累積和

区間和を高速に求める

kya (@tsaayk)
TMU-CS B4

April 30, 2022

目次

はじめに

- 以下の問題が出てきたらどのようにして解きますか？

問題文

長さ N の数列 $A = A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ が与えられます.

以下の形式の Q 個のクエリを処理してください.

- 整数 l_i, r_i が与えられるので, 区間和 $A_{l_i} + A_{l_{i+1}} + \cdots + A_{r_i - 1}$ を求めてください.

制約

◆ $0 < N < 10^5$
◆ $0 \leq A_i < 10^9 \ (i = 0, 1, \cdots, N-1)$
◆ $0 < Q < 10^5$
◆ $0 \leq l_i \leq r_i \leq N$

はじめに

- 愚直に解く場合
  - 各クエリで区間和を求めるのに $O(N)$
  - 全体で $O(NQ)$
  - **制約的に間に合わない**

- じゃあどうする？

→ 累積和で解決

累積和

- 累積和とは
  - 適切な**前処理**をしておくことで、配列上の区間の総和を求める**クエリ**を爆速で処理できるようになる手法[1]
  - 前処理に $O(N)$ かかるが, 各クエリは $O(1)$ で答えられるようになる
  - これを利用すると先ほどの問題を $O(N+Q)$ で解ける

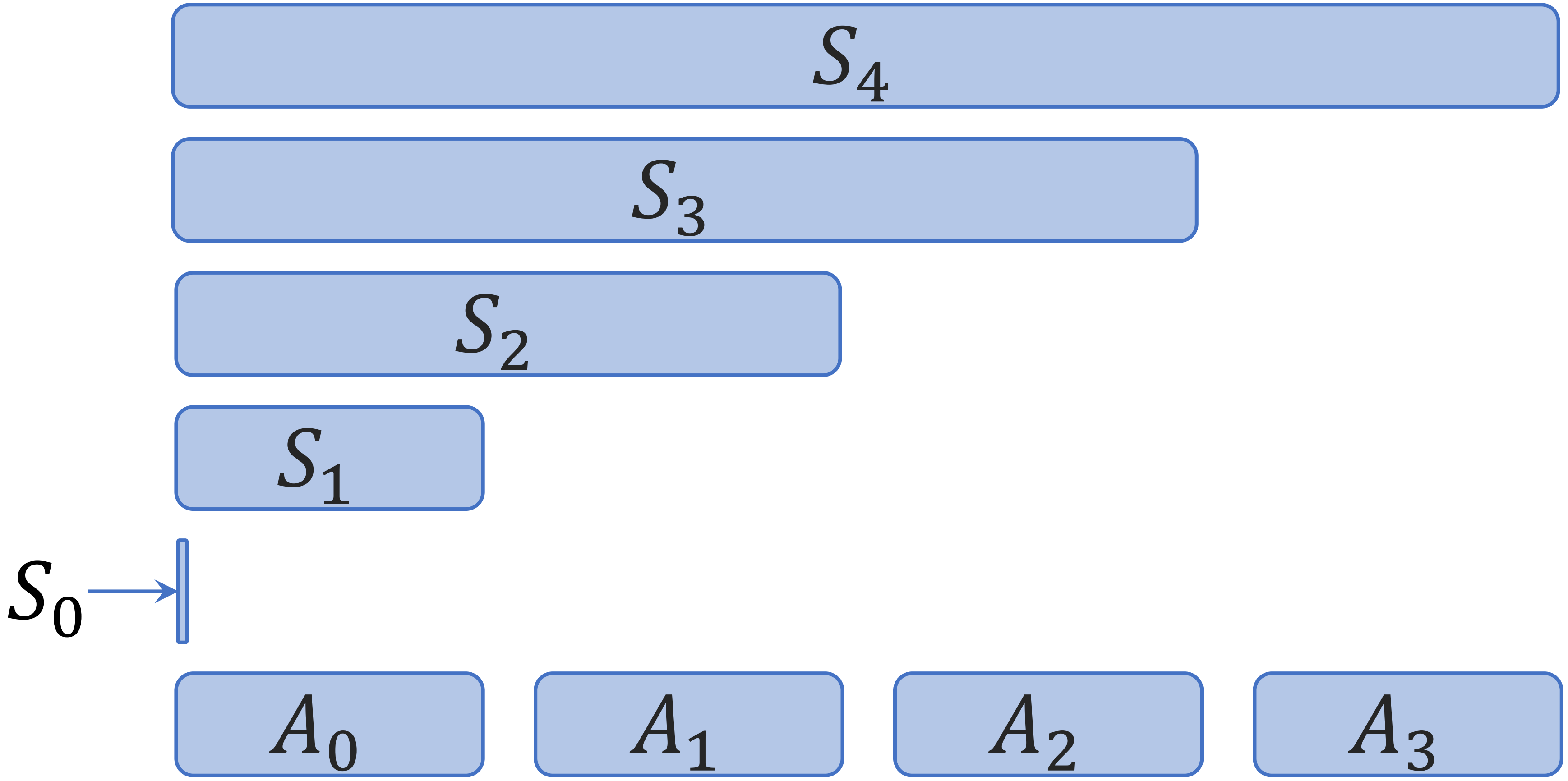
1 drken. 「累積和を何も考えずに書けるようにする！」. https://qiita.com/drken/items/56a6b68edef8fc605821

累積和：前処理

- 数列 $A = A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ に対して数列 $S = S_0, S_1, \cdots, S_N$ を以下のように定める.
  - $S_0 = 0$
  - $S_1 = A_0$
  - $S_2 = A_0 + A_1$

    $\vdots$
  - $S_N = A_0 + A_1 + \cdots + A_{N-2} + A_{N-1}$

累積和：前処理



前処理：クエリ

- A_l から A_{r-1} までの和を求めたいとき

$S_r - S_l$ を計算すると答えが出る

- $S_r = A_0 + A_1 + \cdots + A_{l-1} + A_l + \cdots + A_{r-1}$
- $S_l = A_0 + A_1 + \cdots + A_{l-1}$
- $S_r - S_l = A_l + A_{l+1} + \cdots + A_{r-1}$

実装

- $S_i = A_0 + \cdots + A_{i-1}$だから，$S_{i+1} = S_i + A_i$で計算できる
- 添え字に注意して区間和を求める

```cpp
// 前処理
vector<int> s(n + 1, 0);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    s[i + 1] = s[i] + a[i];
}

// クエリ
int l, r;
cin >> l >> r;
cout << s[r] - s[l] << endl;
```

実装

- Python だとこんな感じ
- C++ も Python も 0-indexed なのか 1-indexed なのかを注意して実装する必要がある
    - 問題文によって異なる場合がある
    - AtCoder は基本的に 1-indexed

```python
# 前処理
s = [0 for i in range(n + 1)]
for i in range(n):
    s[i + 1] = s[i] + a[i]

# クエリ
l, r = int(input().split())
print(s[r] - s[l])
```

例題

ABC084 D - 2017-like Number

- l_i 以上 r_i 以下の整数で「2017 に似た数」を数えるクエリを処理する
  - 2017 に似た数：N も$N+1/2$ も素数であるような数
- ヒント：$A_i = i$ が 2017 に似ているなら 1, そうでないなら 0 とすると区間和を求める問題に帰着できる

- 回答例 C++：https://atcoder.jp/contests/abc084/submissions/31289418
- 回答例 Python：https://atcoder.jp/contests/abc084/submissions/31289440

例題

ABC177 C - Sum of product of pairs

- $\sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} A_i A_j$ を求める問題
- ヒント：式を変形すると $\sum_{i=0}^{N-2} A_i \sum_{j=i+1}^{N-1} A_j$ となり累積和が見えてくる

- 回答例 C++：https://atcoder.jp/contests/abc177/submissions/31296937
- 回答例 Python：https://atcoder.jp/contests/abc177/submissions/31297000

例題

AGC023 A - Zero-Sum Ranges

- 少し難しめ
- 総和が 0 になる部分列の数を数える問題
- 部分列の総和（区間和）が 0 になるとはどういうことかを考えるとよい

発展的話題：二次元累積和

- 二次元のデータに対しても累積和を用いることで区間和を求めることができる
- 考え方は一次元累積和と一緒
- 同様に三次元, 四次元の累積和も考えることができる（問題として出ることはほとんどない）
- ABC で出るとしたら E 以上だと思うので, まずは一次元累積和をぱっと書けるようにするべき

発展的話題：似ているデータ構造

- Sparse Table
  - 区間に対する $\mathrm{min}, \mathrm{max}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}$ などのクエリを処理することができる
  - 区間和や区間積など冪等則を満たさないものは計算できない
  - 前処理 $O(N \log N)$, クエリ$O(1)$

- Disjoint Sparse Table
  - $\mathrm{min}, \mathrm{max}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}$ などに加え区間和, 区間積なども求められる Sparse Table の完全上位互換
  - 前処理 $O(N \log N)$, クエリ$O(1)$

発展的話題：似ているデータ構造

- Segment Tree（セグ木）
  - 区間和, 区間積, $\mathrm{min}, \mathrm{max}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}$ などが求められる
  - 値の更新も可能（一点更新）
  - 前処理 $O(N \log N)$, クエリ $O(\log N)$, 更新 $O(\log N)$
  - 区間更新一点取得が可能な双対セグ木や, 区間更新区間和取得が可能な遅延セグ木なども存在する

参考文献

- drken. Qiita.「累積和を何も考えずに書けるようにする！」. https://qiita.com/drken/items/56a6b68edef8fc605821