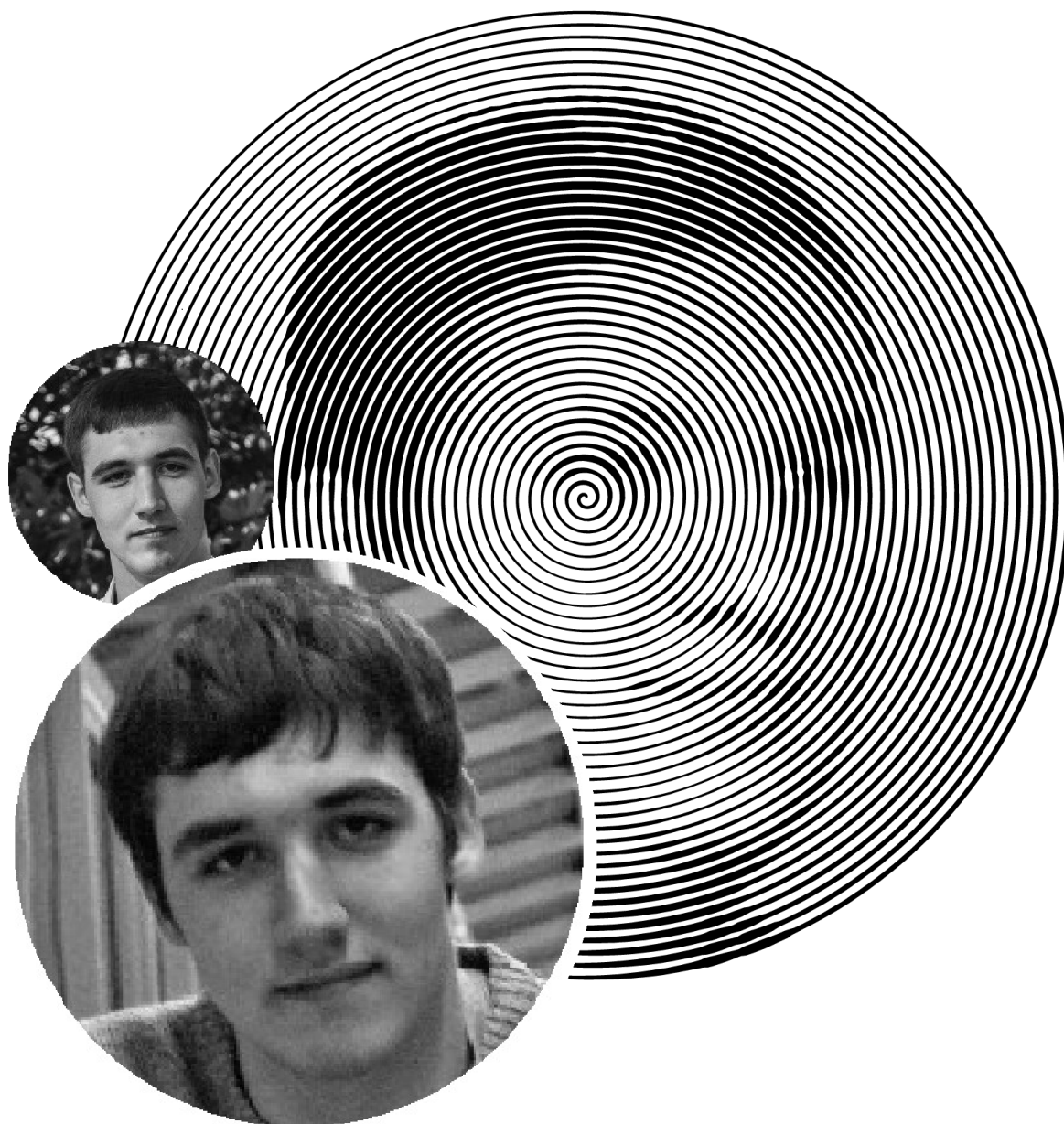


Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

**Конспект по материалу
“Аналитическая геометрия”**

Лекция №5



Санкт-Петербург

2021

МИНИСТР ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЗ111

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ИНСТИТУТ ТЕПЛЫХ МУЖСКИХ ОТНОШЕНИЙ”

Н.Р. Кудлай

За редакцией А.А.Акимова

**Конспект по материалу
“Аналитическая геометрия”
Лекция №5**



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО



Санкт-Петербург

2021

Линии второго порядка

Каждую **линию второго порядка** можно задать общим уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Такое уравнение задает три вида линий: **парабола**, **эллипс** и **гипербола**.

Эллипс

- 1) **Эллипс** – это множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемыми **фокусом** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы $\Rightarrow |F_1F_2| = 2c$. Если $M \in \text{элл.}$, то r_1 и r_2 – расстояния от фокусов до точки M – это **фокальные радиусы**. $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ или

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow a > c$$

Для вывода уравнения эллипса введем такую систему координат, что фокусы находятся на $Ox \Rightarrow F_1(-c; 0), F_2(c; 0) \quad (a > 0, a > c)$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

a – большая полуось, b – малая полуось, c – полурастояние между фокусами

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– это каноническое уравнение эллипса.}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Точки пересечения эллипса и осей называют **вершинами эллипса**.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{– Эксцентриситет эллипса.}$$

$$c < a \Rightarrow 0 \leq \varepsilon < 1, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Исходя из значения эксцентриситета можно понять какой вид имеет гипербола:

При малых значениях: эллипс близок к окружности

При больших: эллипс сплюсчен

Гипербола

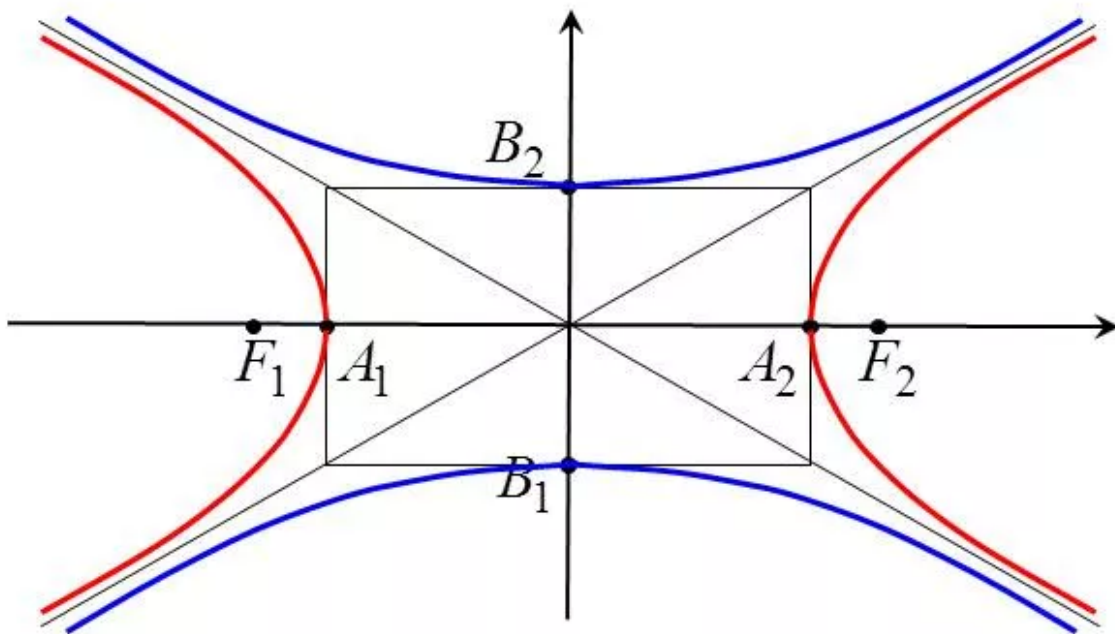
2) **Гипербола** – это множество точек на плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых **фокусом** постоянная, причем большая, чем расстояние между фокусами.

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad a < c$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{– каноническое уравнение прямой}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Точки гиперболы стремятся к прямым, называемым **асимптотами гиперболы**, которые имеют формулу $y = \pm \frac{b}{a}x$



Оси симметрии гиперболы называются **осями гиперболы**, а точка их пересечения, которая совпадает с точкой пересечения асимптот – **центр гиперболы**.

Вершины гиперболы – точки пересечения осей и гиперболы (их всего 2 – на оси Ox : A_1 и A_2).

Параметр a – **действительная полуось гиперболы** (расстояние от центра гиперболы до вершина).

Расстояние от центра гиперболы до **мнимых вершин гиперболы** (B_1 и B_2) называется **мнимой полуосью гиперболы** и обозначается как b .

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ является **основным прямоугольником гиперболы**.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы, **сопряженной** по отношению к гиперболе с уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Если $a = b$, то гипербола **равносторонняя** $\Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

Эксцентриситетом гиперболы называют $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для гиперболы $\varepsilon > 1$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Геометрическое истолкование эксцентриситета: чем он меньше, тем основной прямоугольник более вытянут вдоль действительной оси.

Директрисы эллипса и гиперболы

Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ — **директрисы** эллипса.

Это прямые с уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Для эллипса $\varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} > a \Rightarrow$ Прямые расположены вне эллипса

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ — **директрисы** гиперболы.

Это прямые с уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Для эллипса $\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} < a \Rightarrow$ Прямые расположены между ветвями гиперболы

r — расстояние от произвольной точки множества до какого-нибудь фокуса
 d — расстояние от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисе

$$\frac{r}{d} = \text{const} = \varepsilon$$

Парабола

Парабола – множество точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы

r – расстояние от произвольной точки параболы до какого-нибудь фокуса

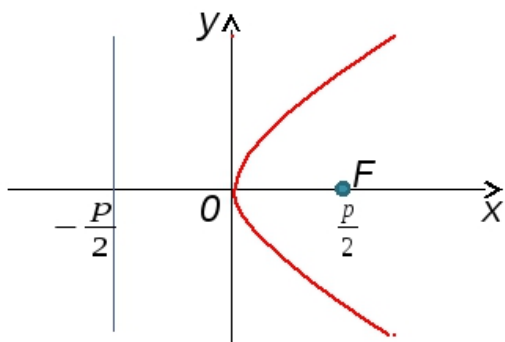
d – расстояние от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы

p – расстояние от фокуса до директрисы. Это **параметр параболы**.

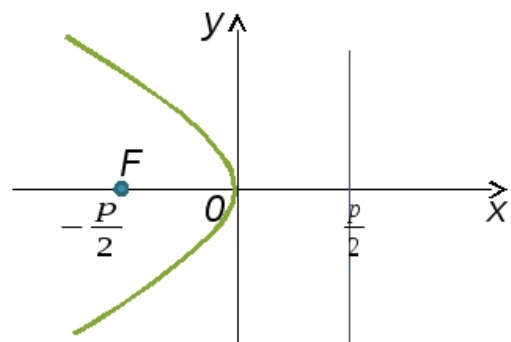
Для параболы: $d = r$

Уравнение параболы: $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$

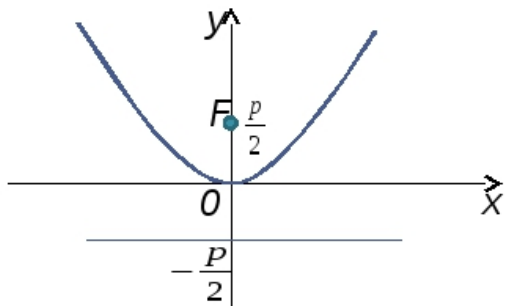
Каноническое уравнение прямой: $y^2 = 2px \Rightarrow y = \sqrt{2px}$



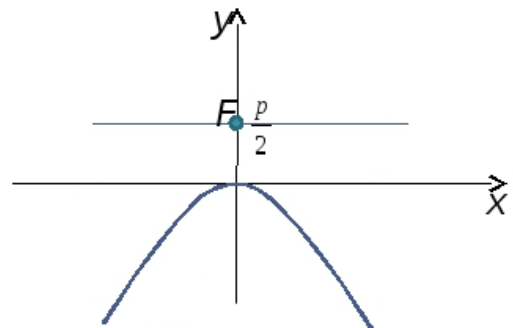
$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = -2px$$



$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$

O – вершина параболы, ось Ox – ось симметрии параболы

Параметр p характеризует “ширину” параболы (геометрический смысл параметра p)

Общее уравнение линии второго порядка

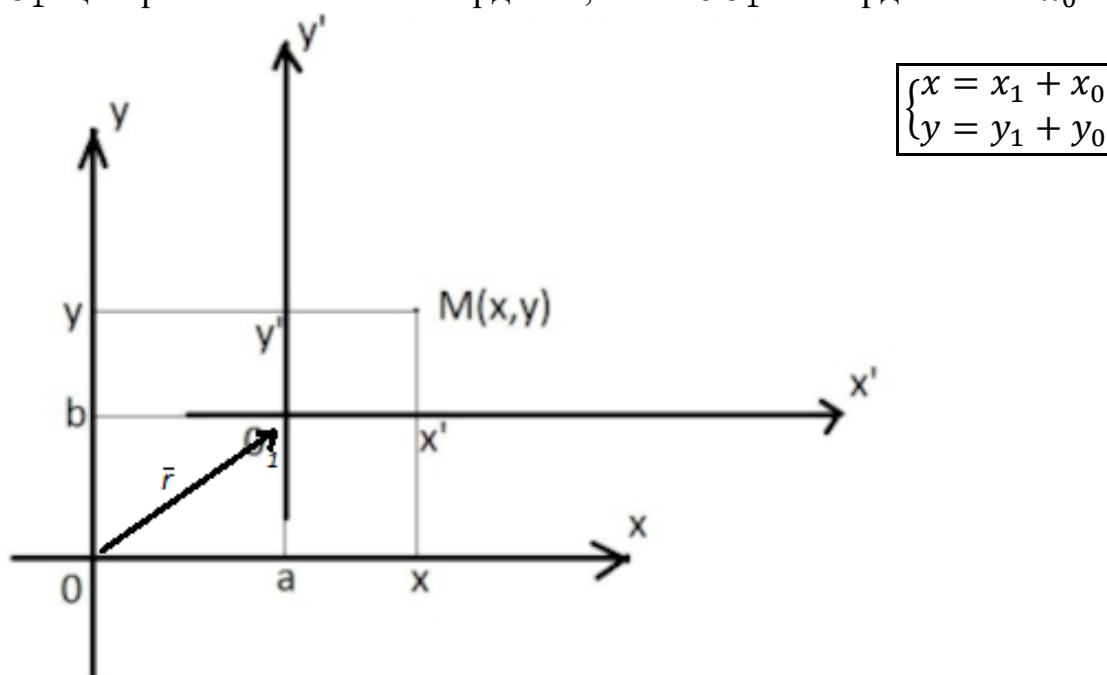
Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2bXY + Cy^2 + 2Dx + 2Fy + F = 0$$

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называют **преобразованием системы координат**. Параллельным переносом и последующим поворотом осей координат можно привести уравнение к виду $A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$, где (A', C', F') – новые коэффициенты, а (x'', y'') – координаты в новой системе.

Параллельным переносом осей координат называют параллельное смещение осей координат.

O_1 - центр новой системы координат, а $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1}$ с координатами x_0 и y_0

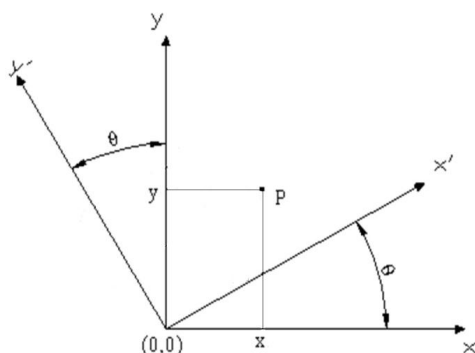


Поворотом осей координат называют поворот осей координат на угол α .

Точка в новой системе координат будет иметь следующие координаты:

(x, y) – координаты в старой системе

(x_1, y_1) – координаты в новой системе



$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Классификация линий второго порядка

Инвариантом общего уравнения второго порядка называют $\boxed{AC - B^2}$

Значением инварианта определяется **тип линий**:

1. Эллиптический, $AC - B^2 > 0$
2. Гиперболический, $AC - B^2 < 0$
3. Параболический, $AC - B^2 = 0$

Эллиптический тип

$AC - B^2 > 0 \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + F = 0$. Возможны три различных случая:

1. $A > 0, C > 0, F < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - это эллипс
2. $A > 0, C > 0, F > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$ - для такого уравнения не существует действительных решений. Это уравнение **мнимого эллипса**.
3. $A > 0, C > 0, F = 0 \Rightarrow \boxed{a^2x^2 + c^2y^2 = 0}$ ($a^2 = A, c^2 = C$). для такого уравнения подходит только точка $O(0,0)$ - это **уравнение пары мнимых пересекающихся прямых**.

Гиперболический тип

$AC - B^2 < 0 \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

1. $AC < 0, F \neq 0 \Rightarrow$ при $F < 0$: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $a^2 = -\frac{F}{A}, b^2 = \frac{F}{C}$ - гипербола
2. $A > 0, C < 0, F = 0 \Rightarrow \begin{cases} ax - cy = 0 \\ ax + cy = 0 \end{cases}$ - пара пересекающихся прямых

Параболический тип

$AC - B^2 = 0 \Rightarrow Cy'^2 + 2Dx' + F = 0$. Система координат с осями Ox' и Oy' получена путем поворота осей координат.

1. $D \neq 0 \Rightarrow \boxed{y''^2 = 2px''}$ - парабола
2. $\begin{cases} D = 0 \\ CF < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y' = \pm a}$ - парабола параллельных прямых
3. $\begin{cases} D = 0 \\ CF > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y' = \pm ia}$ - уравнение пары мнимых параллельных прямых
4. $D = 0, F = 0 \Rightarrow \boxed{y'^2 = 0}$ - уравнение пары совпадающих прямых

Все формулы классификаций линий 2 порядка

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс
3. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола
5. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – пара пересекающихся прямых
6. $y^2 = 2px$ – парабола
7. $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых
8. $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых
9. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых

Все пособия под авторством Никиты Кудлая распространяются на бесплатной основе, так как они помогают усваивать материал и созданы не для капитализации, но тираж уже вскоре достигнет полусотни, а себестоимость составляет 5р, и если есть желание поддержать авторов, то вот счет Сбера:

40817810552097130180