# Cours Analyse Complexe

Université de Nîmes

Licence de Mathématiques

Gilles MICHEL - gilles.michel@unimes.fr

2023-2024

# Table des matières


**I Structures algébriques de l'ensemble des nombres complexes** **3**

1 Définitions et propriétés de base . . . . . . 3
2 Opérations sur les nombres complexes . . . . . . 4
3 Équation du $2^{nd}$ degré . . . . . . 5
4 Nombres complexes et points/vecteurs du plan . . . . . . 5
5 Module et arguments d'un nombre complexe . . . . . . 6
6 Forme exponentielle d'un nombre complexe . . . . . . 8
7 Racines n-ièmes de l'unité . . . . . . 9
8 Structures algébriques sur l'ensemble des nombres complexes . . . . . . 10

**II Fonctions holomorphes** **11**

1 Fonction d'une variable complexe . . . . . . 11
2 Interprétation géométrique . . . . . . 13
3 Un peu de topologie . . . . . . 13

Chapitre I

# Structures algébriques de l'ensemble des nombres complexes

## 1 Définitions et propriétés de base

On admet qu'il existe un nombre noté $i$ qui vérifie l'égalité $i^2 = -1$.
Historiquement, ce nombre $i$ a été introduit par des mathématicienes tels que Cardan ou Bombelli qui souhaitaient manipuler des nombres de carré négatif.

**Définition 1**

On appelle **nombre complexe**, tout nombre $z$ s'écrivant sous la forme $a+bi$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels (éventuellement nuls).
Cette écriture de $z$ s'appelle la **forme algébrique** de $z$ et on notera $z = a+bi$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Ainsi, $\mathbb{C} = \{a+bi, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

**Définition 2**

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe.
Le nombre réel $a$ est appelé **partie réelle** de $z$ et on note : $\mathcal{R}e(z) = a$
Le nombre réel $b$ est appelé **partie imaginaire** de $z$ et on note : $\mathcal{I}m(z) = b$

**Définition 3**

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe.
Si $b = 0$ alors on dira que $z$ est un nombre **réel**.
Si $a = 0$ alors on dira que $z$ est un nombre **imaginaire pur**.

Les nombres réels sont donc des nombres complexes particuliers et on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

**Propriété 4**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Ainsi, si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors on a :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \\ \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z') \end{cases}$$

## 2 Opérations sur les nombres complexes

Le nombre complexe $i$ se comporte, dans les calculs, comme une variable algébrique $x$ que l'on manipule dans les expressions algébriques, avec la propriété supplémentaire que $i^2 = -$.

**Propriété 5**

Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes et $k$ un nombre réel.
Alors on a :
- Somme : $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- Différence : $z - z' = (a - a') + (b - b')i$
- Produit par un nombre réel : $kz = ka + kbi$
- Produit de deux nombres complexes : $z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
  *(c'est juste la double distributivité)*

**Définition 6**

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - bi$.

**Propriété 7**

On considère trois nombres complexes $z_1, z_2$ et $z = a + bi$.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\forall p \in \mathbb{Z} : \overline{z^p} = \overline{z}^p$
- $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ si $z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$. *(C'est un cas particulier de la propriété ci-dessus)*

*Méthode : Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient $\frac{z_1}{z_2}$ de deux nombres complexes (avec $z_2 \neq 0$), il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur (et utiliser le fait que $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$).*

# 3 Équation du $2^{nd}$ degré

**Propriété 8**

On considère l'équation $(E)$ : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b$ et $c$ sont trois nombres réels avec $a$ non nul.
On définit le discriminant de cette équation comme étant le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
3 cas sont possibles :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $(E)$ admet 2 racines (solutions) réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $(E)$ admet 1 racine double réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $(E)$ admet 2 racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
  *$\Delta$ étant négatif, son opposé est positif et possède par conséquent une racine carrée*

# 4 Nombres complexes et points/vecteurs du plan

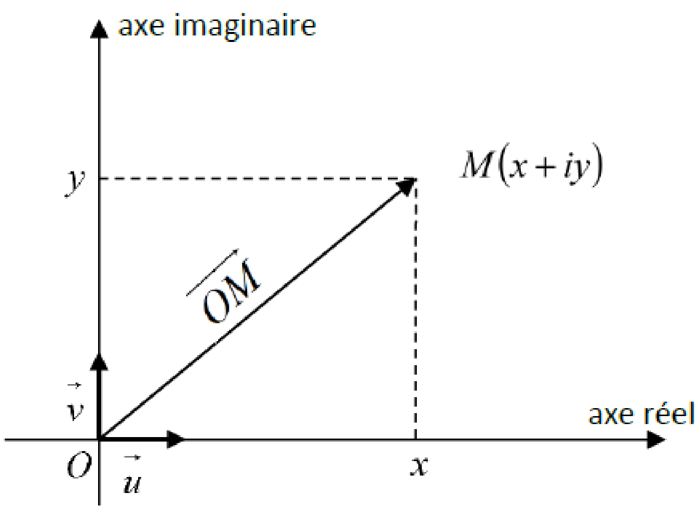
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- À tout nombre complexe $z = x + yi$ on associe le point $M(x, y)$ du plan appelé **point image** de $z$ ainsi que le vecteur $\vec{w}(x, y)$ appelé **vecteur image** de $z$.

- À tout point $M(x, y)$ du plan on associe le nombre complexe $z = x + yi$ appelé **affixe** de $M$. On dira alors que le point $M$ a pour affixe $z$ et on notera $M(z)$.

- De même, à tout vecteur $\vec{w}(x, y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + yi$ appelé **affixe** de $\vec{w}$. Comme précédemment, on notera $\vec{w}(z)$.

*Remarque : ici le mot affixe est féminin.*



## 5 Module et arguments d'un nombre complexe

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe et $M$ le point image de $z$.

**Définition 9**

La distance $OM$ est appelée **module** de $z$ que l'on note $|z|$.

**Propriété 10**

$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0$ et $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

**Propriété 11**

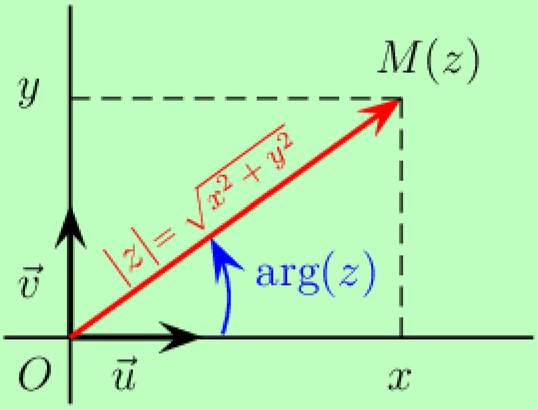
- Il vient directement du Théorème de Pythagore que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

  Soit $z'$ un autre nombre complexe. Alors

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$
- $|\overline{z}| = |z|$

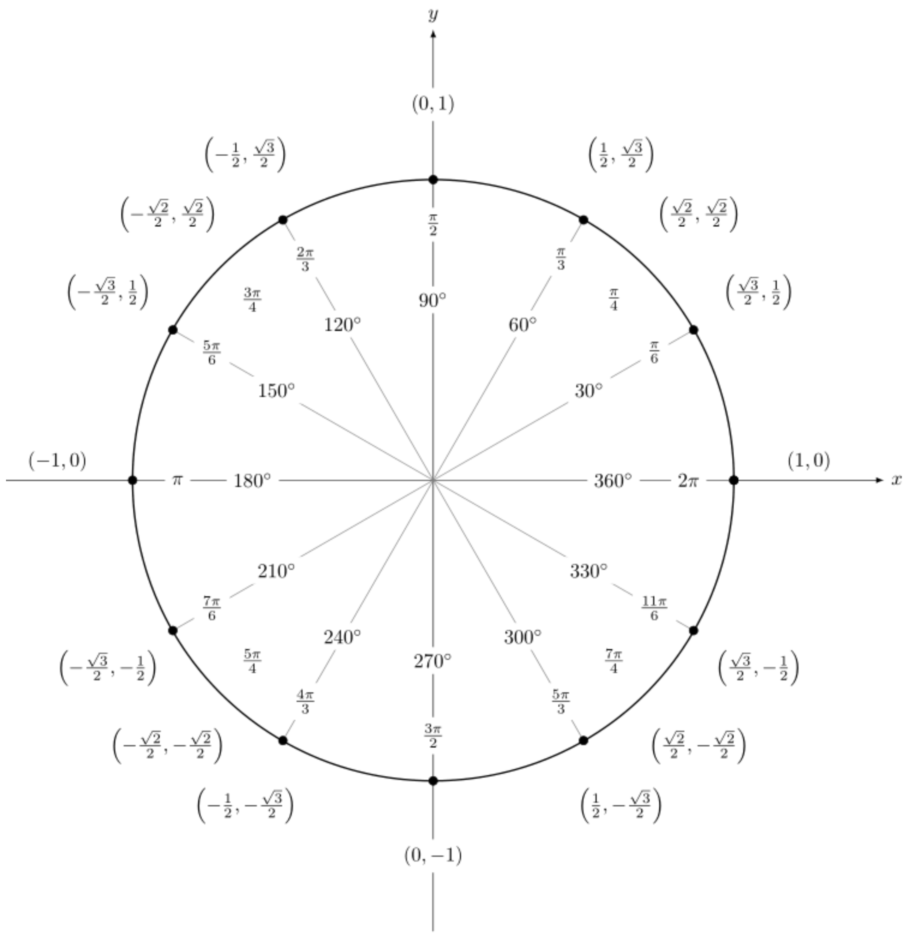
**Définition 12**

On appelle **argument** du nombre complexe non nul $z$, toute mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)$




*Remarque : un nombre complexe non nul possère une infinité d'arguments. Si $\theta$ est un de ses arguments, alors tous les autres arguments sont de la forme $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$*

**Méthode :** Pour déterminer un argument $\theta$ de $z = x+yi$, on utilise le fait que $cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ ou $tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$.



**Définition 13**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Soient $r = |z|$ son module et $\theta$ un de ses arguments. Alors $z = r(cos(\theta) + i\ sin(\theta))$. Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de $z$.

**Propriété 14** (Formule de De Moivre)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (cos(\theta) + i\ sin(\theta))^n = cos(n\theta) + i\ sin(n\theta)$$

En particulier, $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z}, arg\left(z^n\right) = n \times arg(z)$.

## 6 Forme exponentielle d'un nombre complexe

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Définition 15**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. on appelle **forme exponentielle (ou forme polaire)** de $z$ toute écriture de la forme $re^{i\theta}$ où $r$ est le module de $z$ (donc obligatoirement strictement positif) et $\theta$ est un argument de $z$.

**Propriété 16**

La forme exponentielle des nombres complexes hérite de toutes les propriétés connues sur la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$. En particulier, on a :

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$ (on retrouve la formule de De Moivre)
- $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

**Propriété 17** (Formules d'Euler)

Puisque $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\ sin(\theta)$, en utilisant la propriété sur l'inverse vue ci-dessus, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

# 7 Racines n-ièmes de l'unité

Considérons l'équation $z^n = 1$. Les racines de cette équation sont appelées les racines $n^{iemes}$ de l'unité.

Si on écrit les racines sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, il vient directement que $r^n = |1| = 1$ et donc que $r = 1$ car $r$ est un réel strictement positif. Ainsi, les racines $n^{iemes}$ de l'unité sont de module 1 et s'écrivent sous forme exponentielle $z = e^{i\theta}$.

Les points images des racines $n^{iemes}$ de l'uité appartiennent au cercle trigonométrique et on dira que ces racines $n^{iemes}$ appartiennent au cercle unité (qui est une partie de $\mathbb{C}$ et non du plan $\mathbb{R}^2$).

**Résolution de l'équation** $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont de la forme

$$z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} = cos\left(\frac{i2k\pi}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{i2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, ..., n-1$$

.

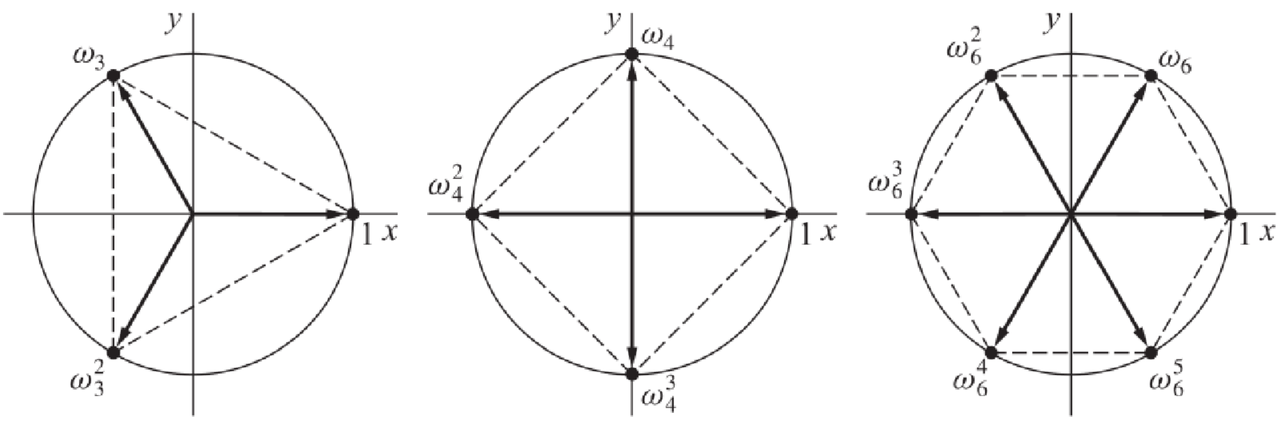
Si l'on pose $w = e^{\frac{i2\pi}{n}} = cos\left(\frac{i2\pi}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{i2\pi}{n}\right)$, alors les racines $n^{iemes}$ de l'unité sont $1, w, w^2, ..., w^{n-1}$.

**Propriété 18**

Les $n$ racines $n^{iemes}$ de l'unité vérifient l'égalité :

$$1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0$$

*Exemples pour n = 3, 4 et 6*



## 8 Structures algébriques sur l'ensemble des nombres complexes

**Propriété 19**

L'ensemble des nombres complexes muni des opérations d'addition et de multiplication définies précédemment possède les propriétés algébriques suivantes :

- $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif (abélien)
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif
- $\forall a, b, c \in \mathbb{C}, (a + b) \times c = a \times c + b \times c$

  Ces propriétés montrent que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

**Propriété 20** (admise)

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $(1, i)$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est $(1)$.

Chapitre II

# Fonctions holomorphes

Le passage de la théorie des fonctions de la variable réelle à la théorie des fonctions de la variable complexe peut apparaître au premier abord comme une complication inutile, mais en réalité, la belle simplicité des résultats obtenus dans ce cadre nouveau justifie largement ce passage, d'autant plus qu'on obtient des méthodes nouvelles et puissantes pour l'étude des fonctions réelles. C'est ainsi que la méthode des résidus est un outil efficace pour le calcul de certaines intégrales réelles.

## 1 Fonction d'une variable complexe

**Définition 21**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie dans $\Omega$.
Soit $z_0 \in \Omega$.
Si $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ tend vers une limite $l \in \mathbb{C}$ quand $z \longrightarrow z_0$, alors on dira que $f$ est dérivable en $z_0$ et cette limite $l$ sera appelée nombre dérivé de $f$ en $z_0$ que l'on notera $f'(z_0)$.

**Définition 22**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $f$ est dérivable en tout point $z$ de $\Omega$, on dira que la fonction $f$ est **holomorphe** dans $\Omega$ et la fonction $f' : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ qui a tout point $z \in \Omega$ lui associe $f'(z)$ est appelée fonction dérivée de $f$.

**Propriété 23**

- La somme, le produit de deux fonctions holomorphes dans $\Omega$ est une fonction holomorphe dans $\Omega$.
- L'inverse d'une fonction holomorphe dans $\Omega$ ne s'annulant pas est une fonction holomorphe dans $\Omega$.
- La composée de deux fonctions holomorphes (dans des domaines ad hoc) est une fonction holomorphe.

Les dérivées de ces fonctions holomorphes se calculent par les mêmes formules que dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

**Propriété 24**

La somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est holomorphe dans le disque ouvert de convergence $\mathcal{B}(0, R)$.

De même, la somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est holomorphe dans le disque ouvert de convergence $\mathcal{B}(z_0, R)$.

De plus, cette somme est indéfiniment dérivable dans le disque et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,
si $f : \mathcal{B}(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne cette somme.

*Exemples :*
$e^z, sin(z), cos(z), sh(z), ch(z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

**Propriété 25** (Conditions d'holomorphie de Cauchy-Riemann)

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + iy & \longmapsto & f(x + iy) = X(x, y) + i\, Y(x, y) \end{array}$$

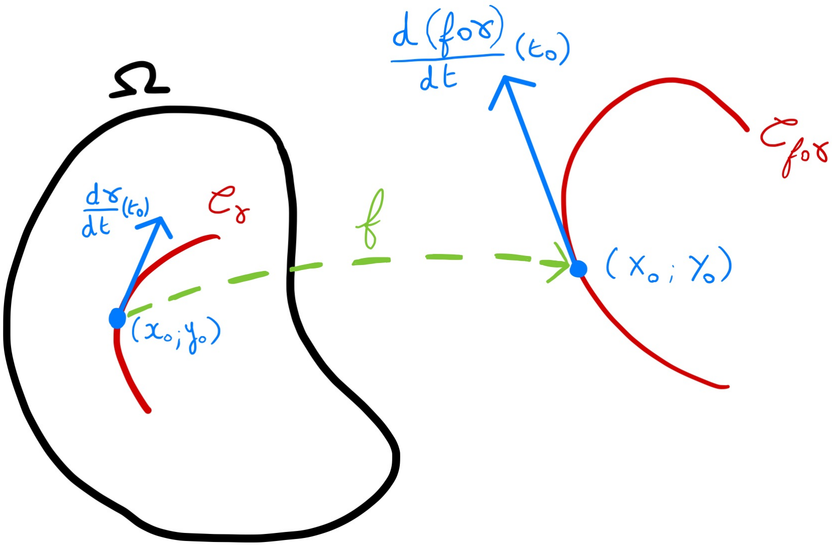
$f$ est holomorphe dans $\Omega$ si et seulement si les fonctions $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables et satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

*Ici, nous avons assimilé $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ car ces deux ensembles sont naturellement isomorphes comme $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 2.*

# 2 Interprétation géométrique

La fonction $f$ définie par $f(x+iy) = X(x,y) + i\,Y(x,y)$ permet de définir une transformation ponctuelle $(x,y) \mapsto (X,Y)$. Son application linéaire tangente $T_f$ est la correspondance qui, au vecteur tangent $\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0)$ à une courbe paramétré différentiable passant au point $(x_0, y_0)$ pour la valeur $t_0$ du paramètre, lui associe le vecteur tangent $\dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0)$ au point correspondant de la courbe image.




L'application linéaire $T_f$ associe au vecteur bleu $\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0)$ tangent à la courbe $\mathcal{C}_\gamma$ l'autre vecteur bleu $\dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0)$ tangent à la courbe $\mathcal{C}_{f\circ\gamma}$

La matrice de l'application linéaire $T_f$ est $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial X}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial Y}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

Les conditions de Cauchy-Riemann signifient que cette application est une application conforme sur $\Omega$, c'est à dire une transformation géométrique qui conserve localement les angles. On dira également qu'au voisinage de tout point de $\Omega$, $T_f$ se comporte comme une similitude.

# 3 Un peu de topologie

## 3.1 Connexité, connexité par arcs et simple connexité

**Définition 26**

Un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ est **connexe** s'il ne peut pas être partagé en deux ouverts disjoints non vides (autrement dit s'il est "d'un seul tenant").

**Définition 27**

On dira qu'un ensemble $\Omega$ est **connexe par arcs** si et seulement si $\forall A, B \in \Omega$ , il existe un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ continu qui vérifie $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$.

**Propriété 28**

Un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

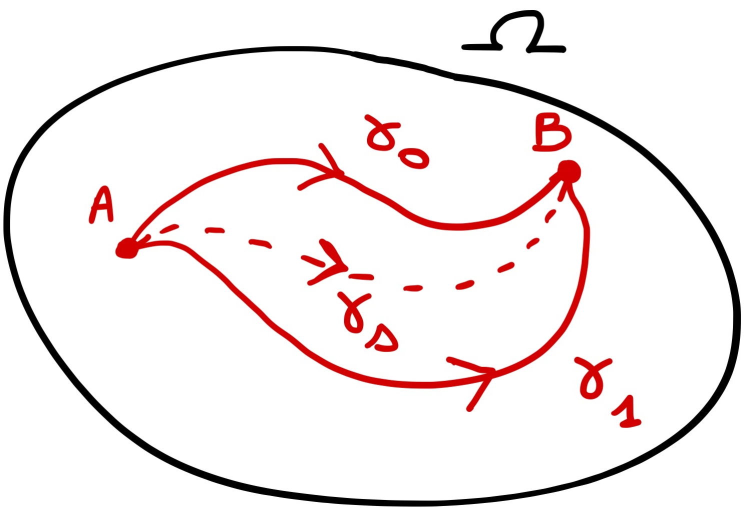
**Définition 29**

Supposons $\Omega$ connexe (donc connexe par arcs). Soient $A, B \in \Omega$. Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \Omega$ deux chemins continues quelconques qui vérifient $A = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $B = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Intuitivement, on dira que $\Omega$ est **simplement connexe** si on peut toujours "déformer continuement" $\gamma_0$ pour l'amener sur $\gamma_1$, sans sortir de $\Omega$. Plus précisemment, cela signifie qu'il existe

$$\Gamma : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \Omega \text{ continue, telle que } \begin{cases} \forall s \in [0,1], \Gamma(s,a) = A \text{ et } \Gamma(s,b) = B \\ \\ \forall t \in [a,b], \Gamma(0,t) = \gamma_0(t) \text{ et } \Gamma(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases}$$

Le chemin $\gamma_s$ défini par $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ représente alors, quand le paramètre $s$ varie, une **déformation continue** allant de $\gamma_0$ à $\gamma_1$.



**Définition 30**

Lorsqu'il existe une déformation continue entre deux chemins $\gamma_0$ et $\gamma_1$, on dit que ces deux chemins sont **homotopes**.

Voir par exemple cette animation sur Wikipedia :
`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/HomotopySmall.gif`

## 3.2 Chemin c.d.p.m. (continuement différentiable par morceaux)

**Définition 31**

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ un chemin continu. On dira que $\gamma$ est **continuement différentiable par morceau (c.d.p.m.)** s'il existe une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ telle que, pour chaque valeur $i = 0, 1, ..., k-1,\ \gamma : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \Omega$ est de classe $C^1$

**Définition 32**

Si $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ est une bijection continue c.d.p.m. et de dérivée positive, on dira que l'on passe du chemin c.d.p.m. $\gamma$ au chemin $\gamma \circ \varphi$ par un **changement de paramètre régulier**.

**Notation 33**

Si $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [b, c] \longrightarrow \Omega$ sont deux chemins c.d.p.m., on notera $\boldsymbol{\gamma_1 + \gamma_2}$ le chemin c.d.p.m. défini par $(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) \text{ si } t \in [b, c] \end{cases}$