一维随机游动

课程笔记附录：解题过程图示

刘明琦

2025 年 10 月 16 日

前言

本附件整理了“一维随机游动”问题的解题过程要点，并配套展示了五张过程图示（1.jpg-5.jpg）。为保持与主笔记一致，采用 XeLaTeX 与统一的版式和环境设置。

刘明琦
oday

ableofcontents

第一章　问题与解答概览

extbf 问题背景（概述）
考虑一维随机游动：粒子以步长 ± 1（或一般步长）在整数线上移动。典型关注量包括：首次到达某点的概率、预期返回时间、吸收边界下的吸收概率与期望步数、偏置游动的极限行为等。本章仅整理图示步骤，不替代完整推导。

1.1　解题过程图示

下列图示按解题顺序排列。若需插入文字注释或推导公式，可在对应图之后添加段落或公式环境。

如需将每一步转写为可检验的公式推导，我可以基于你的文字或草图内容补齐相应的差分/边值问题与闭式解，并将证明与说明整理为定理-推论-例题的结构。

$X_1, X_2 \cdots$ i.i.d. $\qquad S_0 = 0$

$P(X_1=-1) = P(X_1=1) = \frac{1}{2} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},\ \mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \cdots X_n)$

停时 $T = \inf\{n : S_n = -a$ 或 $S_n = b\}$

$\boxed{\text{有吸收壁的简单随机游走}}$

Step 1: S_n 为鞅 (eg2.1.6) T 为停时

由 Doob: $S_{n\wedge T}$ 为鞅 & $E(S_{n\wedge T}) = E(S_{0\wedge T}) = 0 = E(S_0)$

Goal: $E(S_{n\wedge T}) = E(S_T) = 0$

How? Let $n \to \infty$ (且 $|S_{n\wedge T}| \le \max\{a,b\}$ 有界)

Step 2. 由 DCT.

$|S_{n\wedge T}| < \max\{a,b\} = c$

则 $E[S_T] = E[\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge T}] = \lim_{n\to\infty} E[S_{n\wedge T}] = 0$

Step 3.

$S_T = -a$ 或 b

则 $\begin{cases} E[S_T] = (-a)\cdot P_{-a} + b \cdot P_b = 0 \\ P_{-a} + P_b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{-a} = \frac{b}{a+b} \\ P_b = \frac{a}{a+b} \end{cases}$

// 求出 S_T 的分布，下求 $E[T]$（结束时长期望）

Step 4. $M_{n\wedge T} = S_{n\wedge T}^2 - n\wedge T$ 为鞅 (eg2.1.3 & Doob截断)

$\to E[M_{n\wedge T}] = E[M_0] = S_0^2 - 0 = 0 \Rightarrow \underline{E[S_{n\wedge T}^2] = E[n\wedge T]}$

令 $n \to \infty$ $\quad E[S_{n\wedge T}^2] = E[n\wedge T]$

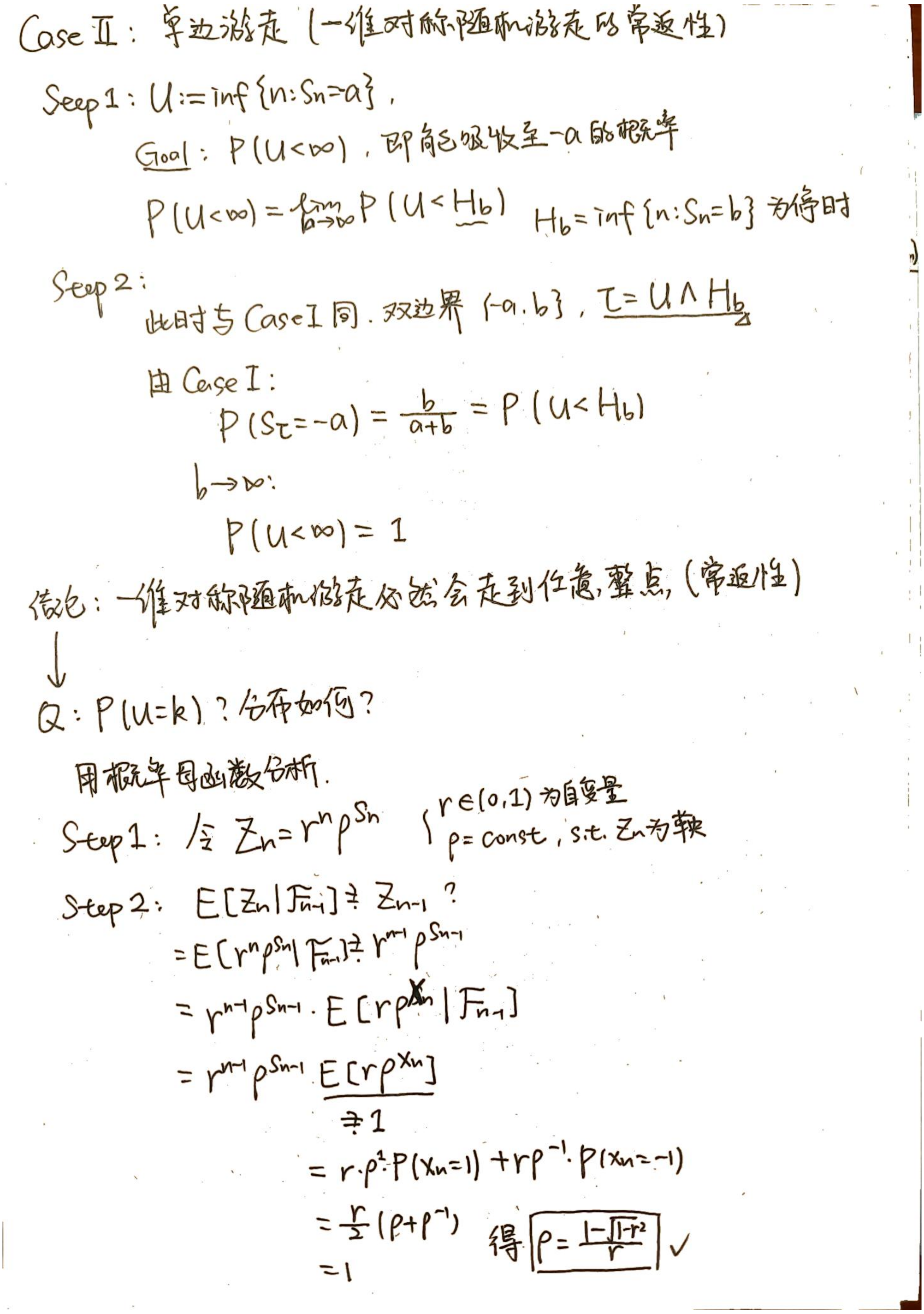
$\downarrow$ DCT $\qquad \downarrow$

$E[S_T^2] = E[T] \quad (*)$: Wald's Identity

$= a^2 \cdot P_{-a} + b^2 \cdot P_b$

$= ab \qquad$ 故 $E[T] = ab$

图 1.1: 步骤 1：问题建模与基本设定（示意）



Case Ⅱ：单边游走（一维对称随机游走的常返性）

Step 1：$U := \inf\{n : S_n = -a\}$，

Goal：$P(U<\infty)$，即能吸收至 $-a$ 的概率

$P(U<\infty) = \lim_{b\to\infty} P(U<\underset{\sim}{H_b})$　$H_b = \inf\{n : S_n = b\}$ 为停时

Step 2：

此时与 Case Ⅰ 同．双边界 $\{-a, b\}$，$\underline{\tau = U \wedge H_b}$

由 Case Ⅰ：

$$P(S_\tau = -a) = \frac{b}{a+b} = P(U<H_b)$$

$b\to\infty$：

$$P(U<\infty) = 1$$

结论：一维对称随机游走必然会走到任意整点，（常返性）

↓

Q：$P(U=k)$？分布如何？

用概率母函数分析．

Step 1：令 $Z_n = r^n \rho^{S_n}$　$\begin{cases} r\in(0,1) \text{ 为自变量} \\ \rho = \text{const}, \text{ s.t. } Z_n \text{ 为鞅} \end{cases}$

Step 2：$E[Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \overset{?}{=} Z_{n-1}$？

$$= E[r^n\rho^{S_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \overset{?}{=} r^{n-1}\rho^{S_{n-1}}$$

$$= r^{n-1}\rho^{S_{n-1}} \cdot E[r\rho^{X_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$= r^{n-1}\rho^{S_{n-1}} \underbrace{E[r\rho^{X_n}]}_{\overset{?}{=}1}$$

$$= r\cdot\rho^{1}\cdot P(X_n=1) + r\rho^{-1}\cdot P(X_n=-1)$$

$$= \frac{r}{2}(\rho+\rho^{-1})$$

$$= 1$$

得 $\boxed{\rho = \frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}}$ ✓

图 1.2: 步骤 2：关键量的递推/差分方程（示意）

Step 3. 现有鞅 Z_n，停时 $U=\inf\{S_n=-a\}$

$0\le Z_{n\wedge U}\le \rho_1^{-a}$，有界，则由 Doob:

$$E[Z_U] = E[Z_0]$$

$$E[Z_U] = E[r^U\rho_1^{S_U}] = E[r^U\rho_1^{-a}], \qquad E[Z_0] = E[1\cdot\rho_1^0]=1$$

从而:

$$E[r^U]=\rho_1^a=\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^a$$

展开 r^k 系数即 $P(U=k)$

$\boxed{\text{概率母函数}}$

$$E[r^U]=\sum_{k=0}^{\infty}P(U=k)\cdot r^k$$

Case Ⅲ 一般情况:

$X_1\ X_2\cdots$ i.i.d.

$P(X_1=1)=p$，$P(X_1=-1)=q$　$\frac{1}{2}<p<1$.

$S_0=0$　$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$　$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1\cdots X_n)$. $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$.

$T_x=\inf\{n: S_n=x\}$

$\boxed{\text{分析:}}$

此时 $E[X_i]=p-q>0$,

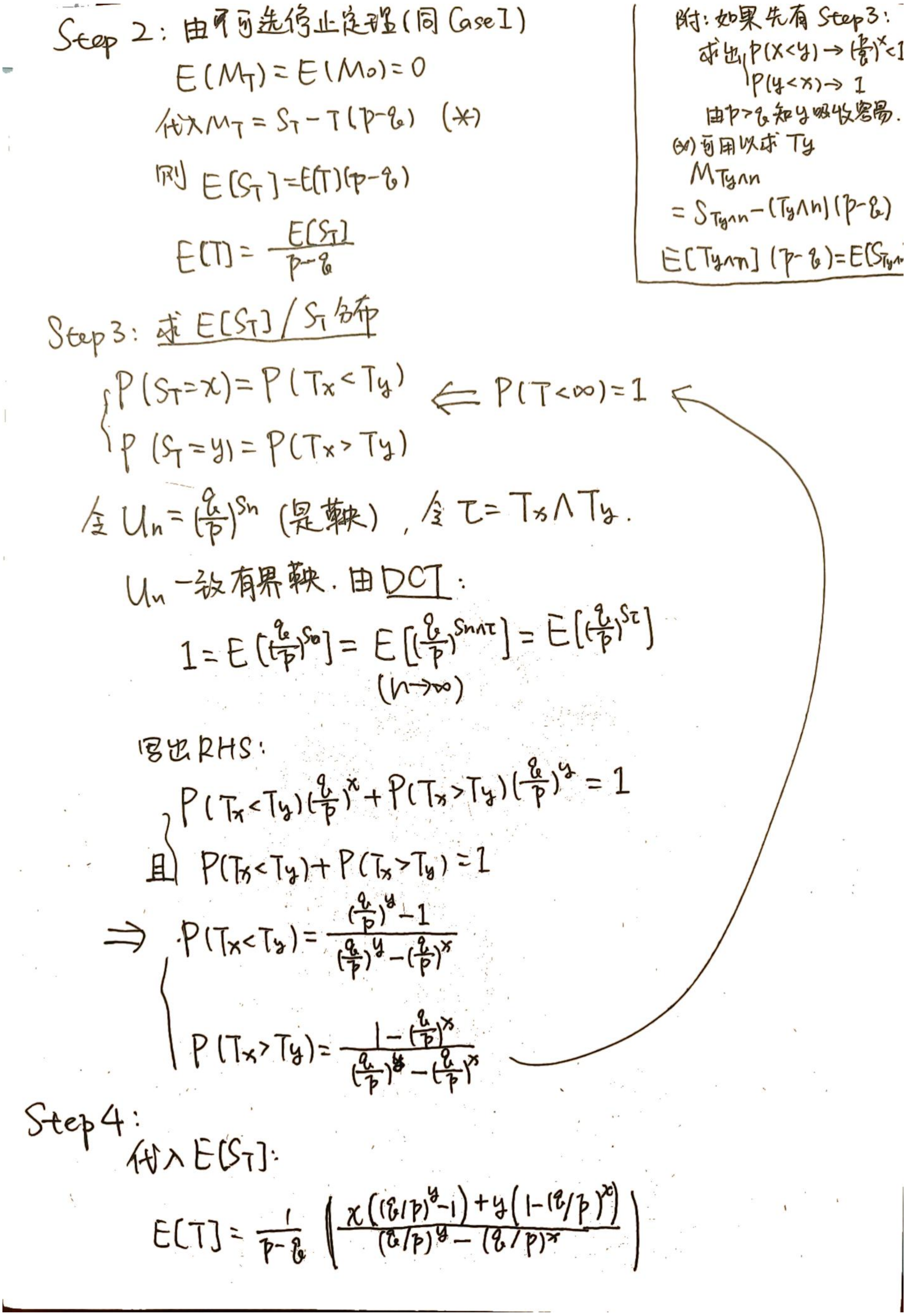
$E[S_n]=n(p-q)$，不是鞅

Step1: 构造鞅

$M_n:=S_n-n(p-q)$　（补偿过程）

M_n 为鞅可验证

图 1.3: 步骤 3：边界条件与通解结构（示意）



Step 2：由可选停止定理(同 Case I)

$$E(M_T)=E(M_0)=0$$

代入 $M_T = S_T - T(p-q)$ (*)

则 $E[S_T]=E(T)(p-q)$

$$E(T)=\frac{E[S_T]}{p-q}$$

附：如果先有 Step3：

求出 $P(X<y) \to (\frac{q}{p})^x<1$

$P(y<x) \to 1$

由 $p>q$ 知 y 吸收容易.

(*) 可用以求 T_y

$M_{T_y\wedge n}$

$= S_{T_y\wedge n}-(T_y\wedge n)(p-q)$

$E[T_y\wedge n](p-q)=E[S_{T_y\wedge n}$

Step3：求 $E[S_T]$ / S_T 分布

$$\begin{cases} P(S_T=x)=P(T_x<T_y) \\ P(S_T=y)=P(T_x>T_y) \end{cases} \Leftarrow P(T<\infty)=1$$

令 $U_n=(\frac{q}{p})^{S_n}$ (是鞅)，令 $\tau=T_x\wedge T_y$.

U_n 一致有界鞅. 由 DCT：

$$1=E[(\tfrac{q}{p})^{S_0}]=E[(\tfrac{q}{p})^{S_{n\wedge\tau}}]\underset{(n\to\infty)}{=}E[(\tfrac{q}{p})^{S_\tau}]$$

写出 RHS：

$$\begin{cases} P(T_x<T_y)(\frac{q}{p})^x+P(T_x>T_y)(\frac{q}{p})^y=1 \\ \text{且 } P(T_x<T_y)+P(T_x>T_y)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(T_x<T_y)=\dfrac{(\frac{q}{p})^y-1}{(\frac{q}{p})^y-(\frac{q}{p})^x} \\ P(T_x>T_y)=\dfrac{1-(\frac{q}{p})^x}{(\frac{q}{p})^y-(\frac{q}{p})^x} \end{cases}$$

Step 4：

代入 $E[S_T]$：

$$E[T]=\frac{1}{p-q}\left(\frac{x((q/p)^y-1)+y(1-(q/p)^x)}{(q/p)^y-(q/p)^x}\right)$$

图 1.4: 步骤 4：常数确定与概率/期望解（示意）

Step 5: 如果先有 Step 3.

$P(X<y) \xrightarrow{x\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^x < 1$ 则 $p>q$ 使之不对称、y 吸收容易

$P(X>y) \xrightarrow{x\to\infty} 1$

下求 $E[T_y]$.

同 $(*)$. $E[S_{T_y\wedge n} - (p-q)(T_y\wedge n)] = 0$

$$ES_{T_y\wedge n} = E[T_y\wedge n](p-q)$$

$T_y\wedge n < T_y\wedge(n+1)$ 单调

$M \le S_{T_y\wedge n} \le y$

M 可积. 由 $P(X<y) \to 0^+$

从而, 由

$$\begin{cases} DCT \to LHS\ 收敛 \\ MCT \to RHS\ 收敛 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[S_{T_y}] = E[T_y](p-q)$$

$E[S_{T_y}] = y$

$$E[T_y] = \frac{y}{p-q}$$

图 1.5: 步骤 5：结论与特殊情形讨论（示意）

第二章　详细推导过程

本章将图片中的手写笔记转写为 LaTeX 代码，包含对有界随机游走、常返性以及有偏游走三种情形的详细分析。

2.1　Case I：有吸收壁的简单对称随机游走

- 设 $X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布（i.i.d.），且 $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$。
- 随机游走过程定义为 $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。
- 信息流（filtration）为 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$。
- 定义停时 $T = \inf\{n : S_n = -a \text{ or } S_n = b\}$，其中 $a, b > 0$。

2.1.1　Step 1-3: 计算吸收概率 $P(S_T = -a)$

1. **构造鞅**: 过程 S_n 是一个鞅，因为 $E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} + E[X_n] = S_{n-1}$。根据 Doob 可选停止定理，对于停时 T，过程 $S_{n\wedge T}$ 也是一个鞅，因此 $E[S_{n\wedge T}] = E[S_0] = 0$。
2. **应用控制收敛定理 (DCT)**: 我们的目标是证明 $E[S_T] = 0$。由于 S_n 在停时 T 之前始终位于 $(-a, b)$ 区间内，所以 $|S_{n\wedge T}| \leq \max(a, b)$，即 $S_{n\wedge T}$ 是一致有界的。当 $n \to \infty$ 时，$S_{n\wedge T} \to S_T$。根据控制收敛定理，我们可以交换期望和极限：

$$E[S_T] = E[\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge T}] = \lim_{n\to\infty} E[S_{n\wedge T}] = 0$$

3. **求解吸收概率**: 在停时 T 刻，S_T 的取值只能是 $-a$ 或 b。设 $P_a = P(S_T = -a)$ 和 $P_b = P(S_T = b)$。我们有两个方程：

$$\begin{aligned} E[S_T] = (-a) \cdot P_a + b \cdot P_b = 0 \\ P_a + P_b = 1 \end{aligned}$$

解此方程组可得：

$$P(S_T=-a)=\frac{b}{a+b},\quad P(S_T=b)=\frac{a}{a+b}$$

2.1.2 Step 4: 计算期望停止时间 $E[T]$

1. **构造新鞅**: 构造一个新过程 $M_n=S_n^2-n$。这是一个鞅，因为：

$$\begin{aligned}E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}]&=E[S_n^2-n|\mathcal{F}_{n-1}]\\&=E[(S_{n-1}+X_n)^2-n|\mathcal{F}_{n-1}]\\&=E[S_{n-1}^2+2S_{n-1}X_n+X_n^2-n|\mathcal{F}_{n-1}]\\&=S_{n-1}^2+2S_{n-1}E[X_n]+E[X_n^2]-n\\&=S_{n-1}^2+0+1-n=(S_{n-1}^2-(n-1))=M_{n-1}\end{aligned}$$

2. **应用可选停止与收敛定理**: 对鞅 M_n 应用可选停止定理，有 $E[M_{n\wedge T}]=E[M_0]=0$，即 $E[S_{n\wedge T}^2]=E[n\wedge T]$。当 $n\to\infty$ 时，由于 $S_{n\wedge T}^2$ 有界，由 DCT 可得 $E[S_{n\wedge T}^2]\to E[S_T^2]$。同时，由单调收敛定理 (MCT) 可得 $E[n\wedge T]\to E[T]$。因此，我们得到 $E[S_T^2]=E[T]$，这即是 **Wald's Identity** 的一个特例。

3. **求解** $E[T]$:

$$\begin{aligned}E[S_T^2]&=(-a)^2P(S_T=-a)+b^2P(S_T=b)\\&=a^2\frac{b}{a+b}+b^2\frac{a}{a+b}\\&=\frac{ab(a+b)}{a+b}=ab\end{aligned}$$

所以，期望停止时间为 $E[T]=ab$。

2.2 Case II: 单边游走与常返性

考虑一维对称随机游走是否会回到任意整数点（常返性）。

- 设停时 $U=\inf\{n:S_n=a\}$，其中 $a>0$。我们想计算 $P(U<\infty)$。
- 我们可以借助双边吸收壁的结果。设另一个吸收壁在 $-b$ 处，停时为 $H_b=\inf\{n:S_n=-b\}$。总停时为 $\tau=U\wedge H_b$。
- 从 Case I 的结果可知，粒子被 $-b$ 吸收的概率为 $P(S_\tau=-b)=\frac{a}{a+b}$。

- 那么，不被 $-b$ 吸收（即被 a 吸收）的概率为 $P(S_\tau = a) = P(U < H_b) = \frac{b}{a+b}$。
- 令 $b \to \infty$，则 $P(U < \infty) = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1$。
- **结论**: 一维对称随机游走是常返的，它终将到达任何一个整数点。

2.2.1 通过概率母函数分析 $P(U = k)$

1. **构造指数鞅**: 寻找一个参数 $\rho \in (0, 1)$，使得 $Z_n = \rho^{S_n} r^n$ 是一个鞅。

$$\begin{aligned} E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[\rho^{S_{n-1}+X_n} r^n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \rho^{S_{n-1}} r^n E[\rho^{X_n}] \\ &= Z_{n-1} r E[\rho^{X_n}] = Z_{n-1} r \left(\frac{1}{2}\rho^1 + \frac{1}{2}\rho^{-1}\right) \end{aligned}$$

   要使其为鞅，需要 $r\left(\frac{\rho+\rho^{-1}}{2}\right) = 1$，即 $r = \frac{2}{\rho+\rho^{-1}}$。

2. **求解参数**: 笔记中似乎直接给出了 $\rho = \frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}$ 的结论（这通常是通过解二次方程得到）。

3. **应用可选停止定理**: 考虑停时 $U = \inf\{n : S_n = a\}$。Z_n 是有界鞅（$0 \le S_{n\wedge U} \le a$），因此 $E[Z_U] = E[Z_0] = \rho^{S_0} r^0 = 1$。

$$E[Z_U] = E[\rho^{S_U} r^U] = E[\rho^a r^U] = \rho^a E[r^U] = 1$$

   因此，停时 U 的概率母函数为：

$$E[r^U] = \rho^{-a} = \left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^{-a}$$

   通过展开此母函数，可以得到 $P(U = k)$ 的具体分布。

2.3 Case III: 有偏的随机游走（一般情况）

- 设 $P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = q = 1 - p$，且 $p \neq q$。
- 此时 $E[X_i] = p - q \neq 0$，所以 S_n 不再是鞅。

2.3.1 Step 1-2: 构造鞅并计算 $E[T]$

1. **构造补偿过程**: 定义 $M_n = S_n - n(p-q)$。这是一个鞅，因为：

$$\begin{aligned} E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[S_{n-1} + X_n - n(p-q)|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1} + E[X_n] - n(p-q) \\ &= S_{n-1} + (p-q) - n(p-q) \\ &= S_{n-1} - (n-1)(p-q) = M_{n-1} \end{aligned}$$

2. **应用可选停止定理**: 对停时 $T = \inf\{n : S_n = -a \text{ or } S_n = b\}$，应用可选停止定理于鞅 M_n。与 Case I 类似，可证明 $E[M_T] = E[M_0] = 0$。

$$E[S_T - T(p-q)] = 0 \implies E[T] = \frac{E[S_T]}{p-q}$$

2.3.2 Step 3: 计算吸收概率

1. **构造指数鞅**: 定义 $U_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$。这是一个鞅，因为：

$$\begin{aligned} E[U_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}+X_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right] \\ &= U_{n-1}\left(p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot \frac{p}{q}\right) = U_{n-1}(q+p) = U_{n-1} \end{aligned}$$

2. **应用可选停止与收敛定理**: 对停时 T 应用可选停止定理于有界鞅 U_n。

$$E[U_T] = E[U_0] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} = 1$$

展开 $E[U_T]$:

$$E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} P(S_T = -a) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} P(S_T = b) = 1$$

结合 $P(S_T = -a) + P(S_T = b) = 1$，解得：

$$P(S_T = -a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}, \quad P(S_T = b) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}$$

2.3.3 Step 4-5: 求解 $E[T]$ 和 $E[S_T]$

将吸收概率代入 $E[S_T] = (-a)P(S_T = -a) + bP(S_T = b)$，然后可以得到 $E[T]$:

$$E[T] = \frac{1}{p-q}\left(b\frac{1-(\frac{q}{p})^{-a}}{(\frac{q}{p})^{b}-(\frac{q}{p})^{-a}} - a\frac{(\frac{q}{p})^{b}-1}{(\frac{q}{p})^{b}-(\frac{q}{p})^{-a}}\right)$$

笔记中还讨论了单边吸收（例如 $p > q$ 时，游走趋向于 $+\infty$）的情况，可以通过令 $b \to \infty$ 来分析。