TD 1 Fonctions holomorphes

Exercice 1.

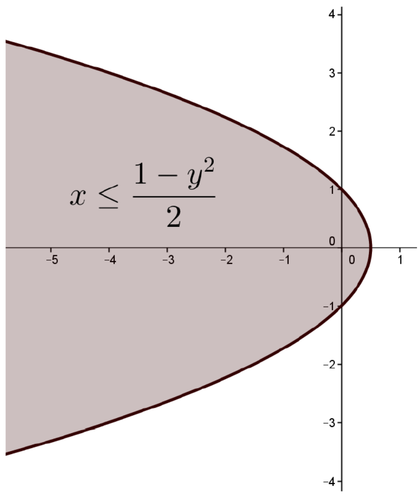
Trouver la courbe ou la région dans le plan complexe représentée par chacune des équations ou inéquations suivantes. Déterminer si l'ensemble est ouvert, fermé, borné, connexe.

a) $|z| = 2$

b) $\mathcal{R}e\left(\dfrac{1}{z}\right) = 2$

c) $|z| + \mathcal{R}e(z) \leqslant 1$

d) $\dfrac{z-1}{z+1} \leqslant 1$



Solutions de $|z| + \mathcal{R}e(z) \leqslant 1$

Exercice 2.

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z}{\overline{z}} \end{array}$$

Montrer que $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ n'existe pas.

(Il suffit de trouver deux directions d'approche de 0 pour lesquelles, on obtient des limites différentes.)

Exercice 3.

Démontrer que les fonction complexes d'expressions z^2, e^z et $cos(z)$ sont des fonctions holomorphes.

Exercice 4.

Donner un paramétrage des chemins suivants définis dans le plan complexe :

a) le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique (positif) en partant du point d'affixe 1

b) le cercle de centre O de rayon 3 parcouru dans le sens horaire en partant du point d'affixe $3i$

c) le segment $[AB]$ où $A(2-i)$ et $B(5+i)$ en partant du point A puis en partant du point B