TREBALL PRÀCTIC 2

Data de lliurament: divendres 23 de desembre de 2016

- Aquest treball s'ha de fer en equips de *dues* o *tres* persones.
- S'ha de lliurar un informe clar i concís (longitud màxima: 10 pàgines). L'informe ha de contestar amb precisió a les qüestions plantejades, a més d'incloure el títol, els autors i la data del treball (a la capçalera de la primera pàgina).
- L'informe (en format pdf) i els programes de Matlab o Octave auxiliars (comprimits en un zip) es lliuraran electrònicament a través del Campus Digital, en la data indicada. L'entrega la fa només un dels integrants del grup. Els *noms dels arxius* han de ser TP2***.pdf i TP2***.zip, on *** són els primers cognoms de cadascun dels integrants del grup començant amb majúscules i en ordre alfabètic, sense espais, accents o caràcters especials.

---

1. Donada una funció f, la seva projecció $\mathcal{L}_2\big((a,b)\big)$ en un espai de funcions $\mathcal{S}$ és

$$\Pi(f) := \arg\min_{s\in\mathcal{S}} ||f-s||^2,$$

on $||\cdot||$ és la norma $\mathcal{L}_2$ de funcions, és a dir, la norma associada al producte escalar

$$< u, v >= \int_a^b u(x)v(x)\, dx.$$

a) Donada una base $\{\psi_i\}_{i=1}^{n+1}$ de l'espai $\mathcal{S}$, proposeu i plantegeu un algorisme per a calcular la projecció $\mathcal{L}_2$ d'una funció f.

b) Implementeu una funció de Matlab que, donada una funció f (implementada en Matlab) i uns punts base $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, calculi la projecció $\mathcal{L}_2$ en l'espai d'splines lineals $\mathcal{C}^0$ associat als punts base. Expliqueu la metodologia emprada, justificant les decisions preses.

Per a fer la implementació cal tenir en compte els següents aspectes:

- La funció f pot ser qualsevol funció i, per tant, no es pot considerar integració analítica. Per a la integració numèrica cal fer servir una quadratura que proporcioni el valor exacte de la integral per a totes les integrals de funcions polinòmiques a calcular, amb el mínim cost possible.
- Les funcions spline estan definides a trossos i, per tant, cal fer servir la quadratura en cadascun dels subintervals.
- Per a cadascun dels subintervals (x_e, x_{e+1}) es pot considerar el canvi de variable de $(-1, 1)$ a (x_e, x_{e+1})

$$x(\xi) = \frac{x_e + x_{e+1}}{2} + \frac{h_e}{2}\xi, \quad h_e = x_{e+1} - x_e.$$

- L'expressió de les funcions de la base spline que no s'anulen al subinterval (x_e, x_{e+1}) és senzilla. De fet, és sempre la mateixa expressió en ξ.

c) Mostreu en una figura la funció $f(x) = \sin(x) + x/4$ i la seva projecció $\mathcal{L}_2$ en l'espai de funcions spline lineals $\mathcal{C}^0$ amb punts base $\{0, 1, 3, 4, 5, 7\}$. Coincideixen els valors de la funció i de la seva projecció als punts base? Compareu el resultat amb la funció spline que s'obté amb un criteri d'interpolació.

d) Repetiu els apartats *b)* i *c)* per a l'espai d'splines $\mathcal{C}^1$ cúbics (aproximació d'Hermite).

---

2. Es vol calcular el valor de la integral definida

$$I = \int_0^3 \sin(\mathrm{e}^x)\, dx \tag{1}$$

amb 6 xifres significatives.

a) Calculeu una aproximació de la integral I amb les fórmules compostes del trapezi i de Simpson, amb $m = 4, 8, 16, 32$ subintervals de longitud uniforme. Dibuixeu l'evolució de l'error en funció del número d'avaluacions de la funció, per a cadascun dels mètodes, amb escala logarítmica als dos eixos. Analitzeu els resultats: es comporten els mètodes com esperaveu? tenen la convergència esperada?

b) Predieu quants subintervals m de mida uniforme calen per a cadascun dels mètodes per a aconseguir una aproximació amb 6 xifres significatives correctes. Calculeu l'aproximació amb el número de subintervals deduït en cada cas, i comproveu si tenen la precisió requerida. Podeu fer servir Maple o la funció `integral` de Matlab per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda.

A la vista de com varia la funció a l'interval $(0, 3)$ sembla raonable fer servir una longitud de subinterval més petita a prop de l'extrem $x = 3$ que a prop de l'extrem $x = 0$. Per a reduir el cost de càlcul de la integral I es planteja, doncs, fer servir una *quadratura de Simpson adaptativa* basada en un algorisme recursiu. Cal implementar una funció, que donada una funció f, un interval (a, b) i una tolerància ϵ,

- calcula les aproximacions $S(a, b)$, $S(a, \frac{a+b}{2})$ i $S(\frac{a+b}{2}, b)$, on $S(u, v)$ denota l'aproximació de la integral amb la quadratura de Simpson simple a l'interval (u, v)
- estima l'error a l'interval (a, b) com $E_{ab} = |S(a, b) - (S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b))|$
- si $E_{ab} < \epsilon(b - a)$, l'error és acceptable i retorna el valor de $S(a, b)$

  altrament, crida a la mateixa funció per a calcular les aproximacions de les integrals a l'interval $(a, \frac{a+b}{2})$ i a l'interval $(\frac{a+b}{2}, b)$.

c) Justifiqueu que aquest algorisme recursiu aplicat al càlcul de la integral a $(0, 3)$ proporciona una aproximació amb un error absolut (estimat) menor que 3ϵ.

d) Implementeu l'algorisme recursiu i feu-lo servir per a calcular la integral (1) amb un error absolut menor que 10^{-4}. Feu servir Maple o la funció `integral` de Matlab per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda. Comenteu el resultat.

e) Modifiqueu la funció per que retorni, a més del valor de la integral, les abscisses dels punts que divideixen l'interval $(0, 3)$ en subintervals. Representeu gràficament la funció i els punts obtinguts a una figura per visualitzar quins subintervals s'han fet servir en la quadratura adaptativa, per a obtenir una aproximació amb error menor que 10^{-4} i amb error menor que 10^{-8}. Observeu i comenteu com són els subintervals.

f) Compareu el número de subintervals amb el número de subintervals que es necessitarien amb una quadratura composta de Simpson amb longitud de subinterval uniforme.

---

3. En el decurs d'una excavació arqueològica, s'han trobat les restes d'una columnata, aparentment circular. Disposem de les coordenades (x, y) del centre de la base d'algunes de les columnes.

a) Proposeu raonadament una estratègia per determinar la circumferència que millor aproxima les mesures disponibles.

b) Apliqueu l'estratègia proposada a l'apartat anterior a les dades de la taula 1. Calculeu el radi i les coordenades del centre de la circumferència. Dibuixeu en una gràfica la circumferència i les columnes. Discutiu els resultats obtinguts.

Taula 1: Coordenades de la base de les 10 columnes trobades

col.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x [m]	55.35	49.85	45.85	−25.15	−31.25	−34.95	−30.05	−25.85	25.65	33.49
y [m]	43.49	49.58	54.65	55.35	50.28	42.19	−9.08	−14.55	−26.65	−24.95

---

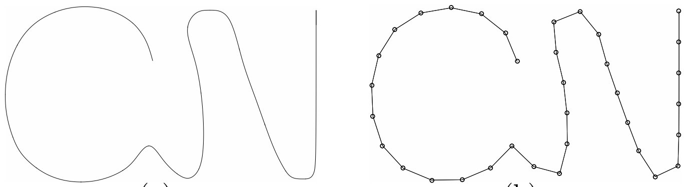
4. En diversos camps (visualització gràfica, simulació -MEF-...), donada una corba $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciable i regular, és necessari trobar una distribució equiespaiada de punts sobre la corba. Per a fer-ho, s'usa el paràmetre arc,

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi$$

per trobar la parametrització natural (amb velocitat unitària) de la corba $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$, on $t(s)$ és la inversa de $s(t)$. D'aquesta forma es pot obtenir la distribució desitjada sobre la corba, definint-la prèviament a $[s(a), s(b)]$ i usant $\tilde{\gamma}$, veure exemple 2D a la figura 1.

Donada la corba a l'arxiu `corba.mat`, es demana:

a) Implementa una funció que, donat un valor de t, calculi $s(t)$ usant una quadratura composta de Simpson amb m intervals. Determina m per a que $s(b)$ tingui 4 xifres significatives correctes i escriu el valor obtingut de $s(b)$. Comenta com has obtingut aquest valor de m.
Indicació: executa `load corba` per carregar la funció `gamma` i la seva primera derivada `dgamma`, i els extrems a i b que defineixen el seu espai paramètric.



(a) (b)

Figura 1: (a) Corba al pla amb les sigles de l'assignatura. (b) Punts equiespaiats sobre la corba calculats usant el paràmetre arc.

A partir d'aquest punt, usarem una quadratura de Simpson composta amb $m = 100$ intervals.

b) Proposa un mètode per a calcular l'antimatge $t \in [a, b]$ corresponent a un valor donat de $s \in [s(a), s(b)]$. Explica el mètode numèric considerat per resoldre el problema i justifica raonadament la teva tria.

c) Implementa en una rutina el mètode proposat a l'apartat *b)*. Escriu el valor de $s = (s(a) + s(b))/2$ i de l'antimatge t corresponent amb 4 xifres significatives.
Indicació: Per tal de simplificar el càlcul de les derivades, si és necessari, la funció `numericalDerivative.m` calcula la derivada numèrica d'una funció en un punt donat.

d) Usa la rutina anterior per calcular una distribució equiespaiada de 35 punts sobre la corba. Escriu com a resultat les coordenades paramètriques t_i i les correspo- nents coordenades físiques $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ dels 3 primers punts, usant 4 xifres significatives. Quina és la distància sobre la corba entre els punts obtinguts?
