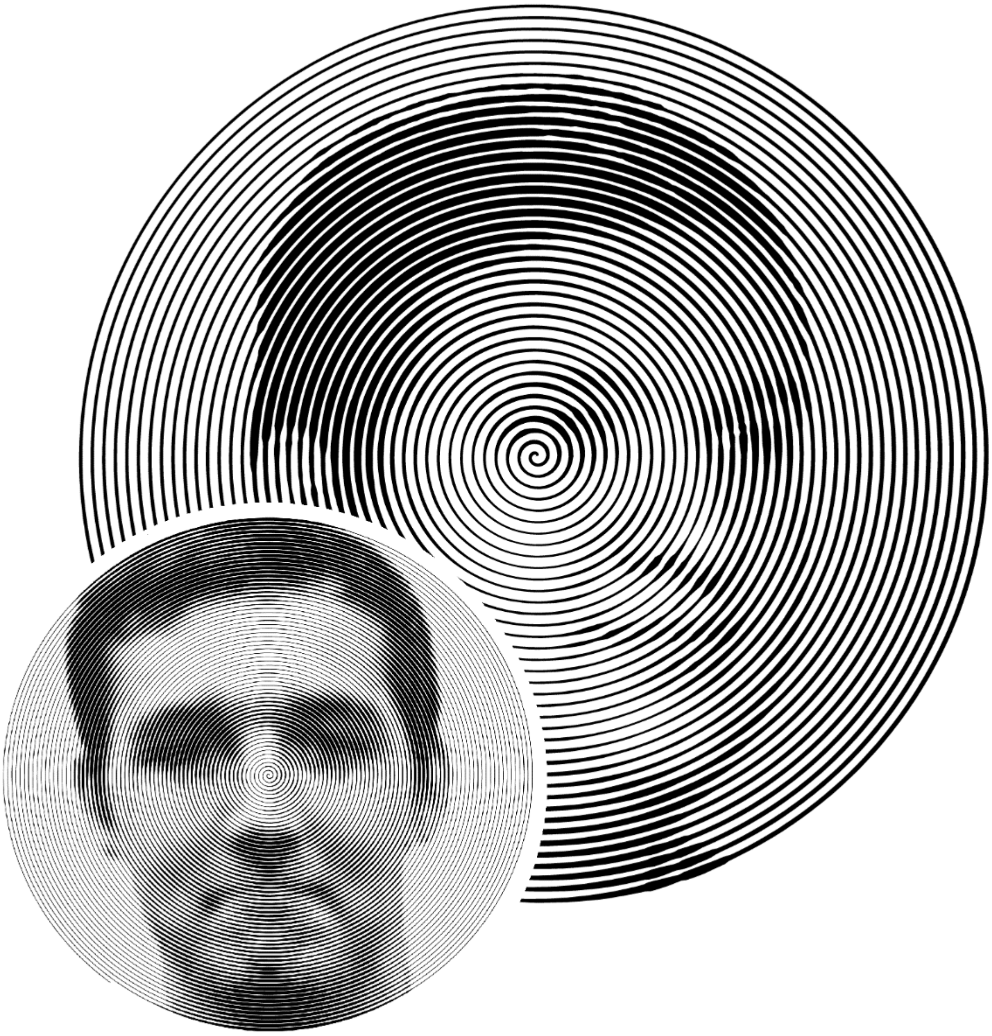
Н.Р. Кудлай

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №4



Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ Р3111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Н.Р. Кудлай

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №4

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

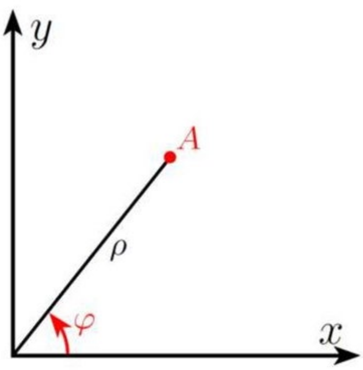
2021

Уравнения линий

Уравнение $\boxed{F(x, y, z) \ = \ 0}$* является ***уравнением поверхности S*** если ему удовлетворяют координаты *M(x, y, z)* ϵ *S*.

Уравнение сферы - $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$
Уравнение окружности - $x^2 + y^2 = 1$

Уравнение $\boxed{F(x, y) \ = \ 0}$ – ***уравнение линии***.

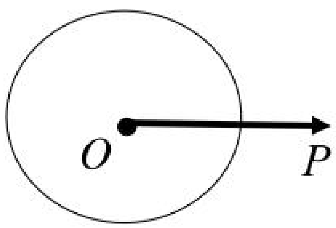


Полярная система координат задается точкой *O*, называемой ***полюсом*** и лучом *Op*, называемым ***полярной осью***

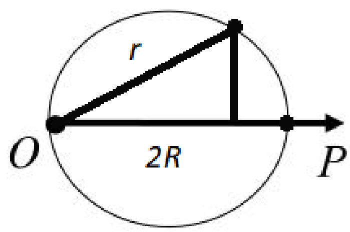
Числа ***r*** и ***φ*** называются ***полярными координатами***, *r* – ***полярным радиусом***, ***φ*** – ***полярным углом***

$\begin{cases} -\pi \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le \infty \end{cases}$; $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\ \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$

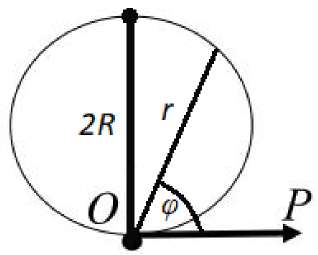
1) *r = R*



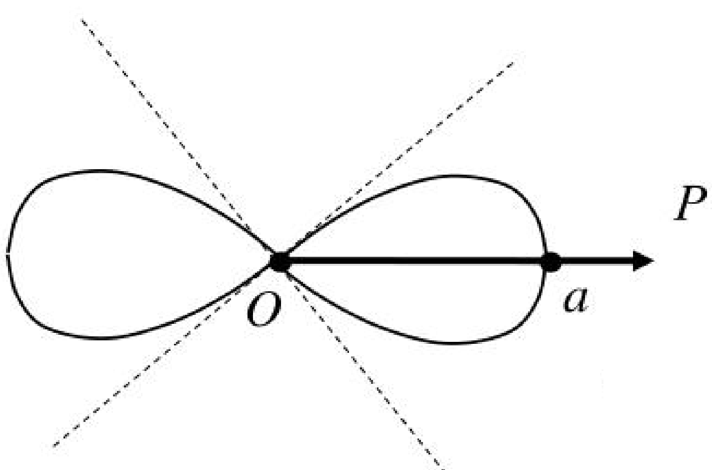
2) *r = 2R cos φ*



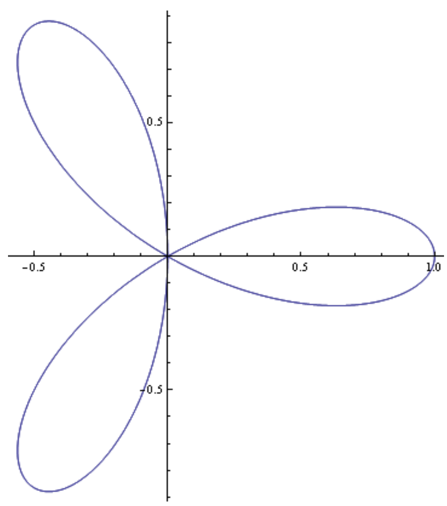
3) *r = 2R sin φ*



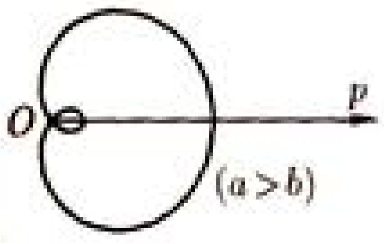
4) $r = \sqrt{\cos\varphi}$ –
Лемниската Бернулли

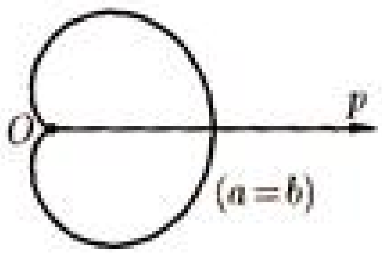


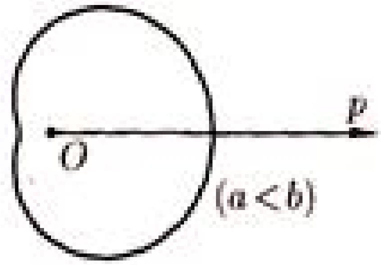
5) *r=Rcos3φ, R>0* -
Трёхлепестковая роза



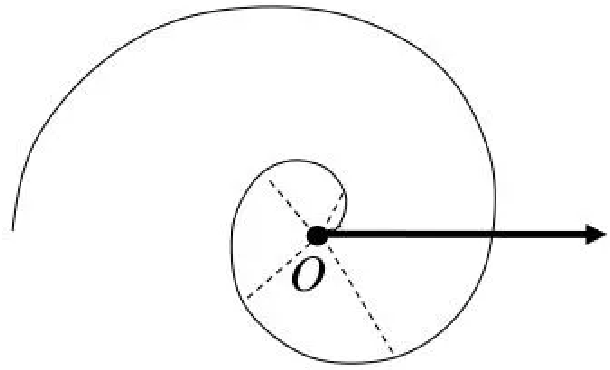
6) $r = b + a\cos\varphi$ – ***Улитка Паскаля*** (для $a = b$ - ***Кардиоида***)







7) $r = ae$ – ***Спираль Архимеда***

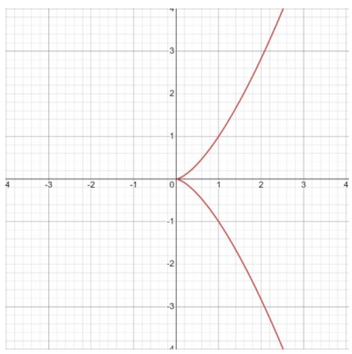


Замечание: любую линию на плоскости можно задать системой из двух уравнений, где t называется ***параметром***, в систему уравнений или уравнение – ***параметрическим уравнением линии***

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}}$$

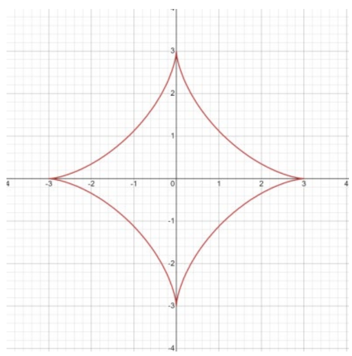
1) $y^2 = x^3$ или $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

Полукубическая парабола

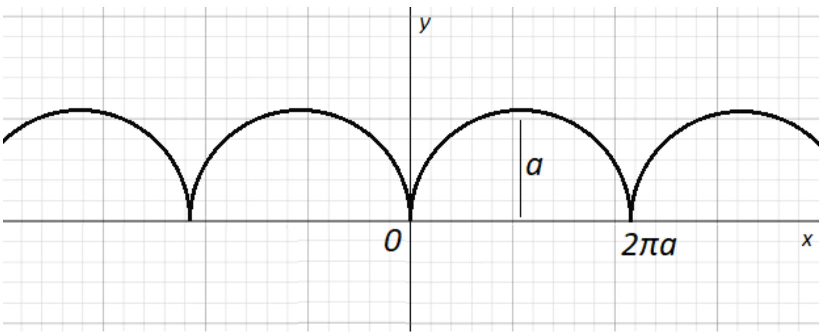


2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ или $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Астроида



3) $\begin{cases} x = a(t - \cos t) \\ y = a(1 - \sin t) \end{cases}$ ***Циклоида***

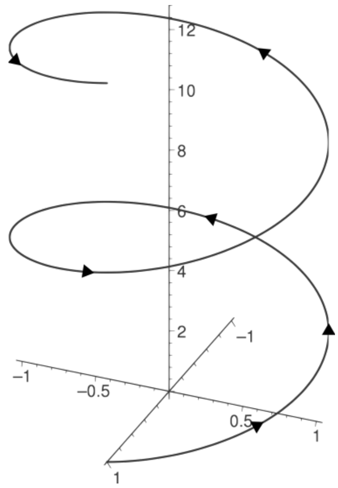


Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей

$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}}$ – ***уравнение прямой***, заданной как прямая пересечения пл-тей

Линию в пространстве можно задать как траекторию движения точки, тогда её задают ***векторными*** или ***параметрическими уравнениям***

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{h}{2\pi}t \end{cases}$ - ***Винтовая линия***



Алгебраической поверхностью называют множество $(.)^*$, заданное в виде $\boxed{A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1} + \cdots + A_5x^{k_5}y^{l_5}z^{m_5} = 0}$, а *max* $\{k_i + l_i + m_i\}$ – ***степенью уравнения*** или ***порядком алгебраической поверхности***. Так, например, сфера – поверхность второго порядка.

Алгебраической линией называют множество (.), заданное в виде $\boxed{A_1x^{k_1}y^{l_1} + \cdots + A_5x^{k_5}y^{l_5} = 0}$, а *max* $\{k_i + l_i\}$ – ***степенью уравнения*** или ***порядком линии***.

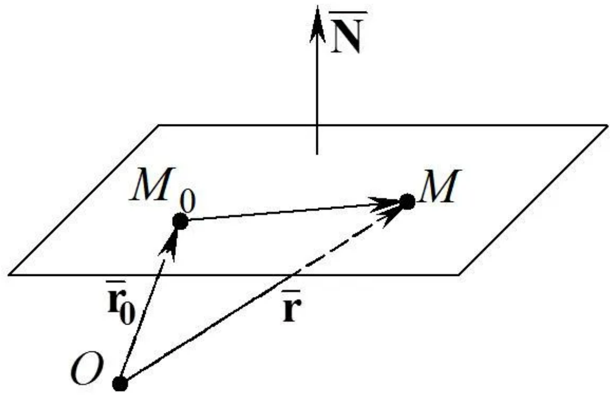
Алгебраическая поверхность не всегда будет поверхностью с точки интуитивного понимания

$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t_1, t_2) \\ y = \psi(t_1, t_2) \\ z = \chi(t_1, t_2) \end{cases}}$ – ***Параметрическое уравнение поверхности***

Уравнения плоскости

Существует несколько основных видов представления плоскости в пространстве.

1) ***Векторное уравнение плоскости*** – плоскость задается точкой и ненулевым вектором, перпендикулярным к плоскости – ***нормальным вектором***



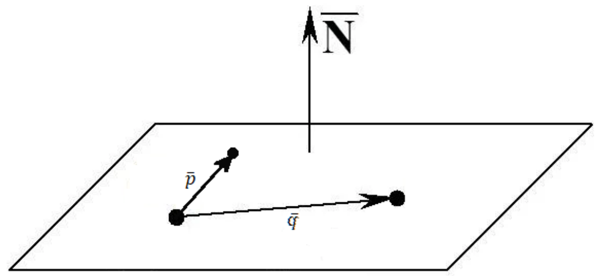
$\bar{r}$ – радиус вектор к (.) M

$\bar{r_0}$ – радиус вектор к (.) M_0

$\bar{r} - \bar{r_0} \perp \bar{n}$ => $\boxed{(\bar{r} - \bar{r_0})\bar{n} = 0}$

Это ***векторное уравнение плоскости***, если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – ***направляющие векторы плоскости***, то $\bar{p} * \ \bar{q} = \ \bar{n}$ =>

$\boxed{(\bar{r} - \bar{r_0})\bar{q}\bar{p} = 0}$



Это тоже считается ***векторным уравнением плоскости***.

2) ***Уравнение плоскости, проходящей через данную точку***.

$\boxed{Ax + By + Cz + d = 0}$ или $\boxed{A(x - x_0) \ + \ B(y - y_0) \ + \ C(z - z_0) \ = \ 0}$

3) ***Векторно-параметрические уравнения плоскости***.

Пусть $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – направляющие векторы плоскости $\bar{r}$ и $\bar{r_0}$ - радиус векторы к (.) *M* и *M₀*, то $\boxed{\bar{r} - \bar{r_0} = t_1\,\bar{p} + t_2\,\bar{q}}$ =>

$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = t_1p_1 + t_2q_1 \\ y - y_0 = t_1p_2 + t_2q_2 \\ z - z_0 = t_1p_3 + t_2q_3 \end{cases}}$ –это ***параметрические уравнения плоскости***

4) ***Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки***

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ должны не лежать на одной прямой

(.) M_1 – фиксирована, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ – направляющие векторы =>

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

5) ***Уравнение плоскости в отрезках***

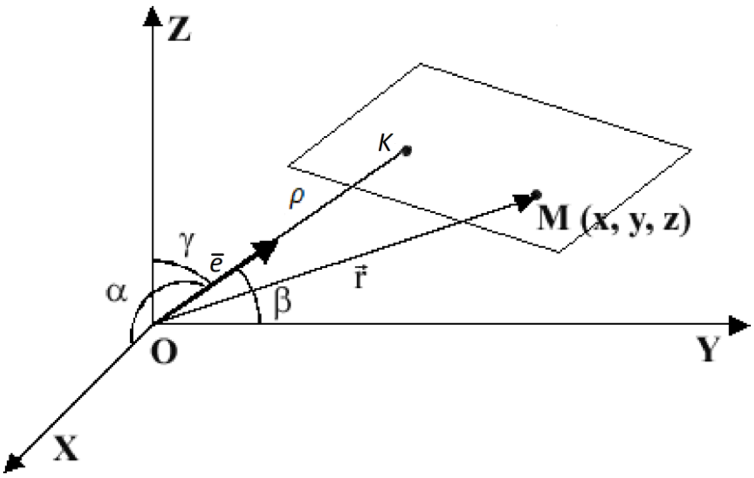
Пусть плоскость отсекает на осях *Ox, Oy* и *Oz* соответственно отрезки $|a|, |b|$ и $|c|$, то есть проходит через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$

=> $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ => $bcx + acy + abz - abc = 0$ => $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$

Если плоскость задана в другом виде, то коэффициенты *a,b* и *c* – длина отрезков, которые отсекает пл-ть от осей, а знак зависит от того, с какой стороны отсекаются отрезки.

6) ***Нормальные уравнения функции***

Плоскость в пространстве однозначно задается единичным вектором $\bar{e} \uparrow\uparrow \overline{OK}$ $\overline{OK} \perp \pi$ (π - плоскость), (.)$K \in \pi$ и $\overline{OK} = \rho$. Пусть $\alpha = (\widehat{\bar{e}, Ox})$, $\beta = \left(\widehat{\bar{e}, Oy}\right)$, $\gamma = (\widehat{\bar{e}, Oz})$ => $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Пусть $M(x, y, z) \in \pi$.



Проекция $\bar{r}$ на $\bar{e}$ = p =>

$\boxed{\bar{r} * \bar{e} - p = 0}$ – это ***нормальное уравнение плоскости в векторной форме***

Так как $\bar{r} = (x, y, z)$ =>

$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$

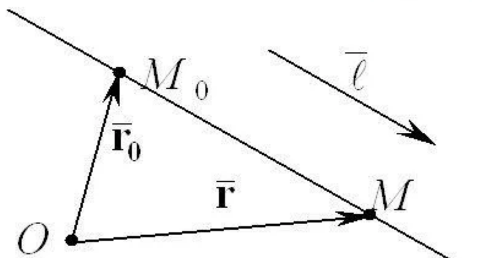
– это ***нормальное уравнение плоскости в координатной форме***

Уравнение прямой в пространстве

1) ***Векторное уравнение прямой***

Если $\bar{a} \parallel e, \bar{a} \neq 0$, то $\bar{a}$ – ***направляющий вектор прямой*** *e*. $\bar{a} \parallel (\bar{r} - \bar{r_0})$ =>

$\boxed{\bar{a} \parallel (\bar{r} - \bar{r_0}) * \bar{a} = \bar{0}}$



2) ***Векторно-параметрическое уравнение прямой***

$\overline{MM_0} \parallel \bar{a}$ => $\boxed{\bar{r} - \bar{r_0} = t\bar{a}}$, $t \in R$, *t* называется ***параметром***

3) ***Параметрическое уравнение прямой***

$$\bar{r} = (x, y, z), \begin{cases} \bar{z_0} = (x_0,\ y_0,\ z_0) \\ \bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \end{cases} => \boxed{\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \\ z - z_0 = a_3 t \end{cases}}$$

4) ***Каноническое уравнение прямой***

Рассматривая *t* в пункте 3 получим: $\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{a_1}; a_1 \neq 0 \\ t = \frac{y - y_0}{a_2}; a_2 \neq 0 \\ t = \frac{z - z_0}{a_3}; a_3 \neq 0 \end{cases} => \boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$

Если $a_1 = 0$ => $\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases}$

5) ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки***

Пусть в пространстве лежат точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Пусть $\overline{M_1 M_2} \neq 0$ => $\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$

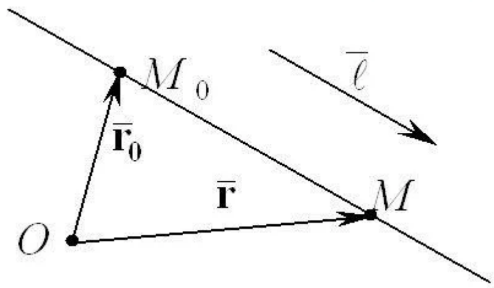
6) ***Общее уравнение прямой***

Если прямая задана двумя не параллельными и несовпадающими плоскостями, то её система уравнений, задающей её имеет вид:

$$\boxed{\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 y + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 y + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Уравнение прямой на плоскости

1) ***Векторное уравнение прямой***



Если $\bar{n}$ – вектор нормали к прямой $\bar{a}$, а вектора $\bar{r}$ и $\bar{r_0}$ берут начало в центре системы координат и окначиваются в точках M и M_0, принадлежащих прямой $\bar{a}$, то $\bar{r} - \bar{r_0} \perp \bar{n}$ =>

$\boxed{(\bar{r} - \bar{r_0}) * \bar{n} = 0}$

2) ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку***

Если эта точка имеет координаты $M_0(x_0, y_0)$. $\bar{n} = (A, B)$, то уравнение будет:

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$ или $\boxed{Ax + By + C = 0}$

(***общее уравнение прямой***)

3) ***Векторно-параметрическое уравнение прямой***

При $t \in R$: $\boxed{\bar{r} - \bar{r_0} = t\bar{a}}$

4) ***Параметрическое уравнение прямой***

$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \end{cases}}$ при $\bar{a} = (a_1, a_2), t \in R$

5) ***Каноническое уравнение прямой***

$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}}$ при $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$

6) ***Уравнение прямой с угловыми коэффициентами***

Если прямая задана, как $\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \end{cases}$, $a_1 \neq 0$ => $\boxed{y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0)}$ =>

$y = kx + b$, где $\boxed{k = \frac{a_2}{a_1}}$, $b = y_0 - \frac{x_0 a_2}{a_1}$. k называют ***угловым коэффициентом прямой***, b – ордината точки пересечения с осью ординат (Oy)

Если $e \parallel Oy$ => $a_1 = 0$ => $e: x = x_0$, где x_0 – абсцисса (x) точки пересечения прямой с осью Ox.

7) ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки***

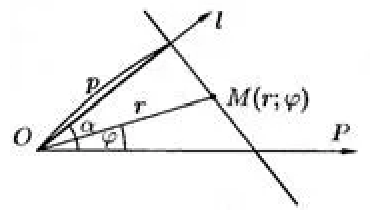
Если эти точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$

8) ***Уравнение прямой в отрезках***

Если прямая пересекает оси в координата a и b, уравнение будет $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1}$

9) ***Полярное уравнение прямой***

Для любой (.) $M \epsilon e$: проекция $\overline{OM}$ на $\bar{q} = p$, где $\bar{q}$ – вектор нормали к прямой e, угол отклонения $\bar{q} = \alpha$, а угол отклонениея $\overline{OM} = \varphi$. С другой стороны эта проекц. $= |\overline{OM}| \cos(\varphi - \alpha) = r \cos(\varphi - \alpha)$ =>

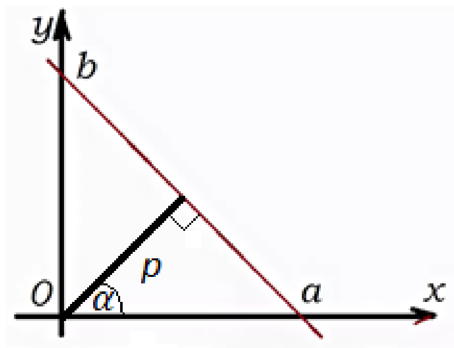


$\boxed{r \cos(\varphi - \alpha) = \text{p}}$

10) ***Нормальное уравнение прямой***

$r \cos \alpha \cos \varphi + r \sin \varphi \sin \alpha - p = 0$

$\begin{cases} r \cos \alpha \\ r \sin \varphi \end{cases}$ => $\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0}$



Некоторые задачи о прямых и плоскостях

1) ***Угол между плоскостями***

Если вектора нормалей плоскостей $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$, то $\boxed{\cos\varphi = \frac{|\overline{n_1} * \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}||\overline{n_1}|}}$

2) ***Условие параллельности двух прямых***

Параллельные прямые, если их вектора нормали параллельны=> $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

Другое условие параллельности: $\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0}$

3) ***Условие перпендикулярности двух плоскостей***

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$

4) ***Угол между двумя прямыми***

Если угол φ – наименьший, то $\boxed{\cos\varphi = \frac{|\overline{a_1} * \overline{a_2}|}{|\overline{a_1}||\overline{a_1}|}}$

5) ***Условие параллельности двух прямых***

Две прямые параллельны, если $\begin{cases} \overline{a_1} = (m_1, n_1, p_1) \\ \overline{a_2} = (m_2, n_2, p_2) \\ \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}} \end{cases}$

6) ***Условие перпендикулярности двух прямых***

Две прямые перпендикулярны, если $\begin{cases} \overline{a_1} = (m_1, n_1, p_1) \\ \overline{a_2} = (m_2, n_2, p_2) \\ \boxed{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0} \end{cases}$

7) ***Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве***

Углом между прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на эту плоскость

Если плоскость и прямые заданы каноническими формами, то $\boxed{\sin\varphi = \frac{|\bar{n} * \bar{a}|}{|\bar{n}||\bar{a}|}}$

Если плоскость и прямые параллельны, то $\boxed{\bar{a}\bar{n} = 0}$

Если плоскость и прямые перпендикулярны, то $\boxed{\bar{a} * \bar{n} = 0}$ => $\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$

8) ***Расстояние от точки до плоскости***

Если плоскость задана в виде $(\bar{r}-\overline{r_0})\bar{q}\bar{p}=0$, Пусть существует (.) $M(\bar{R})$, где $\bar{R}$ – радиус-вектор (.) M, то $\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\overline{r_0})\bar{q}\bar{p}|}{|\bar{q}*\bar{p}|}}$ или $\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\overline{r_0})\bar{n}|}{|\bar{n}|}}$

При $M(x,y,z)$: $\boxed{h=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

9) ***Расстояние от точки до прямой на плоскости***

$\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\overline{r_0})\bar{a}|}{|\bar{a}|}}$ или $\boxed{h=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ $\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\overline{r_0})\bar{n}|}{|\bar{n}|}}$

10) ***Расстояние между непараллельными прямыми в пространстве***

Если $\begin{cases}\bar{r}-\overline{r_1}=t\overline{a_1}\\ \bar{r}-\overline{r_2}=t\overline{a_2}\end{cases}$, то $\boxed{h=\frac{|(\overline{r_2}-\overline{r_1})\overline{a_1}\,\overline{a_2}|}{|\overline{a_1}*\overline{a_2}|}}$