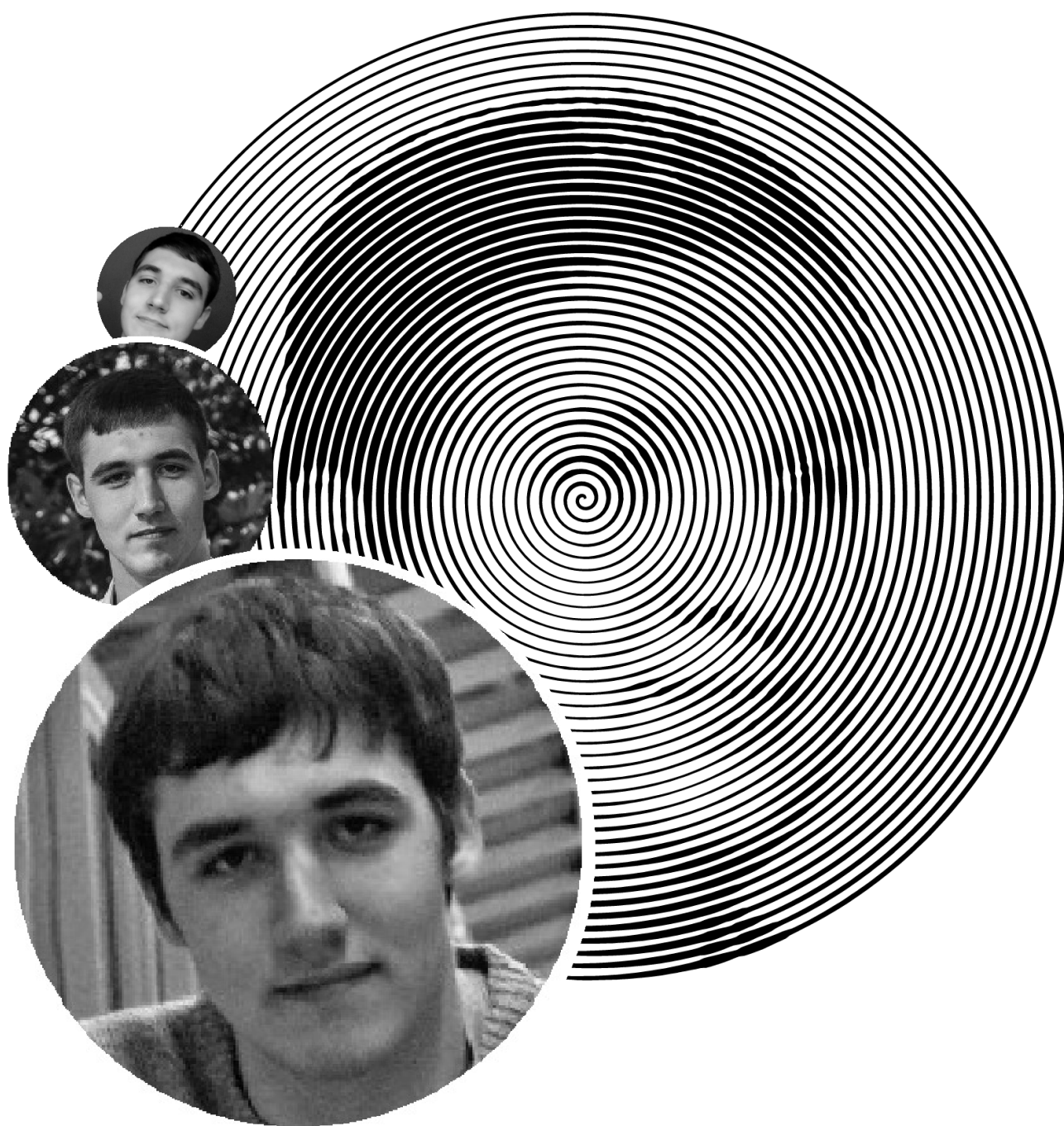


Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

**Конспект по материалу
“Аналитическая геометрия”**

Лекция №6



Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЗ111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

**Конспект по материалу
“Аналитическая геометрия”
Лекция №6**



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО



Санкт-Петербург

2021

Поверхности второго порядка

Составить общее представление о большинстве **поверхностей второго порядка** можно, рассматривая их как точки поверхности, образованной вращением **линии второго порядка** вокруг **оси симметрии**.

Для определения геометрического вида поверхности можно применить **метод сечений**: рассмотрение сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной одной из координатных осей.

Эллипсоид

Эллипсоид получается из вращения эллипса вокруг его осей симметрии.

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, (a, b, c) > 0$

Параметры a, b и c являются **полуосями эллипсоида**.

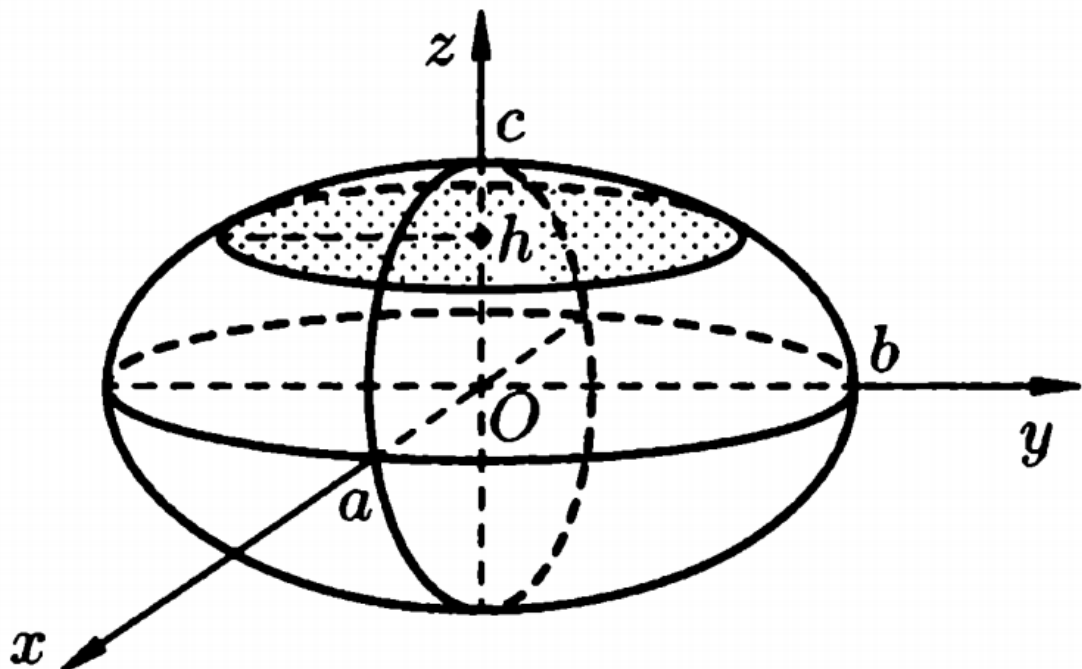
Сечение эллипсоида плоскостью $z = h, h \in \mathbb{R}$ – кривая $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$

1) Если $|h| > c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \Rightarrow \emptyset$

2) Если $|h| = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ решением являются две точки **мнимого пересечения** с координатами $(0, 0, \pm c)$

3) Если $|h| < c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 * (1 - \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2 * (1 - \frac{h^2}{c^2})} = 1 \\ z = h \end{cases}$ - это **эллипс**.

Аналогичные результаты будут при $x = h$ и $y = h$



Замечание: При $a = b = c$: Эллипсоид превращается в сферу; если равны любые две полуоси, то эллипсоид становится **эллипсоидом вращения**.
Центром симметрии эллипсоида является центр координат.

Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид получен вращением гиперболы вокруг мнимой оси и имеет только одну полость, откуда и идёт название.

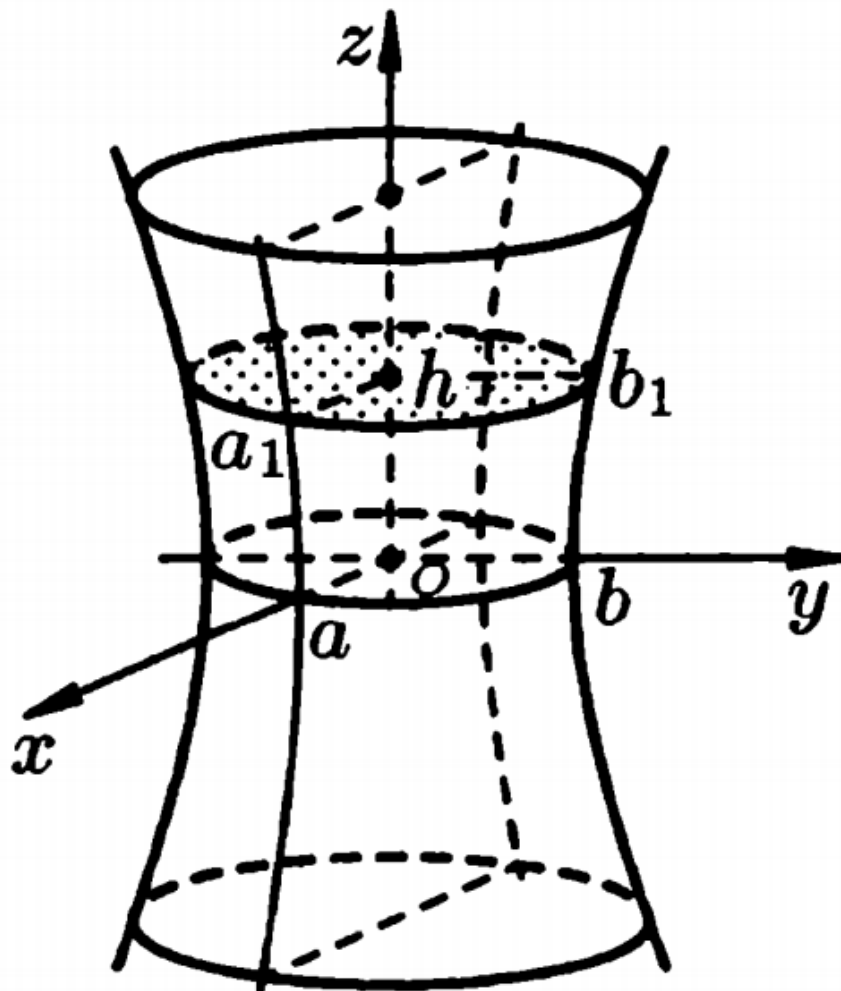
Каноническая форма - $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, (a, b, c) > 0}$

В сечении имеет разный вид, в зависимости от того, какая координата секущей плоскости фиксирована:

$$1) z = h \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \text{ - это эллипс}$$

$$2) \begin{cases} x = h \\ y = h \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}} \text{ - пример сечения в виде гиперболы для } y = h$$

У всех однополостных гиперболоидов есть **прямолинейные образующие** – кривые прямые, которые полностью принадлежат гиперболоиду, причем для каждой его точки существуют две такие образующие.



Двухполостный гиперболоид

Двухполостный гиперболоид получается вращением гиперболы вокруг

действительной оси $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, (a, b, c) > 0}$

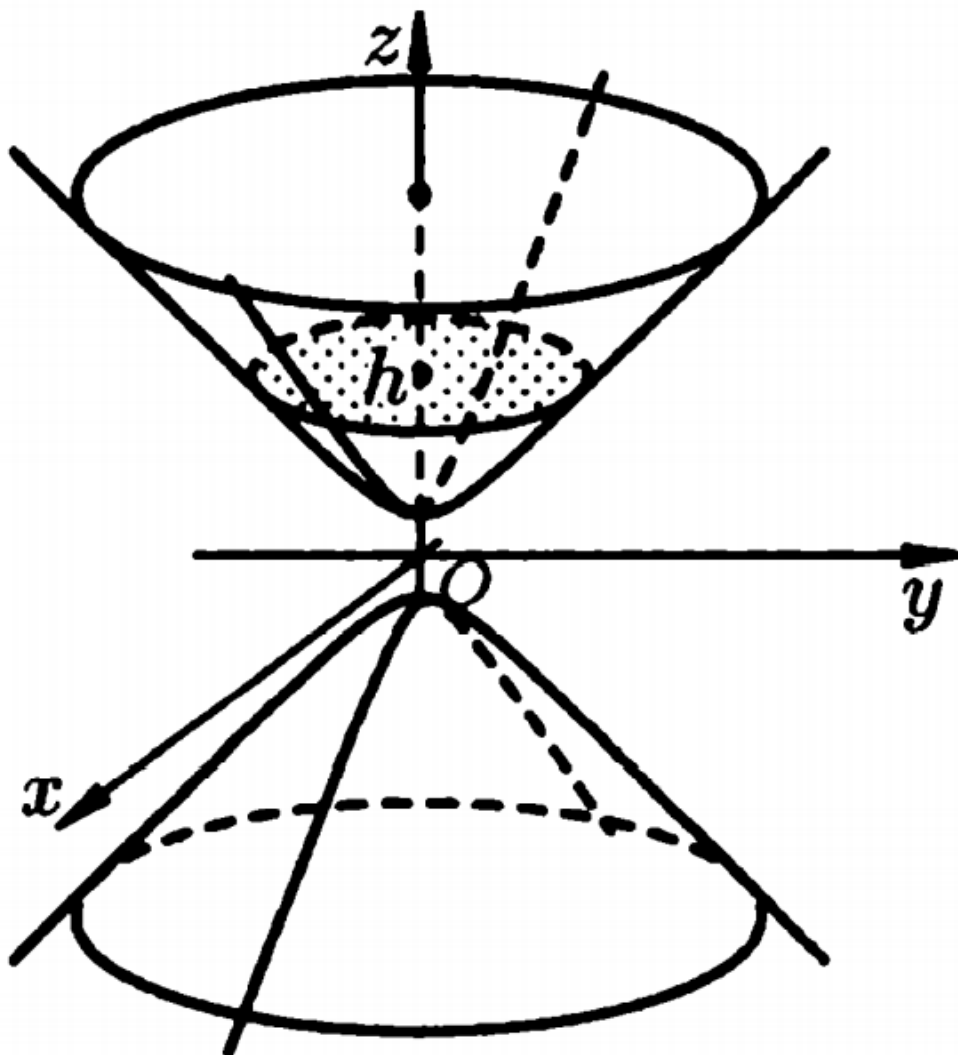
а) $z = h \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{h^2} - 1 \\ z = h \end{cases} \Rightarrow$

1) Если $|h| < c \Rightarrow \emptyset$

2) Если $|h| = c \Rightarrow$ пл-ти $z = \pm c$ касаются поверхности в $\boxed{(0, 0, \pm c)}$

3) Если $|h| > c \Rightarrow$ эллипсы, полуоси которых $\sim |h|$

б) $x = h$ или $y = h \Rightarrow$ *гиперболы*:
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2} \end{cases}$$



Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид получается вращением параболы вокруг её оси симметрии, каноническая формула - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, (a, b) > 0$

$$\text{а) } z = h \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

1) Если $h < 0 \Rightarrow \emptyset$

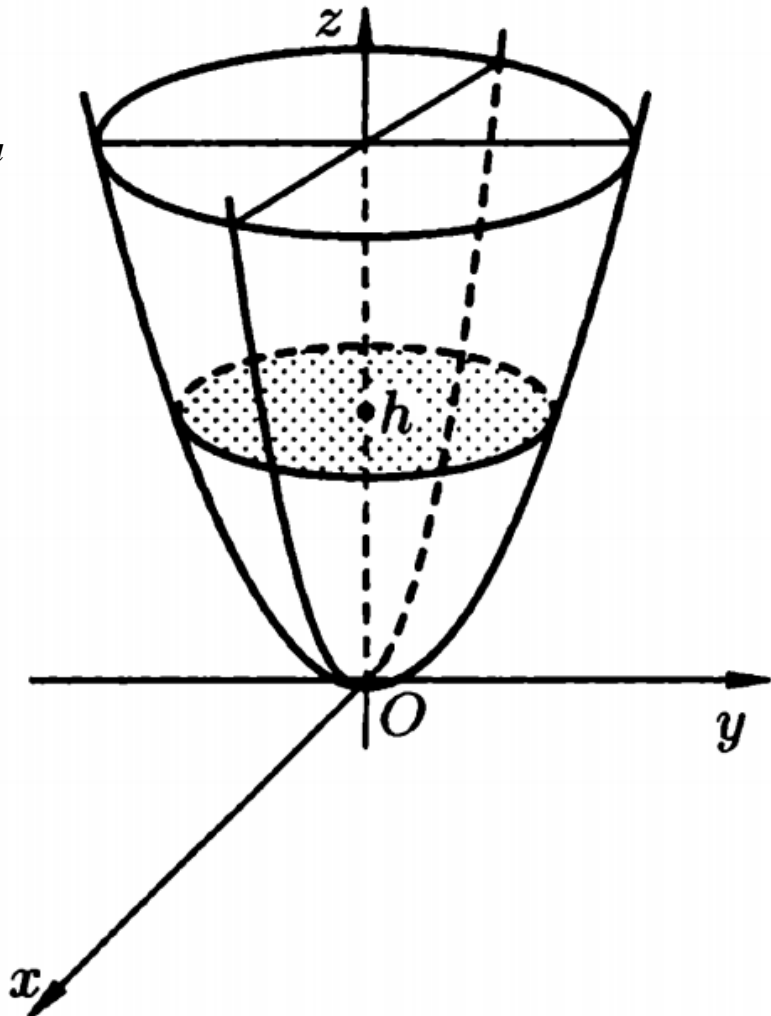
2) Если $h = 0 \Rightarrow$ плоскость $z = 0$ касается поверхности в $(0,0,0)$

3) Если $h > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} + \frac{y^2}{b^2 h} = 1 \\ z = h \end{cases}$ – эллипс

$$\text{б) } x = h \text{ или } y = h \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{y^2}{2b^2} - \frac{h^2}{2a^2} \\ z = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{h^2}{2b^2} \end{cases} \text{ – парабола}$$

Замечание

При $|a| = |b|$, то это
параболоид вращения



Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид имеет формулу виду $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, (a, b) > 0}$

а) $z = h \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2h} - \frac{y^2}{b^2h} = 1 \\ z = h \end{cases}$ - гиперболы ($h \neq 0$)

1) Если $h > 0 \Rightarrow$ действительная ось гиперболы $\parallel Ox$

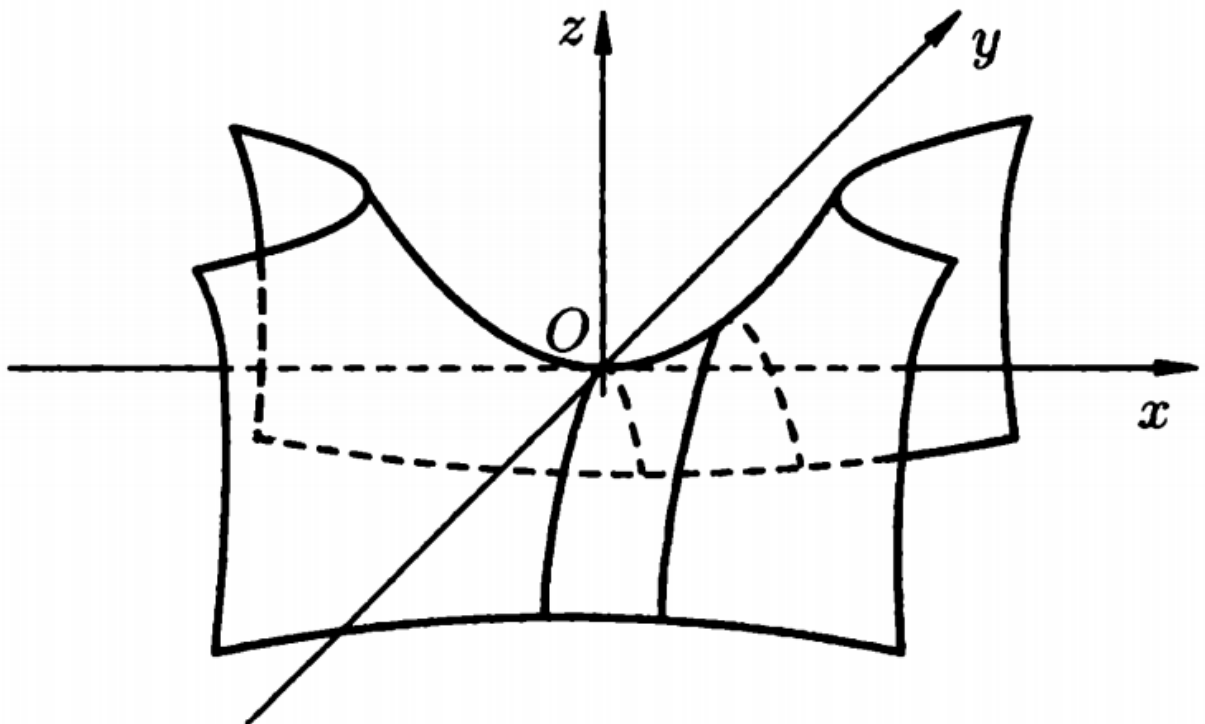
2) Если $h < 0 \Rightarrow$ действительная ось гиперболы $\parallel Oy$

3) Если $h = 0 \Rightarrow$ пара пересекающихся прямых $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$

б) $y = h \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2a^2(z + \frac{h^2}{b^2}) \\ y = h \end{cases}$ - параболы

в) $x = h \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2b^2(z + \frac{h^2}{a^2}) \\ x = h \end{cases}$ - параболы

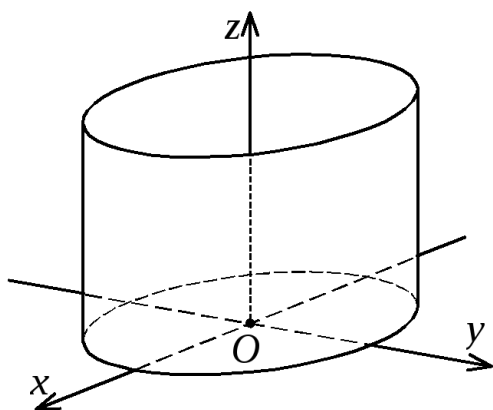
Замечание: фактически гиперболический параболоид представляет из себя перевернутую параболу, параллельную Oyz , чья вершина скользит по параболе в плоскости Oxz . Такая плоскость имеет 2 группы образующих



Цилиндр второго порядка

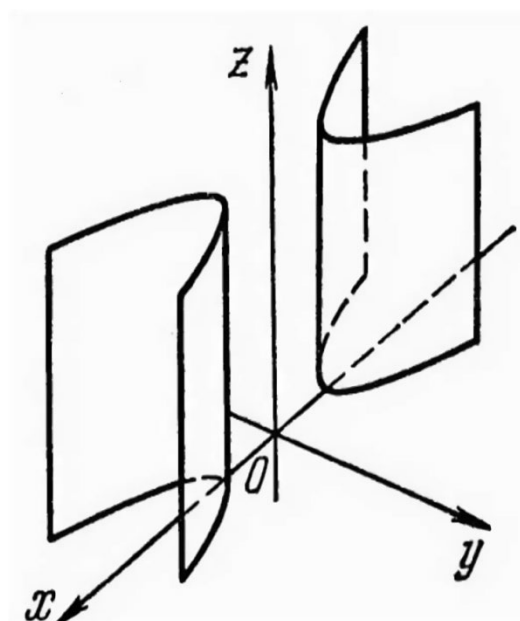
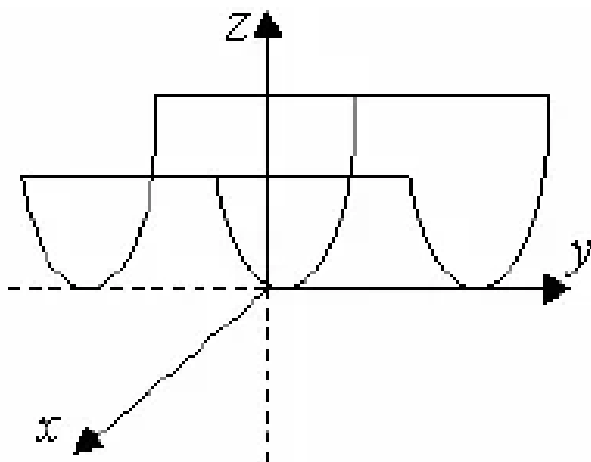
Цилиндрической поверхностью или **цилиндром** можно представить в виде прямой или кривой второго порядка, называемой **образующей**, которая скользит вдоль **направляющих**. Если образующая является кривой 2 порядка, то и цилиндр является поверхностью 2 порядка. Если направляющие параллельны одной из осей, то такой цилиндр **прямой**.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр}$$



$$x^2 = 2pz \text{ — параболический цилиндр}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр}$$



Конус

Канонической поверхностью называют поверхность, получаемым при вращении наклонной прямой и имеет формулу $a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$

Поверхность вращения

Поверхность вращения задается вращением кривой второго порядка относительно прямой. Найдем правило получения уравнения поверхности.

Пусть кривая L лежит в Oxy . Её уравнение имеет вид $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Найдем уравнение плоскости S , образованной вращением L вокруг оси Oz .

Пусть $M_1 \in L, M$ — любая точка $\in S$, проведем через M плоскость $\alpha: \alpha \perp Oz$
 $\Rightarrow M_1 = L \cap \alpha, N = Oz \cap \alpha$

$$\begin{cases} N(0,0,z) \\ M(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow |NM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} M_1 \in L \\ M_1 \in \text{окружности сечения} \end{cases} \Rightarrow r_{\text{окр. сечения}} = |NM| = |y_1|, \text{ где } y_1: M_1(0, y_1, z)$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| \Rightarrow y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это было лишь доказательство, но нужна лишь итоговая

формула $F(x, y)$ по $Oz \rightarrow F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0$

Чтобы получить уравнение поверхности вращения нужно заменить

y на $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, только нужно правильно выбрать знак, он определяется знаком перед y в исходной кривой

Если вращение идет относительно Oy , то итоговая формула

$$F(y; \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0, \text{ для } Ox: F(x; \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$