一维随机游动

课程笔记附录：解题过程图示

刘明琦

2025 年 10 月 16 日

前言

本附件整理了“一维随机游动”问题的解题过程要点，并配套展示了五张过程图示（1.jpg-5.jpg）。为保持与主笔记一致，采用 XeLaTeX 与统一的版式和环境设置。

刘明琦
oday

ableofcontents

第一章　问题与解答概览

extbf 问题背景（概述）
考虑一维随机游动：粒子以步长 ± 1（或一般步长）在整数线上移动。典型关注量包括：首次到达某点的概率、预期返回时间、吸收边界下的吸收概率与期望步数、偏置游动的极限行为等。本章仅整理图示步骤，不替代完整推导。

1.1　解题过程图示

下列图示按解题顺序排列。若需插入文字注释或推导公式，可在对应图之后添加段落或公式环境。

如需将每一步转写为可检验的公式推导，我可以基于你的文字或草图内容补齐相应的差分/边值问题与闭式解，并将证明与说明整理为定理-推论-例题的结构。

$X_1, X_2 \cdots$ i.i.d. $\quad S_0 = 0$

$P(X_1=-1) = P(X_1=1) = \frac{1}{2} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \cdots X_n)$

停时 $T = \inf\{n : S_n = -a$ 或 $S_n = b\}$

$\boxed{\text{有吸收壁的简单随机游走}}$

Step 1: S_n 为鞅 (eg 2.1.6) T 为停时

由 Doob: $S_{n\wedge T}$ 为鞅 & $E(S_{n\wedge T}) = E(S_{0\wedge T}) = 0 = E(S_0)$

Goal: $E(S_{n\wedge T}) = E(S_T) = 0$

How? Let $n \to \infty$ (且 $|S_{n\wedge T}| \le \max\{a, b\}$ 有界)

Step 2. 由 DCT.

$|S_{n\wedge T}| < \max\{a, b\} = C$

则

$$E[S_T] = E[\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge T}] = \lim_{n\to\infty} E[S_{n\wedge T}] = 0$$

Step 3.

$S_T = -a$ 或 b

则 $\begin{cases} E[S_T] = (-a)\cdot P_{-a} + b \cdot P_b = 0 \\ P_{-a} + P_b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{-a} = \frac{b}{a+b} \\ P_b = \frac{a}{a+b} \end{cases}$

// 求出 S_T 的分布，下求 $E[T]$ (结束时长期望)

Step 4. $M_{n\wedge T} = S_{n\wedge T}^2 - n\wedge T$ 为鞅 (eg 2.1.3 & Doob截断)

$\rightarrow E[M_{n\wedge T}] = E[M_0] = S_0^2 - 0 = 0 \Rightarrow \underline{E[S_{n\wedge T}^2] = E[n\wedge T]}$

令 $n \to \infty$ $\quad E[S_{n\wedge T}^2] = E[n\wedge T]$

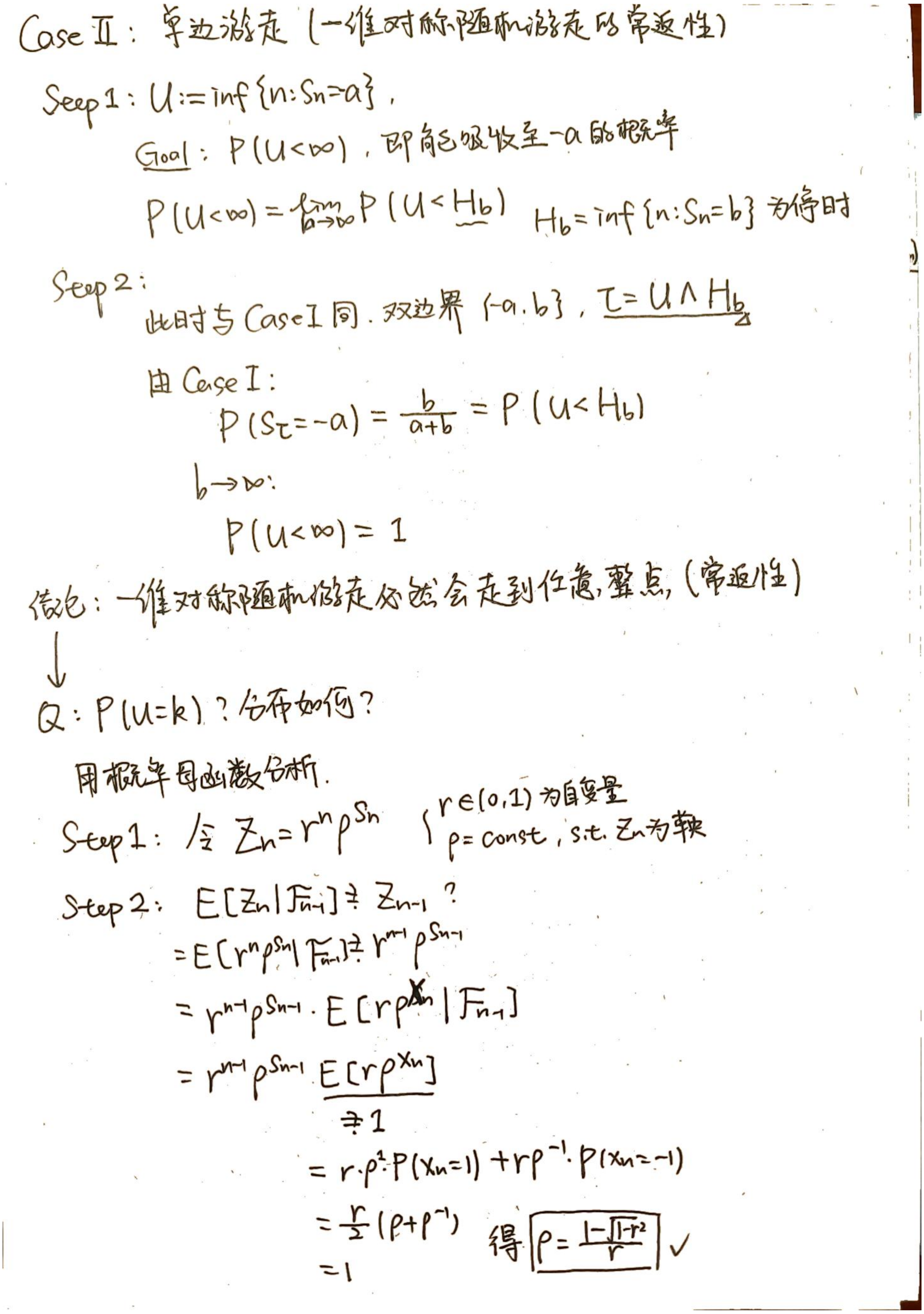
$\downarrow$ DCT $\quad \downarrow$

$E[S_T^2] = E[T] \quad (*)$: Wald's Identity

$= a^2 \cdot P_{-a} + b^2 \cdot P_b$

$= ab \quad$ 故 $E[T] = ab$

图 1.1: 步骤 1：问题建模与基本设定（示意）



Case II：单边游走（一维对称随机游走的常返性）

Step 1：$U := \inf\{n : S_n = a\}$，

Goal：$P(U<\infty)$，即能吸收至 $-a$ 的概率

$P(U<\infty) = \lim_{b\to\infty} P(U < \underset{\sim}{H_b})$　$H_b = \inf\{n : S_n = b\}$ 为停时

Step 2：

此时与 Case I 同．双边界 $\{-a, b\}$，$\underline{\tau = U \wedge H_b}$

由 Case I：

$$P(S_\tau = -a) = \frac{b}{a+b} = P(U < H_b)$$

$b \to \infty$：

$$P(U<\infty) = 1$$

结论：一维对称随机游走必然会走到任意整点（常返性）

↓

Q：$P(U=k)$？分布如何？

用概率母函数分析．

Step 1：令 $Z_n = r^n \rho^{S_n}$　$\begin{cases} r\in(0,1) \text{ 为自变量} \\ \rho = \text{const}, \text{ s.t. } Z_n \text{ 为鞅} \end{cases}$

Step 2：$E[Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \overset{?}{=} Z_{n-1}$ ？

$$= E[r^n \rho^{S_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \overset{?}{=} r^{n-1}\rho^{S_{n-1}}$$

$$= r^{n-1}\rho^{S_{n-1}} \cdot E[r\rho^{X_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$= r^{n-1}\rho^{S_{n-1}} \underbrace{E[r\rho^{X_n}]}_{\overset{?}{=}1}$$

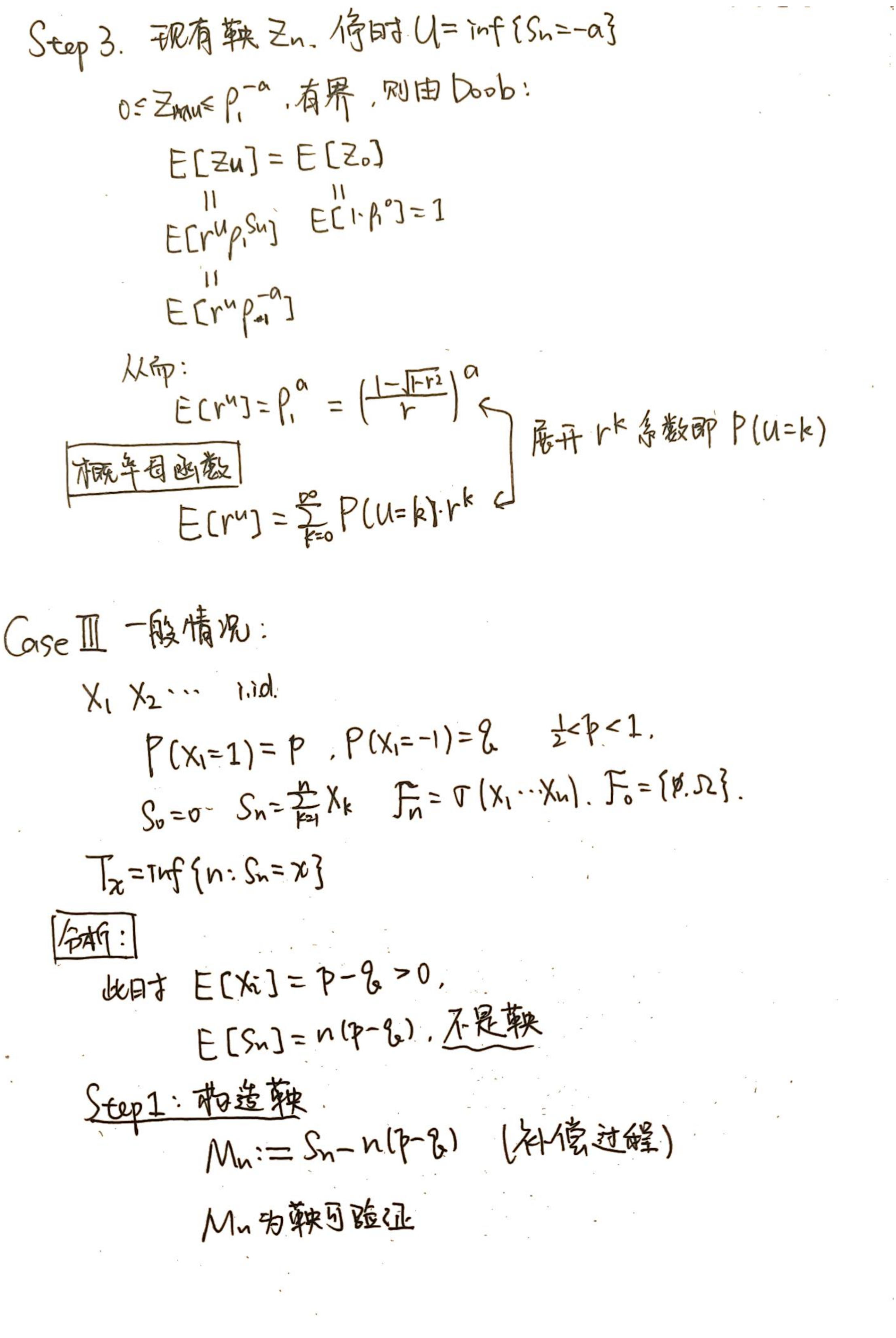
$$= r\cdot\rho^{1}\cdot P(X_n = 1) + r\rho^{-1}\cdot P(X_n = -1)$$

$$= \frac{r}{2}(\rho + \rho^{-1})$$

$$= 1$$

得 $\boxed{\rho = \frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}}$ ✓

图 1.2: 步骤 2：关键量的递推/差分方程（示意）



Step 3. 现有鞅 Z_n、停时 $U=\inf\{S_n=-a\}$

$0\le Z_{n\wedge U}\le \rho_1^{-a}$，有界，则由 Doob：

$$E[Z_U]=E[Z_0]$$

$$E[Z_U]=E[r^U\rho_1^{S_U}]=E[r^U\rho_1^{-a}],\qquad E[Z_0]=E[1\cdot\rho_1^0]=1$$

从而：

$$E[r^U]=\rho_1^a=\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^a$$

$\boxed{\text{概率母函数}}$

$$E[r^U]=\sum_{k=0}^{\infty}P(U=k)\cdot r^k$$

展开 r^k 系数即 $P(U=k)$

Case Ⅲ 一般情况：

$X_1\ X_2\cdots$ i.i.d.

$P(X_1=1)=p$，$P(X_1=-1)=q$　$\frac{1}{2}<p<1$.

$S_0=0$　$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$　$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1\cdots X_n)$. $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$.

$T_x=\inf\{n: S_n=x\}$

$\boxed{\text{分析：}}$

此时 $E[X_i]=p-q>0$，

$E[S_n]=n(p-q)$，不是鞅

Step 1：构造鞅

$M_n:=S_n-n(p-q)$　（补偿过程）

M_n 为鞅可验证

图 1.3: 步骤 3：边界条件与通解结构（示意）

Step 2: 由可选停止定理(同 Case I)

$$E(M_T)=E(M_0)=0$$

代入 $M_T = S_T - T(p-q)$ $(*)$

则 $E[S_T]=E[T](p-q)$

$$E[T]=\frac{E[S_T]}{p-q}$$

附: 如果先有 Step3:

求出 $\begin{cases} P(x<y) \to (\frac{q}{p})^x<1 \\ P(y<x) \to 1 \end{cases}$

由 $p>q$ 知 y 吸收容易.

$(*)$ 可用以求 T_y

$M_{T_y\wedge n}$

$= S_{T_y\wedge n}-(T_y\wedge n)(p-q)$

$E[T_y\wedge n](p-q)=E[S_{T_y\wedge n}$

Step3: 求 $E[S_T]$ / S_T 分布

$$\begin{cases} P(S_T=x)=P(T_x<T_y) \\ P(S_T=y)=P(T_x>T_y) \end{cases} \Leftarrow P(T<\infty)=1$$

令 $U_n=(\frac{q}{p})^{S_n}$ (是鞅), 令 $\tau=T_x\wedge T_y$.

U_n 一致有界鞅. 由 DCT:

$$1=E\left[(\tfrac{q}{p})^{S_0}\right]=E\left[(\tfrac{q}{p})^{S_{n\wedge\tau}}\right]\underset{(n\to\infty)}{=}E\left[(\tfrac{q}{p})^{S_\tau}\right]$$

写出 RHS:

$$\begin{cases} P(T_x<T_y)(\frac{q}{p})^x+P(T_x>T_y)(\frac{q}{p})^y=1 \\ \text{且 } P(T_x<T_y)+P(T_x>T_y)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(T_x<T_y)=\dfrac{(\frac{q}{p})^y-1}{(\frac{q}{p})^y-(\frac{q}{p})^x} \\ P(T_x>T_y)=\dfrac{1-(\frac{q}{p})^x}{(\frac{q}{p})^y-(\frac{q}{p})^x} \end{cases}$$

Step4:

代入 $E[S_T]$:

$$E[T]=\frac{1}{p-q}\left(\frac{x\left((q/p)^y-1\right)+y\left(1-(q/p)^x\right)}{(q/p)^y-(q/p)^x}\right)$$

图 1.4: 步骤 4：常数确定与概率/期望解（示意）

Step 5：如果先有Step 3.

$P(x<y) \xrightarrow{x\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^x < 1$　则 $p>q$ 使之不对称、y 吸收容易

$P(x>y) \xrightarrow{x\to\infty} 1$

下求 $E[T_y]$.

同(*). $E[S_{T_y\wedge n} - (p-q)(T_y\wedge n)] = 0$

$$E S_{T_y\wedge n} = \underbrace{E[T_y\wedge n]}_{T_y\wedge n \,<\, T_y\wedge(n+1)\ \text{单调}}(p-q)$$

$\downarrow$

$\underline{M} \le S_{T_y\wedge n} \le y$

$\downarrow$

M 可积. 由 $P(x<y) \to 0^+$

从而，由

$$\begin{cases} DCT \to LHS\ 收敛 \\ MCT \to RHS\ 收敛 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ y}}{E[S_{T_y}]} = E[T_y](p-q)$$

$$E[T_y] = \frac{y}{p-q}$$

图 1.5: 步骤 5：结论与特殊情形讨论（示意）