Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №6

Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ Р3111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

Конспект по материалу “Аналитическая геометрия”

Лекция №6

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2021

Поверхности второго порядка

Составить общее представление о большинстве ***поверхностей второго порядка*** можно, рассматривая их как точки поверхности, образованной вращением ***линии второго порядка*** вокруг ***оси симметрии***.

Для определния геометрического вида поверхности можно применить ***метод сечений***: рассмотрение сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной одной из координатных осей.

Эллипсоид

Эллипсоид получается из вращения эллипса вокруг его осей симметрии.

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, (a,b,c)>0}$

Параметры ***a***, ***b*** и ***c*** являются ***полуосями эллипсоида***.

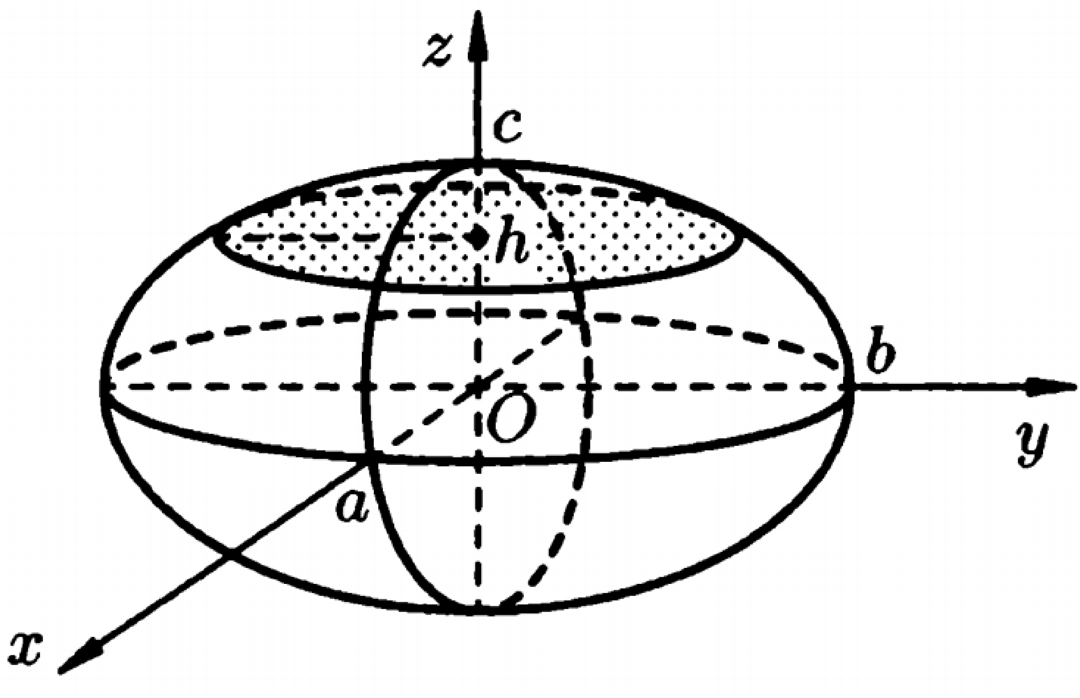
Сечение эллипсоида плоскостью $z=h,\ h\epsilon R$ – кривая $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}}$

1) Если $|h|>c => \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0 => \emptyset$

2) Если $|h|=c => \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 =>$ решением являются две точки ***мнимого пересечения*** с координатами $\boxed{(0,0,\pm c)}$

3) Если $|h|<c => \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>0 => \boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2*(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2*(1-\frac{h^2}{c^2})}=1\\ z=h\end{cases}}$ - это ***эллипс***.

Аналогичные результаты будут при $x=h$ и $y=h$



Замечание: При $a = b = c$: Эллипсоид превращается в сферу; если равны любые две полуоси, то эллипсоид становится ***эллипсоидом вращения*** ***Центром симметрии*** эллипсоида является центр координат.

Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид получен вращением гиперболы вокруг мнимой оси и имеет только одну полость, откуда и идёт название.

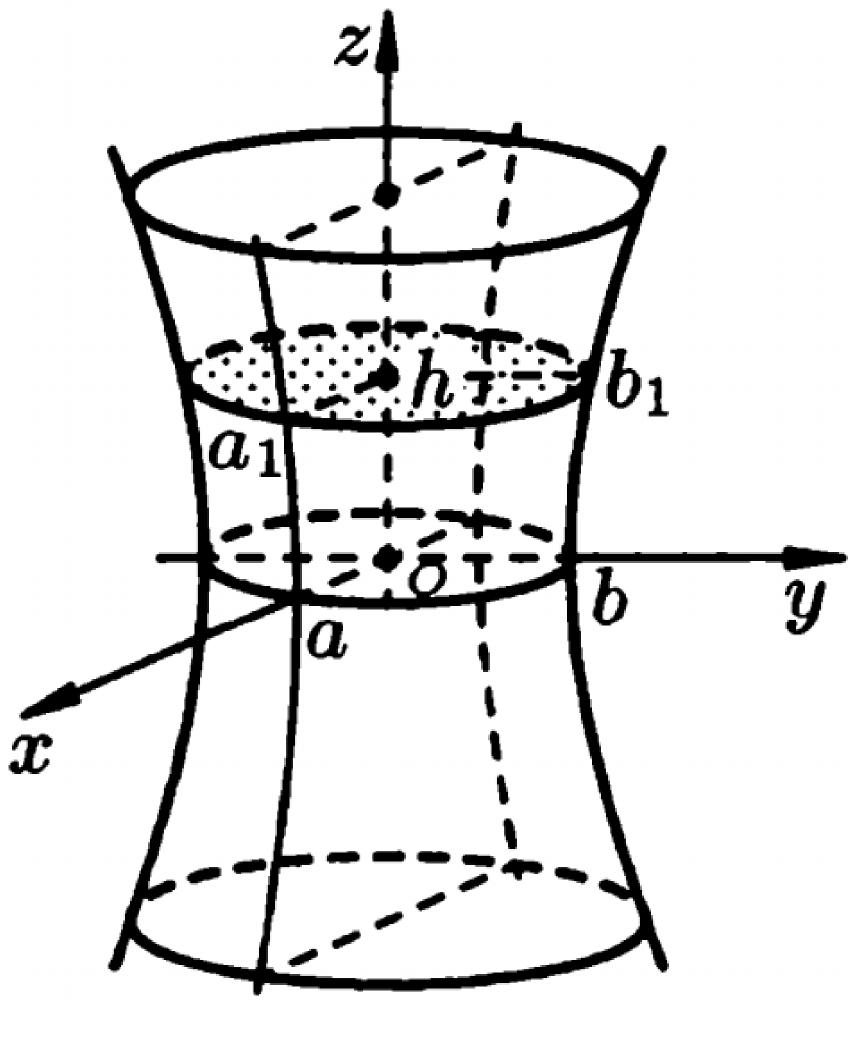
Каноническая форма - $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, (a, b, c) > 0}$

В сечении имеет разный вид, в зависимости от того, какая координата секущей плоскости фиксирована:

1) $z = h \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$ - это ***эллипс***

2) $\left[\begin{matrix} x = h \\ y = h \end{matrix}\right. \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}}$ – пример сечения в виде гиперболы для $y = h$

У всех однополостных гиперболоидов есть ***прямолинейные образующие*** – кривые прямые, которые полностью принадлежать гиперболоиду, причем для каждой его точки существуют две такие образующие.



Двухполостный гиперболоид

Двухполостный гиперболоид получается вращением гиперболы вокруг действительной оси $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,(a,b,c)>0}$

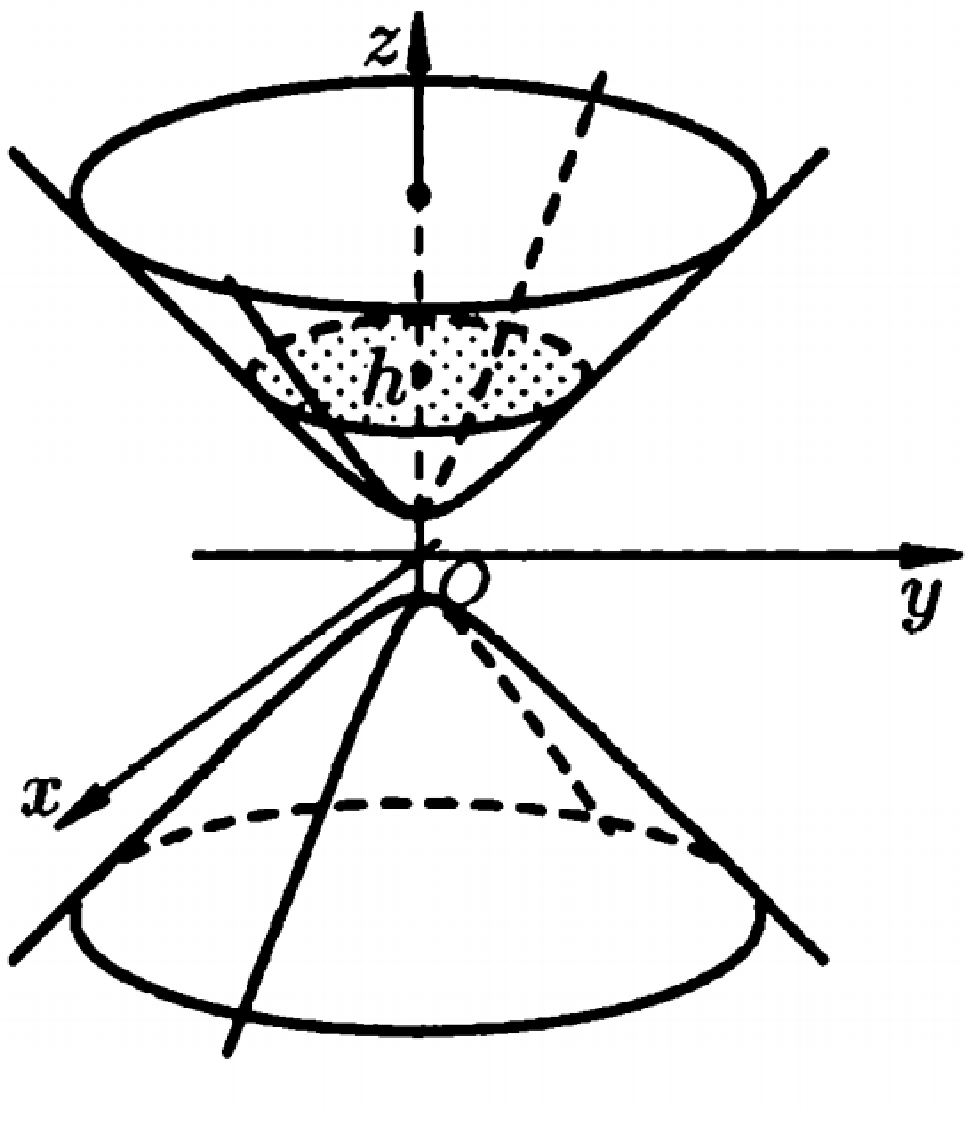
а) $z=h \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases} \Rightarrow$

1) Если $|h|<c \Rightarrow \emptyset$

2) Если $|h|=c \Rightarrow$ пл-ти $z=\pm c$ касаются поверхности в $\boxed{(0,0,\pm c)}$

3) Если $|h|>c \Rightarrow$ эллипсы, полуоси которых ~ $|h|$

б) $x=h$ или $y=h \Rightarrow$ ***гиперболы***: $\left[\begin{array}{l}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{a^2}\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{b^2}\end{array}\right.$



Эллиптический параболоид

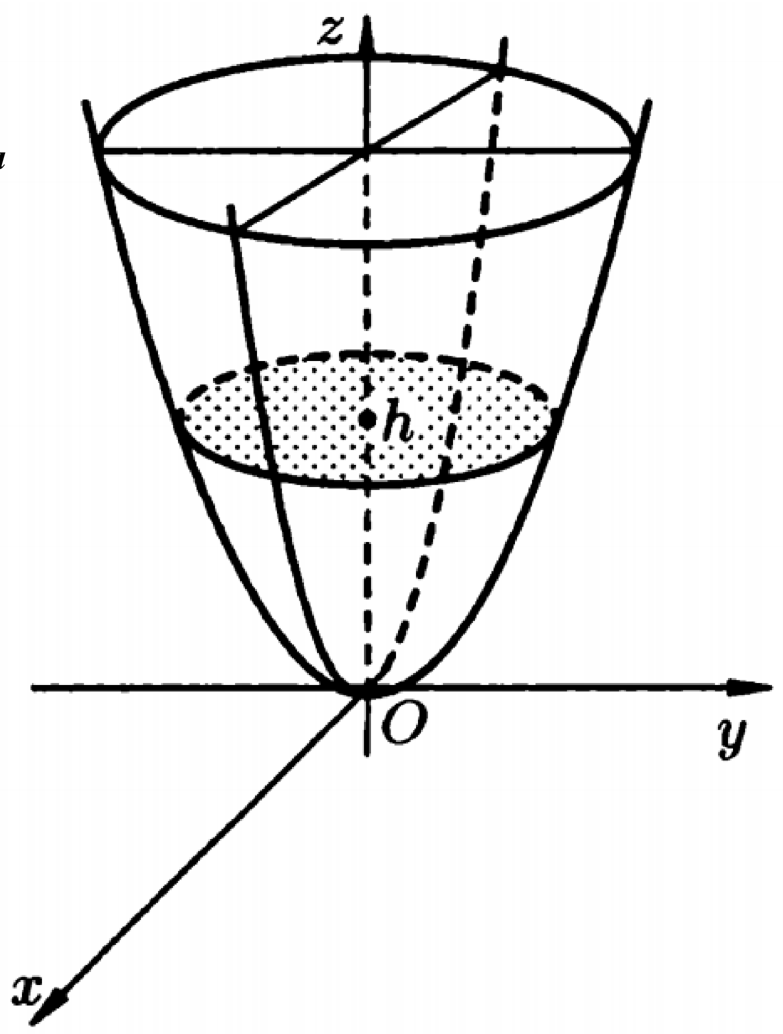
Эллиптический парабалоид получается вращением параболы вокруг её оси симметрии, каноническая формула - $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, (a,b)>0}$

а) $z=h \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h\\ z=h\end{cases}$

1) Если $h<0 \Rightarrow\ \emptyset$
2) Если $h=0 \Rightarrow$ плоскость $z=0$ касается поверхности в $(0,0,0)$
3) Если $h>0 \Rightarrow\ \begin{cases}\frac{x^2}{a^2h}+\frac{y^2}{b^2h}=1\\ z=h\end{cases}$ – эллипс

б) $x=h$ или $y=h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{y^2}{2b^2}-\frac{h^2}{2a^2}\\ z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{h^2}{2b^2}\end{array}\right.$ – парабола

Замечание
При $|a|=|b|$, то это ***параболоид вращения***



Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид имеет формулу виду $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, (a, b) > 0}$

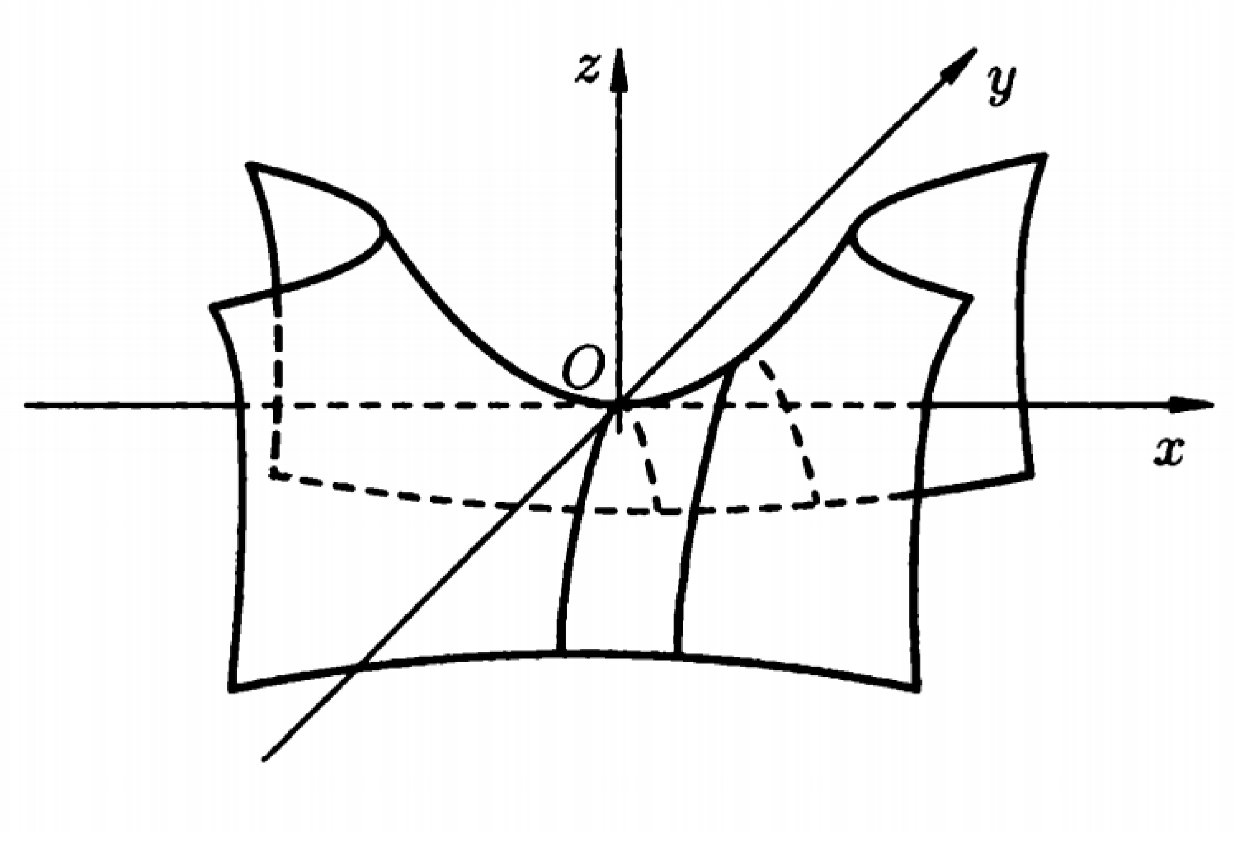
а) $z = h => \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} - \frac{y^2}{b^2 h} = 1 \\ z = h \end{cases}$ - гиперболы $(h \neq 0)$

1) Если $h > 0 =>$ действительная ось гиперболы $\parallel Ox$
2) Если $h < 0 =>$ действительная ось гиперболы $\parallel Oy$
3) Если $h = 0 =>$ пара перескающихся прямых $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{array}\right.$

б) y$= h => \begin{cases} x^2 = -2a^2(z + \frac{h^2}{b^2}) \\ y = h \end{cases}$ - параболы

в) $x = h => \begin{cases} y^2 = -2b^2(z + \frac{h^2}{a^2}) \\ x = h \end{cases}$ - параболы

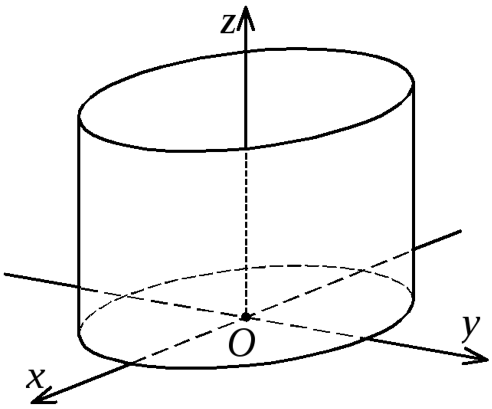
Замечание: фактически гиперболический параболоид представляет из себя перевернутую параболу, параллельную Oyz, чья вершина скользит по параболе в плоскости Oxz. Такая плоскость имеет 2 группы образующих

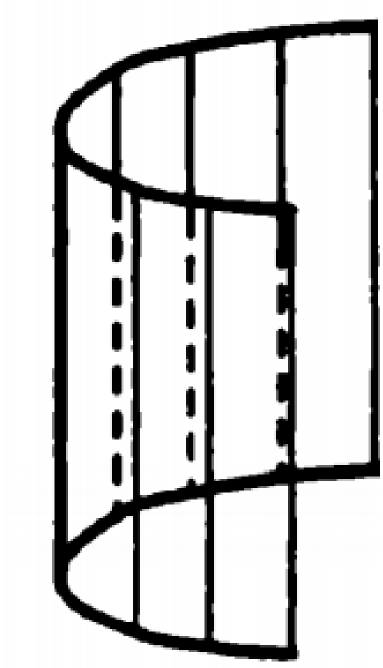


Цилиндр второго поярдка

Цилиндрической поверхностью или ***цилиндром*** можно представить в виде прямой или кривой второго порядка, называемой ***образующей***, которая скользит вдоль ***направляющих***. Если образующая является кривой 2 порядка, то и цилиндр является поверхностью 2 порядка. Если напраявлющие параллельны одной из осей, то такой цилиндр ***прямой***.

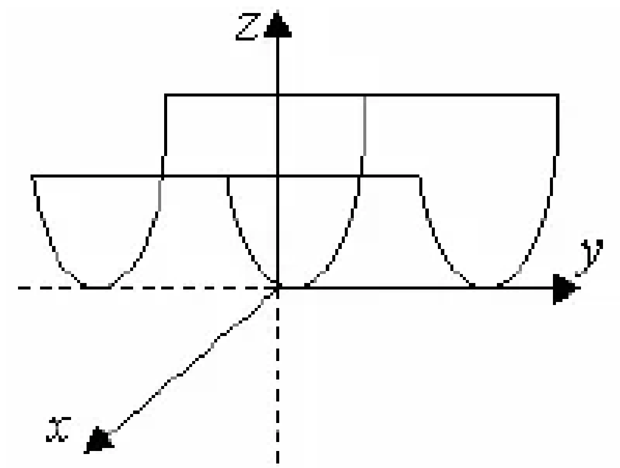
$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ – ***эллиптический цилиндр***

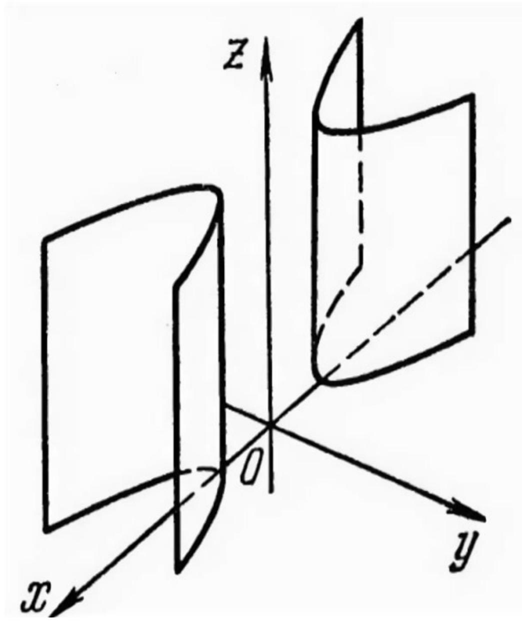




$\boxed{x^2 = 2pz}$ – ***параболический цилиндр***

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ – ***гиперболический цилиндр***





Конус

Канонической поверхностью называют поверхность, получаемым при вращении наклонной прямой и имеет формулу $\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0}$

Поверхность вращения

Поверхность вращения задается вращением кривой второго порядка относительно прямой. Найдем правило получения уравнения поверхности.

Пусть кривая $\boldsymbol{L}$ лежит в Oxy. Её уравнение имеет вид $\begin{cases} F(x,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Найдем уравнение плоскости $\boldsymbol{S}$, образованной вращением L вокруг оси Oz.

Пусть $M_1 \in L, M -$ любая точка $\in S$, проведем через M плоскость α: $\alpha \perp Oz$
=> $M_1 = L \cap \alpha, N = Oz \cap \alpha$

$\begin{cases} N(0,0,z) \\ M(x,y,z) \end{cases} => \boxed{|NM| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$\begin{cases} M_1 \epsilon L \\ M_1 \epsilon \text{ окружности сечения} \end{cases} => \boxed{r_{\text{окр. сечения}} = |NM| = |y_1|}$,где $\boxed{y_1: M_1(0, y_1, z)}$

=> $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| => \boxed{y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}}$

Это было лишь доказательство, но нужна лишь итоговая формула $F(x,y)$по $Oz \rightarrow \boxed{\boxed{F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z\right) = 0}}$

Чтобы получить уравнение поверхности вращения нужно заменить $\boxed{y \text{ на } \pm\sqrt{x^2 + y^2}}$, только нужно правильно выбрать знак, он определяется знаком перед y в исходной кривой

Если вращение идет относительно Oy, то итоговая формула $\boxed{F\left(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0}$, для Ox: $\boxed{F\left(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0}$