

# Lineáris regresszió elméleti összefoglaló

Bognár Miklós

Bevezetés az Ökonometriába

# Contents

0.1	Matematikai összefoglaló . . . . .	2
0.1.1	Pseudoinverzek . . . . .	2
0.1.2	Valószínűségi vektorváltozók . . . . .	2
0.1.3	Mátrixdifferenciálás nagyon röviden . . . . .	3
0.1.4	*Pont és eloszlás Mahalanobis távolsága . . . . .	3
0.2	A lineáris regresszió . . . . .	4
0.3	Az Ordinary Least Squares (OLS) becslési eljárás . . . . .	5
0.3.1	Az OLS-becslés geometriai értelmezése . . . . .	5
0.3.2	Az OLS-becslés mint szélsőérték-feladat . . . . .	6
0.4	Az OLS-becslés tulajdonságai . . . . .	6
0.4.1	A Gauss-Markov feltételezések . . . . .	7
0.4.2	$\hat{\beta}$ varianciája . . . . .	8
0.4.3	Multikollinearitás . . . . .	9
0.4.4	A hibavariancia becslése . . . . .	9
0.5	A $p = 2$ -es egyváltozós regresszió . . . . .	10
0.5.1	$\hat{\beta}$ varianciája egyváltozós regresszió esetén . . . . .	11
0.6	Az $R^2$ mutató . . . . .	12
0.7	Kihagyott változó bias - Omitted Variable Bias . . . . .	13
0.8	MSE és a bias-variancia tradeoff . . . . .	14
0.9	A heteroszkedaszticitás kezelése, a GLS eljárás . . . . .	15
0.9.1	*A GLS becslés analitikus levezetése . . . . .	15
0.9.2	A Feasible Generalized Least Squares (FGLS) eljárás . . . . .	16

*A \*-al jelölt fejezetek/alfejezetek tudtommal nem képezik részét az anyagnak, azonban (szerintem) érdekesek, és segíthetnek jobban megérteni a lineáris regressziót.*

## 0.1 Matematikai összefoglaló

A lineáris regresszió megértéséhez elengedhetetlen, hogy tisztában legyünk néhány, lineáris algebrából ismeretes fogalommal és összefüggéssel. Ezen felül nagyon hasznos, ha ismerjük, hogy hogyan kezelendők a valószínűségi vektorváltozók illetve a mártixdifferenciálás-kifejezések.

### 0.1.1 Pszeudoinverzek

Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \neq m$  nem négyzetes mátrix. Ha egy  $\mathbf{A}x = y$ ,  $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixaként gondolunk rá, akkor  $n \geq m$  vagy  $m \geq n$  esetén rendre a *túlhatározottság* vagy *alulhatározottság* esete állna fent, az első esetben általánosságban nem lenne megoldásunk, a második esetben pedig végtelen sok megoldásunk lenne rá. Látszik, hogy az  $n \neq m$  esetben nem beszélhetünk  $\mathbf{A}^{-1}$  inverzről, helyette egy általánosabb, úgynevezett *pszeudoinverz* kell.

Egy  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$  mátrix *bal oldali pszeudoinverze* (Más néven *Moore-Penrose pszeudoinverz*):

$$\mathbf{A}^\dagger := (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Figyeljük meg, hogy ha  $\mathbf{A}^\dagger$ -el balról megszorozzuk  $\mathbf{A}$ -t, az identitás mátrixot kapjuk, tehát bal oldalról valóban identitásként működik:

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Ha jobbról szoroznánk meg:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Ez semmi más, mint a *projekció-mátrix*  $\mathbf{A}$  oszlopvektorai által kifeszített vektortérre. Ha egy vektor ebben az oszloptérben van, rá persze identitásként hat  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ , ha viszont ezen kívül esik, akkor rávetíti az oszloptérre a vektort. Egy túlhatározott  $\mathbf{A}x = y$  egyenletrendszert tehát "meg lehet oldani", ha  $y$ -t rávetítjük  $\mathbf{A}$  oszlopterére, és megoldjuk az  $\mathbf{A}x = \tilde{y}$  egyenletrendszert:

$$\tilde{y} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T y = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger y$$

$$\mathbf{A}x = \tilde{y} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger y$$

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}x = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger y$$

$$x = \mathbf{A}^\dagger y$$

Az  $n < m$  esetben alulhatározottság áll fenn, itt *jobb oldali pszeudoinverzről* beszélhetünk:

$$\mathbf{A}^\ddagger := \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Bár ezt nem fogjuk a későbbiekben használni, érdemes lehet megjegyezni, hogy a jobb oldali pszeudoinverzrel való balról szorzás esetén - hasonlóan a bal oldali pszeudoinverzhez - projekciómátrixot kapunk, csak most  $\mathbf{A}$  sorvektorai által kifeszített vektortérre.

### 0.1.2 Valószínűségi vektorváltozók

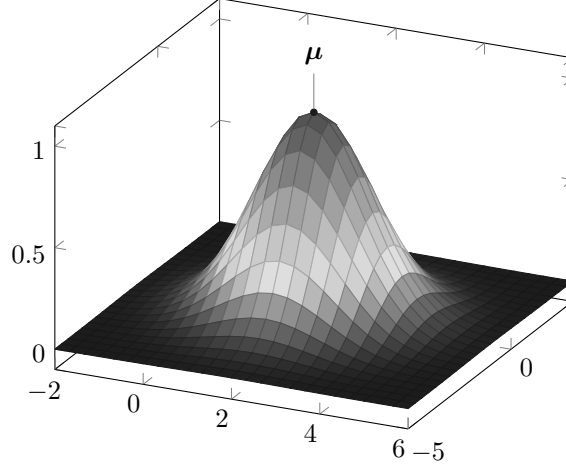
Egy  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$  vektort *valószínűségi vektorváltozónak* hívunk, ha  $\forall i$ -re  $\xi_i$  skalárértékű valószínűségi változó. A továbbiakban csak a vektorértékű normális eloszlást követő valószínűségi vektorváltozókkal foglalkozunk, ezek formálisan felírva:

$$\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

ahol  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  a várható értékek vektora,  $\boldsymbol{\Sigma}$  pedig a *variancia-kovarianca mátrix*. Természetesen  $\text{Var}[\boldsymbol{\xi}] = \boldsymbol{\Sigma}$ . Természetesen  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pozitív szemidefinit és szimmetrikus mártix. Az  $n = 1$  esettel analóg módon  $\xi$  sűrűségfüggvénye

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})}}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|}}$$

A sűrűségfüggvény  $n = 2$  esetben  $\boldsymbol{\mu} = [2, -1]^T$  és  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$  várhatóérték és kovariancia mátrix mellett:



Egy  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix mellett a skaláresethez hasonlóan

$$\text{Var}[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}] = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}]$$

$\boldsymbol{\Sigma}$  kovariancia mátrixot kifejezhetjük várható értékekkel is:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}])(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}])^T] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T] - \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}]\mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}^T]$$

$\boldsymbol{\Sigma}$  alakja:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}[\xi_1, \xi_2] & \dots & \text{Cov}[\xi_1, \xi_n] \\ \text{Cov}[\xi_2, \xi_1] & \sigma_2^2 & \dots & \text{Cov}[\xi_2, \xi_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[\xi_n, \xi_1] & \text{Cov}[\xi_n, \xi_2] & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

ahol  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  rendre  $\xi_1, \dots, \xi_n$  varianciái.

### 0.1.3 Mátrixdifferenciálás nagyon röviden

Legyenek  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  vektorok. Ekkor

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{b}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{a}$$

Ha  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  mátrix, akkor

$$\frac{\partial \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = 2\mathbf{A} \mathbf{b}$$

Ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, akkor ezen felül

$$2\mathbf{A} \mathbf{b} = 2\mathbf{b}^T \mathbf{A}$$

Legyen  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  és  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Ekkor

$$\frac{\partial 2\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial 2\boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

### 0.1.4 \*Pont és eloszlás Mahalanobis távolsága

Ez a rész csak érdekességgént szerepel a PDF-ben, a Generalized Least Squares paraméterbecslés analitikus levezetésének bemutatásában használjuk csak, akinek nincs ideje átolvasni ezt a részt, nyugodtan ugorja át.

Legyen  $F$  egy  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett eloszlás  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$  várható értékekkel és egy pozitív definit  $\boldsymbol{\Sigma}$  variancia-kovariancia mátrixsal. Egy  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  pont Mahalanobis távolsága  $F$ -től

$$d_M(\mathbf{x}, F) := \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$$

Kettő  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  pont  $F$  szerinti Mahalanobis távolsága:

$$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}; F) := \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

## 0.2 A lineáris regresszió

A regresszió kiindulópontja egy  $\mathcal{X}$  normális eloszlású sokaság, melynek minden tagja rendelkezik  $\mathbf{x}_i$  *featurevektor*-ral, avagy magyarázó változó-vektorral (ezek a *regresszorok*), illetve egy-egy skalár  $y_i$  *label*-el, avagy magyarázott változóval (amiket a regresszorok magyaráznak egy lineáris modell alapján, ezt később jobban kifejtjük). A sokaságból  $n$  darab mintát veszünk (megfigyelést végzünk), a *minták iid. normális eloszlásúak*, ami persze azt jelenti, hogy *minden magyarázó változó-vektor egy vektorértékű normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó*. Létezik egy másik konstrukció is, miszerint  $\mathbf{X}$  rögzített, és nem változik mintavételről mintavételre, ez azonban csak annyit jelent, hogy mindenhol, ahol feltételes eloszlás/várható érték van, onnan az  $\mathbf{X}$  feltételt ki kell venni. Mi  $\mathbf{X}$ -re mint valószínűségi vektorváltozók mátrixa tekintünk mostantól.

A megfigyelt magyarázó változó-vektorokat soronként egymásra rakva felépítünk egy úgynevezett *design mátrixot*, melyet mostantól  $\mathbf{X}$ -el jelölünk. Minden  $\mathbf{x}_i$  magyarázó változó-vektor első eleme konstans 1, ez tölti be az intercept, avagy kétdimenziós esetben az y-tengellyel való metszéspont szerepét.  $n$  darab megfigyelés és  $p$  elemszámú magyarázó változó-vektorral  $\mathbf{X}$  alakja a következő:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & \dots & x_{1,p-1} \\ 1 & x_{2,1} & \dots & x_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n,1} & \dots & x_{n,p-1} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

A megfigyelt magyarázott változókat szintén sorokba tömörítjük, így mivel mindegyik skalár, egy vektort kapunk:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A lineáris regresszió kiindulópontja mindig egy *modell*, avagy egy elméleti feltevés arról, hogy milyen kapcsolatban áll a magyarázott  $\mathbf{y}$  változó a magyarázó  $\mathbf{X}$  regresszorokkal.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

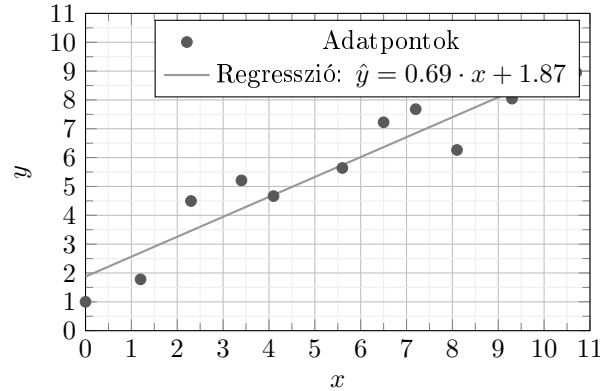
A lineáris kapcsolatot a  $\boldsymbol{\beta}$  együtthatóvektor (avagy *paramétervektor*) írja le, míg  $\boldsymbol{\epsilon}$  a regresszorok által nem magyarázott eltéréseket, avagy *hibákat* jelenti. Mostantól  $\boldsymbol{\epsilon}$ -re *hibavektor* néven hivatkozunk.

A regresszió célja, hogy megtaláljuk azt a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  *paraméterbecslés-vektort*, hogy az

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

úgynevezett *predikciós* egyenletből származott *becsült*  $\hat{\mathbf{y}}$  vektor a lehető legközelebb legyen a valódi megfigyelt  $\mathbf{y}$  vektorhoz. Persze megfigyeletlen  $\mathbf{x}$  magyarázó változók esetén a predikciós egyenlet szintén működik, és valójában ez is a célja a regressziónak.

A lineáris regresszió egy darab regresszor (magyarázó változó) esetén az alábbi ábrával szemléltethető:



Itt  $\hat{\beta}$  paraméterbecslés vektor alakja

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,87 \\ 0,69 \end{bmatrix}$$

Azt, hogy hogyan kaptuk meg  $\hat{\beta}$  paraméterbecslést, a következő fejezetek tárgyalják részletesen. Ezen kívül külön foglalkozunk majd a fenti egyváltozós regresszióval is (a  $p = 2$ -es eset).

## 0.3 Az Ordinary Least Squares (OLS) becslési eljárás

A lineáris regresszió  $\hat{\beta}$ -jának megtalálására az egyik lehetséges eljárás az Ordinary Least Squares, avagy legkisebb négyzetek módszere. Az eljárást kettő szempontból is megvizsgáljuk.

### 0.3.1 Az OLS-becslés geometriai értelmezése

Szinte mindig  $n > p$ , azaz több megfigyelésünk van, mint amennyi magyarázó változónk, így az

$$\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$$

egyenletrendszer *túlhatározott*, és nagyon specifikus esetektől eltekintve nem létezik egzakt megoldás  $\beta$ -ra. Az első fejezetben azonban láttuk, hogy a bal oldali pszeudoinverz pontosan ezt a problémát orvosolja. A jelölési konvenció a megoldásból nyert *paraméter-becslésre*  $\hat{\beta}$ , ami a mintavétel véletlenszerűségéből adódóan maga is vektorértékű valószínűségi változó ( $\hat{\beta}$  pontos eloszlásáról a későbbiekben lesz szó):

$$\hat{\beta} = \mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Ebben az esetben  $\mathbf{y}$ -t az  $\mathbf{X}$  design mátrix oszlopterére vetítettük.  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  *Gram-mátrix* néven is ismeretes (egyébként  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ -ra is szoktak utalni ezen a néven, annyi különbséggel, hogy az előbbi a regresszorok közti korreláció mértékét mutatja a mintavételeken keresztülfutva, egyfajta *temporális* módon, az utóbbi pedig magukon a regresszorokon keresztülfutva egyfajta *térbeli* korrelációt mutat). Az  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  mátrix determinánsát *Gram-determinánsnak* is hívják.

Ha  $n < p$ , azaz kevesebb megfigyelésünk van, mint amennyi magyarázó változónk, az egyenletrendszer alulhatározott lesz, és nem fog létezni bal oldali pszeudoinverz, így nem lesz olyan  $\mathbf{X}^{\dagger}$  mátrix, amivel balról beszorozva  $\mathbf{X}$ -et az identitásmátrixot kapnánk. Ha  $\mathbf{X}^{\dagger}$ -el próbálkozunk, ami létezik:

$$\mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{y}$$

a bal oldalon  $\mathbf{X}$  sorterére való vetítési mátrixot kapnánk. Innen az is következik, hogy amint megtaláltuk  $\hat{\beta}$  első  $n$  elemét, a maradék  $p - n$  együttható az első  $n$  együttható lineáris kombinációjaként állna elő szűkszerűen. Ezért mostantól feltesszük, hogy a "normális"  $n > p$  eset áll fenn.

A továbbiakban a *tényleges hibavektor* jelölése  $\mathbf{e}$ , a valós  $y_i$ -k és a  $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\mathbf{y}}$  modellbecslés által prediktált  $\hat{y}_i$ -k közti eltérések vektora (sokszor  $\mathbf{e}$ -t  $\hat{\mathbf{e}}$ -ként is jelölik):

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} y_1 - \hat{y}_1 \\ y_2 - \hat{y}_2 \\ \vdots \\ y_n - \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

### 0.3.2 Az OLS-becslés mint szélsőérték-feladat

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$  paraméterbecslés-vektort megkaphatjuk úgy is, ha tekintjük az alábbi minimalizálási feladatot:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} \rightarrow \min_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$$

azaz minimalizáljuk a becsült  $\hat{y}_i$  és tényleges  $y_i$  magyarázott változók közötti négyzetösszeget.  $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ -t RSS, azaz *sum of squared residuals* néven is emlegetik. Írjuk ki a hiba-négyzetösszeg teljes alakját:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Itt felhasználtuk, hogy a transzponálás "megfordítja a szorzatot", illetve hogy skalár transzponáltja önmaga, így  $\mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ . A minimalizációhoz vennünk kell a kifejezés  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  szerinti deriváltját, majd 0-val egyenlővé tenni:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

Ebből megkapjuk az úgynevezett *normálegyenletet*:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$  szimmetrikus, és ha feltesszük, hogy létezik inverze, akkor balról beszorozva mindét oldalt:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Látható, hogy pontosan ugyanaz jött ki, mint a pszeudinverzes levezetésben. Míg ez utóbbi pusztán analitikus úton jutott el  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -hoz, a pszeudinverzes módszert geometrikus úton is el lehet képzelni.

## 0.4 Az OLS-becslés tulajdonságai

Vegyük az OLS paraméterbecslés normálegyenletét, és figyeljük meg, hogy  $\mathbf{X}^T \mathbf{e} = \mathbf{0}$ :

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

A modellből adódóan  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}$  behelyettesítéssel:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e})$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}^T \mathbf{e}$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

valóban. Ez azt jelenti, hogy *minden magyarázó változó (regresszor) korrelálatlan a hibával*, pontosabban megfogalmazva *a regresszorok és a hibák mintakorrelációja zérus*. Mivel  $\mathbf{X}$  mátrix első oszlopa konstans 1-eket tartalmaz, így  $\hat{\beta}_0$  maga az intercept lesz, és emiatt

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0$$

azaz a hibák összege 0. Ha leosztunk  $n$ -nel:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = \bar{e}$$

azaz a hibatagok (*rezidiumok*) mintaátlaga - ami persze torzítatlan becslése a várható értéknek - 0, tehát  $\mathbb{E}[e] = \mathbf{0}$ .

Egy másik, ugyancsak fontos tulajdonság a predikciós formulából következik:

$$\hat{\mathbf{y}}^T \mathbf{e} = (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{e} = 0$$

azaz a becsült  $\hat{y}_i$ -ok korrelálatlanok a rezidiumokkal. Így azt is beláthatjuk, hogy a modell által prediktált és a tényleges magyarázott változók mintaátlagai megegyeznek:

$$\bar{y} = \bar{\hat{y}}$$

Felmerülhet a kérdés, hogy mindig létezik-e  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ . Abban az esetben, ha  $\mathbf{X}$  oszloprangja kisebb, mint  $p$ , tehát *tökéletes multikollinearitás* áll fenn, akkor  $\mathbf{X}$  szinguláris értékei között lesz 0, így  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  sajátértékei között is, azaz  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  nem lesz invertálható. Ezentúl tehát feltételezzük, hogy nem áll fenn tökéletes multikollinearitás.

### 0.4.1 A Gauss-Markov feltételezések

A Gauss-Markov feltételezések biztosítják, hogy a *Gauss-Markov tétel* értelmében az OLS eljárással kapott  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  paraméterbecslésünk *BLUE*, azaz *Best Linear Unbiased Estimator* lesz. Ez azt jelenti, hogy nem fogunk tudni találni olyan - nem az OLS eljárással kapott - paraméterbecslést  $\boldsymbol{\beta}$ -ra, ami lineáris, torzítatlan, és kisebb mintavarianciával rendelkezik, mint  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  (az utóbbi tulajdonságra mint  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  *hatásossága* szoktak hivatkozni).

Formálisan kimondva az első Gauss-Markov feltétel a már látott modellegyenlet:

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y}$$

A második Gauss-Markov feltétel szerint  $\mathbf{X}$  oszloprangja megegyezik oszlopainak számával, az oszlopok mind lineárisan függetlenek, azaz nincs zérus szinguláris értéke. Ezt  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  létezésénél már feltételeztük, formálisan ez is egyike a feltételeknek.

A harmadik feltétel szerint

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon} \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \mid \mathbf{X} \\ \epsilon_2 \mid \mathbf{X} \\ \vdots \\ \epsilon_n \mid \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Ez azt jelenti, hogy a modell szerinti hibatag várható értékét nem befolyásolja egyik magyarázó változó sem. Ebből következőleg

$$\mathbb{E}[\mathbf{y} \mid \mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \mid \mathbf{X}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

A negyedik feltétel a hibák kovariancia mátrixára vonatkozik, mégpedig

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T \mid \mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

A hibatagok *homoszkedasztikusak és korrelálatlanok*, azaz azonosan  $\sigma^2$  varianciájúak és  $\forall i \neq j : Cov[\epsilon_i, \epsilon_j] = 0$ . Ha kiírjuk  $\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T$  mátrixformáját:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T \mid \mathbf{X}] = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \epsilon_1^2 \mid \mathbf{X} & \epsilon_1 \epsilon_2 \mid \mathbf{X} & \dots & \epsilon_1 \epsilon_n \mid \mathbf{X} \\ \epsilon_2^2 \mid \mathbf{X} & \epsilon_2 \epsilon_2 \mid \mathbf{X} & \dots & \epsilon_2 \epsilon_n \mid \mathbf{X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_n^2 \mid \mathbf{X} & \epsilon_n \epsilon_2 \mid \mathbf{X} & \dots & \epsilon_n^2 \mid \mathbf{X} \end{bmatrix}$$



és persze  $\forall i : \mathbb{E}[\epsilon_i | \mathbf{X}] = 0$  miatt a fenti mátrix diagonálisában  $\epsilon_i$ -k varianciái, a többi helyen pedig a kovarianciák, amik a feltétel szerint 0-k, így  $\mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T | \mathbf{X}]$  kovarianciamátrix valóban diagonális, a homoszkedaszticitás feltétele mellett pedig minden diagonális elem  $\sigma^2$ . Mostantól a hibatagok varianciáját  $\Sigma$  fogja jelölni,  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ .

Az utolsó feltétel szerint a hibatagok normális eloszlást követnek:

$$\epsilon | \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$$

Kijelenthetjük tehát, hogy  $y_i$ -k varianciáját nem csak  $x_i$ -ek magyarázzák, hanem  $\sigma^2$  *magyarázatlan variancia* is. Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a modell szerint minden  $\mathbf{y}$  magyarázott változó-vektor regresszorok szerinti feltételes eloszlása

$$\mathbf{y} | \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}\beta, \Sigma)$$

Lássuk be, hogy a feltételek teljesülése mellett  $\hat{\beta}$  valóban torzítatlan becslést ad  $\beta$ -ra! Láttuk, hogy  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ , és a modell szerinti  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$  behelyettesítéssel

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\beta + \epsilon)$$

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon,$$

mindkét oldalon véve a várható értéket:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \mathbb{E}[\beta] + \mathbb{E}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon] = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{X}^T \epsilon]$$

Mivel a Gauss-Markov feltételekből következően  $\mathbb{E}[\mathbf{X}^T \epsilon] = \mathbf{0}$ , így

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$$

ezzel készen is vagyunk. A  $\mathbb{E}[\mathbf{X}^T \epsilon] = \mathbf{0}$  tulajdonságot *exogenitásnak* is hívjuk. Ez persze semmi mást nem jelent, mint hogy a regresszorok korrelálatlanok a hibával.

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, \epsilon] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^T \epsilon] - \mathbb{E}[\mathbf{X}] \mathbb{E}[\epsilon] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^T \epsilon] = \mathbf{0}$$

#### 0.4.2 $\hat{\beta}$ varianciája

A hibavektor variancia-kovariancia mátrixához hasonlóan képezhetjük  $\hat{\beta}$  valószínűségi vektorváltozó variancia-kovariancia mátrixát:

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \mathbb{E}[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T]$$

Láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon \implies \hat{\beta} - \beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon \\ \mathbb{E}[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T] &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon^T\right] \end{aligned}$$

A transzponálás "szorzatmegfordító" tulajdonságából következően, illetve  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  szimmetrikus voltából

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon \epsilon^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\right]$$

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbb{E}[\epsilon \epsilon^T] \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

Itt válik igazán fontossá, hogy  $\mathbb{E}[\epsilon \epsilon^T]$  variancia-kovariancia mátrix alakja  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , így  $\sigma^2$  kiemelhető a mátrixszorzások elé, az identitást pedig triviálisan nem szükséges kiírni:

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

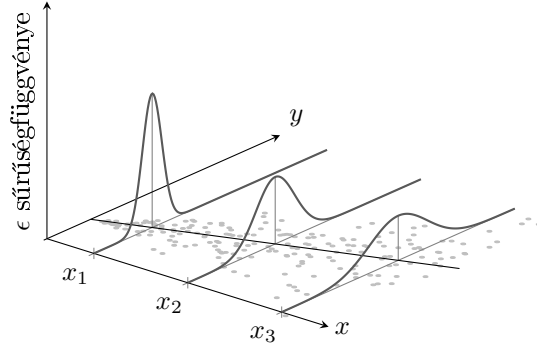
A mátrixszorzás asszociativitásából pedig a

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

végleges alakot kapjuk. Ugyanez megkapható az első fejezetben bemutatott  $Var[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}] = \mathbf{A}Var[\boldsymbol{\xi}]\mathbf{A}^T$  transzformált variancia képlettel is,  $\boldsymbol{\xi}$  helyett  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{A}$  helyett pedig  $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$  transzformáció mátrixsal (már ha  $\mathbf{X}$ -eket fixnek tekintjük). A várható értékes felírásból látszik, hogy persze  $Var[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$  alakja

$$\mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T] = \begin{bmatrix} Var[\hat{\beta}_1] & Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2] & \dots & Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_p] \\ Cov[\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1] & Var[\hat{\beta}_2] & \dots & Cov[\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_1] & Cov[\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_2] & \dots & Var[\hat{\beta}_p] \end{bmatrix}$$

Ha  $n$  elég nagy, akkor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  eloszlása *megközelítőleg normális lesz*. Csupán érdekesség, de el lehet képzelni, hogy heteroszkedaszticitás ( $\exists i, j : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ ) és  $p = 2$  mellett a modell az alábbi ábrával szemléltethető:



### 0.4.3 Multikollinearitás

Ugyan feltettük, hogy nem létezik tökéletes multikollinearitás, de attól függetlenül valamilyen szintű multikollinearitás mindig elképzelhető a regresszorok között.

Minél nagyobb a multikollinearitás mértéke, annál kevésbé különböznek  $\mathbf{X}$  oszlopai egymástól, azaz  $\mathbf{X}$  determinánsa annál kisebb. Emiatt  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  determinánsa is kisebb lesz, és mivel tetszőleges négyzetes mátrix esetén

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1},$$

ezért a paraméterbecslés varianciája képletében  $\det((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1})$  nagy lesz. Ugyan ez nem egzakt matematikai összefüggés, de intuitíven el lehet képzelni, hogy ez "agresszívebb"  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -varianciákat eredményez. Egy másik fontos következmény inkább technikai jellegű, mégpedig hogy a numerikus algoritmus, ami kiszámolja  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  inverzét, jelentős multikollinearitás mellett pontatlan eredményt fog adni.

### 0.4.4 A hibavariancia becslése

A Gauss-Markov feltevések között szerepelt, hogy a hibatagok regresszorok szerinti feltételes eloszlása normális, egy bizonyos  $\boldsymbol{\Sigma}$  variancia-kovariancia mátrixsal. Azt is feltettük, hogy  $\boldsymbol{\Sigma}$  alakja

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

azaz a mátrix diagonális, és minden diagonálisbeli elem azonosan  $\sigma^2$ . Felmerül persze a kérdés: Honnan tudjuk, hogy mi ez a  $\sigma^2$  variancia? Ennek megoldásához *torzítatlan becslést kell adnunk  $\sigma^2$ -ra a regresszióból*.

$\sigma^2$  torzítatlan becslése:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{n-p} = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

ahol  $n$  a megfigyelések száma,  $p$  pedig a magyarázó változók száma (az interceptet is beleértve). Mivel  $p - 1$  valódi magyarázó változónk van (azaz ami nem konstans, azaz nem  $\beta_0$ ), így a hibavariancia-becslés nevezőjében - a valódi  $(\beta_1 \dots \beta_{p-1})$   $p - 1$  darab magyarázó változóval -  $n - (p - 1) - 1$  áll.

## 0.5 A $p = 2$ -es egyváltozós regresszió

Nézzük meg, hogy eddig látott paraméterbecslés és becslés-variancia hogy néz ki a legegyszerűbb, egy darab konstans interceptet és egy darab magyarázó változót tartalmazó OLS-el becsült modellben. A modell egyenlete minden  $i = 1 \dots n$  megfigyelésre

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Az  $\mathbf{X}$  design mátrixunk most

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$$

lesz,  $\hat{\beta}$  paraméterbecslés pedig

$$\hat{\beta} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

A  $2 \times 2$ -es mátrixok invertálása könnyen megy:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{1}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & -\sum_i x_i \\ -\sum_i x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i \\ -\sum_i x_i \sum_i y_i + n \sum_i x_i y_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{n(\frac{1}{n} \sum_i x_i^2) \cdot n(\frac{1}{n} \sum_i y_i) - n(\frac{1}{n} \sum_i x_i) \cdot n(\frac{1}{n} \sum_i x_i y_i)}{n^2(\frac{1}{n} \sum_i x_i^2) - n^2(\frac{1}{n} \sum_i x_i)^2} \\ \frac{n^2 \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i - n(\frac{1}{n} \sum_i x_i) \cdot n(\frac{1}{n} \sum_i y_i)}{n^2(\frac{1}{n} \sum_i x_i^2) - n^2(\frac{1}{n} \sum_i x_i)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az  $n$  elemű mintából képzett *mintaátlag* semmi más, mint  $\frac{1}{n} \sum_i x_i$  illetve  $\frac{1}{n} \sum_i y_i$ , a kovariancia  $x$  és  $y$  között pedig  $\mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$ ,  $n$  elemű - a várható értéket torzítatlanul becsülő - mintaátlagokkal ez persze semmi más, mint az *empirikus kovariancia*  $\text{empcov}[x, y] = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i - (\frac{1}{n} \sum_i x_i)(\frac{1}{n} \sum_i y_i)$ .  $x$  varianciája  $\mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$ -ként áll elő,  $\mathbb{E}[x^2]$  empirikus becslése pedig  $\frac{1}{n} \sum_i x_i^2$ . A vektor mindkét elemében  $n^2$ -el leosztva látható, hogy a nevezőkben pontosan  $x$  mintából számolt varianciája (*empvar*) van, míg a vektor második elemének számlálója pontosan  $x$  és  $y$  mintából számolt kovarianciája. A vektor első elemének számlálójában  $\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}$  áll. Jelölje mostantól a mintából számolt varianciát és kovarianciát  $\widehat{Var}$  és  $\widehat{Cov}$ , ezzel a paraméterbecslés alakja

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\widehat{Var}[x]} \\ \frac{\widehat{Cov}[x, y]}{\widehat{Var}[x]} \end{bmatrix}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a legegyszerűbb egyváltozós regresszió becsült paraméterei

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\widehat{Var}[x]}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{Cov}[x, y]}{\widehat{Var}[x]}$$

Sokszor a mintaszámmal normálatlan empirikus kovarianciát és varianciát  $S_{xy}$  és  $S_{xx}$  jelöléssel látják el:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

ezekkel felírva  $\beta_1$  becslését:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$\beta_0$  becslésének alakja  $\beta_1$  ismeretében is kiszámolható, és sokszor ez a módszer sokkal kényelmesebb (már ha ismerjük  $\hat{\beta}_1$  értékét):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Ez nem csak intuitívan értelmezhető ("Az átlagos  $y$  semmi más, mint az  $y$ -tengellyel való metszéspont és  $\hat{\beta}_1 \bar{x}$  összege"), hanem formálisan is levezethető a modell egyenletéből (meg abból, hogy beláttuk, hogy a paraméterbecslés torzítatlan a feltevéseink mellett, illetve hogy a hibatagok várható értéke 0):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

$$\mathbb{E}[y] = \beta_0 + \beta_1 \mathbb{E}[x]$$

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y] - \beta_1 \mathbb{E}[x]$$

A várhatóérték-operátor helyett persze a mintaátlagokkal dolgozva:

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

valóban.

### 0.5.1 $\hat{\beta}$ varianciája egyváltozós regresszió esetén

Láttuk, hogy a paraméterbecslés varianciája az általános esetben

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

A már levezetett  $p = 2$ -es design mátrixsal dolgozva:

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \right)^{-1} = \sigma^2 \frac{1}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & -\sum_i x_i \\ -\sum_i x_i & n \end{bmatrix}$$

Használjuk ki az empirikus variancia képletét:

$$n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Innen könnyen látszik, hogy

$$\text{Var}[\hat{\beta}_0] = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{Var}[\hat{\beta}_1] = \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Kimondhatjuk tehát, hogy ahogy  $\sigma^2$  nő, úgy nő a paraméterbecslésünk varianciája, avagy *bizonytalansága* is. Hasonlítsuk össze az általános esetben kapott  $\hat{\beta}$  variancia képletét  $\beta_1$  varianciával:

$$\sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

$$\sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{-1}$$

A  $2 \times 2$ -es mátrixszorzást elvégezve tényleg azt kaptuk, hogy az egyváltozós regresszió esetén  $S_{xx}$  semmi más, mint az  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  centralizálatlan regresszor-kovariancia mátrix.

Nagyon fontos - és ezért itt is kihangsúlyozandó - hogy *y varianciája kettő forrásból jön: a regresszorok varianciájából és a regresszorok által nem magyarázott hibavarianciából*. Írjuk ezt az összefüggést fel a mi esetünkben a modellegyenlet segítségével (persze a regresszorok és a hibák korrelálatlansága mellett):

$$\text{Var}[\mathbf{y}] = \beta_1^2 \text{Var}[\mathbf{x}] + \text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}]$$

Itt kihasználtuk, hogy a modell szerint  $\beta_0$  konstans, így zérus varianciája van.  $\text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}]$  hibavariancia az a része  $y$  varianciájának, amit nem magyaráznak a regresszorok. Ha  $\text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}]$  kicsi, ez annyit jelent, hogy a becslt  $\hat{y}$ -ok és a tényleges  $y$ -ok közel vannak egymáshoz, azaz a regresszióval nagyon jól becsülhetjük a valódi  $y$  értékeket.

## 0.6 Az $R^2$ mutató

Tekintsük az egyváltozós regressziós modellt. Legyen

$$R^2 := \frac{\beta_1^2 \text{Var}[\mathbf{x}]}{\text{Var}[\mathbf{y}]}$$

az arány, amiben a regresszorok varianciája magyarázza a magyarázott változó teljes varianciáját.  $R^2$  0 és 1 közötti szám, minél közelebb van 1-hez, annál jobban becsülhető  $y$  a regresszorokkal.  $\beta_1$  becslését beírva adódik:

$$R^2 = \frac{|\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]|^2}{\text{Var}[\mathbf{x}] \text{Var}[\mathbf{y}]}$$

$R^2$  a regresszió "erősségét" mutatja, így a normálatlan empirikus kovarianciákkal és varianciákkal ( $S_{xy}$ ,  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ):

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} S_{yy}}$$

Itt persze  $S_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$  Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$SST$  a *Sum of Squares Total*,  $SSE$  a *Sum of Squares Explained*,  $SSR$  pedig a *Sum of Squares Residual*. Az előbbi varianciafelbontásból könnyen látszik, hogy mivel  $SSE$  a regresszorok által magyarázott variancia,  $SSR$  pedig a magyarázatlan variancia:

$$SST = SSE + SSR$$

$R^2$ -et az előbbihez hasonlóan, csak most az új jelölésekkel felírva:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

(Az irodalomban néha - zavaró módon - Az  $SSE$  a hibák négyzetösszegét jelenti, mint Sum of Squares Error, és az  $SSR$  jelenti a magyarázott varianciát, mint Sum of Squares Regression.)

## 0.7 Kihagyott változó bias - Omitted Variable Bias

Tekintsünk egy

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z + \epsilon$$

lineáris modellt. Ahhoz, hogy létezzen kihagyott változó bias, a kihagyott változó együtthatója nem lehet zérus, illetve a kihagyott változónak *korrelálnia kell* egy másik, regresszióban szereplő magyarázó változóval.

Tegyük fel, hogy kihagyjuk  $z$ -t a regresszióból:

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x + \tilde{\epsilon}$$

és hogy  $z$ -t  $x$  a következőképpen magyarázza:

$$z = \delta_0 + \delta_1 x + \nu$$

Helyettesítsük be a második egyenletet az eredeti teljes egyenletbe:

$$y = (\beta_0 + \beta_2 \delta_0) + (\beta_1 + \beta_2 \delta_1)x + (\epsilon + \beta_2 \nu)$$

Látható, hogy ha ezen a kihagyott változós modellen végeznénk el a regressziós paraméterbecslést,  $x$  együtthatójának nem  $\beta_1$ -et, hanem  $\beta_1 + \beta_2 \delta_1$ -et kapnánk, ami nyilvánvalóan az eredeti modellel konzisztensen *torzított*. Úgy is gondolhatunk erre, hogy a kihagyott  $z$  miatt  $x$  becslést együtthatója tartalmazni fogja az indirekt hatást is ( $z$ -n  $x$  hatása  $\delta_1$ , ezt megszorozva még  $y$ -n  $z$  hatásával).

Mátrixformában az Omitted Variable Bias az alábbi formában szemléltethető. Legyenek

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

a regresszorokat tartalmazó vektorok. A  $z$ -t kihagyó modell design mátrixa pusztán  $\mathbf{X}$ , így az ebből nyert paraméterbecslés

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Írjuk be  $\mathbf{y}$  helyére a tényleges, teljes modellből származó alakot:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \beta + \mathbf{Z} \delta + \epsilon) = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Z} \delta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon$$

Mindkét oldalon várható értéket véve, és visszaemlékezve arra, hogy az utolsó tag zérus lesz:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{X}^T \mathbf{Z}] \delta$$

ahol látható, hogy a jobb oldal második tagja pontosan a kihagyott  $z$  változó miatti torzítás, avagy *bias*.

## 0.8 MSE és a bias-variancia tradeoff

Tekintsünk egy általános

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}(X) + \epsilon$$

modellt. Csakúgy, mint eddig,  $X$  a regresszorok,  $\mathbf{y}$  a magyarázott változó vektora,  $\mathbf{p}$  pedig valamilyen függvény. Az  $\epsilon$  hibák regresszorok szerinti feltételes várható értéke 0. Figyeljük meg, hogy a lineáris regresszió esetében  $\mathbf{p}$  a lineáris  $\beta$  együtthatóvektor. A célunk, hogy megtaláljuk azt a  $\hat{\mathbf{p}}$  függvényt, amivel a becslt

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}}(X)$$

$\hat{\mathbf{y}}$ -ok és a tényleges  $\mathbf{y}$ -ok négyzetes távolsága a lehető legkisebb. Nyilvánvalóan - ezt a regresszió nál is láttuk már - egy olyan  $\hat{\mathbf{p}}$ -t találni, ami *tökéletesen* becsüli  $\mathbf{y}$ -t reális esetben lehetetlen, így fontos lesz, hogy valahogyan számszerűsíthessük a megfigyeléseken (mintán) alapuló illetve a még megfigyeletlen regresszorokon vett várható tévedésünket.

A *Mean Squared Error*, röviden *MSE* klasszikusan az átlagos avagy várható négyzetes eltérések összegét jelenti a prediktált  $\hat{\mathbf{y}}$  és a tényleges  $\mathbf{y}$ -ok között. Attól függően azonban, hogy mit akarunk vele pontosan kifejezni, definiálhatjuk a *prediktorok* (a fenti "klasszikus" eltérés-négyzetösszeges definíció) és a *becslések* szemszögéből is.

A *prediktorok* szemszögéből a definíció egy  $n$  elemű mintán

$$MSE := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Kompaktabban kifejezve a tényleges  $\mathbf{e}$  hibákkal:

$$MSE := \frac{1}{n} \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

Ha  $\mathbf{p}$  becsléséhez nem használtuk fel az összes  $n$  elemet, hanem csak  $m < n$ -et, akkor az *MSE* definiálható úgy is, mint az átlagos négyzetes hiba a becsléshez fel nem használt adatpontokon:

$$MSE := \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

A *becslés* szemszögéből az *MSE* a  $\hat{\mathbf{p}}$  becslésünkre vonatkozik, mégpedig egy teoretikus valódi  $\mathbf{p}$  függvény mellett

$$MSE(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbb{E}_{\mathbf{p}}[(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^2]$$

Ez semmi más, mint a *második momentuma* a  $\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$  becslés-eltérésnek. Ebből a definícióból következik a *bias-variancia tradeoff*, melynek fontos következményei lesznek. Lássuk ezt be!

Tudjuk, hogy tetszőleges  $\xi$  valószínűségi változóra  $\mathbb{E}[\xi^2] = \text{Var}[\xi] + \mathbb{E}^2[\xi]$ . Most  $\xi = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ -vel:

$$MSE = \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^2] = \text{Var}[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}] + \mathbb{E}^2[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}]$$

A  $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}]$  várható eltérést ( $\mathbf{p}$ -hez képest) hívjuk *bias*-nak, avagy *torzításnak*, ennek négyzetére  $\text{Bias}^2[\mathbf{p}]$ -ként hivatkozunk mostantól. Mivel  $\mathbf{p}$  a modell szerint egy konkrét függvény, így  $\text{Var}[\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}] = \text{Var}[\hat{\mathbf{p}}]$ , és ezzel

$$MSE = \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^2] = \text{Var}[\hat{\mathbf{p}}] + \text{Bias}^2[\hat{\mathbf{p}}].$$

A becslés szemszögéből tehát az *MSE* semmi más, mint a becslés varianciájának és torzítás-négyzetének összege. Ezt az összefüggést hívjuk *bias-variancia tradeoff*-nak, hiszen adott *MSE* mellett ha az egyiket csökkenteni is tudom, a másik nőni fog. Komplex  $\hat{\mathbf{p}}$  becslés mellett a bias, avagy torzítottság alacsony lesz, azonban magas varianciája, avagy *bizonytalansága* lesz a becslésnek. Egyszerű  $\hat{\mathbf{p}}$  mellett pedig a bias lesz magas, alacsony varianciával.

## 0.9 A heteroszkedaszticitás kezelése, a GLS eljárás

A Gauss-Markov feltevések egyike volt, hogy  $\Sigma$  hiba variancia-kovariancia mátrix diagonális, és a diagonális elemek azonosan  $\sigma^2$ -ek. Láttuk azt is, hogy ezekre a  $\sigma^2$ -ekre torzítatlan becslést ad a  $\widehat{\sigma^2}$  *hibavariancia becslés*. Azt az esetet, amikor  $\Sigma$  diagonális, azonban  $\sigma^2$ -ek nem egyenlők, heteroszkedaszticitásnak hívjuk, és emellett a hiba variancia-kovariancia mátrix mellett a paraméterbecslés varianciája már nem a megszokott

$$\text{Var}[\hat{\beta}] = \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

alakú, hiszen nem emelhettük ki  $\sigma^2 \mathbf{I}$ -t középről.

Tudjuk, hogy minden variancia-kovariancia mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit. Ezért  $\exists \mathbf{P} : \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \Sigma$ , tehát felbonthatjuk a kovariancia mátrixot kettőre,  $\Sigma$ -val azonos dimenziójú invertálható mátrix szorzatára (Ez analóg azzal, hogy  $\mathbb{R}$ -en minden pozitív szemidefinit (nemnegatív) valós számnak létezik négyzetgyöke, és a négyzetgyök csak akkor 0, ha maga a szám 0, de most a zérus kovariancia mátrix esetétől eltekintünk).

A célunk az, hogy  $\Sigma$  kovariancia mátrixot  $\sigma^2 \mathbf{I}$  alakúra hozzuk. Ha megszorozzuk balról  $\mathbf{P}^{-1}$ -el a  $\epsilon$  hibát, a hiba varianciája:

$$\text{Var}[\mathbf{P}^{-1} \epsilon] = \mathbf{P}^{-1} \Sigma \mathbf{P}^{-1T}$$

A felbontásból következően, és a  $\mathbf{P}^{T-1} = \mathbf{P}^{-1T}$  összefüggést felhasználva:

$$\mathbf{P}^{-1} \Sigma = \mathbf{P}^T \implies \mathbf{P}^{-1} \Sigma \mathbf{P}^{-1T} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}^{-1T} = \mathbf{I}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a  $\mathbf{P}^{-1}$ -el beszorzott módosított regressziós modellegenletet tekintjük

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \beta + \mathbf{P}^{-1} \epsilon = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}$$

akkor ebben a modellben a hiba varianciamátrixa az identitás mátrix, így nem áll fenn heteroszkedaszticitás.

A módosított modellel való paraméterbecslés tehát

$$\hat{\beta} = ((\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^T (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}))^{-1} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}$$

Szintén a felbontásból, most már mátrixhatványokkal kiírva adódik, hogy

$$\mathbf{P} = \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

Így

$$\mathbf{P}^{-1T} \mathbf{P}^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}T} \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma^{-1}$$

Ezzel a paraméterbecslés alakja:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}$$

Ez már konzisztens a Gauss-Markov feltételekkel, így  $\hat{\beta}$  paraméterbecslés teljesíti a BLUE kritériumokat. Ez az eljárás egy speciális esete a *Generalized Least Squares (GLS)* becslési eljárásnak, ahol  $\Sigma$  nemdiagonális elemei mind 0-k, az angol irodalomban *Weighted Least Squares* néven szerepel. Ha  $\Sigma$  nem is diagonális (azaz autokorreláció van a hibák között), akkor is elvégezhető a GLS eljárás.  $\Sigma^{-1}$ -t, azaz az inverz variancia-kovariancia mátrixot *precíziós mátrixnak* is hívják.

### 0.9.1 \*A GLS becslés analitikus levezetése

$\hat{\beta}_{GLS}$  alakját megkaphatjuk úgy is, ha tekintjük az alábbi optimalizációs problémát:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b}) \rightarrow \underset{\mathbf{b}}{\text{argmin}}$$



Ez persze semmi más, mint a Mahalanobis távolság minimalizálása  $\mathbf{y}$  és  $\mathbf{X}\mathbf{b}$  között  $\mathbf{b}$  szerint. Kibontva a kifejezést és a  $\mathbf{b}$  szerinti deriváltat 0-ra állítva ( $\mathbf{b} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ ):

$$2\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} - 2\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} = 0$$

Ebből

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = (\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}$$

Így is megkaptuk ugyanazt az alakot.

### 0.9.2 A Feasible Generalized Least Squares (FGLS) eljárás

Ha nem ismerjük a valódi  $\boldsymbol{\Sigma}$  hibavariancia-kovariancia mátrixot, akkor a már bevezetett  $\widehat{\sigma^2}$  becült varianciákkal konstruálhatjuk meg a becült  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  mátrixot. Ezzel a becült hibavariancia-kovariancia mátrixsal a paraméterbecslés alakja

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FGLS} = (\mathbf{X}^T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{y}$$