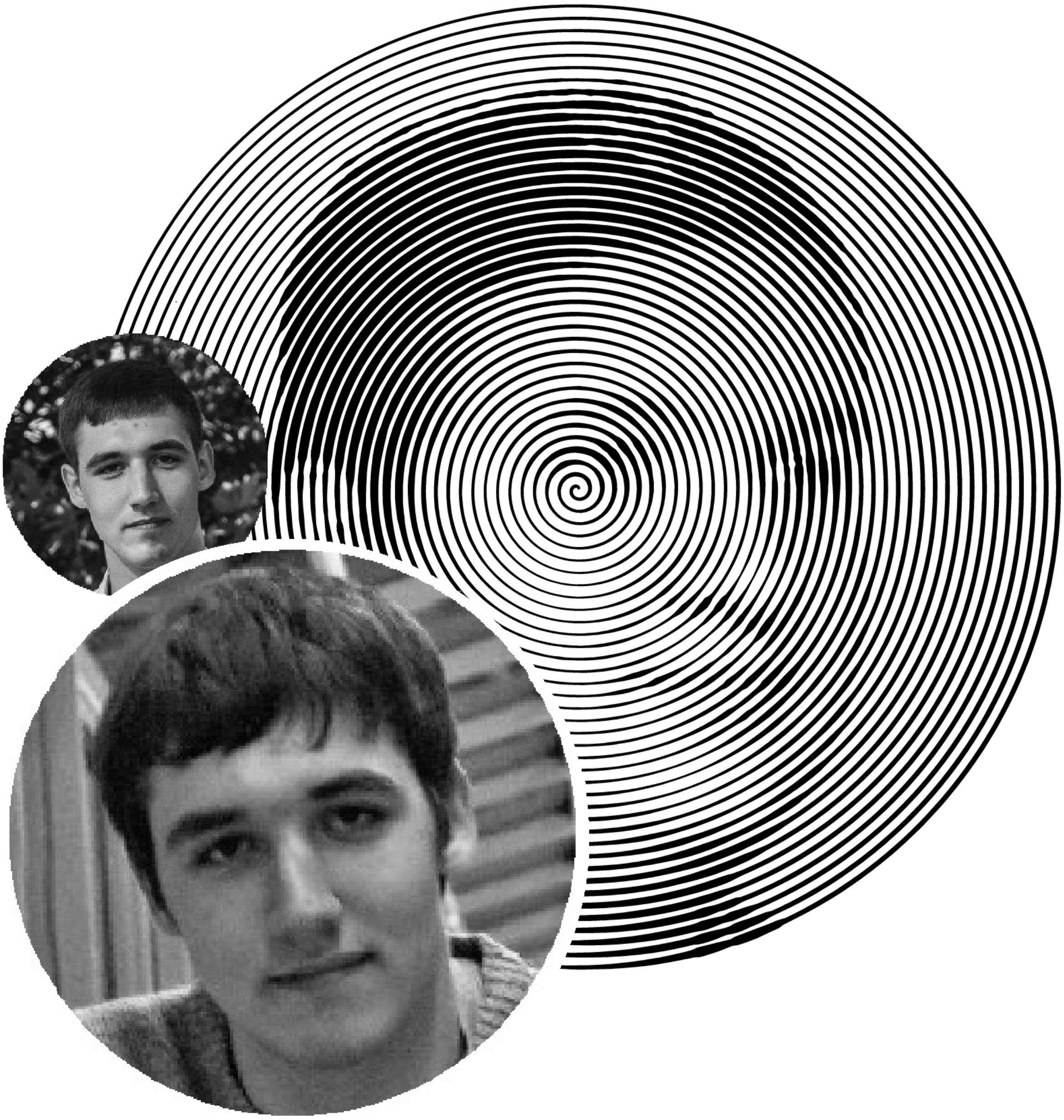
**Н.Р. Кудлай**

**За редакцией А.А.Акимова**

# Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

## Лекция №5



**Санкт-Петербург**

**2021**

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ P3111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”



## Н.Р. Кудлай

**За редакцией А.А.Акимова**


# Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

## Лекция №5

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Министр образования и науки P3111 * Университет ИТМО *
Кудлай
Никита


**Санкт-Петербург**

**2021**

# *Линии второго порядка*

Каждую ***линию второго порядка*** можно задать общим уравнением
$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

*Такое уравнение задает три вида линий:* ***парабола****,* ***эллипс*** и ***гипербола****.*

# *Эллипс*

1) ***Эллипс*** – это множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемыми ***фокусом*** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.
Пусть $F_1$ и $F_2$ – фокусы => $|\overline{F_1F_2}| = 2c$. Если $M\epsilon$ элл., то $r_1$ и $r_2$ – расстояния от фокусов до точки $M$ – это ***фокальные радиусы***. $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ или
$\boxed{r_1 + r_2 = 2a}$ => $\boxed{a > c}$
Для вывода уравнения эллипса введем такую систему координат, что фокусы находятся на $Ox$ => $\boxed{F_1(-c;0), F_2(c;0)}$ $\boxed{(a > 0, a > c)}$
$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$
***a*** – большая полуось, ***b*** – малая полуось, ***c*** – полурасстояние между фокусами
$\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$
$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ – это ***каноническое уравнение эллипса***.
$\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$
Точки пересечения эллипса и осей называют ***вершинами эллипса***.
$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$ – ***Эксцентриситет*** эллипса.
$c < a$ => $\boxed{0 \leq \varepsilon < 1}$, $\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
Исходя из значения эксценриситета можно поняти какой вид имеет гипербола:
При малых значениях: эллипс близок к окружности
При больших: эллипс сплющен

# ***Гипербола***

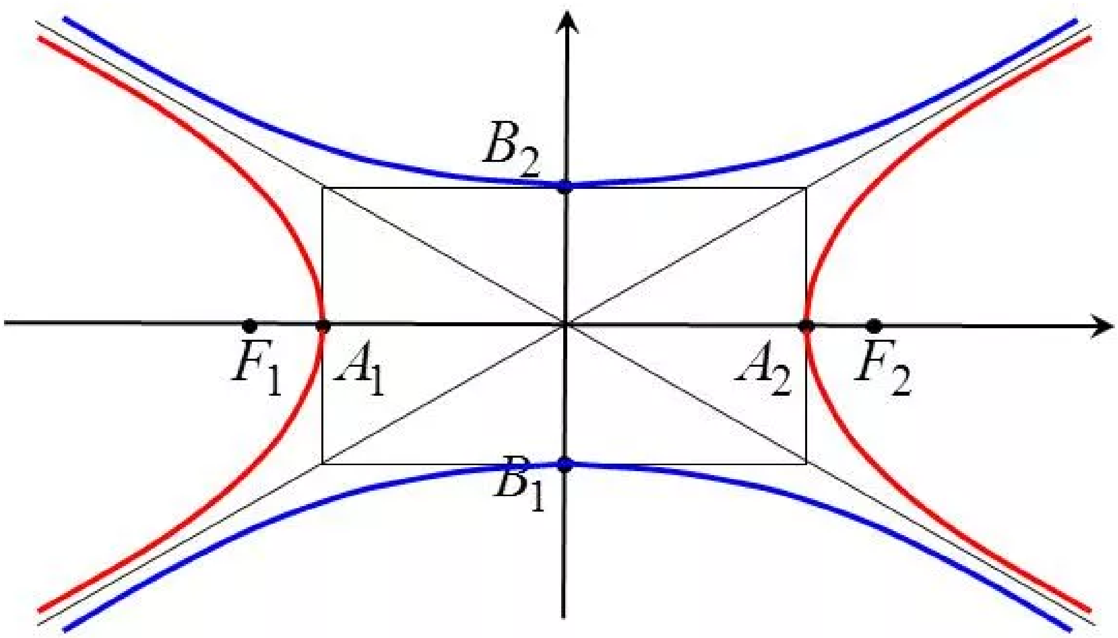
2) ***Гипербола*** – это множество точек на плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемыми ***фокусом*** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.

$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a}$, $\boxed{a < c}$

$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$ – ***каноническое уравнение прямой***

$\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $\boxed{y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}$

Точки гиперболы стремятся к прямым, называемым ***ассимптотами гиперболы***, которые имеют формулу $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$




Оси симметрии гиперболы называются ***осями гиперболы***, а точка их пересечения, которая совпадает с точкой пересечения ассимптот – ***центр гиперболы***.

***Вершины гиперболы*** – точки пересечения осей и гиперболы (их всего 2 – на оси $Ox$: $A_1$ и $A_2$).

Параметр ***a*** – ***действительная полуось гиперболы*** (расстояние от центра гиперболы до вершина).

Расстояние от центра гиперболы до ***мнимых вершин гиперболы*** ($B_1$ и $B_2$) называется ***мнимой полуосью гиперболы*** и обозначается как ***b***.

Прямоугольник со сторонома *2a* и *2b* является ***основным прямоугольником гиперболы***.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы, ***сопряженной*** по отношению к гиперболы с уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Если $a = b$, то гипербола ***равносторонняя*** => $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$

***Эксцентриситетом*** гиперболы называют $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$. Для гиперболы $\boxed{\varepsilon > 1}$

$\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$

***Геометрическое истолкование эксцентриситета***: чем он меньше, тем основной прямоугольник более вытянут вдоль действительной оси.

# *Директрисы эллипса и гиперболы*

Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы*** эллипса.

Это прямые с уравнениями $\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$

Для эллипса $\varepsilon < 1 => \frac{a}{\varepsilon} > a =>$ Прямые расположены вне эллипса

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ – ***директрисы*** гиперболы.

Это прямые с уравнениями $\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$

Для эллипса $\varepsilon > 1 => \frac{a}{\varepsilon} < a =>$ Прямые расположены между ветвями гиперболы

***r*** – расстояние от произвольной точки множества до какого-нибудь фокуса
***d*** – расстояние от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисе

$$\frac{r}{d} = cons't = \varepsilon$$

# *Парабола*

***Парабола*** – множество точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы

***r*** – расстояние от произвольной точки парабола до какого-нибудь фокуса

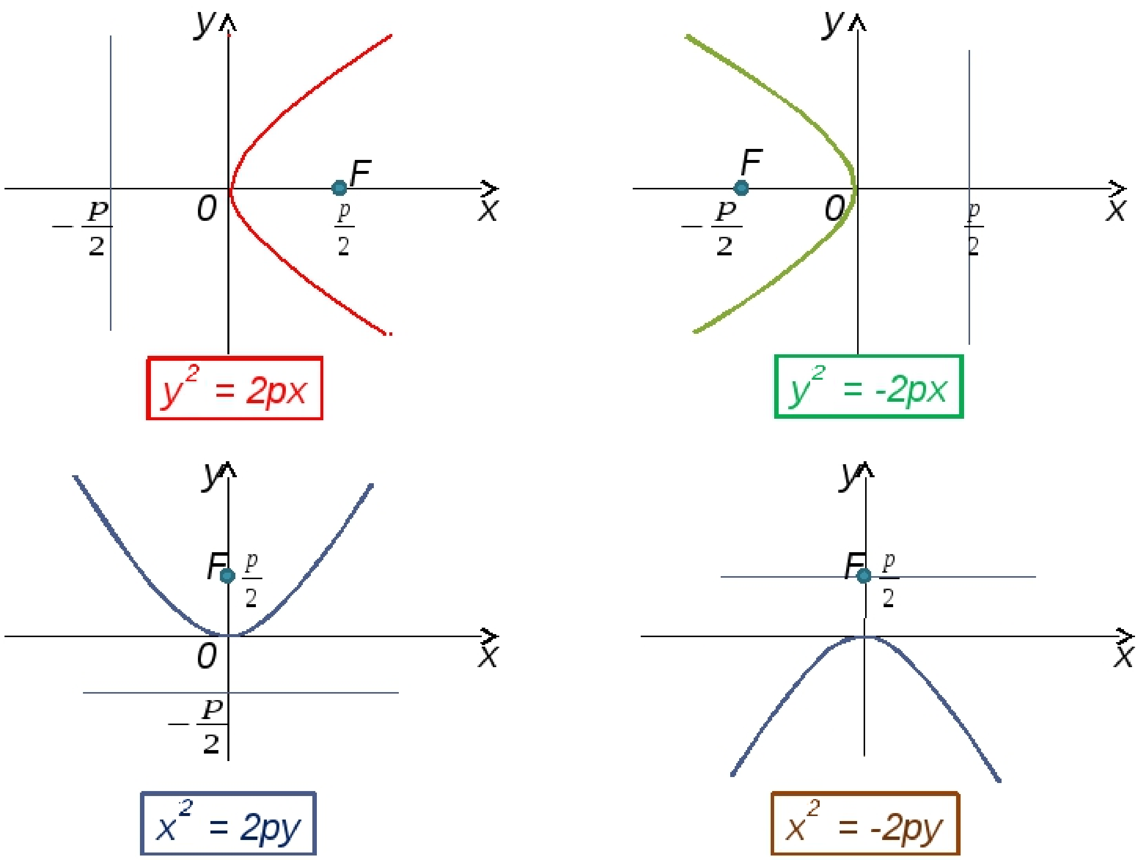
***d*** – расстояние от этой точке до соответствующей этому фокусу директрисе

***p*** – расстояние от фокуса до дирректрисы. Это ***параметр параболы***.

Для параобблы: $\boxed{d = r}$

***Уравнение параболы***: $\boxed{\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}}$

***Каноническое уравнение прямой***: $\boxed{y^2 = 2px}$ => $\boxed{y = \sqrt{2px}}$




***О* – вершина** параболы, ось *Ox* – ***ось симметрии*** параболы

Параметр *p* характреизует “ширину” параболы (***геометрический смысл параметра p***)

# *Общее уравнение линии второго порядка*

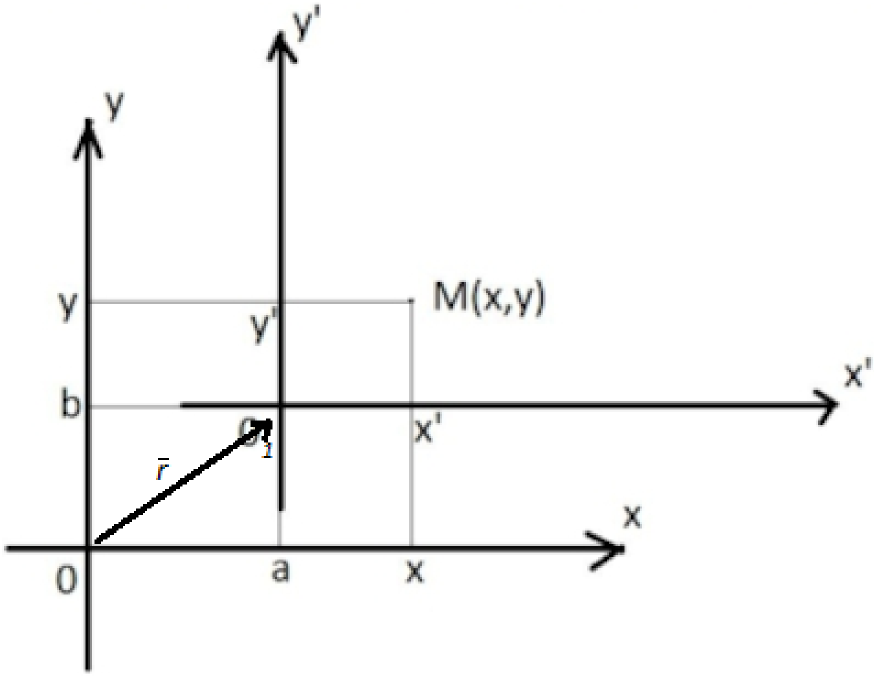
Общее уравнение линии воторого порядка имеет вид

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называют ***преобразованием системы координат***. Параллельным переносом и последующим поворотом осей координат можно привести уравнение к виду $A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$, где $(A', C', F')$ – новые коэффициенты, а $(x'', y'')$ – координаты в новой системе.

***Параллельным переносом*** осей координат называют параллельное смещение осей координат.

$O_1$- центр новой системы координат, а $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1}$ с координатами $x_0$ и $y_0$



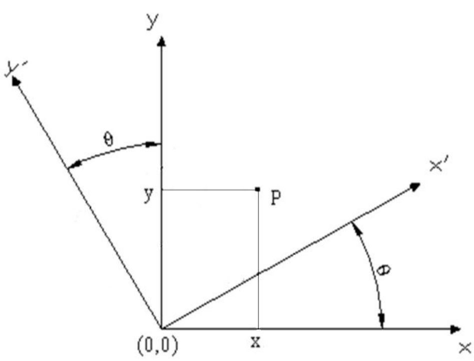

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}}$$

***Поворотом осей координат*** называют поворот осей координат на углол $\alpha$. Точка в новой системе координат будет иметь следующие координаты:

$(x, y)$ – координаты в старой системе

$(x_1, y_1)$ – координаты в новой системе

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}}$$



# *Классификация линий второго порядка*

***Инвариантом*** общего уравнения второго порядка называют $\boxed{AC - B^2}$

Значением инварианты определяется ***тип линий***:

1. Эллиптический, $AC - B^2 > 0$
2. Гиперболический, $AC - B^2 < 0$
3. Параболический, $AC - B^2 = 0$

## *Эллиптический тип*

$AC - B^2 > 0 => Ax^2 + Cy^2 + F = 0$. Возможны три различных случая:

1. $A > 0, C > 0, F < 0 => \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - это *эллипс*
2. $A > 0, C > 0, F > 0 => \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$ – для такого уравнения не существует действительных решений. Это уравнение ***мнимого эллипса***.
3. $A > 0, C > 0, F = 0 => \boxed{a^2x^2 + c^2y^2 = 0}$ $(a^2 = A, c^2 = C)$. для такого уравнения подходит только точка *O(0,0)* – это ***уравнение пары мнимых пересекающихся прямых***.

## *Гиперболический тип*

$AC - B^2 < 0 => Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

1. $AC < 0, F \neq 0 =>$ при $F < 0$: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $a^2 = -\frac{F}{A}, b^2 = \frac{F}{C}$ –***гипербола***
2. $A > 0, C < 0, F = 0 => \left[\begin{array}{l} ax - cy = 0 \\ ax + cy = 0 \end{array}\right.$ – ***пара пересекающихся прямых***

## *Параболический тип*

$AC - B^2 = 0 => Cy'^2 + 2Dx' + F = 0$. Система координат с осями $Ox'$ и $Oy'$ получена путем поворота осей координат.

1. $D \neq 0 => \boxed{y''^2 = 2px''}$ – ***парабола***
2. $\begin{cases} D = 0 \\ CF < 0 \end{cases} => \boxed{y' = \pm a}$ – ***парабола параллельных прямых***
3. $\begin{cases} D = 0 \\ CF > 0 \end{cases} => \boxed{y' = \pm ia}$ – уравнение ***пары мнимых параллельных прямых***
4. $D = 0, F = 0 => \boxed{y'^2 = 0}$ – ***уравнение пары совпадающих прямых***

# *Все формулы классификаций линий 2 порядка*

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллипс
3. $a^2x^2+c^2y^2=0$ – пара мнимых пересекающихся прямых
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола
5. $a^2x^2-c^2y^2=0$ – пара пересекающихся прямых
6. $y^2=2px$ – парабола
7. $y^2-a^2=0$ – пара параллельных прямых
8. $y^2+a^2=0$ – пара мнимых параллельных прямых
9. $y^2=0$ – пара совпадающих прямых