的异同
 - ◆ 拟合与插值的不同
 - ◆ 典型例题