# 泛函分析

# 2025 秋

刘明琦

2025 年 10 月 16 日

# 前言

这是笔记的前言部分.

刘明琦

2025 年 10 月 16 日

# 目录

# 第一章　距离线性空间

小结.

## 1.1　选择公理、良序定理、Zorn 引理

### 良序定理

**定理 1.1.1** (超限归纳法). 对良序集 $\mathcal{A}$, 如果:

1. $P(\alpha_0)$ 为真，$\alpha_0$ 是最小元
2. 若 $P(\alpha)$ 对一切 $\alpha, \alpha_0 \prec \alpha \prec \beta$ 为真，则 $P(\beta)$ 真

则 $P(\alpha)$ 对一切 $\alpha \in \mathcal{A}$ 为真

**选择公理** 对于任何一列集合列 $\mathcal{N} = \{N\}$, 可以是有限、可数、不可数，都自然存在一个选择函数 $f$ 定义在$\mathcal{N}, f(N) = n \in N$

**良序定理** 任何一个集合都能赋予先后次序使之成为良序集

**Zorn 引理** 偏序集 P 中的每一个链 (Chain) 都在 P 中有一个上界。则 P 必有极大元。

## 1.2　线性空间、Hamel 基

**定义 1.2.1** (线性空间). 实线性空间、复线性空间

**定义 1.2.2** (线性流形). 线性空间 $X$ 的非空子集 $M$:

$$\forall x, y \in M, x+y, ax \in M$$

**定义 1.2.3.** 线性相关、维数 dim、基、直和

**定理 1.2.1.** $M$,$N$ 是线性空间 $X$ 的线性流形，则:

$$X = M \oplus N \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ 唯一表为} x = m+n, m \in M, n \in N$$

称 $M$,$N$ 为**代数互补**

**定义 1.2.4** (Hamel 基). $X$ 是有非零元的线性空间,$H \subset X$ 是 *Hamel* 基:

1. $H$ 线性无关
2. $H$ 张成的线性流形是 $X$

**定理 1.2.2.** $X$ 有覆盖任意线性无关子集的 *Hamel* 基: $\exists H, s.t. S \subset H$

**定理 1.2.3** (代数补的存在性). 线性空间 $X$ 的线性流形 $M$ 必存在代数补 $N$, 即 $X = M \oplus N$

## 1.3　距离空间、距离线性空间

**定义 1.3.1** (距离空间). 定义距离 $d(x,y)$:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

则称 $\langle X, d\rangle$ 为距离空间

**定义 1.3.2** (依距离收敛). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle X, d\rangle, s.t.:$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \text{或者} d(x, x_n) \to 0$$

**定义 1.3.3** (距离线性空间). 线性空间 $X$ 定义 $d(\cdot,\cdot)$ 且 $d$ 的极限对加法和数乘连续

**定义 1.3.4** (本质上确界). $f(t)\in L([a,b])$ 即区间上的勒贝格可测函数，如果存在零测 $E\subset[a,b]$，*s.t.f(t)* 在 $[a,b]\backslash E$ 上有界，则称 $f$ 是 $[a,b]$ 上本质有界函数，定义**本质上确界**为：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]}|f(t)|=\inf_{m(E)=0}\{\sup_{t\in[a,b]\backslash E}|f(t)|\}$$

下面是几个常见空间

1. **本质有界可测函数空间** $L^\infty[a,b]$**：**

$$\begin{cases}X=\{f(t),t\in[a,b]:\ f\text{ 本质有界}\}\\ d(x,y)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]}:|x(t)-y(t)|\end{cases}$$

2. **有界序列空间 (m) 或** $l^\infty$:

$$\begin{cases}X=\{x|x=\{\xi_1,\xi_2,...\xi_j...\}\}\\ d(x,y)=\sup_{j\geq1}|\xi_j-\eta_j|\end{cases}$$

3. **收敛序列空间 (c)**:

$$\begin{cases}X=\{x:\ x=\{\xi_j\},\ \lim_{j\to\infty}\xi_j=\xi<\infty\}\\ d(x,y)=\sup_{j\geq1}|\xi_j-\eta_j|\end{cases}$$

4. **所有序列空间 (s)**:

$$\begin{cases}X=\{x:\ x=\{\xi_j\}\}\\ d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\end{cases}$$

5. **p-可和数列空间/p-可积函数空间**

| | $l^p$ 空间 | $L^p[a,b]$ 空间 |
|---|---|---|
| 元素 | 数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ | 可测函数 $x(t)$，定义在区间 $[a,b]$ 上 |
| 条件 | $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^p < \infty$ | $\int_a^b \|x(t)\|^p \, dt < \infty$ |
| 范数 | $\\|x\\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^p \right)^{1/p}$ | $\\|x\\|_p = \left( \int_a^b \|x(t)\|^p \, dt \right)^{1/p}$ |
| 距离 | d(x,y)=($\sum_{j=1}^{\infty} \|\xi_j - \eta_j\|^p)^{1/p}$ | d(x,y)=($\int_a^b \|x(t) - y(t)\|^p$dt$)^{1/p}$ |
| 本质 | 离散型的 $p$-可和数列空间 | 连续型的 $p$-可积函数空间 |
| 直观类比 | “在整数点上的取值” | “在连续区间上的取值” |
| 空间性质 | Banach 空间；$p = 2$ 时是 Hilbert 空间 | Banach 空间；$p = 2$ 时是 Hilbert 空间 |

**Minkowski 不等式**

离散形式（n 有限或 =∞）：

$$\left( \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

用范数表示：

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

积分形式：

$$\left( \int_S |f(x) + g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left( \int_S |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_S |g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

范数表示：

$$\|f + g\|_{L^p(S)} \le \|f\|_{L^p(S)} + \|g\|_{L^p(S)}$$

## 1.4　距离空间中的拓扑、可分空间

**定义 1.4.1.** 球 $B(x_0, r)$、开集、闭集、极限点、内点、内部、连续函数

**定义 1.4.2.** $y = f(x) : \langle X, d \rangle \to \langle Y, \rho \rangle$
$f$ 将邻域映为邻域则称之为连续

**定义 1.4.3** (稠密集)**.** $S \subset X, \ \forall \varepsilon : \ \forall x \in X, \exists x_0 \in S, \text{s.t.} \ d(x, x_0) < \varepsilon$
eg :$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

**定义 1.4.4** (可分空间)**.** 一个拓扑空间 $X$ 被称为是**可分的 *(separable)***，如果它包含一

个**可数**且**稠密**的子集。也就是说，存在一个子集 $A \subseteq X$，满足：

1. $A$ 是可数的 *(countable)*，即 $A$ 中的元素可以与自然数集 $\mathbb{N}$ 建立一一对应关系。
2. $A$ 在 $X$ 中是稠密的 *(dense)*，即 $A$ 的闭包 $\overline{A}$ 等于全空间 $X$。换句话说，对于 $X$ 中任何一点 $x$ 以及 $x$ 的任何一个邻域 $U$，都有 $U \cap A \neq \emptyset$。

直观上讲，一个空间是可分的，意味着我们可以用一个可数无限的点集来“近似”整个空间中的任意一点。

下面是一些常见可分与不可分空间的例子：

**例 1.4.1.**
- **实数空间** $\mathbb{R}$ 是可分的。有理数集 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个可数稠密子集。
- **欧几里得空间** $\mathbb{R}^n$ 是可分的。所有分量都是有理数的点的集合 $\mathbb{Q}^n$ 是一个可数稠密子集。
- **收敛序列空间** ***(c)***、**所有序列空间** ***(s)*** 和 $l^p$ **空间** ***(***$1 \leq p < \infty$***)*** 都是可分的。
- **连续函数空间** $C[a,b]$ *(*在 $[a,b]$ 上所有连续函数构成的空间，赋予上确界范数*)* 是可分的。根据 *Weierstrass* 逼近定理，所有系数为有理数的多项式函数构成的集合是一个可数稠密集。
- **有界序列空间** $l^\infty$ ***(*****或** ***(m))*** 是**不可分**的。这个空间太“大”了，无法用一个可数子集来逼近所有点。

可分性在泛函分析中有很多重要的推论，例如在可分赋范线性空间中，单位球上的弱 * 拓扑是可度量化的。

## 1.5　完备的距离空间

**定义 1.5.1.** *Cauthy* 序列

· 收敛一定是柯西列，柯西列不一定收敛

eg：在有理数空间 $\langle \mathbb{Q}, d(x,y) = |x-y| \rangle$ 中逼近 $\sqrt{2}$

**构造柯西列 (Constructing the Cauchy Sequence):**
我们构造一个在实数意义下收敛到 $\sqrt{2}$ 的有理数序列 $\{x_n\}$。一个简单的方法是取 $\sqrt{2}$ 的十进制小数展开：

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

我们定义序列如下：

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.4, \quad x_3 = 1.41, \quad x_4 = 1.414, \quad \ldots$$

**定义 1.5.2** (**完备空间**)**.**
距离空间 $\langle X, d\rangle$ 中所有 *Cauchy* 序列收敛则称他是**完备的**

**定义 1.5.3** (距离空间的完备化)**.** 对距离空间 $\langle X, d\rangle$，如果有完备的距离空间 $\langle \widetilde{X}, \rho\rangle$ 使 $X$ 等距于 $\widetilde{X}$ 的稠密子集，即存在映射 $T : X \to \widetilde{X}$, s. t.

$$d(x, y) = \rho(T(x), T(y))$$

且 *T(X)* 是 $\widetilde{X}$ 的稠密子集，则称 $\widetilde{X}$ 是 $X$ 的**完备化**

**定理 1.5.1.** 任何距离空间都存在完备化

## 1.6　列紧性

**定理 1.6.1.** 直线上每个有界的无穷点集至少有一个聚点

**定义 1.6.1** (列紧性)**.** 距离空间 $X$ 中的集合 $M$ 称为**列紧的**，如果 $M$ 中的任何序列都含有一个收敛的子序列 *(*其极限未必还在 $M$ 中*)*. 闭的列紧集成为**自列紧集**

**定义 1.6.2.** 距离空间 $X$ 中的集合 $M$ 称为**完全有界**的，如果任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在由有限个元组成的 $M$ 的 $\varepsilon$-网
$\varepsilon$-网**:** $\forall \varepsilon > 0 :\ \forall x \in M,\ \exists x' \in N, \mathrm{s.\,t.}\, d(x, x') < \varepsilon$，称 $N$ 是 $M$ 的 $\varepsilon$-网

**定理 1.6.2.** 列紧性蕴含完全有界性，对于完备的空间 $X$ 而言，列紧性等价于完全有界性。

**定理 1.6.3.** 距离空间中的任何完全有界集是可分的

**定义 1.6.3.** 紧集：任何开覆盖存在有限子覆盖

**定理 1.6.4.** 距离空间中紧性和自列紧性等价

**定义 1.6.4** (同等连续). $\mathcal{F}$ 是一族距离空间 $\langle X, d\rangle$ 到 $\langle Y, \rho\rangle$ 的函数，如果任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $f \in \mathcal{F}$ 都有

$$\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon, \text{当} d(x, x') < \delta$$

则称 $\mathcal{F}$ 是同等连续的

> **对角线方法** (分析学常用证明紧性)
> 设有多列有界数列 $\{\alpha_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ 那么每列都有自己的收敛子列 $\{\alpha_{km}\}$ 下标列 $\{km\}$ 是不同的指标序列，那么我们的目标就是找一列共同的**下标列**，对每一列数列都适用

## 1.7　赋范线性空间

**定义 1.7.1** (赋范线性空间). 对复的或实的线性空间 $X$，若有 $X$ 到 $\mathcal{R}$ 的函数 $\|x\|$, s. t.

1. 非负定: $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. 线性性: $||ax|| = |a| \cdot ||x||$
3. 三角不等式

即：线性空间 $X$ 赋予范数 $||\cdot||$ 满足三条件，记为 $\langle X, ||\cdot||\rangle$

赋范线性空间 X 中，$||x||$ 是 $x \in X$ 的连续函数（依赖于收敛的定义）

**定义 1.7.2** (线性算子).

$$T : \langle X, ||\cdot||_1\rangle \to \langle Y, ||\cdot||_2\rangle,\ \forall x, y \in X, \alpha, \beta \text{是数，都有：}$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

如果 $Tx$ 有界，即 $||Tx||_2 \leq C||x||_1$，定义**线性算子 $\boldsymbol{T}$ 的范数** $||\mathbf{T}||$:

$$||T|| = \sup_{||x||_1=1} ||Tx||_2 = \sup\{\frac{||Tx||_2}{||x||_1}\}$$

> 线性算子的范数实际就是他把单位元线性映射后的最小像大小

**定理 1.7.1** (性质). 下列几条结论相互等价

1. $T$ 在 $X$ 中某点连续
2. $T$ 在 $X$ 中所有点连续
3. $T$ 有界

**定义 1.7.3** (线性泛函). 线性空间 $X$ 上的复值函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 称为线性泛函，如果 $\forall x, y \in X$, 数$\alpha, \beta$ 有

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$x_1, \ldots, x_n$ 是赋范线性空间 X 中线性无关的元素，则有 $\mu > 0$ s.t.

$$|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leq \ \mu \ ||\alpha_1 x1 + \cdots + \alpha_n x_n||$$

**定义 1.7.4.**
**子空间**：距离线性空间中，闭的线性流形称为**子空间**
**线性流形**：线性空间 $X$ 的非空子集 $M$: $\forall x, y \in M, x + y, ax \in M$

**定理 1.7.2** (**Reisz**). 赋范线性空间 $X$ 的真子空间 $M$，则对任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 $x_\varepsilon > 0, \mathrm{s.t.}\ ||x_\varepsilon|| = 1$，且

$$\rho(x_\varepsilon, M) = \inf_{m \in M} ||x_\varepsilon - m|| \geq \ 1 - \varepsilon$$

完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间 (Banach Space)**

## 1.8 压缩映像原理

**定义 1.8.1** (Lipschitz 条件). 设 $\langle X, d\rangle$ 和 $\langle Y, \rho\rangle$ 是两个度量空间，映射 $T: X \to Y$ 满足

$$\rho(T(x), T(y)) \leq K d(x, y),\ \forall x, y \in X$$

则称 $T$ 是 ***Lipschitz*** **连续**的，$K$ 为 ***Lipschitz*** **常数**

特别的，如果 $K < 1$，则称 $T$ 为**压缩映像**，$K$ 为**压缩常数**
如果 $Tx = x$，则称 $x$ 为 $T$ 的**不动点**

**定理 1.8.1.** 距离空间 $X$ 中符合 *Lipschitz* 条件的映射 $T$ 是连续的

下面正式给出**压缩映像原理**

**定理 1.8.2** (压缩映像原理)**.** 设 $\langle X, d\rangle$ 是完备的距离空间，$T : X \to X$ 是 $X$ 到自身的压缩映像，则 $T$ 有唯一不动点 $\bar{x} \in X$，即 $T\bar{x} = \bar{x}$ $\bar{x}$ 有如下性质：
*(1)* 对任意 $x_0 \in X$，由 $x_{n+1} = Tx_n$ 所生成的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\bar{x}$
*(2)* $d(x_n, \bar{x}) \leq \dfrac{K^n}{1-K} d(x_0, Tx_0)$：对收敛速度的估计

性质 2 也就是在说这种压缩不动点是一个很强的收敛点，收敛速度几乎强于几何级数
可以利用压缩映像原理证明 **Picard 定理**，即常微分方程初值问题的解的存在唯一性：

**例 1.8.1** (Picard 定理)**.** *f(t,x)* 在区域 $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ 上连续且对 $x$ 满足 *Lipschitz* 条件，则初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$$

在区间 $[t_0 - h, t_0 + h],\ h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\},\ M = \max_D |f(t, x)|$ 上有唯一解

**例 1.8.2** (隐函数存在定理)**.** 设 $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n,\ y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0) \in \mathbb{R}^m$。设 $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是 $(x^0, y^0)$ 的一个邻域，$f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ 是一个连续函数，并且 $f$ 关于 $y = (y_1, \ldots, y_m)$ 的所有偏导数在 $U \times V$ 上都连续。如果满足以下条件：

*1.* $f(x^0, y^0) = 0$

*2.* $\det\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\right] \neq 0$

则存在 $x^0$ 的一个邻域 $U_0 \subset U$ 以及唯一的连续函数 $\varphi : U_0 \to \mathbb{R}^m$，使得：

$$\begin{cases} f(x, \varphi(x)) = 0, & \forall x \in U_0 \\ \varphi(x^0) = y^0 \end{cases}$$

其中，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)$ 是 $f(x, y)$ 作为 $y$ 的函数在 $y^0$ 处的雅可比矩阵：

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(x^0, y^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

而 $\det[\cdot]$ 表示其行列式。

压缩映像原理可以用来证明许多分析学中的重要定理.

下面介绍 **Fréchet 导数**

**定义 1.8.2** (Fréchet 导数). 设 $X,Y$ 是 *Banach* 空间，$F : X \to Y$，如果存在从 $X$ 到 $Y$ 的有界线性算子 $A$，使得

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||F(x+h)-F(x)-Ah||_Y}{||h||_X} = 0$$

则称 $F$ 在点 $x$ 处 ***Fréchet* 可微**，$A$ 为 $F$ 在 $x$ 处的 ***Fréchet* 导数**，记为 $F'(x)$

"由于 F'(x) 定义为映像的线性主部，所以正好反映了将非线性问题线性化，他是应用的最多的一种微分概念"

# 第二章　Hilbert 空间

## 2.1　内积空间

**定义 2.1.1** (内积空间)**.** *复线性空间 $X$, 如果 $X$ 上定义了内积 $(\cdot,\cdot):\forall x,y\in X,\exists!(x,y)\in\mathbb{C}$，满足：*

1. $(x,x)\geq 0,(x,x)=0 \iff x=0$
2. $(\alpha x+y,z)=\alpha(x,z)+(y,z),\ \forall x,y,z\in X,\ \forall\alpha\in\mathbb{C}$　注意：$(x,ay)=\bar{a}(x,y)$
3. $(x,y)=\overline{(y,x)},\ \forall x,y\in X$

*则称 $X$ 为***内积空间**。

X 中的一族元素 $\{x_j\}$ 称为**正规正交集**，如果对任意的 $i\neq j$，都有 $(x_i,x_j)=0$。书上用了一个简单的记号：Kronecker-$\delta$:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

自然的，可以定义这个内积空间中的范数为：

$$||x||=(x,x)^{1/2}$$

不难验证他满足我们的范数公设，所以这样定义出来的内积空间 X 也是一个赋范线性空间

这样，我们可以顺带得到一个有趣的结论：$x,y$ 正交，则 $||x+y||^2=||x||^2+||y||^2$，这就是**勾股定理**的推广。由此，我们可以利用正规正交集把任意向量分解：

**定理 2.1.1** (内积空间中的勾股定理). 设 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 是内积空间 $X$ 中的正规正交集，则对任何 $x \in X$ 都有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x, x_n) x_n \right\|^2.$$

> 在这里其实说的就是 x 的正交分解：
>
> $$x = \underbrace{\sum_{n=1}^N (x, x_n) x_n}_{\substack{\downarrow \\ x\text{ 在 }\{x_n\} \\ \text{所张成子空} \\ \text{间上的投影} \\ x_{\text{proj}}}} + \underbrace{\left( x - \sum_{n=1}^N (x, x_n) x_n \right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{与该子空间} \\ \text{正交的分量} \\ x_{\text{ortho}}}}$$

**推论 2.1.2** (Bessel 不等式). 设 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 是内积空间 $X$ 中的正规正交集，则对任何 $x \in X$ 都有

$$\sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2 \le \|x\|^2.$$

直角三角形斜边大于直角边

**推论 2.1.3** (Schwarz 不等式). 对内积空间 $X$ 中任意两个向量 $x, y$ 都有

$$|(x, y)| \le \|x\| \|y\|.$$

现在我们回到对空间的讨论上来，我们先尝试证明按照内积定义的范数满足范数公设，从而说明**赋范线性空间**：

> 范数公设：
>
> 1. 非负定: $||x|| = 0 \iff x = 0$
> 2. 线性性: $||ax|| = |a| \cdot ||x||$
> 3. 三角不等式

*证明*. 公设 1、2 根据内积的定义不难验证，下面证明公设 3.$\forall x, y \in X$

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 &= (x+y, x+y) \\
&= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(Schwarz 不等式)} \\
&= (\|x\|+\|y\|)^2.
\end{aligned}
$$

两边开根号即可得证。 □

**命题 2.1.4.** 内积 $(x,y)$ 在 $X$ 中对 $x,y$ 连续，i. e. $n\to\infty$ :

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x,y)$$

**命题 2.1.5.** 内积空间 $X$ 的稠密子集 $M$，若有 $x_0 \in X$, s. t.

$$(x_0, x) = 0,\ \forall\ x \in M$$

则 $x_0 = 0$

**定理 2.1.6** (极化恒等式). 设 $X$ 是内积空间，则 $\forall x,y\in X$，有

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||x+i^k y||^2 \\
&= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2)
\end{aligned}
$$

在实线性空间中就是：

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot\beta &= \frac{1}{4}\left[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2\right] \\
&= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

可以顺便得到一个有趣的结论：

**推论 2.1.7** (平行四边形法则). $\forall x,y$ 是 $X$ 中的向量

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

平行四边形对角线平方和等于两倍邻边平方和。

内积空间变成赋范线性空间是一个很平凡的过程，因为上述的所有讨论本质还是在初等 Euchlid 空间中的扩展，很多性质和概念可以直接类比过去.
问题在于:是否对于所有的赋范线性空间都能按照这种构造将距离范数 $||x||$ 表为 $[(x,x)]^{1/2}$? 答案是否定的。但是可以有一个较弱的结论：

**X 能赋以内积的充要条件是 X 中的范数满足平行四边形法则**

**例 2.1.1.** 在空间 $C[0,1]$ 中，取 $x(t)=1, y(t)=t$ :

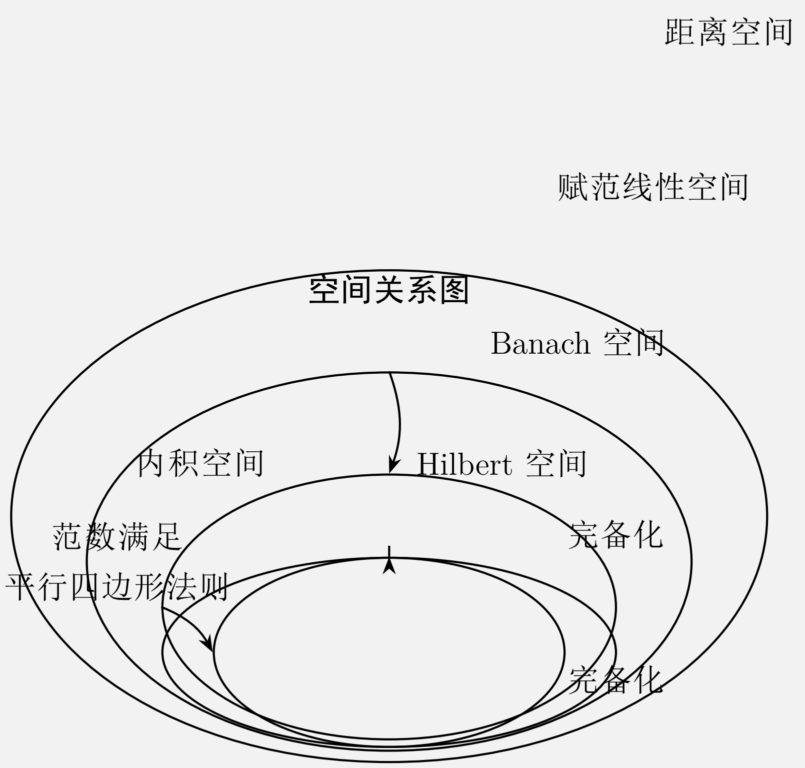
$$||x+y|| = \max_{0\le t\le 1}|1+t| = 2||x-y|| = \max_{0\le t\le 1}|1-t| = 1||x|| = ||y|| = 1$$

不满足平行四边形法则，所以 $C[0,1]$ 不是内积空间

现在，我们可以正式给出 Hilbert 空间的定义：

**定义 2.1.2** (Hilbert 空间)**.** 完备的内积空间$H$ 叫做 **Hilbert 空间**

距离空间 $\langle X,d\rangle$ 中所有 Cauchy 序列收敛则称他是**完备的**




**例 2.1.2.** 考察 $l^2$ 空间：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ 的复序列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义内积为

$$(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta_n}.$$

可以验证 $l^2$ 空间满足内积公设，则 $l^2$按照$(\cdot,\cdot)$是一个内积空间，下证完备
设 $\{\xi^{(k)}\}$ 是 $l^2$ 中的 *Cauchy* 列，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $m,n > N$ 时，有

$$||\xi^{(n)} - \xi^{(m)}||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$

则对任意的 $j$，有 $|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}| < \varepsilon$，所以 $\{\xi_j^{(n)}\}$ 是复数域上的 *Cauchy* 列，故存在极限 $\xi_j = \lim_{n\to\infty} \xi_j^{(n)}$，从而定义 $\xi = \{\xi_j\}$
下面证明 $\xi \in l^2$，以及 $\xi^{(n)} \to \xi$
由 *Cauchy* 列的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $m,n > N$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$

则对任意的 $j$，有 $|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}| < \varepsilon$，所以 $\{\xi_j^{(n)}\}$ 是复数域上的 *Cauchy* 列，故存在极限 $\xi_j = \lim_{n\to\infty} \xi_j^{(n)}$，从而定义 $\xi = \{\xi_j\}$

常用的 Hilbert 空间是函数空间，其中最简单的是 $L^2[a,b]$ 空间：

**例 2.1.3.** 空间 $L^2[a,b]$
有限区间上的复平方可积函数空间 $L^2[a,b], f, g \in L^2$，定义内积为

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

容易验证他是一个内积空间，而完备性就是我们在 § 1 中证明过的内容。

**命题 2.1.8.** 内积空间 $X$ 的完备化 $\widetilde{X}$ 是一个 *Hilbert* 空间。

## 2.2 正规正交基

此后我们习惯用 H 表示非零的 Hilbert 空间

对于 H 中任何一列线性无关的 $\{u_n\}$，都可以用 **Schmidt 正交化方法**构造出一列正规正交集 $\{v_n\}$. 操作如下：

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{u_1}{||u_1||}, \\
v_2 &= \frac{u_2 - (u_2, v_1)v_1}{||u_2 - (u_2, v_1)v_1||}, \\
v_3 &= \frac{u_3 - (u_3, v_1)v_1 - (u_3, v_2)v_2}{||u_3 - (u_3, v_1)v_1 - (u_3, v_2)v_2||}, \\
&\vdots \\
v_n &= \frac{u_n - \sum_{k=1}^{n-1}(u_n, v_k)v_k}{||u_n - \sum_{k=1}^{n-1}(u_n, v_k)v_k||}.
\end{aligned}$$

**定义 2.2.1** (正规正交基). 设 $S$ 是 $H$ 中的正规正交集，如果 $H$ 中没有其他的正规正交集真包含 $S$，则称 $S$ 为 $H$ 的**正规正交基**

他有一个等价叙述：

**命题 2.2.1.** 设 $S$ 是 $H$ 中的正规正交集，则

$$S \text{ 是 } H \text{ 的正规正交基} \iff H \text{ 中没有非零元与 } S \text{ 中的每个元正交}$$

关于正规正交基的存在性，我们有如下定理：

- 若 H 可分，则 H 中存在可数的正规正交基
- 每个非零的 Hilbert 空间都有正规正交基
- $\{e_\alpha\}$ 是 H 的一个正交基，$\alpha \in \mathcal{A}$ 是指标集，则对任意 $x \in H$，都有

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (x, e_\alpha) e_\alpha$$

- **Parseval 等式**：$\forall x \in H$，都有

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |(x, e_\alpha)|^2$$

在正交基下，向量的范数可以通过其在基上的投影来表示。

**命题 2.2.2.** 任何一个可分的 *Hilbert* 空间 $H$ 都与 $l^2$ 同构

同构：存在双射 $T: H \to l^2$，且 $\forall x, y \in H$，都有

$$(Tx, Ty)_{l^2} = (x, y)_H$$

## 2.3　射影定理、Fréchet-Riesz 表示定理

**定义 2.3.1** (正交补). 设 $M$ 是 $H$ 的子空间（线性流形），则

$$M^{\perp} = \{x \in H : (x, y) = 0, \forall y \in M\}$$

称 $M^{\perp}$ 为 $M$ 的**正交补**

显然，$M^{\perp}$ 是 H 的子空间，且 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$，而且 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$
下面是两个重要的定理：

**定理 2.3.1** (射影定理). 设 $H$ 是 *Hilbert* 空间，$M$ 是 $H$ 的子空间，则对任意 $x \in H$，都可以唯一的表示为

$$x = y + z, \quad y \in M,\ z \in M^{\perp}.$$

$y$ 和 $z$ 分别称为 $x$ 在 $M$ 上的**正交投影**和**正交余量**

应该指出的是，**射影定理实际上是 Schmidt 正交化的一个推广**。因为此时的 M 不再局限于有限维.
射影定理使得 Hilbert 空间有着丰富的几何性质，从而区别于一般的 Banach 空间.

**定义 2.3.2** (对偶空间/共轭空间). 设 $X$ 是赋范线性空间，$X$ 上所有有界线性泛函 $f: X \to \mathbb{C}$ 的全体构成的线性空间，记为 $X^*$，称为 $X$ 的**对偶空间**或**共轭空间**。
对 $f \in X^*$，定义

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)|$$

则 $||\cdot||$ 是 $X^*$ 上的范数，且 $X^*$ 是 *Banach* 空间

**定理 2.3.2** (Fréchet-Riesz 定理). 设 $H$ 是 *Hilbert* 空间，$f: H \to \mathbb{R}$ 是连续线性泛函，则存在唯一的 $y \in H$，使得

$$f(x) = (x, y)_H, \quad \forall x \in H.$$

并且

$$||f||_{H^*} = ||y||_H.$$