Kydlai inc.

Конспект по материалу “Введение в математический анализ”

Лекции №7

Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ Р3111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Производство Kydlai inc.

Автор Кудлай Н.Р.

За редакцией Акимова А.А., Нуцалхананова Н.Г. и Гребёнкина В.Д.

Конспект по материалу “Введение в математический анализ”

Лекция №7

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Министр образования и науки Р3111
Кудлай Никита
Университет ИТМО

Санкт-Петербург

2021

Предисловие

Этот конспект создан на основе рукописного текста Холодовой и не претендует на его замену в качестве учебного материала, однако для быстрого изучения материала/повторения/нахождения формул подойдет лучше оригинала. Помимо этого многим не понятны некоторые формулировки (в процессе чтения зачастую требуется обращение к интернету), а плохое качество и рукописные буквы делают прочтение весьма нелегким. Решить эту проблему должен этот конспект: во многих местах вместе с определением из оригинала дано объяснение “на пальцах”, излишняя “вода” убрана (хотя если вы серьезно хотите изучить материал, то с водой даже лучше). Желаю вам приятного прочтения!

Используемые обозначения:

<u>Множество</u> – понятие встречается в первый раз и дается ему определение

Множество – понятие уже встречалось, но оно важно в данном контексте

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ – важная формула, которую по-хорошему стоит запомнить

$\underline{a^2 = b^2 + c^2}$ – что-то важное

Кванторы:

∃ - существует

: - такой, что

∀ - любой

=> - следовательно

> Горизонтальной чертой слева от текста обозначаются доказательства. Изначально их в данном конспекте не планировалось и запоминать их при первом прочтении не самая светлая идея из-за объема материала, однако на сессии вполне вероятно, что они вам понадобятся, поэтому просмотрите хотя-бы общий принцип доказательства

Все пособия Kydlai inc. распространяются на бесплатной основе, так как они помогают усваивать материал и созданы не для капитализации, но тираж печатных изданий уже достигнет полусотни, а работа занимает некоторое время, так что если есть желание поддержать авторов, то вот счет Сбера: 40817810552097130180

Оглавление

Элементы теории множеств

<u>Множество</u> состоит из объектов, объединённых по какому-либо признаку. Каждое множество может содержать как ***конечное***, так и ***бесконечное*** количество объектов.

Объекты множества называются ***<u>элементами</u>*** или ***<u>точками</u>***. Множества обычно обозначают ***большими*** буквами, а элементы – ***маленькими***.

Множество можно задать следующим образом: $\boxed{A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$, если множество ***конечное,*** и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, если оно ***бесконечное***.

<u>Подмножеством</u> называют такое множество A, все элементы которого лежат в множестве B => $\boxed{A \subset B}$.

<u>Пустым множеством</u> называют множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество является подмножеством любого множества и обозначается как $\emptyset$.

Одним из способов задачи множества или совокупности является отделение по каким-либо признакам. Допустим возьмем все элементы множества X, которые удовлетворяют условию $p(x)$ => $\boxed{\{x : x \in X, p(x)\}}$.

<u>Числовая прямая</u> или ***<u>числовая ось</u>*** – это множество всех вещественных чисел.

<u>Универсальное множество</u> – такое множество, которое содержит все элементы некоторого признака, который рассматривается в задаче. Обозначают буквой **E** или **U**.

<u>Пересечением</u> множеств A и B называют такое множество, которое содержит элементы, одновременно принадлежащие и A, и B =>$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \ \underline{\text{и}} \ x \in B\}}$.

<u>Объединением</u> множеств A и B называют множество, содержащее все элементы A и B => $\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \ \underline{\text{или}} \ x \in B\}}$.

<u>Разностью</u> множеств A и B называют множество, содержащие только те элементы A, которые не входят в B => $A|B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

<u>Дополнением</u> множества $A \subset E$ называют множество $\boxed{\overline{A}}$, состоящее из элементов E, не входящих в A => $\boxed{\overline{A} = \{x : x \in E \text{ и } x \notin A\} = E|A}$.

Числовые множества

<u>Числовыми</u> множествами называют такие множества, элементами которых являются ***числа***.

Множество ***действительных чисел R*** является

1) ***Упорядоченным*** => $\boxed{\forall\, x, y \in R \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > y \\ x = y \\ x < y \end{array}\right.}$

2) ***Плотным***. То есть для любых x < y и $x, y \in R$ существует бесконечное множество чисел z таких, что $x < z < y$.

3) ***Непрерывным***. Пусть $R = A \cup B; A, B \neq \emptyset, \forall \mathrm{x} \in R$: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right.;$

$\forall \mathrm{x}, y \in R$: $\begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow x < y$. Тогда существует единственная

<u>$\mathrm{c} \in R: x \leq c \leq y (\forall x \in A, \forall y \in B)$.</u>

А теперь понятнее: Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу x ∈ R соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова *число* часто говорят *точка*.

<u>Абсолютной величиной (модулем)</u> x_n является модуль. Надеюсь, вы знаете, что такое модуль… Иначе я не понимаю, что вы делаете в вузе (каком-либо, кроме Синергии).

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$:

$$\left[\begin{array}{l} x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y \leq |x| + |y| \\ x + y \leq 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y) \leq |x| + |y| \end{array}\right.$$

2) $|x + y| \geq |x| - |y|$:

$x + y = z \Rightarrow x = y + z; |y + z| \leq |y| + |z| \Rightarrow$

$|x| \leq |y| + |x - y| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|$

Грани числовых множеств

Множество X ***<u>ограничено сверху или снизу</u>***, если существует число $b: x \leq b$ или $a: x \geq a$ при $\forall x \in X$ соотвественно. В таком случае число b – ***<u>верхняя грань</u>***, а число a – ***<u>нижняя грань</u>*** множества X.

<u>Ограниченным</u> множеством является такое множество, которое ограничено и сверху, и снизу.

<u>Неограниченным</u> же называют такое множество, которое либо сверху, либо снизу не ограничено.

Если *b* – верхняя грань, то любое $c > b$ тоже будет верхней гранью.

Наименьшая верхняя и наибольшая нижняя грани являются ***<u>точной верхней гранью</u>*** и ***<u>точной нижней гранью</u>***, обозначаемыми как $supX$ и $infX$ соответственно (супремум и инфимум).

<u>Окрестностью</u> точки x_0 называется интервал $(a;b)$, внутри которого лежит точка x_0. ***<u>ε-окрестностью</u>*** (U_ε) точки x_0 называют интервал $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$, где x_0 – ***<u>центр</u>*** окрестности, а ε – ***<u>радиус</u>*** окрестности. Условие для всех точек окрестности задается, как $\boxed{|x-x_0|<\varepsilon, \varepsilon>0}$

Числовые последовательности

Если любому натуральному числу n поставить в соответствие число $x_n \epsilon R$, то говорят, что задана ***<u>числовая последовательность</u>*** или же просто последовательность, обозначаемая как $\{x_n\}$ или (x_n). Задается такая последовательность формулой ***<u>общего члена</u>*** x_n. Иногда она задается рекуррентной формулой.

Если последовательность задается некоторыми членами другой последовательности $\{x_n\}$, и они расположены в том же порядке, как и в исходной последовательности, то такая последовательность называется ***<u>подпоследовательностью</u>*** этой последовательности: $\boxed{\{x_{n_k}\}, k \in N,\ (n_{k_1}<n_{k_2})}$.

Арифметические операции над последовательностями

Суммой, разностью, произведением, отношением последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ является последовательность $\{z_n\}$, которая изменяется поэлементно:

1) $\{z_n\}=\{x_n\}\pm\{y_n\}=\{x_n\pm y_n\}, \forall x_n, y_n$
2) $\{z_n\}=\{x_n\}*\{y_n\}=\{x_n*y_n\}, \forall x_n, y_n$
3) $\{z_n\}=\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, y_n\neq 0, \forall y_n$
4) $C*\{x_n\}=\{C*x_n\}$ – умножение последовательности на число $C\in R, \forall x_n$

Последовательность является ***<u>ограниченной сверху (снизу)</u>***, если есть такое число, которое больше (меньше) либо равно любому элементу последовательности. Последовательность, ограниченная и сверху, и снизу называется ***<u>ограниченной</u>***.

Сходящиеся последовательности

Число a является ***<u>пределом числовой последовательности</u>*** $\{x_n\}$, если каждый последующий член последовательности все ближе находится к числу a, то есть значение элементов последовательности стремится к a

(объяснения на пальцах).

По определению: если для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ выполняется $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$ <=> $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0: N_\varepsilon = N(\varepsilon), N_\varepsilon \epsilon N: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ (все ведь ни черта не поняли?)

Если последовательность имеет предел, то она является ***<u>сходящейся</u>***, в противном случае – ***<u>расходящейся</u>***.

Теорема 1

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равный $a \Rightarrow \{x_n - a\} \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0}$.

Теорема 2

Любая сходящаяся последовательность имеет только ***один предел.***

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a;\ \lim_{n\to\infty} y_n = b; a < b$

Выберем такое ε, что $U_\varepsilon(a)\ \cap\ U_\varepsilon(b) = \emptyset$, например $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$: При $\varepsilon > 0$:

$\exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n \epsilon U_\varepsilon(a) \Rightarrow \text{вне интервала } U_\varepsilon(a)$ *находится конечное число элементов => больше не может быть интервалов..*

Теорема 3

Если последовательность ***сходящаяся***, то она ***ограничена*** (но не наоборот).

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

Возьмем $M = \max\{a - \varepsilon; a + \varepsilon; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_{N_\varepsilon - 1}|\} \Rightarrow |x_n| \leq M$ при $\forall n$

$\Rightarrow \{x_1\} - \text{ограничена}$

Теорема 4

Последовательность, заключенная между двумя ***сходящимися*** тоже ***сходящаяся***

Пусть для $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}: x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq N_0$;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \{y_n\} - \text{сходящаяся } \left(\lim_{n\to\infty} y_n = a\right)$$

$\forall\varepsilon > 0: \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \text{ и } \exists N_2 = N_2(\varepsilon)$:

$$\begin{cases}\forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \\ \forall n \geq N_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon\end{cases} \Rightarrow \forall n \geq N = \max\{N_0; N_1; N_2\}$$

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq a + \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Теорема 5

(На пальцах) Если две последовательности имею разные пределы, то после определенного $n = N_0$ последовательность с большим пределом будет выше (каждый член больше) другой.

(Определение) Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim_{n\to\infty} y_n = b; a < b$
Тогда $\exists N_0\colon \forall n \geq N_0 => x_n < y_n$.

Пусть $\varepsilon > 0, U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$
Такое условия выполняется, например, при $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0 => \exists N_1(\varepsilon) \in N$ и $\exists N_2(\varepsilon) \in N\colon \forall n \geq N_1 => x_n \in U_\varepsilon(a)$ и $\forall n \geq N_1 => \forall y_n \in U_\varepsilon(b)$.
Пусть $N_0 = \max(N_1, N_2) => \forall n \geq N_0 => x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n =>$ ч.т.д.

Следствие 1
После определенного $n = N_0$ все элементы последовательности будет меньше, чем $b > a$, где a – предел последовательности.
Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a; a < b => \exists N_0\colon \forall n \geq N_0 => x_n < b$.

Для доказательства достаточно в теореме 5 взять $y_n = b$ при $n \in N$

Следствие 2
Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ и при $\forall n \in N\colon x_n \geq y_n$, то $\underline{a \geq b}$.

Предположим, что $a < b => \exists N_0\colon \forall n \geq N_0 => x_n < y_n$ – противоречие $=> a \geq b$

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности
Арифметические операции над сходящимися последовательностями
Последовательность $\{x_n\}$ называется ***<u>бесконечно малой</u>***, если $\underline{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$.

Теорема 6
$\lim_{n\to\infty} x_n = a <=> \{x_n - a\}$ – бесконечно малая последовательность.

Свойства бесконечно малых последовательностей
1) ***Алгебраическая сумма*** конечного числа бесконечно малых последовательностей тоже бесконечно малая последовательность.
Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности $=> \forall \varepsilon > 0$

$$\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \text{ и } \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\colon \forall n \geq N_1 => \begin{cases} |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Пусть $N = N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2) => \forall n \geq N =>$

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon => \{\alpha_n + \beta_n\} - \infty \text{ малая последоват.}$$

2) ***Произведение*** бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность тоже бесконечно малая последовательность.
Пусть $\{\alpha_n\}$ – ограниченная, а $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательности $=> \exists C > 0\colon \forall n \epsilon N => |\alpha_n| < C$; по определения бесконечно малой послед.:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon(\varepsilon)\epsilon N{:}\ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n * \beta_n| = |\alpha_n| * |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} * C = \varepsilon \Rightarrow$
$\{\alpha_n * \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность

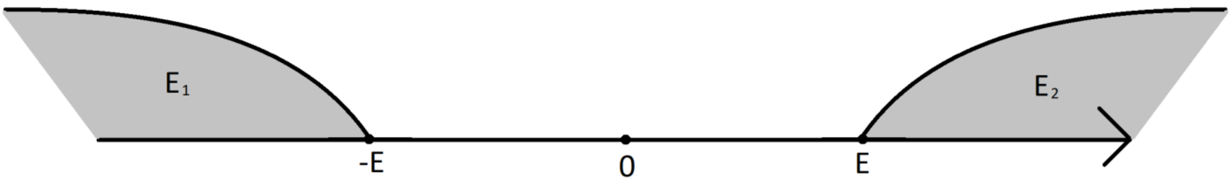
Последовательность является ***бесконечно большой***, если она бесконечно возрастающая, то есть каждый последующий член больше всех предыдущих (объяснение на пальцах).
Определение: если $\forall \mathrm{E} > 0, \exists N_{\mathrm{E}}\epsilon N{:}\ \forall n \geq N_{\mathrm{E}} \Rightarrow |x_n| > \mathrm{E} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Геометрическая интерпретация: Назовем ***Е-окрестностью*** ∞ множество $E = \{x \in R{:}\, |x| > \mathrm{E}\}$, если $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow$ в $\forall U_{\mathrm{E}}(\infty)$ лежат все члены последовательности, за исключением, может быть конечного числа членов.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow x_n < -\mathrm{E}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow x_n > \mathrm{E}}$$

Множества $\mathrm{E}_1 = \{x \in R{:}\, x < -E\}$ и $\mathrm{E}_2 = \{x \in R{:}\, x > E\}$, где $\mathrm{E} > 0$ называются **Е-окрестностями** $-\infty$ и $+\infty$ соответственно $\Rightarrow E = E_1 \cup E_2$
Визуализация Е-окрестности:



Пределом последовательности называется ***конечный предел (число или ±∞)***, если не оговорено прочее, например если последовательность задается формулой

$x_n = \frac{n^2}{n+2}$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} = +\infty$

Теорема 7

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a;\ \lim_{n\to\infty} y_n = b$, то:
1) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2) $\lim_{n\to\infty}(x_n * y_n) = a * b$
3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, если $y_n \neq 0 (n \in N), b \neq 0$

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a;\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow x_n = a + \alpha_n; y_n = b + \beta_n$
где α_n и $\beta_n - \infty$ м. п.
1) $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$ и $\{\alpha_n + \beta_n\} - \infty$ м. п. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $x_n * y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\ ;\ \{a\beta_n\}, \{b\alpha_n\}, \{\alpha_n\beta_n\} - \infty$ м. п. $\Rightarrow$

$\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\} - \infty$ м. п. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n * y_n) = a * b$

3)Для доказательства достаточно доказать, что $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\} - \infty$ м. п.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{by_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\frac{1}{y_n}$$

$\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\} - \infty$ м. п.. По условию: $\lim_{n\to\infty} y_n = b, b \neq 0$ и $y_n \neq 0, \forall n \epsilon N \Rightarrow$ $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – огр. $\Rightarrow \left\{\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\frac{1}{y_n}\right\} - \infty$ м. п. $\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\} - \infty$ м. п.

В ходе доказательства использовался тот факт, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – огр., который тоже ***необходимо доказать***:

?: $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – огр. при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, b \neq 0$ и $y_n \neq 0, \forall n \epsilon N$

$$b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow \text{При } \varepsilon = \frac{|b|}{2}\ \exists N_0(\varepsilon): \forall n \geq N_0 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} |y_n - b| < \dfrac{|b|}{2} \\ |b| - |y_n| \leq |y_n - b| \end{array}\right\} \Rightarrow |b| - |y_n| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow \forall n \geq N_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| > \frac{2}{|b|}$$

Пусть $C = \max\left(\left|\frac{1}{y_1}\right|; \left|\frac{1}{y_2}\right|; \ldots; \left|\frac{1}{y_{N_0-1}}\right|; \frac{2}{|b|}\right) \Rightarrow \forall n \epsilon N \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| \leq C \Rightarrow \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – огр

Предел монотонной последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (неубывающей) если при $\boxed{\forall n \in N: x_{n+1} \geq x_n}$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***убывающей*** (невозрастающей) если при $\boxed{\forall n \in N: x_{n+1} \leq x_n}$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***строго возрастающей*** или ***убывающей,*** если при $\boxed{\forall n \in N: x_{n+1} > (<) x_n}$

Возрастающую или убывающую последовательность называют ***монотонной,*** а строго возрастающую или убывающую – ***строго монотонной***.
Последовательности могут убывать или возрастать, начиная с какого-либо номера. Такие последовательности называют ***(строго) возрастающими/убывающими, начиная с номера*** $\boldsymbol{n_0}$ (вместо n_0 - число).

<u>Точной верхней (нижней) гранью последовательности</u> называют элемент, больший (меньший) или равный всем элементам последовательности, и обозначают как $\sup\{x_n\}$ и $inf\{x_n\}$ соотвественно.

Признак сходимости монотонной последовательности

Теорема 8

Если последовательность $\{x_n\}$ является ***возрастающей*** и ***ограниченной сверху***, то $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.
Если последовательность $\{x_n\}$ является ***убывающей*** и ***ограниченной снизу***, то $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.
Эта теорема верна и для последовательностей, которые монотонны, начиная с некоторого номера.

Пусть $\{x_n\}$ – возрастающая и ограниченная сверху => множество чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ – огр. сверху. $\{x_n\}$ – возр. $=> \forall n \geq N_\varepsilon => x_{N_\varepsilon} \leq x_n =>$

$$\left.\begin{array}{c} \forall n \epsilon N => x_n \leq a \\ \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon : x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon \\ \forall n \geq N_\varepsilon => x_{N_\varepsilon} \leq x_n \end{array}\right\} => \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon => a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq a$$

$$=> x_n \epsilon U_\varepsilon(a) => \lim_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n\}$$

Последовательность отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ где $\Delta_n = [a_n,\ b_n]$ называют ***<u>стягивающейся</u>***, если:
1) Каждый отрезок находится внутри предыдущего ($\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$)
2) $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$, где $|\Delta_n|$ - длинна отрезка, т. е. $\boxed{\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0}$

Исходя из первого условия: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

Теорема 9 (Теорема Кантора)

Если последовательность отрезков стягивающаяся, то существует только одна точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Подпоследовательности. Частичные пределы

Определение: Последовательность
$\{y_k\}$ является ***<u>подпоследовательностью</u>*** последовательности $\{x_n\}$, если существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}$ индексов для x_n таких, что для всех $k = 1,2, \dots, k$ выполняется соотношение $x_{n_k} = y_k$.

А если по понятному, то это последовательность из некоторых элементов (не обязательно всех) начальной последовательности, расположенных в том же порядке.

Так, например, любая строго возрастающая последовательность натуральных чисел является подпоследовательностью натуральных чисел.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ обозначается как $\boxed{\{x_{n_k}\}}$, число k – порядковый номер члена в итоговой последовательности, а n_k – номер начальной последовательности. Поэтому $\boxed{n_k \geq k}$ $=> \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$

По определению: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ (a — конечный или ∞), где a – это ***частичный предел последовательности*** $\{x_n\}$.

Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а α – множество всех её частичных пределов, то $\sup(\alpha)$ и $\inf(\alpha)$ – верхний и нижний пределы этой последовательности.

$$\sup(\alpha) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n, \inf(\alpha) = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Существование частичного предела у ограниченной последовательности (Теорема Больцано-Вейерштрасса)

Теорема 10

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Критерий Коши сходимости последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ является ***фундаментальной***, если она удовлетворяет ***условию Коши***:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon(\varepsilon) \epsilon N: \forall n \geq N_\varepsilon$ и $\forall m \geq N_\varepsilon => |x_n - x_m| < \varepsilon$ *(удачи понять)*

Любая ***фундаментальная*** последовательность является ***ограниченной.***

Пусть $\varepsilon = 1 =>$ сущствует $N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon$ и $\forall m \geq N_\varepsilon => |x_n - x_m| < 1$, и, в частности $|x_n - x_{N_\varepsilon}| < 1$

$|x_n| = |(x_n - x_{N_\varepsilon}) + x_{N_\varepsilon}| \leq |x_{N_\varepsilon}| + |x_n - x_{N_\varepsilon}| < |x_{N_\varepsilon}| + 1; \forall n \geq N_\varepsilon =>$

$\forall n \in N => |x_n| < C$, *где* $C = \max(|x_1|, \dots, |x_{N_\varepsilon - 1}|, |x_{N_\varepsilon}| + 1) =>\{x_n\}$ – огр. п.

Теорема 11 (Критерий Коши)

Чтобы последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Бином Ньютона

$\forall a, b \in R$ и $\forall n \in N$:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} * b^k}$$

C_n^k называют ***биномиальными коэффициентами***

Свойства сочетаний: $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ $=> C_n^k = C_n^{n-k}$

Полезные свойства, взятые с прочих источников, а не с конспекта Холодовой => к запоминанию не требуются, но могут быть полезны

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$
3. $k * C_n^k = n * C_{n-1}^{k-1}$
4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$
5. $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^k = 0$

Число e

<u>Число e</u> = $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (по определению).