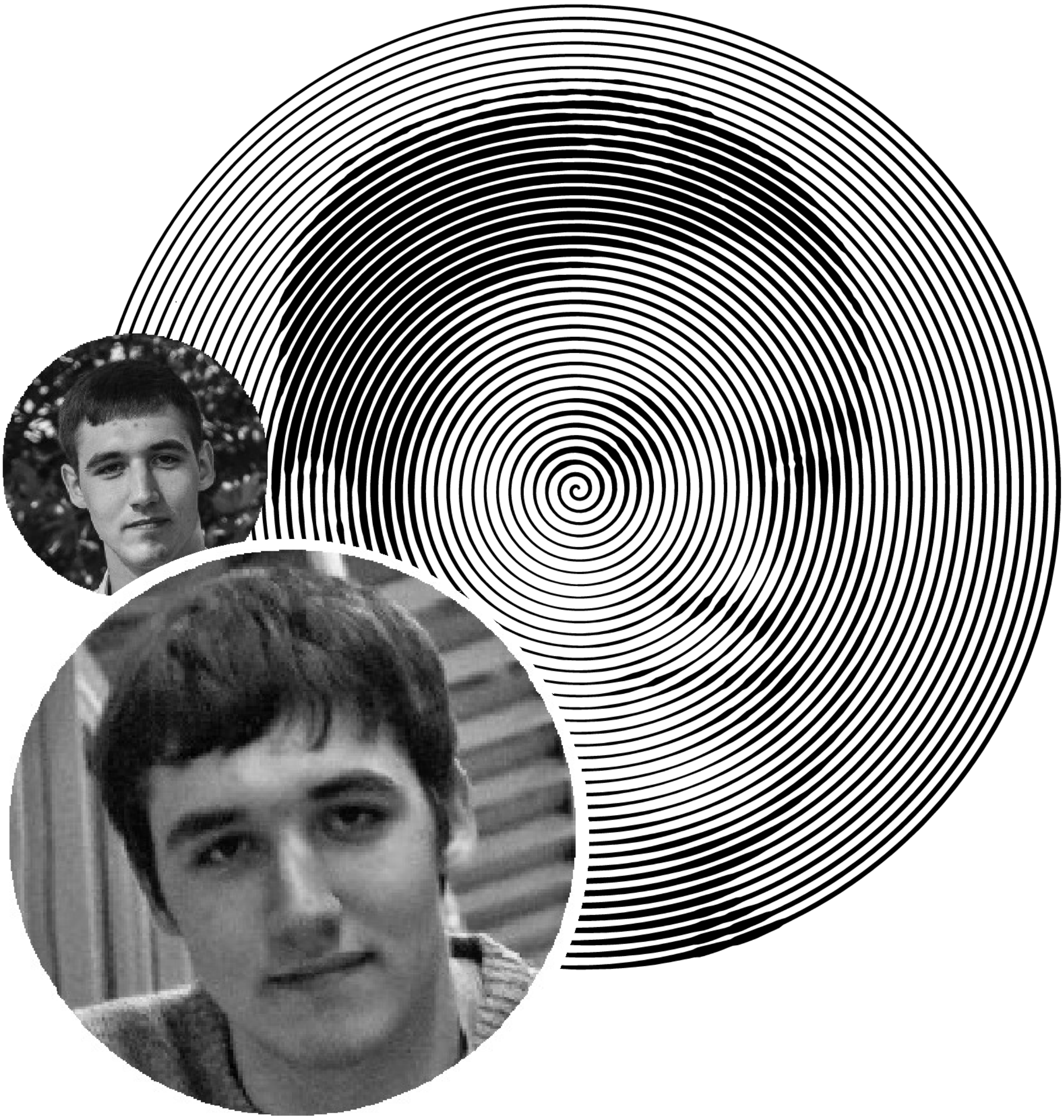
Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №5



Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ Р3111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №5

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Министр образования и науки Р3111 * Университет ИТМО *
Кудлай
Никита

Санкт-Петербург

2021

Линии второго порядка

Каждую ***линию второго порядка*** можно задать общим уравнением $Ax^2 + \boxed{2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Такое уравнение задает три вида линий: ***парабола****,* ***эллипс*** и ***гипербола****.*

Эллипс

1) ***Эллипс*** – это множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемыми ***фокусом*** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.
Пусть F_1 и F_2 – фокусы => $|\overline{F_1F_2}| = 2c$. Если $M\epsilon$ элл., то r_1 и r_2 – расстояния от фокусов до точки M – это ***фокальные радиусы***. $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ или $\boxed{r_1 + r_2 = 2a}$ => $\boxed{a > c}$
Для вывода уравнения эллипса введем такую систему координат, что фокусы находятся на Ox => $\boxed{F_1(-c; 0), F_2(c; 0)}$ $\boxed{(a > 0, a > c)}$
$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$$
a – большая полуось, ***b*** – малая полуось, ***c*** – полурасстояние между фокусами
$$\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$$
$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ – это ***каноническое уравнение эллипса***.
$$\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$
Точки пересечения эллипса и осей называют ***вершинами эллипса***.
$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$ – ***Эксцентриситет*** эллипса.
$c < a$ => $\boxed{0 \leq \varepsilon < 1}$, $\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
Исходя из значения эксценриситета можно поняти какой вид имеет гипербола:
При малых значениях: эллипс близок к окружности
При больших: эллипс сплющен

Гипербола

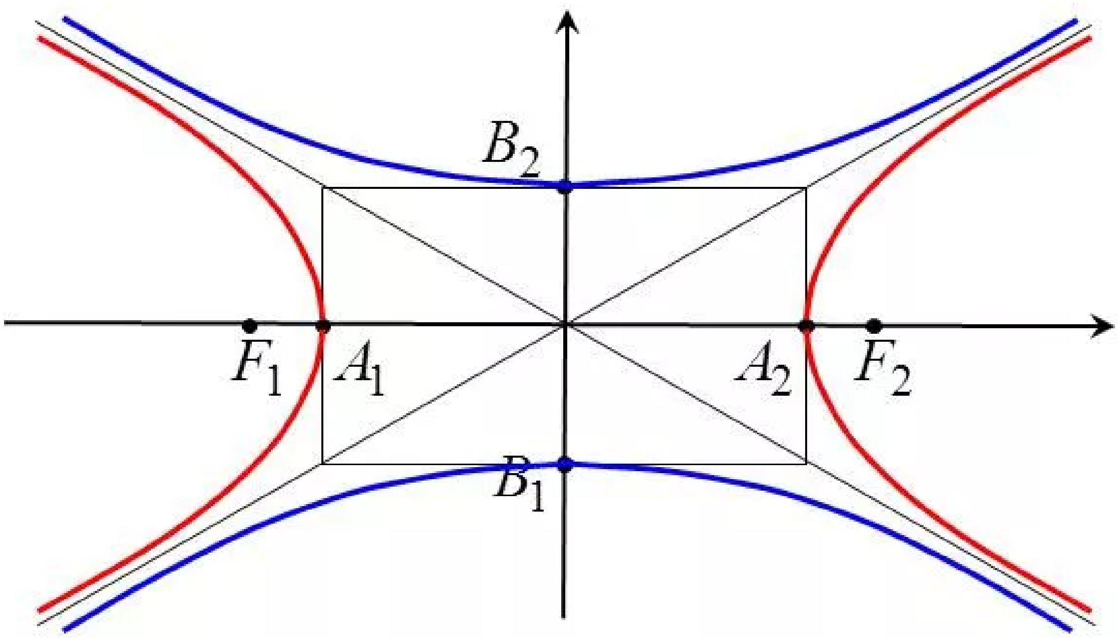
2) ***Гипербола*** – это множество точек на плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемыми ***фокусом*** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.

$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a}$, $\boxed{a < c}$

$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$ – ***каноническое уравнение прямой***

$\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}$

Точки гиперболы стремятся к прямым, называемым ***ассимптотами гиперболы***, которые имеют формулу $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$



Оси симметрии гиперболы называются ***осями гиперболы***, а точка их пересечения, которая совпадает с точкой пересечения ассимптот – ***центр гиперболы***.

Вершины гиперболы – точки пересечения осей и гиперболы (их всего 2 – на оси Ox: A_1 и A_2).

Параметр ***a*** – ***действительная полуось гиперболы*** (расстояние от центра гиперболы до вершина).

Расстояние от центра гиперболы до ***мнимых вершин гиперболы*** (B_1 и B_2) называется ***мнимой полуосью гиперболы*** и обозначается как ***b***.

Прямоугольник со сторонома *2a* и *2b* является ***основным прямоугольником гиперболы***.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы, ***сопряженной*** по отношению к гиперболы с уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Если $a = b$, то гипербола ***равносторонняя*** => $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$

Эксцентриситетом гиперболы называют $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$. Для гиперболы $\boxed{\varepsilon > 1}$

$$\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

Геометрическое истолкование эксцентриситета: чем он меньше, тем основной прямоугольник более вытянут вдоль действительной оси.

Директрисы эллипса и гиперболы

Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы*** эллипса.

Это прямые с уравнениями $\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$

Для эллипса $\varepsilon < 1 => \frac{a}{\varepsilon} > a =>$ Прямые расположены вне эллипса

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы*** гиперболы.

Это прямые с уравнениями $\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$

Для эллипса $\varepsilon > 1 => \frac{a}{\varepsilon} < a =>$ Прямые расположены между ветвями гиперболы

r – расстояние от произвольной точки множества до какого-нибудь фокуса

d – расстояние от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисе

$$\frac{r}{d} = cons't = \varepsilon$$

Парабола

Парабола – множество точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы

r – расстояние от произвольной точки парабола до какого-нибудь фокуса

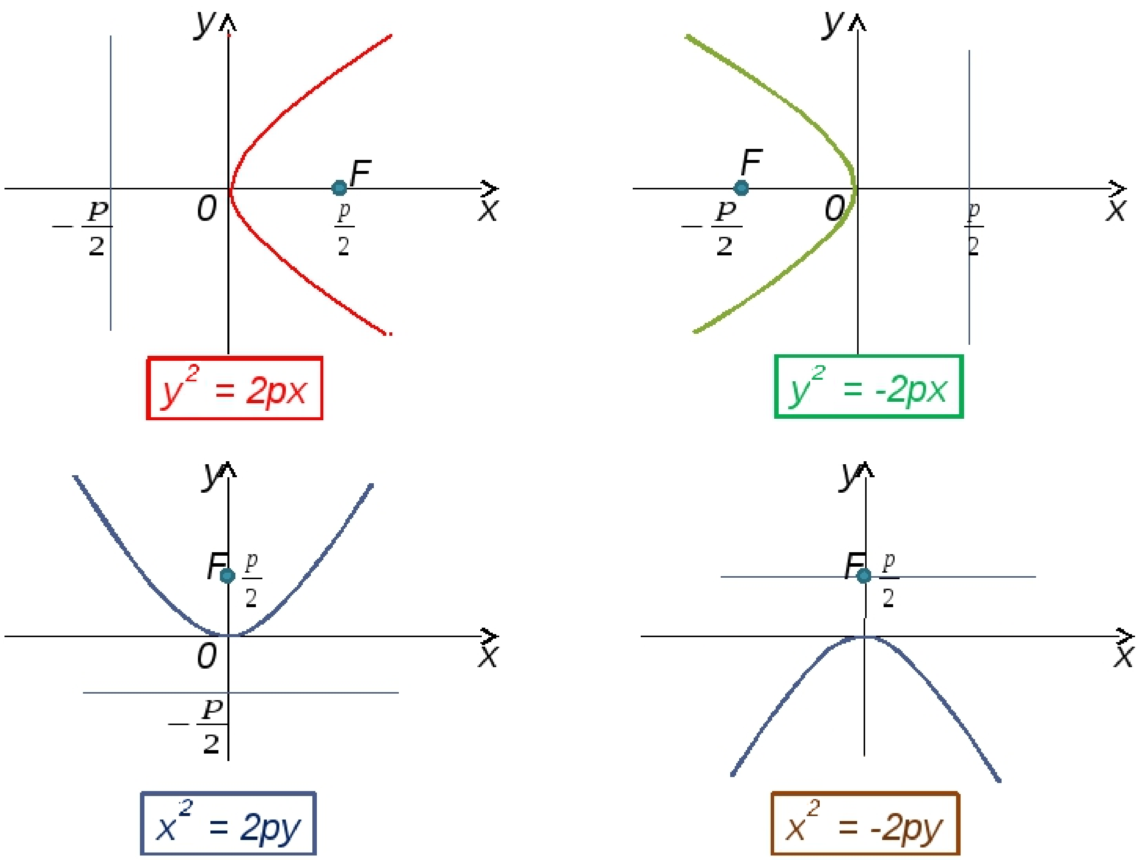
d – расстояние от этой точке до соответствующей этому фокусу директрисе

p – расстояние от фокуса до дирректрисы. Это ***параметр параболы***.

Для параоблы: $\boxed{d = r}$

Уравнение параболы: $\boxed{\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}}$

Каноническое уравнение прямой: $\boxed{y^2 = 2px}$ => $\boxed{y = \sqrt{2px}}$



O* – вершина** параболы, ось *Ox* – ***ось симметрии параболы

Параметр *p* характреизует “ширину” параболы (***геометрический смысл параметра p***)

Общее уравнение линии второго порядка

Общее уравнение линии воторого порядка имеет вид

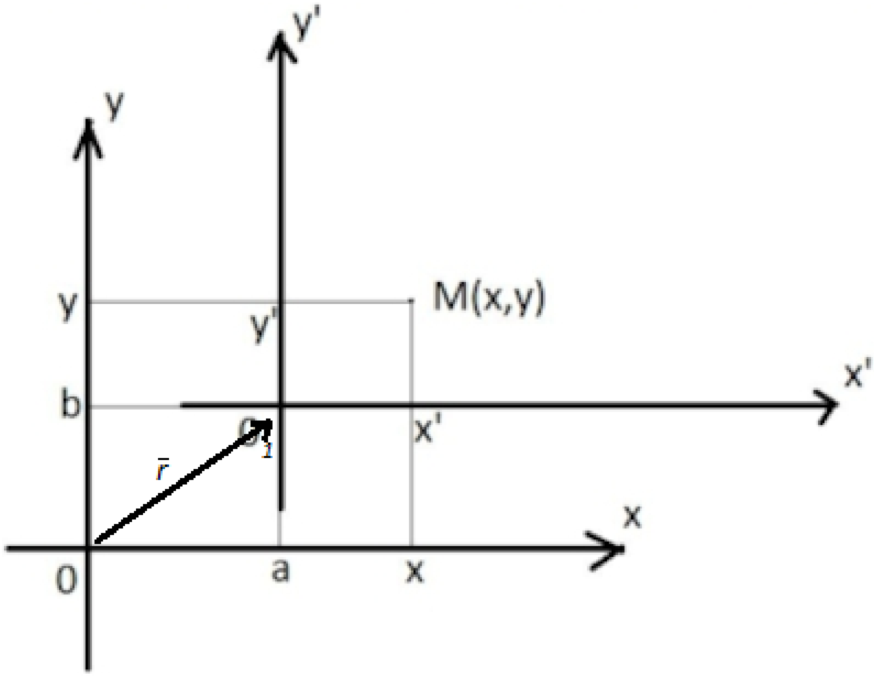
$$\boxed{Ax^2 + 2bXY + Cy^2 + 2Dx + 2Fy + F = 0}$$

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называют ***преобразованием системы координат***. Параллельным переносом и последующим поворотом осей координат можно привести уравнение к виду $A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$, где (A', C', F') – новые коэффициенты, а (x'', y'') – координаты в новой системе.

Параллельным переносом осей координат называют параллельное смещение осей координат.

O_1- центр новой системы координат, а $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1}$ с координатами x_0 и y_0

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}}$$

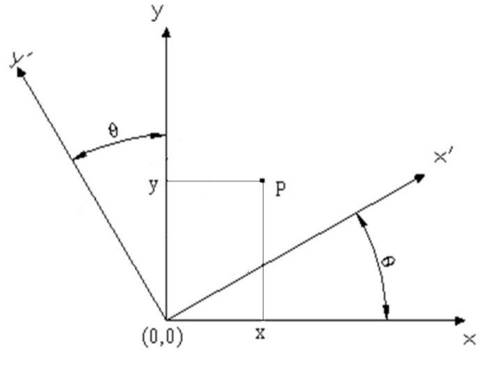


Поворотом осей координат называют поворот осей координат на углол α. Точка в новой системе координат будет иметь следующие координаты:

(x, y) – координаты в старой системе

(x_1, y_1) – координаты в новой системе

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}}$$



Классификация линий второго порядка

Инвариантом общего уравнения второго порядка называют $\boxed{AC - B^2}$
Значением инварианты определяется ***тип линий***:

1. Эллиптический, $AC - B^2 > 0$
2. Гиперболический, $AC - B^2 < 0$
3. Параболический, $AC - B^2 = 0$

Эллиптический тип

$AC - B^2 > 0 => Ax^2 + Cy^2 + F = 0$. Возможны три различных случая:

1. $A > 0, C > 0, F < 0 => \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - это *эллипс*
2. $A > 0, C > 0, F > 0 => \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$ – для такого уравнения не существует действительных решений. Это уравнение ***мнимого эллипса***.
3. $A > 0, C > 0, F = 0 => \boxed{a^2x^2 + c^2y^2 = 0}$ $(a^2 = A, c^2 = C)$. для такого уравнения подходит только точка *O(0,0)* – это ***уравнение пары мнимых пересекающихся прямых***.

Гиперболический тип

$AC - B^2 < 0 => Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

1. $AC < 0, F \neq 0 =>$ при $F < 0$: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $a^2 = -\frac{F}{A}, b^2 = \frac{F}{C}$ –***гипербола***
2. $A > 0, C < 0, F = 0 => \left[\begin{array}{l} ax - cy = 0 \\ ax + cy = 0 \end{array}\right.$ – ***пара пересекающихся прямых***

Параболический тип

$AC - B^2 = 0 => Cy'^2 + 2Dx' + F = 0$. Система координат с осями Ox' и Oy' получена путем поворота осей координат.

1. $D \neq 0 => \boxed{y''^2 = 2px''}$ – ***парабола***
2. $\begin{cases} D = 0 \\ CF < 0 \end{cases} => \boxed{y' = \pm a}$ – ***парабола параллельных прямых***
3. $\begin{cases} D = 0 \\ CF > 0 \end{cases} => \boxed{y' = \pm ia}$ – уравнение ***пары мнимых параллельных прямых***
4. $D = 0, F = 0 => \boxed{y'^2 = 0}$ – ***уравнение пары совпадающих прямых***

Все формулы классификаций линий 2 порядка

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс
3. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола
5. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – пара пересекающихся прямых
6. $y^2 = 2px$ – парабола
7. $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых
8. $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых
9. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых