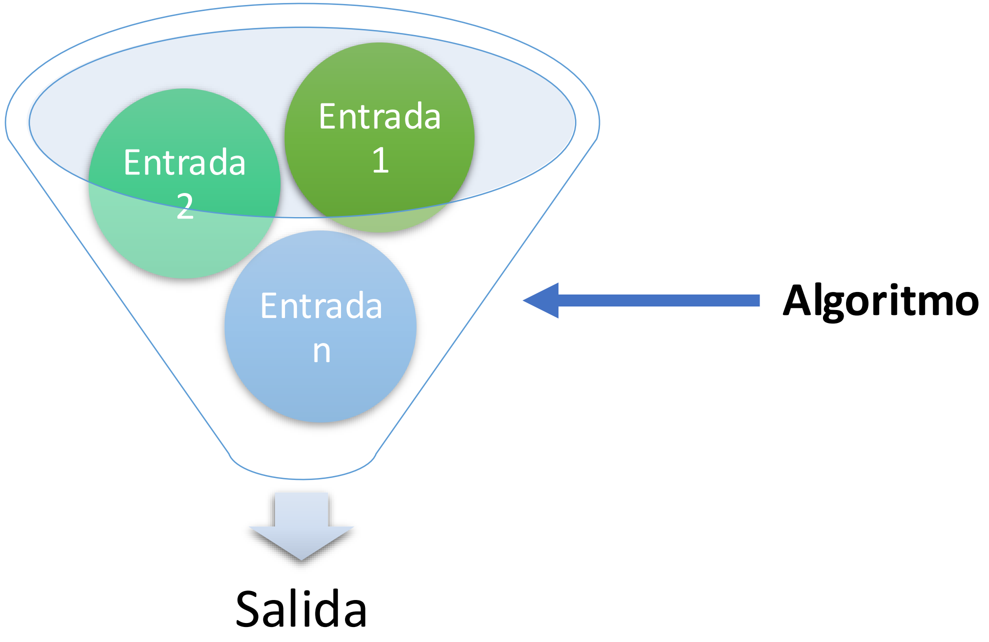
Conceptos básicos de algoritmos

Algoritmos y Estructuras de Datos

Por: Violeta Ocegueda

Qué es un algoritmo?

- Es una **secuencia de pasos computacionales** que transforman un valor o conjunto de valores de **entrada** en un valor o conjunto de valores de **salida**.



Ejemplo:

a:	5	6	4	9	7	1	8

k: 7

Queremos saber si hay dos elementos en a, tal que:

a[i] + a[j] = k

Algunas posibles soluciones son:

- Probar todos los posibles pares.
- Ordenar el arreglo, poner las variables izq y der, y mover estos valores.
- Guardar los elementos que ya hemos encontrado k-a[i].

Todas funcionan

Cuál elegir?

Cómo elegir un algoritmo?

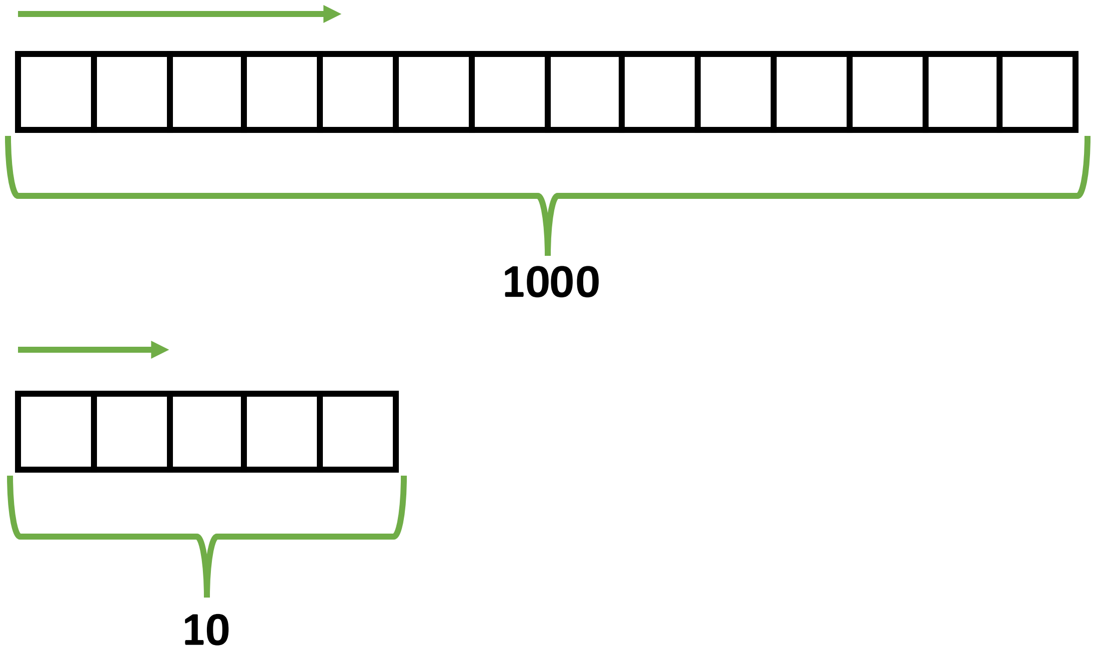
- Comparar las diferentes soluciones:
  - # de líneas de código.
  - Qué tan entendible es el código.
  - Conjunto de criterios propios.

  - Cantidad de **recursos requeridos** para implementar la solución:
    - Tiempo
    - Espacio

Análisis de la complejidad de los algoritmos

Análisis de la complejidad de los algoritmos

- Los algoritmos requieren **tiempo** y **espacio**, comúnmente asociados con el tamaño de la entrada.



No es lo mismo recorrer un arreglo de 1000 elementos que uno de 10 elementos.

Análisis de la complejidad de los algoritmos

- Describe la cantidad de **recursos requeridos** en términos del tamaño de la **entrada**.
- Dos tipos:
  - Análisis de la complejidad del tiempo.
  - Análisis de la complejidad del espacio.

Análisis de la complejidad del tiempo

- En la ejecución de un algoritmo se ejecutan diferentes operaciones:
  - Asignación de valores
  - Comparación de valores
  - Creación de variables
  - Etc.

- Objetivo:
  - **Conocer cómo se comportan la cantidad de operaciones ejecutadas por el algoritmo con respecto al tamaño de la entrada.**

Ejemplo 1:

Suma todos los números desde 1 hasta n.

```
int suma(int n){
    int sum = 0;
    while(n>0){
        sum += n;
        n -= 1;
    }
    return sum;
}
```

Si n = 5:

5+4+3+2+1 = 15

```
int suma(int n){
    return n*(n+1)/2;
}
```

Si n = 5:

5*(5+1)/2 = 15

Ejemplo 1:

Suma todos los números desde 1 hasta n.

```
int suma(int n){
    int sum = 0;
    while(n>0){
        sum += n;
        n -= 1;
    }
    return sum;
}
```

Si n = 7:

7+6+5+4+3+2+1 = 28

```
int suma(int n){
    return n*(n+1)/2;
}
```

Si n = 7:

7*(7+1)/2 = 28

Ejemplo 1:

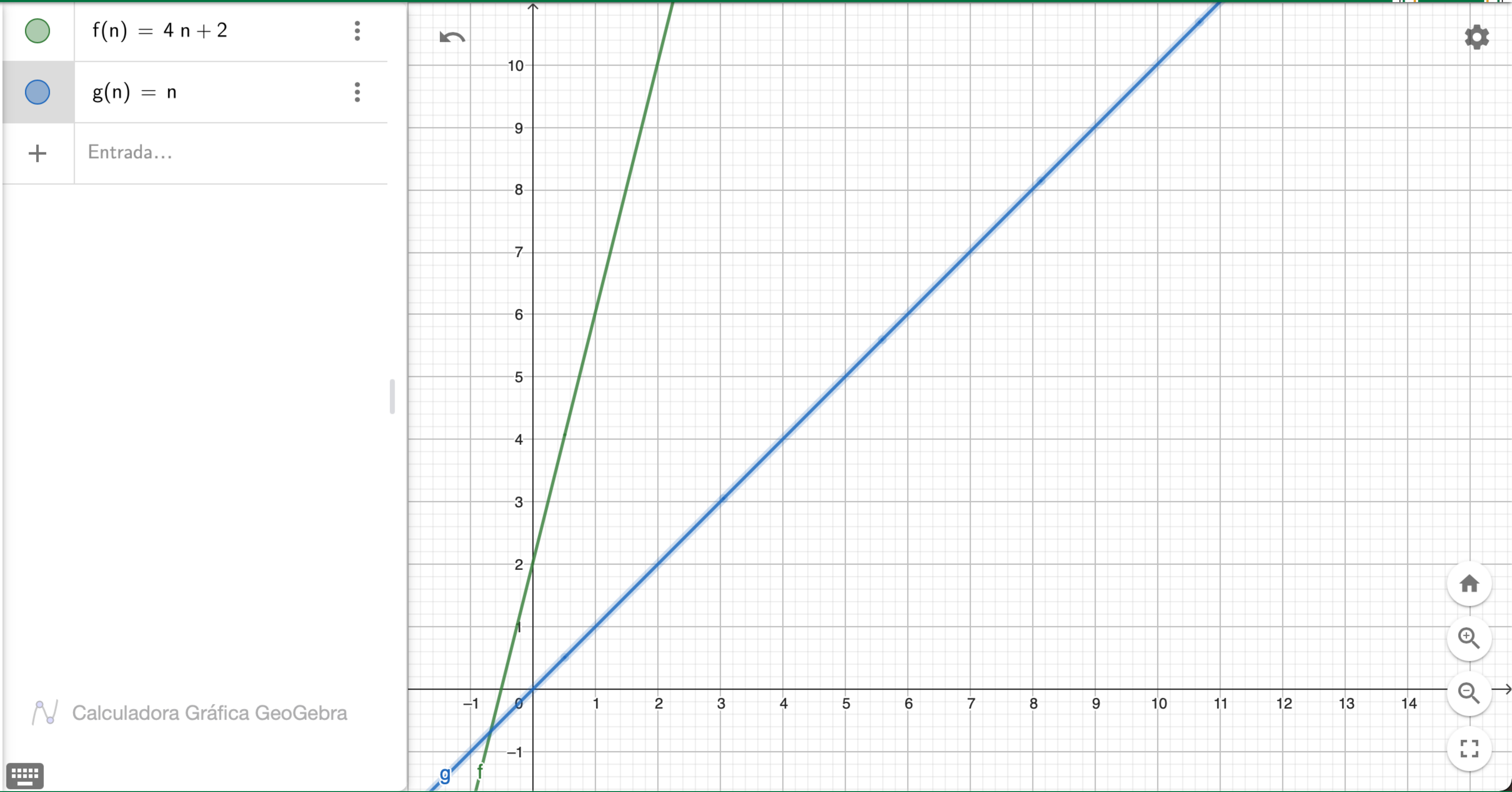
Suma todos los números desde 1 hasta n.

```
int suma(int n){
    int sum = 0;        1
    while(n>0){         n
        sum += n;       2
        n -= 1;         2
    }
    return sum;         1
}
```

$T(n) = 1 + n(2+2) + 1$

$T(n) = \cancel{4}n + \cancel{2}$ → $T(n)$

```
int suma(int n){
    return n*(n+1)/2;
}
```


f(n) = 4 n + 2
g(n) = n
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
f
g
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
-1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejemplo 1:

Suma todos los números desde 1 hasta n.

```
int suma(int n){
    int sum = 0;        1
    while(n>0){         n
        sum += n;       2
        n -= 1;         2
    }
    return sum;         1
}
```

$T(n) = 1 + n(2+2) + 1$

$T(n) = \cancel{4}n + \cancel{2}$ → **$T(n)$**

```
int suma(int n){
    return n*(n+1)/2;   4
}
```

$T(n) = 4$ → **$T(1)$**

Ejemplo 2:

Recorre una matriz cuadrada.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \overbrace{\hphantom{1\;2\;3\;4}}^{n} \\
n\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\5\\9\\13\end{matrix}}\right. & \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

n = 4

```
void imprimeMatriz(int mat[][], int n){
    int i, j;
    for(i=0; i<n; i++){
        for(j=0; j<n; j++){
            printf("%d", mat[i][j]);
        }
    }
}
```

Ejemplo 2:

Recorre una matriz cuadrada.

n = 4

```
void imprimeMatriz(int mat[][], int n){
    int i, j;
    for(i=0; i<n; i++){
        for(j=0; j<n; j++){
            printf("%d",mat[i][j]);
        }
    }
}
```

1 asignación | **n+1 comparaciones** | **n incrementos**

for(i=0; i<n; i++)

1 + n+1 + n = 2n + 2

Ejemplo 2:

Recorre una matriz cuadrada.

n = 4

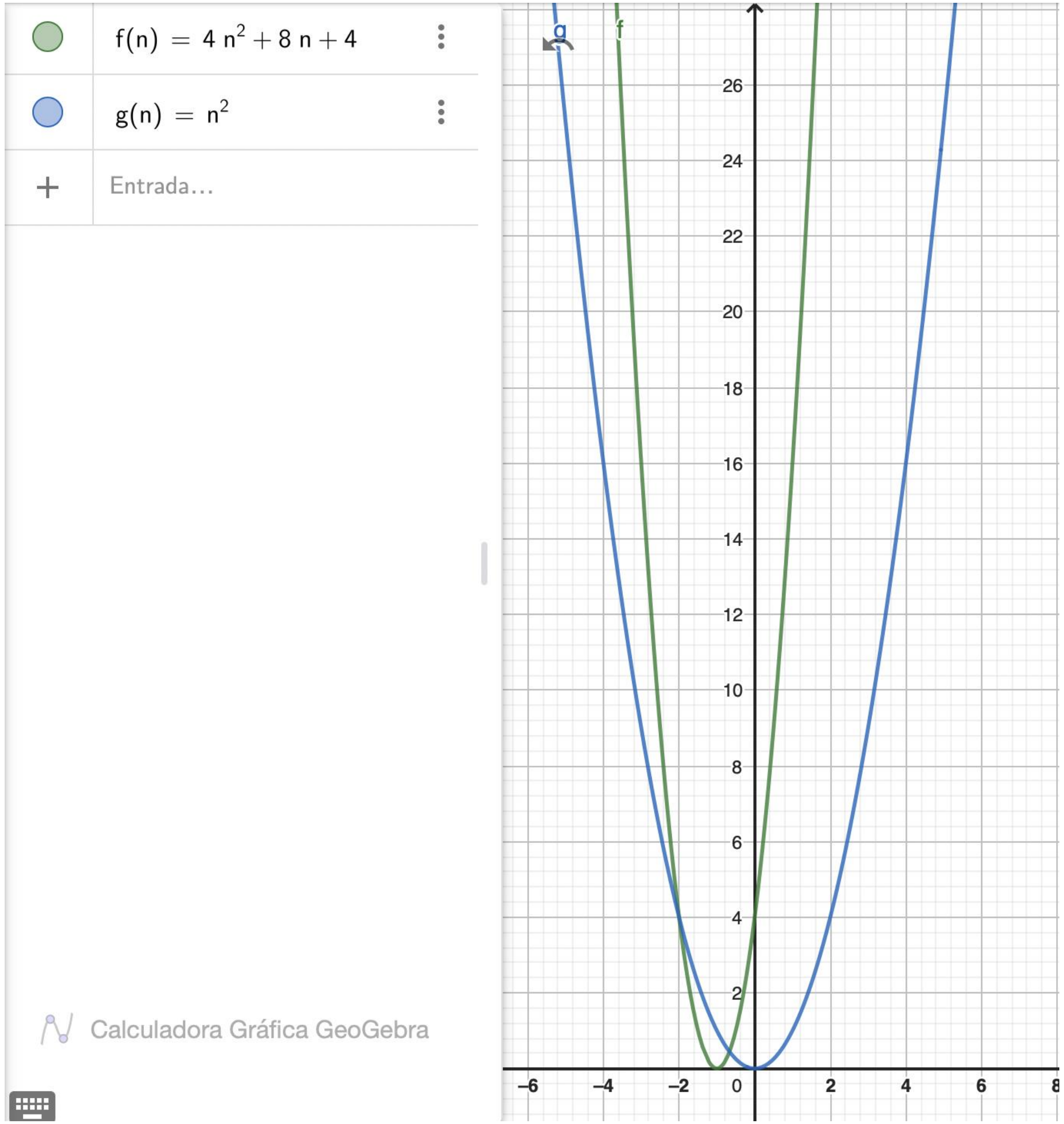
```
void imprimeMatriz(int mat[][], int n){
    int i, j;
    for(i=0; i<n; i++){                 2n + 2
        for(j=0; j<n; j++){             2n + 2
            printf("%d",mat[i][j]);     1
        }
    }
}
```

$$T(n) = (2n+2)(2n+2)(1)$$
$$= 4n^2 + 4n + 4n + 4$$
$$= \cancel{4}n^2 + \cancel{8n + 4} \longrightarrow T(n^2)$$

1 asignación | **n+1** comparaciones | **n** incrementos

for(i=0; i<n; i++)

1 + n+1 + n = 2n + 2


f(n) = 4 n² + 8 n + 4
g(n) = n²
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
g
f
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

Ejemplo 3:

Recorre una matriz no cuadrada.

$$n\left\{\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline\end{array}}^{m}\right.$$

n = 3, m = 4

```
void imprimeMatriz(int mat[][], int n, int m){
    int i, j;
    for(i=0;i<n;i++){
        for(j=0;j<m;j++){
            printf(“%d”,mat[i][j]);
        }
    }
}
```

Ejemplo 3:

Recorre una matriz no cuadrada.

n = 3, m = 4

```
void imprimeMatriz(int mat[][], int n, int m){
    int i, j;
    for(i=0; i<n; i++){              2n + 2
        for(j=0; j<m; j++){          2m + 2
            printf("%d",mat[i][j]);  1
        }
    }
}
```

$$T(n) = (2n+2)(2m+2)(1)$$
$$= 4nm + 4n + 4m + 4 \longrightarrow T(nm)$$

Ejemplo 4:

Imprime n 10,000 veces.

void imprime(int n){
    int i;
    for(i=0; i<10000; i++){ **20002**
        printf("%d",n); **1**
    }
}

1 asignación | **10000 + 1 comparaciones** | **10000 incrementos**

for(i=0; i<10000; i++)

1 + 10000 + 1 + 10000 = 20,002

T(n) = (20002)(1)
= 20002

T(1)

Ejemplo 5:

```
int funcion(int n){
    int i, j, suma;
    suma = 0;                      1
    for(i=0; i<n; i++)             2n + 2
        for(j=0; j<2*n; j++)       4n + 2
            suma =+ j;             2
    for(i=0; i<100*n; i++)
        suma =+ i;
    for(i=0; i<4; i++)
        for(j=0; j<3; j++)
            suma =+ j;
    return suma;
}
```

1 asignación | 2n + 1 comparaciones | 2n incrementos

for(j=0; j<2*n; j++)

1 + 2n + 1 + 2n = 4n + 2

Ejemplo 5:

```
int funcion(int n){
    int i, j, suma;
    suma = 0;                      1
    for(i=0; i<n; i++)             2n + 2
        for(j=0; j<2*n; j++)       4n + 2
            suma =+ j;             2
    for(i=0; i<100*n; i++)         200n + 2
        suma =+ i;                 2
    for(i=0; i<4; i++)
        for(j=0; j<3; j++)
            suma =+ j;
    return suma;
}
```

1 asignación

100n + 1 comparaciones

100n incrementos

for(i=0; i<100*n; i++)

1 + 100n + 1 + 100n = 200n + 2

Ejemplo 5:

```
int funcion(int n){
    int i, j, suma;
    suma = 0;                      1
    for(i=0; i<n; i++)             2n + 2
        for(j=0; j<2*n; j++)       4n + 2
            suma =+ j;             2
    for(i=0; i<100*n; i++)         200n + 2
        suma =+ i;                 2
    for(i=0; i<4; i++)             10
        for(j=0; j<3; j++)
            suma =+ j;
    return suma;
}
```

1 asignación

4 + 1 comparaciones

4 incrementos

for(i=0; i<4; i++)

1 + 4 + 1 + 4 = 10

Ejemplo 5:

```
int funcion(int n){
    int i, j, suma;
    suma = 0;                          1
    for(i=0; i<n; i++)                 2n + 2
        for(j=0; j<2*n; j++)           4n + 2
            suma =+ j;                 2
    for(i=0; i<100*n; i++)             200n + 2
        suma =+ i;                     2
    for(i=0; i<4; i++)                 10
        for(j=0; j<3; j++)             8
            suma =+ j;                 2
    return suma;                       1
}
```

1 asignación

3 + 1 comparaciones

3 incrementos

for(j=0; j<3; j++)

1 + 3 + 1 + 3 = 8

Ejemplo 5:

```
int funcion(int n){
    int i, j, suma;
    suma = 0;                          1
    for(i=0; i<n; i++)                 2n + 2
        for(j=0; j<2*n; j++)           4n + 2
            suma =+ j;                 2
    for(i=0; i<100*n; i++)             200n + 2
        suma =+ i;                     2
    for(i=0; i<4; i++)                 10
        for(j=0; j<3; j++)             8
            suma =+ j;                 2
    return suma;                       1
}
```

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 1 + (2n + 2)(4n + 2)(2) + (200n + 2)(2) + (10)(8)(2) + 1 \\
&= 1 + (8n^2 + 4n + 8n + 4)(2) + 400n + 4 + (80)(2) + 1 \\
&= 1 + 16n^2 + 8n + 16n + 8 + 400n + 4 + 160 + 1 \\
&= 1\cancel{6}n^2 + \cancel{424n + 174}
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$T(n^2)$

Ejemplo 6:

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)      2n + 2
        for(j=0; j<i; j++)
            printf(“%d”, j);
}
```

1
asignación

n + 1
comparaciones

n
incrementos

for(i=1; i<(n+1); i++)

1 + n + 1 + n = 2n + 2

Ejemplo 6:

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)      + 2
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

La cantidad de iteraciones que realice depende de los valores de i.

Ejemplo 6:

Primero analizamos las comparaciones

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

n	i	j se compara	
4	1	0 ? → 1 ? X	2 veces
	2	0 ? → 1 ? → 2 ? X	3 veces
	3	0 ? → 1 ? → 2 ? → 3 ? X	4 veces
	4	0 ? → 1 ? → 2 ? → 3 ? → 4 ? X	5 veces
	…	…	

Entonces…

Para n=1 → j se compara 2 veces

Para n=2 → j se compara 5 veces

Para n=3 → j se compara 9 veces

Para n=4 → j se compara 14 veces

Ejemplo 6:

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

n	i	j se compara	
4	1	0 ? → 1 ? X	2 veces
	2	0 ? → 1 ? → 2 ? X	3 veces
	3	0 ? → 1 ? → 2 ? → 3 ? X	4 veces
	4	0 ? → 1 ? → 2 ? → 3 ? → 4 ? X	5 veces
	…	…	

El comoportamiento anterior se parece en parte a la **Sumatoria de Gauss**:

n(n+1)/2

Qué le podemos agregar para que nos de el valor exacto?

n = 1 → 1(1+1)/2 = 1 + 1 = 2
n = 2 → 2(2+1)/2 = 3 + 2 = 5
n = 3 → 3(3+1)/2 = 6 + 3 = 9
n = 4 → 4(4+1)/2 = 10 + 4 = 14

↓

n(n+1)/2 + n

Ejemplo 6:

Ahora analizamos los incrementos

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

n	i	j se incrementa	
4	1	0 → + 1 X	1 vez
	2	0 → + 1 → + 2 X	2 veces
	3	0 → + 1 → + 2 → + 3 X	3 veces
	4	0 → + 1 → + 2 → + 3 → + 4 X	4 veces
	…	…	

Entonces…

Para n=1 → j se incrementa 1 vez

Para n=2 → j se incrementa 3 veces

Para n=3 → j se incrementa 6 veces

Para n=4 → j se incrementa 10 veces

Ejemplo 6:

Ahora analizamos los incrementos

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

n	i	j se incrementa	
4	1	0 → + 1 X	1 vez
	2	0 → + 1 → + 2 X	2 veces
	3	0 → + 1 → + 2 → + 3 X	3 veces
	4	0 → + 1 → + 2 → + 3 → + 4 X	4 veces
	…	…	

Sumatoria de Gauss:

$n(n+1)/2$

$n = 1 \rightarrow 1(1+1)/2 = 1$

$n = 2 \rightarrow 2(2+1)/2 = 3$

$n = 3 \rightarrow 3(3+1)/2 = 6$

$n = 4 \rightarrow 4(4+1)/2 = 10$

Ejemplo 6:

```
void funcion(int n){
    int i, j;
    for(i=1; i<(n+1); i++)
        for(j=0; j<i; j++)
            printf("%d", j);
}
```

$= 1 + n(n+1)/2 + n + n(n+1)/2$
$= 1 + (n^2+n)/2 + n + (n^2+n)/2$
$= 1 + n^2/2 + n/2 + n + n^2/2 + n/2$
$= 1 + n^2 + 2n$
$= n^2 + 2n + 1$

$$\Downarrow$$

$$T(n^2)$$

Ejemplo 7:

```
p = 0;
for(i=1; p<=n; i++)
    p = p+i;
```

Este ciclo **NO** se va a repetir **n** veces.

La cantidad de iteraciones del ciclo está dada por la operación que modifica el valor de **p** para que le permita llegar a **n**.

Otra forma de calcular la complejidad de un ciclo es identificar en qué momento se va a detener.

Ejemplo 7:

```
p = 0;
for(i=1; p<=n; i++)
    p = p+i;
```

n	i	p
9	1	0 + 1 = 1
	2	0 + 1 + 2 = 3
	3	0 + 1 + 2 + 3 = 6
	4	0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10
	…	…
	k	0 + 1 + 2 + 3 + 4 + … + k

Sumatoria de Gauss

p = [i(i+1)]/2

Cuándo se va a detener el ciclo? **cuando p > n**

$p = [i(i+1)] / 2 \quad > \quad n$ ← **Aquí se detiene el ciclo**

$[i^2 + i] / 2 \quad > \quad n$

$i^2 \quad > \quad n$

$i \quad > \quad n^{1/2}$ → **$T(n^{1/2})$**

Ejemplo 8:

```
for(i = 1; i < n; i*2)
      printf("%d", arreglo[i]);
```

n	i	
4	1	→ 2^0
	1*2 = 2	→ 2^1
	2*2 = 4	→ 2^2
	4*2 = 8	→ 2^3
	…	
	k	

$i = 2^k$

se detiene cuando: $2^k \;>=\; n$

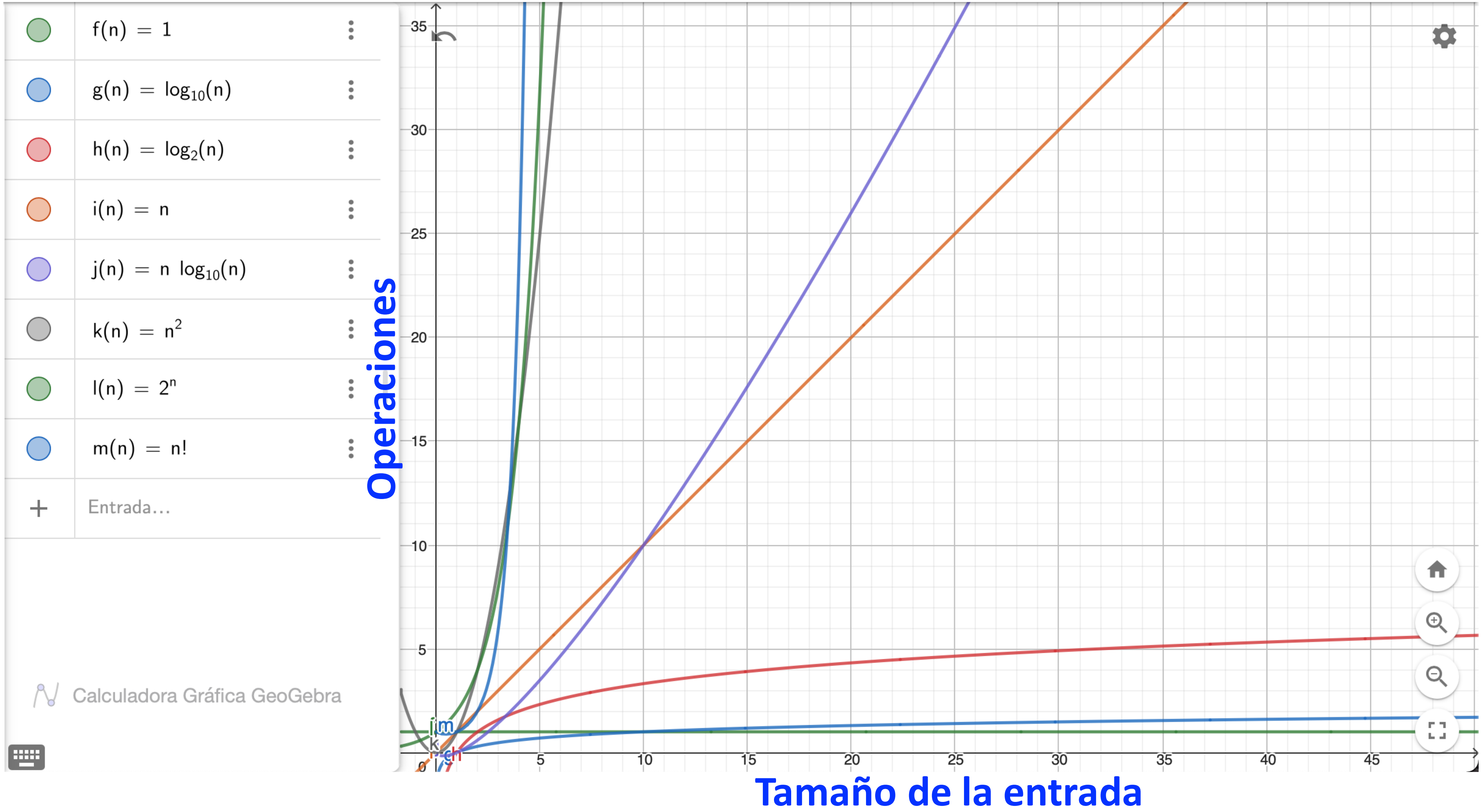
$\log_2(2^k) \;>=\; \log_2(n)$

$\log_2(2^k) \;>=\; \log_2(n)$

$k \;>=\; \log_2(n)$

$\downarrow$

$T(\log_2 n)$



$f(n) = 1$
$g(n) = \log_{10}(n)$
$h(n) = \log_2(n)$
$i(n) = n$
$j(n) = n \log_{10}(n)$
$k(n) = n^2$
$l(n) = 2^n$
$m(n) = n!$
Entrada…
Calculadora Gráfica GeoGebra
Operaciones
Tamaño de la entrada

Ejemplo 9:

```
while(m != n)
    if(m > n)
        m = m – n;
    else
        n = n – m;
```

m = 6	n = 3
3	3

m = 14	n = 3
11	3
8	3
5	3
2	3
2	1
1	1

6 iteraciones
Aprox. 14/2
m/2 iteraciones

m = 5	n = 5

m = 16	n = 2
14	2
12	2
10	2
8	2
6	2
4	2
2	2

7 iteraciones
Aprox. 16/2
m/2 iteraciones

m = 15	n = 7
8	7
1	7
1	6
1	5
1	4
1	3
1	2
1	1

8 iteraciones
Aprox. 15/2
m/2 iteraciones

T(n) = m/2 $\longrightarrow$ **T(m)**

Algunas reglas…

- Las operaciones aritméticas son constantes
- Las asignaciones de variables son constantes
- Accesar un elemento de un arreglo es constante
- En un ciclo, la complejidad se da por la longitud del ciclo multiplicado por lo que se ejecuta en el ciclo

Ejercicios:

- Elabora los algoritmos que se piden a continuación y luego analiza su complejidad.
  - Escribe una función que reciba como parámetro 2 arreglos, y que imprima sólo aquellos valores que se encuentren en ambos arreglos.
  - Escribe una función que reciba como parámetro 2 arreglos, y que imprima sólo aquellos elementos que están en el primer arreglo, pero que no están en el segundo arreglo.
  - Escribe una función que reciba como parámetro 2 arreglos, y que imprima todos los elementos que no estén en el primer arreglo.