第八章 信用风险建模

主要内容

8.1 信用风险一般知识
8.2 计算违约概率
8.3 信用风险价值度
    Merton 结构模型
    KMV 模型
    Creditmetric 模型
    Creditrisk+模型
8.4 交易对手信用风险

8.1 信用风险的一般知识

8.1.1 定义

信用风险是指债务人或交易对手未能履行合同所规定的义务或信用质量发生变化，影响金融工具价值，从而给债权人或金融工具持有人带来损失的风险。其影响是通过交易对方违约时重置现金流的成本来衡量的。

信用风险存在于商业银行的所有业务中。

信用风险表现为以下几种形式：违约风险、交易对手风险、信用迁移风险、信用事件风险、可归因于信用风险的结算风险。

8.1.2 信用 VaR 与市场 VaR 的区别

1.投资组合分布与正态分布大不相同；

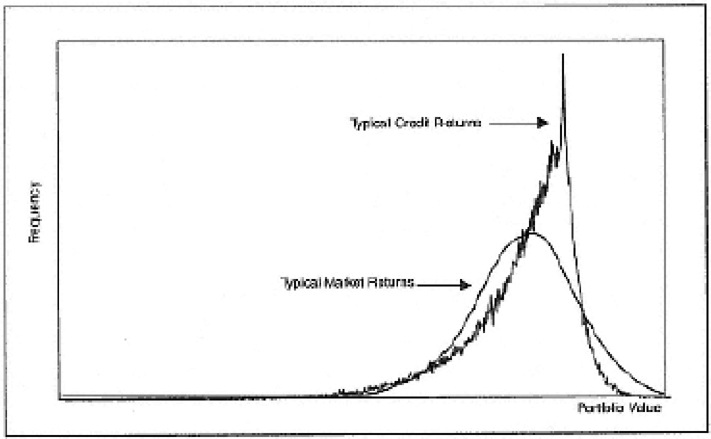


图 1 市场风险与信用风险分布形态

与市场 VaR 不同，信用风险的 VaR 不能直接从均值和方差估计而得，需要对投资组合的价值变化的分布进行模拟来计算。

2. 投资组合更加分散

- 需要估计组合中各项的相关性，但相关性不容易观察；
- 需要对债务人的资产结构进行假定；
- 需要对股票收益过程进行假定；

3.贷款的信息不全，没有得到充分披露；

表 1　信用风险与市场风险的差别

项目	市场风险	信用风险
风险来源	仅仅市场风险的因素	违约风险、回收风险、市场风险
分布状态	基本对称、有厚尾的可能	左偏
时间界限	短期（几天）	长期（几年）
适用总体	商业/贸易单位	所有公司及其对手
发布的法律	没有可使用的	非常重要

8.1.4 预期损失与非预期损失

预期损失（EL）

- 银行合理预计信贷损失的平均值
- EL 是贷款成本的一部分，通过对贷款定价和提取准备金等进行管理

非预期损失（UL）

- 实际损失与预期损失的差
- 也定义为资产未来损失的概率分布的极端不利情况下百分位数的数值与预期损失的差.
- 随时发生，但不能准确预知发生时间及严重程度
- 利差难以弥补，需动用资本

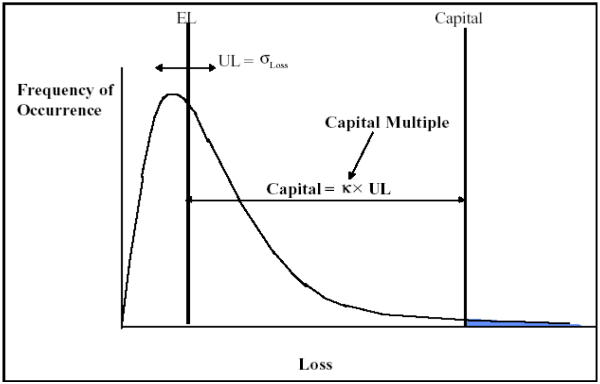


图 2 预期损失与非预期损失

8.1.5 信用风险的三要素

- 违约与否（default）：违约发生服从某种违约概率分布(probability of default)
- 信用暴露（credit exposure,CE),即对手在违约时对其求偿权的经济价值
- 违约后损失（loss given default，LGD），因违约造成的损失比例。

违约造成的预期损失为$\sum_{i} EAD_i \times LGD_i \times PD$

资本金等于 99.9%置信水平下对应的最糟糕损失减去预期损失，

$$\sum_{i} EAD_i \times LGD_i \times \left(WCDR_i - PD\right)$$

8.1.6 计量信用风险的步骤

1. 通过计算违约概率、回收率和违约风险暴露来计算预期损失
   - 信用评级
   - 计算违约概率的其他模型
2. 计算非预期损失
   - Creditmatric 模型
   - KMV 模型
   - Merton 模型
   - Creditrisk+

8.2 计算违约概率

8.2.1 统计方法

(1) 线性模型,

基于线性回归模型，使用一些会计变量做自变量来尝试预测的违约概率。

(2) probit 模型或 logistic 模型

假定企业破产的概率为 p，并假设企业样本服从标准正态分布，其概率函数的 p 分位数可以用财务指标线性解释。

(3) 判别分析法.

已有的客户违约数据对应相应客户信用分类的样本进行分类, 对各组样本选择相应的自变量进行统计分析, 求出合并协方差矩阵。再利用新样本数据中相应的变量代入公式求得马氏距离, 距离最小的表示新样本数据与该类样本最为相似, 由此归如此类违约或不违约, 并根据距离远近求出新客户一年期违约概率。

(4) 其他方法：因子分析法、专家判别法、神经网络法

(5)Altman's Z-得分模型

Logistic 模型

Logistic 模型也是目前计算违约概率方面研究比较成熟的一种模型。该方法假设企业守约概率服从 Logistic 分布。采用一系列财务和业务指标（$X_k, k=n$）作为自变量建立 Logistic 模型，预测企业的守约概率 P。之后，根据银行和相关投资者的风险偏好程度设立分界点 P^*，通过 P 与 P^* 的比较，确定审核对象是否属于违约组。如果企业守约概率 $P<P^*$，则 $Y=0$，说明该企业信用水平较差，属于违约组；如果 $P \geq P^*$，则 $Y=1$，该企业守约率较高，是优质企业。

Logistic 函数的因变量 Y 仅有 0 和 1 两个状态，其中状态 1 为守约，0 为违约。以 $p=P\left(Y=1\right)$ 作为研究对象，p 为守约概率，又称危机临界概率。设 k 个因素影响 Y 的取值，分别表示 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，则有 $\ln\frac{p}{1-p}=g\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$。

其中 k 个因素 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 为模型的自变量。最重要的 Logistic 模型是 Logistic 回归模型，如下：

$$\ln\frac{p}{1-p}=\beta_0+\beta_1 x_1+\ldots+\beta_k x_k$$

其中 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ 是待估的未知参数。可以求得：$\frac{p}{1-p}=e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\ldots+\beta_k x_k}$

从而得到概率 p 的计算公式为：$p=\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x_1+\ldots+\beta_k x_k)}}$

Logistic 函数为取值在（0，1）的增函数，如果带入数据计算出的 p 值接近 1，则说明该客户的信用良好，反之信用较差。

Altman's Z-得分模型

- X_1=流动自己/总资产

- X_2=留存收益/总资产

- X_3=息税前利润/总资产

- X_4=股票市值/负债账面总额

- X_5=销售收入/总资产

$$Z_n = 0.012X_{1,n} + 0.014X_{2,n} + 0.033X_{3,n} + 0.006X_{4,n} + 0.999X_{5,n}$$

如果 Z 大于 3，公司违约的可能性不大；Z 介于 2.7-3 之间，信用处于戒备状态；在 1.8-2.7 之间，公司有一定的违约可能；小于 1.8，违约的可能性很大

缺陷：

1、仅考虑 2 个极端情况(违约与没有违约)，对于负债重整、或是虽然发生违约但是回收率很高的情况就没有做另外较详细的分类。

2、权数未必一直是固定的，必须经常调整。

3、并未考虑景气循环效应因子的影响。
4、公司违约与否与风险特性的关系实际上可能是非线性的。
5、缺乏经济的理论基础，也就是为什么就这几个财务变量值得考虑，难道其它因素(例如公司治理变量)就没有预测能力吗?
6、对市场的变化不够灵敏(运用的会计资料更新太慢)。
7、无法计算投资组合的信用风险，因为 Z-Score 模型主要是针对个别资产的信用风险进行评估，对整个投资组合的信用风险无法衡量。
8、A key assumption underlying discriminant analysis is that the independentvariables used are normally distributed.一个关键假设是：所使用的相互独立的变量服从正态分布

kaggle 案例：债务违约预测

- 本次比赛的目标包括两个方面。其一是建立一个模型，债务人可以通过它来更好地进行财务方面的决策。其二是债权人可以预测这个债务人何时会陷入到财务方面的困境。最终目的是，通过预测未来两年内债务违约的概率，来改进现有的信用评分制度。
- 数据介绍：包含 150000 个用户的信贷信息。SeriousDlqin2yrs 是要预测的对象，又称因变量，即根据其他变量判断用户会不会发生违约。其他 10 个变量为自变量，分为两类：客户自身属性（年龄，月收入，家属数目），客户信贷历史（负债比率，循环贷款使用率，开放贷款数目等）。
- 本次挑战允许团队使用集成模型和算法,如 XGBoost, Gradient Boosting, 随机森林（Random Forest），限制玻尔兹曼机(Restricted Boltzman Machine Neural Networks), Adaboost。以及使用先进的堆叠技术（stacking）和投票分类器来准确地预测违约概率。
-

表 2 债务违约案例的变量表

变量名	变量类型	变量含义

SeriousDlqin2yrs	取值为 0 或 1	两年内是否发生了 90 天以上逾期，即是否违约
RevolvingUtilizationOfUnsecuredLines	percentage	无抵押贷款循环使用率，除不动产和车贷之外的贷款余额与个人信用总额度之比
Age	integer	借款人年龄
NumberOfTime30-59DaysPastDueNotWorse	integer	过去两年中发生 30-59 天逾期的次数
DebtRatio	percentage	负债比率
MonthlyIncome	real	月收入

NumberOfOpenCreditLinesAndLoans	integer	开放贷款（如汽车贷款或抵押贷款）和信用贷款数量（从数值看，应该是贷款的笔数）
NumberOfTimes90DaysLate	integer	过去两年中发生 90 天逾期的次数
NumberRealEstateLoansOrLines	integer	抵押贷款和不动产贷款数量
NumberOfTime60-89DaysPastDueNotWors	integer	过去两年中发生 60-89 天逾期的次数
NumberOfDependents	integer	家属数目

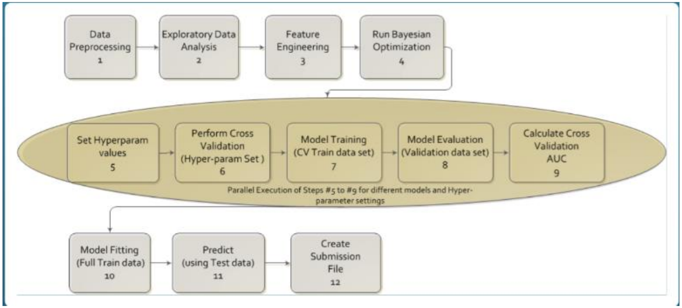
解决方案

债务违约预测之一：数据探索 https://www.jianshu.com/p/be0192aa6486

机器学习系列(18)_Kaggle 债务违约预测冠军经验分享

https://blog.csdn.net/han_xiaoyang/article/details/52788775

- 分析步骤
  - 试探性数据分析
  - 找出重要的变量特征
  - 构建模型，评估正确率



8.2.2 其他估计违约概率方法

- 历史数据,违约矩阵
- 违约密度
- 由信用互换计算违约概率
- 利用股价计算违约概率

8.2.2.1 历史数据

由信用评级公司提供的历史数据，可以用来估计违约概率
下表中显示了公司的信用随时间推移而出现的不同变化

表 3 平均累计违约率%（穆迪）

	Time (years)						
	1	2	3	4	5	7	10
Aaa	0.000	0.000	0.000	0.026	0.100	0.252	0.525
Aa	0.008	0.018	0.042	0.106	0.178	0.344	0.521
A	0.020	0.094	0.218	0.342	0.467	0.762	1.308
Baa	0.170	0.478	0.883	1.360	1.835	2.794	4.353
Ba	1.125	3.019	5.298	7.648	9.805	13.465	18.426
B	4.660	9.195	15.566	20.325	24.692	32.527	40.922
Caa	17.723	27.909	36.116	42.603	47.836	54.539	64.928

例如，某公司债券初始信用级别为 Baa，这家公司有 0.17%的概率在一年内违约，并且有 0.478%的概率在两年内违约，等等

违约率会随期限的延长而增长吗？

对于信用级别较好的公司，随着时间的推移，违约率随之增大；对于信用级别较差的公司，违约率常常是时间期限的递减函数。

8.2.2.2 违约密度

违约密度或风险率是在之前没有违约的条件下，违约发生的概率。

无条件违约概率是指在 0 时刻，即今天，所看到的违约概率。

例：从穆迪的表格中，计算 Caa 级别的债券在第 3 年的无条件违约概率 36.116%-27.909%=8.207%

违约密度的数学表达

设 T 表示违约发生的时刻，发行时刻记为 0。

累积违约概率：从 0 到时刻 t 为止发生违约的概率，即 $Q(T)=P(T\leq t)$

累积生存概率 $V(t)$:直到 t 时刻为止违约仍没有发生的概率

t 时的违约密度（风险率）$\lambda(t)$：在 0 到 t 时刻违约没有发生的条件下，违约

在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的概率为 $\lambda(t)\Delta t$

在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的无条件违约概率为 $V(t)-V(t+\Delta t)$.

条件违约概率：在 t 时刻以前没有发生违约的条件下，公司在 t 与 $t+\Delta t$ 之间发生违约的概率。$\left[V(t)-V(t+\Delta t)\right]/V(t)$.

因此 $$\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta(t)}=-\lambda(t)V_t \tag{1}$$

可以对（1）式求极限可得

$$\frac{dV(t)}{dt}=-\lambda(t)V(t)$$

$$V(t)=e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$$

$$Q(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$$

例：下表示穆迪公司公布的一组累积违约率数据

表 4 1970-2003 年的平均累积违约率

信用等级	期限（年）								
	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0.000	0.000	0.000	0.026	0.100	0.252	0.525	1.004	1.204
Aa	0.008	0.018	0.042	0.106	0.178	0.344	0.521	1.094	1.884
A	0.020	0.094	0.218	0.342	0.467	0.762	1.308	2.396	4.082
Baa	0.170	0.478	0.883	1.360	1.835	2.794	4.353	7.601	10.510
Ba	1.125	3.019	5.298	7.648	9.805	13.465	18.426	27.533	34.852
B	4.660	10.195	15.566	20.325	24.692	32.527	40.922	50.212	52.375
Caa	17.723	27.909	36.116	42.603	47.836	54.539	64.928	70.298	72.783

资料来源：穆迪。

由表我们可以计算 Caa 级别的债券在第 3 年的违约率，36.116%-

27.909%=8.207%

该债券一直到第 2 年年底都不会破产的概率为 100%-27.909%=72.091%

该债券在前两年没有违约的条件下，公司在第 3 年违约的概率为 $0.08207/0.72091=11.38\%$

例 我们假定密度为常数，每年为 1.5%，截至第 1 年年末违约概率为 $1-e^{-0.015\times 1}=0.0149$；截至第 2 年年末违约概率为$1-e^{-0.015\times 2}=0.0296$；截至第 3 年、第 4 年、第 5 年年末违约概率分别为 0.0440、0.0582、0.0723。第 4 年的无条件违约概率为 0.0582-0.0440=0.0142，在前 3 年没有违约的前提下，在第 4 年违约的条件概率为 0.0142/(1-0.044)=0.0149。

8.2.2.3 利用信用等价互换计算违约概率

信用等价互换(CDS)信用违约互换(credit default swap， CDS)是国外债券市场中最常见的信用违约互换购买者将定期向违约互换出售者支付一定费用(称为信用违约互换点差)，而一旦出现信用类事件(主要指债券主体无法偿付)，违约互换购买者将有权利将债券以面值递送给违约互换出售者，从而有效规避信用风险。

信贷违约掉期类似保险合同。债权人通过这种合同将债务风险出售，合同价格就是保费。

为了买入信用保护，买入方所付出占本金的百分比被称为信用违约互换溢差。

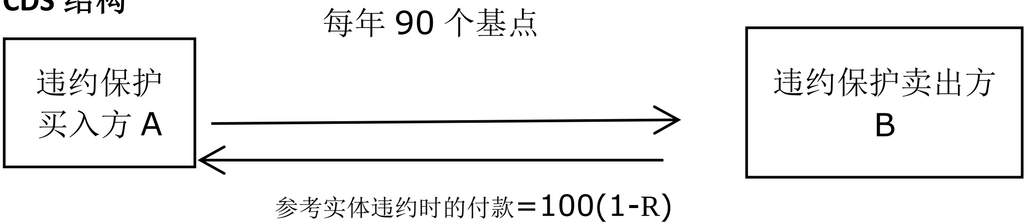
信用违约互换例子

例子：某公司在 2009 年 3 月 1 日买入了一个 5 年期的信用违约互换，其面值为 1 亿美元，买入方付费为每年 90 个基点.

买入方所付出占本金的百分比被称为信用违约互换溢差，付款的期限为信用违约互换的到期日或信用事件发生的日期.

如果违约发生，买入方可以要求卖出方以 1 亿的价格买入面值为 1 亿美元的由参考实体所发行的债券（债券需为可交割债券）

CDS 结构



回收率 R 是指债券在刚刚违约时，其市场价值与债券面值的比率。

在 2010 年、2011 年、2012 年、2013 年和 2014 年的 3 月 1 日买入方向卖出方支付 900000 元。
如果没有违约，则互换买入方没有得到任何收益。
如果发生违约，卖出方支付赔偿。例如假定这一违约债券每 100 元面值的市场价值为 35 元，则卖出方必须向买入方支付 6500 万元。

其它细节

CDS 最常见为每 3 个月付款一次
信用事件发生后，买入方必须向卖出方支付最后的应计付款
以债券还是现金方式交割是合约约定的
在上述例子中，假设定期付款时间在每季度末。如果在 3 年零 1 个月后发生违约，回收率为 40%，会有怎么样的现金流状况？

CDS 市场的吸引力

允许信用风险像市场风险一样进行交易
可将信用风险转移给第三方
能分散信用风险

信用违约互换与债券的收益率

信用违约互换可以用来对企业债券风险进行对冲。

例如某投资人买入了一个 5 年期的企业债券，债券收益率为每年 7%，同时投资人又买入了一个 5 年期的信用违约互换来应对债券发行人的违约。假定信用违约互换的溢差为每年 200 个基点（2%）。

- 如果债券发行人不违约，则投资人的每年收益为 5%=7%-2%
- 如果债券发行人违约，则信用违约互换合约保证投资人用债券换回债券本金，投资人在收到本金后可以将资金以无风险利率在剩余期限投资

因此，n 年期的信用违约互换溢差应该大体等于 n 年期企业债券收益率与 n 年无风险利率之差。

信用溢差

信用溢差是投资者因为承担某种信用风险而每年索取的额外回报。

CDS 溢差和债券收益率溢差。两者应近似相等。

一个 5 年期企业债券，其收益率为每年 6%，和一个 5 年期信用违约互换多头，其信用违约互换溢价为 100 个基点的组合相当于年收益率为 5%的无风险债券。

如果无风险利率为 4.5%会提供怎样的套利机会?5.5%又会怎样？

无风险利率

为了由债券收益率来估计信用溢差，我们必须对无风险利率做出假设。

当交易员对债券收益率溢差给出报价时，具有某个期限的无风险利率一般是对应于类似期限的国债利率。

将 CDS 的期限与债券的期限进行匹配，并由无套利利率得出无风险利率。例如债券收益率为 4.7%，5 年 CDS 溢差为 80 个基点，则 5 年隐含无风险利率为 3.9%。

在衍生产品定价时往往将 LIBOR/互换利率作为无风险利率的近似，隐含无风险利率大致等于 LIBOR/互换利率减去 10 个基点。

用信用溢差来计算近似估算违约概率

在没有前期违约的条件下，条件违约概率满足：$h = \dfrac{s}{1-R}$

h 为每年的违约密度（风险率），s 为企业债券收益率与无风险收益率的溢差，R 为预期回收率。

例 假定 3 年、5 年、10 年期限的 CDS 溢差分别为 50、60 和 100 个基点，违约回收率为 60%，3 年平均违约密度近似为 0.005/(1-0.6)=0.0125；5 年平均违约密度近似为 0.006/(1-0.6)=0.015；10 年平均违约密度近似为 0.01/(1-0.6)=0.025。由此得出，3 年与 5 年之间的违约平均密度为 $(5\times0.015-3\times0.0125)/2=0.01875$；5 年与 10 年之间的违约平均密度为 $(10\times0.025-5\times0.015)/5=0.035$。

更加准确的计算（对债券价格不接近面值也适用。）

例 假设某企业 5 年期债券，其券息为每年 6%（半年付息一次）。资产互换溢差为 200 个基点，无风险利率为 5%（连续复利）

假设企业债券每年的违约率为 Q，并且违约只会发生 0.5 年、1.5 年、2.5 年、3.5 年及 4.5 年，即发生在付券息之前。

预期亏损为 8.738。即资产互换溢差支付的贴现值，等于面值为 100，券息率为 2%，每 6 个月支付一次的现金流的贴现。

$$1\times e^{-0.05\times0.5}+1\times e^{-0.05\times1}+1\times e^{-0.05\times1.5}+\ldots+1\times e^{-0.05\times5}=8.738$$

表 5 计算过程

时间 (yrs)	违约概率	回收的量	无风险价值	损失	贴现因子	预期损失的贴现值
0.5	Q	40	106.73	66.73	0.9753	65.08Q
1.5	Q	40	105.97	65.97	0.9277	61.20Q
2.5	Q	40	105.17	65.17	0.8825	57.52Q
3.5	Q	40	104.34	64.34	0.8395	54.01Q
4.5	Q	40	103.46	63.46	0.7985	50.67Q
Total						288.48Q

$$3+3e^{-0.05\times0.5}+3e^{-0.05\times1.0}+103e^{-0.05\times1.5}=104.34$$

令，288.48Q=8.738 并由此得出 Q=3.03%

由近似方法得到的违约概率为$0.02/(1-0.4)=0.0333$

这里的分析可以被推广到违约发生得更为频繁的情形

如果对于若干期限，我们已知资产互换的溢差，我们可以利用息票剥离方法来求得违约概率的期限结构

回收率

回收率:债券在刚刚违约时,其市场价值与债券面值的比率,等于 1-违约损失率.
回收率和违约率有很强的负相关性.

表 6 1982-2010 年企业债券和银行贷款的回收率

分类	平均回收率（%）	分类	平均回收率（%）
一级资产抵押贷款	65.8	优先无担保债券	36.7
二级资产抵押贷款	29.1	优先次级债券	30.7
高级无抵押贷款	47.8	次级债券	31.3
优先有担保债券	50.8	更次级债券	24.7

8.3 信用风险的度量方法

- **Merton 结构模型**
- **CreditMetrics**，认为信用风险可以说直接源自企业信用等级的变化，并假定信用评级体系是有效的，即企业投资失败、利润下降、融资渠道枯竭等信用事件对其还款履约能力的影响都能及时恰当地通过其信用等级的变化而表现出来。
- **KMV‘s methodology**，认为企业信用风险的衡量指标 edf 主要来自于对该企业股票市场价格变化的有关数据的分析。基于 Merton 的资产价值的模型，差别在于，为了方便模型的应用，前者的假设比较简单。
- **CreditRisk+,考**虑个人贷款、债券违约的动态过程，满足 poisson 分布。
- **Reduced-form（简化形式法）或 intensity-Based 法**）将企业的破产过程（包括回收过程）作为外生因素考虑。类似于利率期限结构的建模

假定证券按照贴现预期现金流定价，以风险中立为基础对现金流进行预期。

8.3.1 违约风险的结构模型：Merton 模型

企业的资产结构假设：只有零息票债券一种负债。
企业的风险资产 V 为股票 S 和 T 时刻到期的面值为 F 的债券，市场价值为 B。
假设市场无摩擦、没有税收、没有破产成本，因此企业资产

$$V_0 = S_0 + B_0 \quad (2)$$

当 T 时刻企业的资产 V_T 小于债券面值 F，存在违约风险。

只要违约概率 $\Pr(V < F) > 0$，信用风险存在。这意味着在时刻 0，$B_0 < Fe^{-rT}$ 。

即债券的到期收益率（the yield to maturity） y_T 大于无风险利率 r 。

用 $\pi_t = y_T - r$ 表示违约利差，即信用溢差。

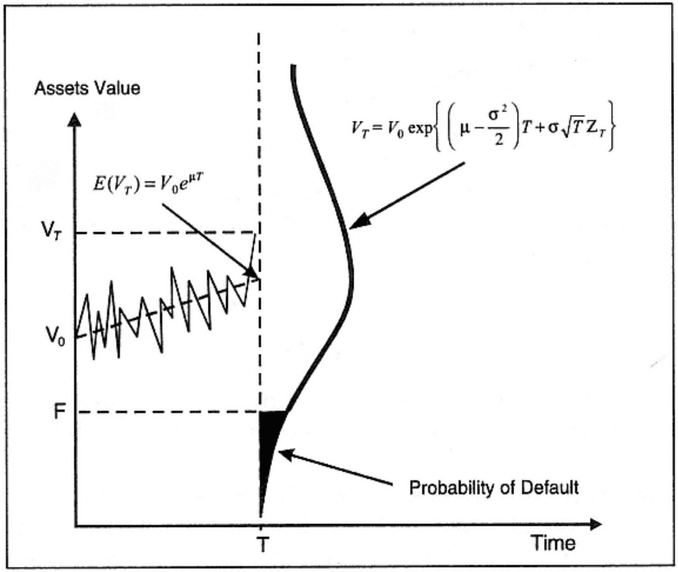


图 3 Merton 模型示意图

问题的提出

当银行贷款给企业时,考虑如下问题:

- 银行是否可以消除信用风险?
- 消除信用风险的经济成本是什么?
- 什么影响这些成本?

为了确定银行贷款的信用风险。首先做两个假设:

1. 假设贷款是该企业的唯一债务工具,
2. 唯一的额外融资来源是权益。

在这种情况下,信用价值等于一个企业价值的卖出期权 put option 的价值,执行价格为 F,到期时间为 T。如果银行购买这个 put option,则可以完全消除贷款的信用风险,见下面的表。

表 7 银行在 0 和 T 时刻用于贷款和购买看跌期权的偿付矩阵

时间	0	T	
资产价值	V_0	$V_T \le F$	$V_T > F$
银行决策			
(a)发放贷款	$-B_0$	V_T	F
(b) 购买期权	$-P_0$	$F - V_T$	0
总计	$-B_0 - P_0$	F	F

假设无风险利率是 r ，则 $B_0 + P_0 = Fe^{-rT}$

在风险中性假设下， $dV_t = rV_t dt + \sigma V_t dW_t$

根据 Black-Scholes 公式，这个看跌期权（put option）的价值为

$$P_0 = -N\left(-d_1\right)V_0 + Fe^{-rt}N\left(-d_2\right) \tag{3}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(V_0 / F\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(V_0 / Fe^{-rT}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(V_0 / Fe^{-rT}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(V_0 / F\right) + r - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

因此，信用风险是企业的财务结构(即杠杆率 $LR = Fe^{-rT} / V_0$)、资产收益的波动率 σ 、无风险利率和到期寿命的函数。

由此推导**到期收益率曲线**为 $y_T = -\frac{\ln \frac{B_0}{F}}{T} = -\frac{\ln \frac{Fe^{-rT} - P_0}{F}}{T}$

违约利差 default spread

$$\pi_T = y_T - r = -\frac{1}{T}\ln\left(N\left(d_2\right) + \frac{V_0}{Fe^{-rT}} N\left(-d_1\right) \right) \tag{4}$$

从公式（4）可以看出 $\partial\pi_T / \partial r < 0$，因此无风险利率越高，债券的风险越小。

表 8 对不同波动性和不同杠杠比率下的违约价差

杠杆率	资产波动率:			
LR	0.05	0.10	0.20	0.40
0.5	0	0	0	1.0%
0.6	0	0	0.1%	2.5%
0.7	0	0	0.4%	5.6%
0.8	0	0.1%	1.5%	8.4%
0.9	0.1%	0.8%	4.1%	12.5%
1.0	2.1%	3.1%	8.3%	17.3%

注：10%是离散复利的年利率，相当于 9.5%的连续复利.

$V_0 = 100, T = 1, r = 10\%, \sigma = 40, LR = 70\%$

Put option 的价值为 $P_0 = 3.37$.

债券面值 $F = 77, B_0 = Fe^{-rT} - P_0 = 66.63, S_0 = V_0 - B_0 = 33.37$.

贷款的收益为 77/66.63-1=0.156。
因此贷款的信用利差为 5.6%
因此消除信用风险的成本是 3.37/每 100 元资产。

银行的无风险收益 $F/(B_0 + P) = 77/(66.63 + 3.37) = 1.10$

违约概率、条件回收率和信用利差

通过购买期权，银行相当于购买了一张保单，保费等于期权的价格。将公式（3）变形有

$$P_0 = \left[-\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} V_0 + Fe^{-rT} \right] N(-d_2) \qquad (5)$$

注 1：公式（5）说明信用风险保费有三个因素

- 在 $V_T \le F$ 条件下的回收率
- 面值为 F 的无风险债券的当前价值
- 违约概率

注 2：违约概率等于企业资产价值低于 F 的概率，在风险中性的假设下，$1 - N(d_2) = N(-d_2)$ 就是违约概率。

$$d_2 = \frac{\ln\left(V_0 / Fe^{-rT}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(V_0 / F\right) + r - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

记 Prob(Def) 为违约概率:

$$\text{Prob}\left(Def\right)=\text{Prob}\left[V_t \le F\right]$$

$$\text{Prob}\left(Def\right)=\text{Prob}\left[\frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}>Z_t\right]$$

$$=\text{Prob}\left[Z_t \le -\frac{\ln\left[\frac{V_0}{F}\right]+r-\frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right]=N\left(-d_2\right)$$

$$d_2=\frac{\ln\left(V_0/F\right)+r-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

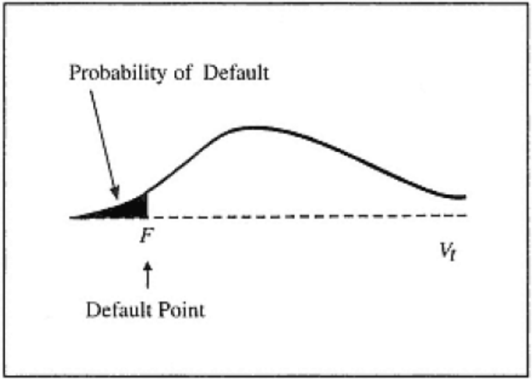


图 4 违约点和违约距离

注 3：违约时的期望损失等于

$$
\begin{aligned}
EL_T &= probability\ of\ default\ x\ loss\ in\ case\ of\ default \\
&= N(-d_2)F - N(-d_1)V_0e^{rT} = F - N(d_2)F - N(-d_1)V_0e^{rT} \qquad (6)\\
&= F\left(1 - N(d_2) - N(-d_1)\frac{1}{LR}\right)
\end{aligned}
$$

注 4：违约时企业偿还的金额为

$$F - EL_T = F\left(N(d_2) + N(-d_1)\frac{1}{LR}\right)$$

注 5：因此，如果用收益率表示违约成本，则

$$-\frac{1}{T}\ln\left(\frac{F}{F - EL_T}\right) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{F\left(N(d_2) + N(-d_1)\frac{V_0}{Fe^{-rT}}\right)}{F}\right) = \pi_T$$

与公式（4）相同，即

$$\pi_T = y_T - r = -\frac{1}{T}\ln\left(N(d_2) + \frac{V_0}{Fe^{-rT}}N(-d_1)\right)$$

注 6，如果没有风险中性假设，假设 $dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$

实际违约概率（physical default probability）为 $N\left(-d_2^1\right)$

$$d_2^1=\frac{\ln\left(\frac{V_0}{F}\right)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{VS} \quad d_2=\frac{\ln\left(\frac{V_0}{F}\right)+r-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}$$

μ是资产的期望收益率，V 服从对数正态分布。See Boness (1964) and Galai (1978) for an explanation of this result.

例：违约概率\预期损失的计算

在前面的例子里，$V_0=100, T=1, r=10\%, \sigma=40\%, F=77$ and LR = 0.7。在风险中性假设下

回收值贴现的期望$=\frac{0.137}{0.244}\times 100=56.1$

无风险债券的值$=77\times e^{-0.0953}=70$

预期亏损$=70-56.1=13.9$

违约概率$=24.4\%$

违约花费$=0.244\times 13.9=3.39$

期望损失为 $EL_T = 0.244 \times 77 - 0.137 \times 100 e^{0.0953} = 3.718$

在前面的例子里， $V_0 = 100, T = 1, r = 10\%, \sigma = 40\%, F = 77$ and LR = 0.7。

如果没有风险中性假设，假设离散时间的期望收益率为 $\mu = 16\%$，则违约概率

$$N\left(-d_2^1\right) = 20.5\%$$

预期收益值为 $\dfrac{N\left(-d_1^1\right)}{N\left(-d_2^1\right)} V_0 = \dfrac{0.110}{0.205} \cdot 100 = 53.7$

例 企业总资产值为 500.该资产价值的预期增长率为每年 10％，而其波动率为每年 30％。如果公司的总借款包括必须在一年内完成的固定还款 300，那么公司在这一点上将无力偿还的概率是多少？

解：根据 Merton 模型给出时刻 T 的违约概率：

$$\Pr\left(X_T \le F\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(F/V_0\right) - \left(\mu_X - \sigma_X^2/2\right)T}{\sigma_X\sqrt{T}}\right)$$

对该公司而言， $F = 300, V_0 = 500, \mu_X = 0.10, \sigma_X = 0.30$ 及 $T = 1$ 。

将这些值代入上述等式得到：

$$\Pr\left(X_1 \le 300\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(300/500\right) - \left[0.10 - \left(0.30^2/2\right)\right]}{0.30}\right)$$

$$= 0.0296$$

则无力偿还的概率为 2.96%。

参数 V_0 和 σ_V 的估计

但是这两个变量 V_0 **和** σ_V 是不能在市场上直接观测。

在 Merton 的模型中，公司的股票价值 P 就是公司资产的看跌期权。

$$B_0 + P_0 = Fe^{-rT}$$

因此如果公司是一家上市公司，通过股权价值 P_0 和 σ_P 间接估算。利用

$$\sigma_P = \frac{\partial P_0}{\partial V_0} \frac{V_0}{P_0} \sigma_V$$

和 $P_0 = -N(-d_1)V_0 + Fe^{-rt}N(-d_2)$

得 $$\sigma_P P_0 = N(d_1)\sigma_V V \tag{7}$$

根据上述两个方程可以求得 V_0 和 σ_V 。

例

假如一家公司的股价为 300 万美元，股价变化的波动率为 80%。公司在一年

后必须支付的债券付款为 1000 万美元，无风险利率为每年 5%。对应这一情形 $P_0 = 3, \sigma = 0.80, r = 0.05, T = 1$ 及 $F = 10$。对式（3）及式（7）求解，我们得出（以百万计）$V_0 = 12.40$ 及 $\sigma_V = 0.2123$，变量 $d_2 = 1.1408$，公司违约概率为 $N\left(-d_2\right) = 0.127$，即 12.7%。债券的当时市价为 $V_0 - P_0$，即 9.40。债券预期付款的贴现值为 $10e^{-0.05\times1} = 9.51$。债券的预期损失为 $\left(9.51 - 9.40\right)/9.51$，此量为债券不违约时价值的 1.2%。预期损失等于违约概率乘以 1 减去回收率的差。因此，回收率（作为无违约时价值的百分数）等于 1-1.2/12.7=91%。

迭代计算法

推测 Merton 模型中的资产价值

回忆在 Merton 模型中，有

$$S_t = C^{BS}\left(t, V_t; r, \sigma_V, B, T\right) \tag{8}$$

考虑债务结构（B 和 T）与要求的利率 r 。股票价值 S_t 可观测。

对固定的 t，（8）是一个含有两个未知参数的等式，V_t 和 σ_V 。

为了解决这一问题，使用了迭代过程。

在步骤(1)中，使用一个初始估计 $\sigma_V^{(0)}$ ，用股票价值 S_t 来推断资产价值($V_t^{(0)}$)的时间序列。

则可以用该时间序列得到一个新的波动性估计 $\sigma_V^{(1)}$ 。

接下来可以利用（7）和 $\sigma_V^{(1)}$ 构造一个新的时间序列 $V_t^{(1)}$ 。

迭代 n 次直到波动性估计收敛。

8.3.2 KMV 模型

KMV 模型在 Merton 模型的基础上推导了每一个债务人的估计违约概率 EDF.EDF 是企业的特定因素,能够导入任何评级体系。

KMV 中信用风险,在本质上是由债务人资产价值变动引起的,给定企业的资产结构,一旦设定了资产价值的随机过程，那么任何期限内的实际违约率都可以推导出来。

KMV 发最适用于公开上市的公司，这些公司的权益的价值由股票市场决定，可以将股份和资产负债表中所包含的信息转换为内在的违约风险。

8.3.2.1 KMV 模型假定

资产结构假定：只有零息票债券一种负债。

- 企业的风险资产V 为股票 S 和 T 时刻到期的面值为 F 的负债

  $V_t = B_t\left(F\right) + S_t$。

- 当 T 时刻企业的资产V_T 小于债券面值 F，存在违约风险。
- 只要违约概率$\Pr\left(V < F\right) > 0$，信用风险存在，即$B_0 < Fe^{-rT}$。
- 假设市场无摩擦、没有税收、没有破产成本。
- 假定企业资产价值V 假定服从标准几何布朗运动。
- 负债分为短期债务和长期债务

.

8.3.2.12 KMV 推导实际违约率步骤

第一步，估计出公司的市场价值及其波动性;

第二步，计算违约距离;

第三步，确定违约距离与违约率之间的映射，这一步要根据具有不同违约值的公司的违约历史数据来确定。

第一步，估计资产价值 V 和资产波动率

假定企业资产价值服从对数正态分布，波动率是稳定的。

在实际操作中，只有上市公司的股票价格是可观测的，只有部分负债是能实际进行交易,因此估计资产价值通过股票价值来估计.

$$S = f\left(V, \sigma, LR, c, r\right)$$

$$\sigma_S = g\left(V, \sigma, LR, c, r\right)$$

其中 LR 是杠杆率、c 是息票率，r 是无风险利率

由于 S 是唯一可观察的，因此根据上面的公式可推导出 V

$$V = h\left(S, \sigma, LR, c, r\right)$$

注：如果σ_S可观察，则可以从公式中得到 V 和 s 的值。但是σ_S是不稳定的，而且对于 V 的变化相当敏感。

KMV 使用了一种迭代技术计算σ_S

附：《量化金融 R 语言高级课程》给出了一个计算波动率的例子及程序

```
install.packages("fOptions")
library(fOptions)
kmv_error <- function(V_and_vol_V, E=3,Time=1,D=10,vol_E=0.8,r=0.05){
  V <- V_and_vol_V[1]
  vol_V <- V_and_vol_V[2]
  E_ <- GBSOption("c", V, D, Time, r, r, vol_V)@price
  tmp <- vol_V*sqrt(Time)
  d1 <- log(V/(D*exp(-r*Time)))/tmp + tmp/2
  Nd1 <- pnorm(d1)
  vol_E_ <- Nd1*V/E*vol_V
  err <- c(E_ - E, vol_E_ - vol_E)
  err[1]^2+err[2]^2
```

```
}
a <- optim(c(1,1), fn = kmv_error)
print(a)
```

第二步，计算违约距离

KMV 公司发现企业的违约通常发生资产价值位于长期负债和短期负债之间。违约发生最频繁的分界点即在公司价值大约等于流动负债加上 50%的长期负债时。

用资产值尾部低于总债务值的部分来衡量违约率并不精确.

KMV 计算了违约距离,即从公司的预期价值到违约点之间的距离。

- STD= 短期负债
- LTD=长期负债
- DPT=违约点=STD+1/2LTD
- DD 违约距离，通常表示为波动率的乘数

$$DD = \frac{E\left(V_1\right) - DPT}{\sigma}$$

违约和破产是不同的

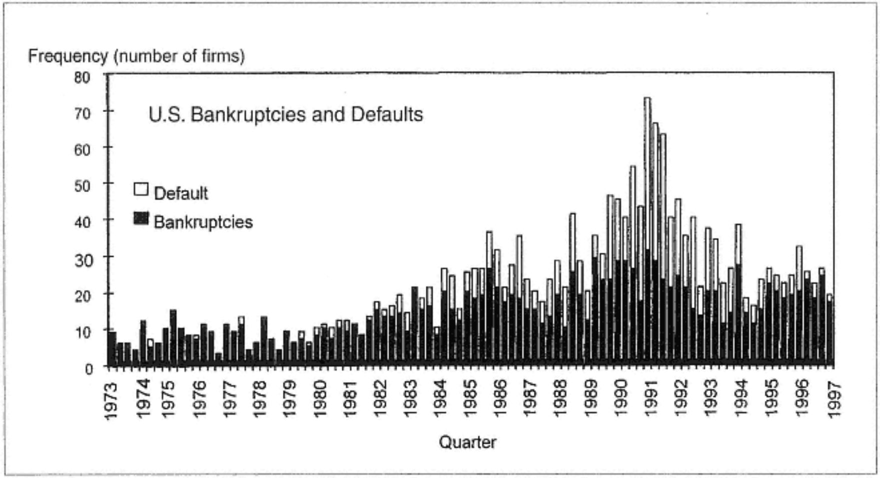


图 6 违约距离 DD 的经验分布

假设资产的价值服从对数正态分布，则违约距离为 $DD = \dfrac{E(V_1) - DPT}{\sigma}$

对比：Merton 的模型中违约距离 $d_2 = \dfrac{\ln(V_0 / F) + r - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$

DPT_T = default point at time horizon *T*

如果忽略 μ 和 σ^2 可以近似 DD 为 $DD = \dfrac{\ln V_0 - \ln F}{\sigma}$

因此，KMV 对 Merton 模型的改进是把违约点改为了 DPT，KMV 认为违约发生最频繁的分界点即在公司价值大约等于流动负债加上 50%的长期负债时违约距离示意图。

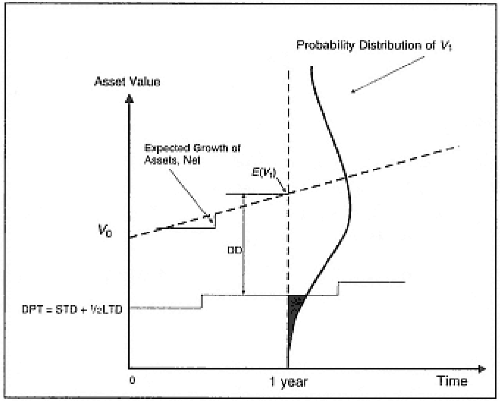


图 7　KMV 模型示意图

第三步，从违约距离推导出违约概率

在 KMV 模型中，违约概率是指违约距离与违约率之间的映射，称为违约频率 EDF

EDF 是一条连续的曲线，对每个债务人都是特别的，是公司资本结构、资本收益和资产现值的函数。

KMV 利用大样本的历史数据拟合出一条 DD 一 EDF 曲线，这样就能从 DD 推算出 EDF.

例

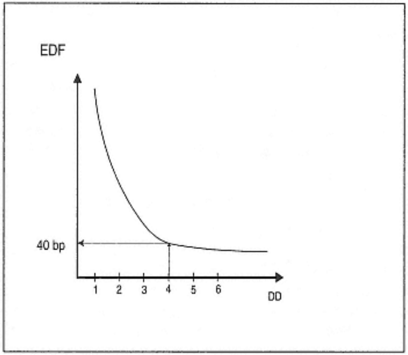


图 8 DD 一 EDF 曲线

例如：资产的当前市场价值:$V_0 = 1000$

资产的净期望年增长:20%

1 年后的期望资产价值:$V_0\left(1.20\right) = 1200$

年资产波动率σ:100
违约点:800
则

$$DD = \frac{1200 - 800}{100} = 4$$

如果违约距离等于 4 的企业有 5000 家，其中有 20 家违约了，
则 EDF 等于

$$EDF_{1\,year} = \frac{20}{5000} = 0.004 = 0.4\%\ or\ 40\ bp$$

对比：Merton 模型的 EDF，T=1

$$EDF_{Merton}=1-\Phi\left(\frac{\ln V_0-\ln B+\left(\mu_V-\frac{1}{2}\sigma_V^2\right)}{\sigma_V}\right)$$

KMV 使用经验违约距离 EDF 替换了 Merton 的违约距离，使用经验分布替换了正态分布

例：联邦快递 **Federal Express ($ figures are in billions of $US)**，如表 **10**

表 10

	November 1997	February 1998
市值(流通股价格)	$7.7	$7.3
帐面负债	$4.7	$4.9
资产市场价值	$12.6	$12.2
资产的波动	15%	17%
违约点	$3.4	$3.5
(DD)	$\frac{12.6-3.4}{0.15-12.6}=4.9$	$\frac{12.2-3.5}{0.17-12.2}=4.2$
EDF	0.06% (6 bp)= AA^{-}	0.11%(11 bp)= A^{-}

这个例子说明不同的股票价格、负债水平（杠杆率）、和资产波动率导致 EDF 不同。

EDF 作为违约概率的预测工具。

- 从 1993 年，EDF 做为 KMV 公司预测违约率的先行指标。
- 当违约距离急剧上升时，公司在 1-2 年后违约的可能性很大。
- 通过 EDFs 的变动,至少提前一年预测发行人的降级.

EDF 与信用评级

对于评级机构的转移矩阵，KMV 通过分析认为:

①评级机构变化级别缓慢，导致历史平均的原级滞留概率要比实际的大;

②历史平均违约概率要大于信用级别中典型的真实违约概率;

③如果原级滞留概率和违约概率都很大，必然其他的转移概率一定会很小。

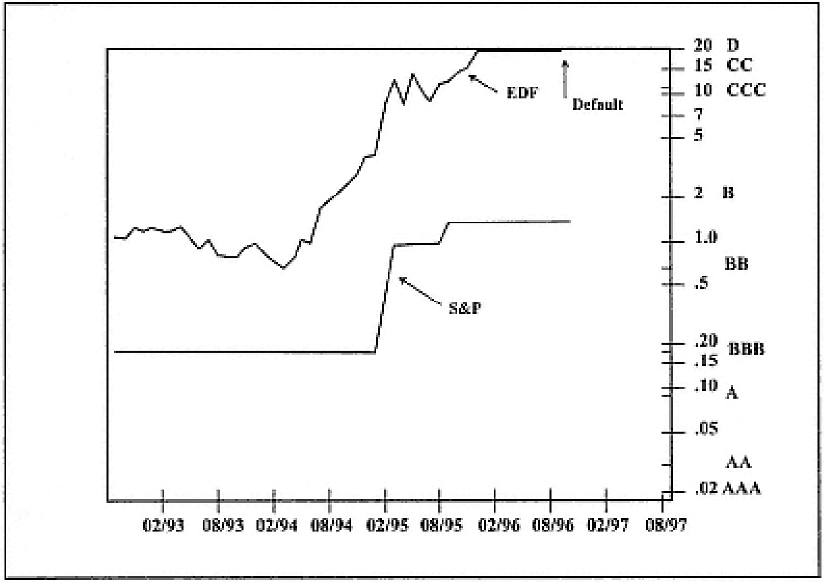


图 9 不同时期信用评级的 EDF

表 11 EDF's 和风险评级

EDF	S&P	Moody's Factors	CIBC	Nation's bank	SBC
2 to 4 bp	>=AA	>=Aa2	1	AAA	C1
4 to 10 bp	AA/A	A1	2	AA	C2
10 to 19 bp	A/BBB+	Baa1	3	A	C3
19 to 40 bp	BBB+/BBB-	Baa3	4	A/BB	C4
40 to 72 bp	BBB-/BB	Ba1	5	BBB/BB	C5
72 to 101 bp	BB/BB-	Ba3	6	BB	C6
101 to 143 bp	BB-/B+	B1	7	BB	C7
143 to 202 bp	B+/B	B2	8	BB/B	C8
202 to 345 bp	B/B-	B3	9	B	C9

表 12 不同级别的 EDF's 变化率

Quantiles	10	25	50	75	90	Mean
AAA	0.02	0.02	0.02	0.02	0.10	0.04
AA	0.02	0.02	0.02	0.04	0.10	0.06
A	0.02	0.03	0.08	0.13	0.28	0.14
BBB	0.05	0.09	0.15	0.33	0.71	0.30
BB	0.12	0.22	0.62	1.30	2.53	1.09
B	0.44	0.87	2.15	3.80	7.11	3.30
CCC	1.43	2.09	4.07	12.24	18.82	7.21

Source: KMV Corporation

KMV 公司也曾利用 EDF 分段离散构造出与他们的结论吻合的信用级别转移概率矩阵。

- 违约距离小于 2bp 的企业为 AAA 级；
- 3bp-6bp 的是 AA 级
- 7-15bp 的是 A 级

以此类推，得到各级别对应的 EDF,利用 EDF 的变化，给出信用转移矩阵.

表 **13　KMV** 的一年期 **Nonoverlapping EDF** 转移概率

Initial Rating	Rating at Year-End (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	66.26	22.22	7.37	2.45	0.86	0.67	0.14	0.02
AA	21.66	43.04	25.83	6.56	1.99	0.68	0.20	0.04
A	2.76	20.34	44.19	22.94	7.42	1.97	0.28	0.10
BBB	0.30	2.80	22.63	42.54	23.52	6.95	1.00	0.26
BB	0.08	0.24	3.69	22.93	44.41	24.53	3.41	0.71
B	0.01	0.05	0.39	3.48	20.47	53.00	20.58	2.01
CCC	0.00	0.01	0.09	0.26	1.79	17.77	69.94	9.13

Source: KMV Corporation

与评级公司比较

表 **14** 实际评级变化的转移概率

Initial Rating	Rating at Year-End (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81-	8.33-	0.68-	0.06-	0.12-	0	0	0
AA	0.70-	90.65-	7.79-	0.64-	0.06-	0.14-	0.02-	0
A	0.09-	2.27-	91.05-	5.52-	0.74-	0.26-	0.01-	0.06-
BBB	0.02-	0.33-	5.95-	86.93-	5.30-	1.17-	1.12-	0.18-
BB	0.03-	0.14-	0.67-	7.73-	80.53-	8.84-	1.00-	1.06-
B	0	0.11-	0.24-	0.43-	6.48-	83.46-	4.07-	5.20-
CCC	0.22-	0	0.22-	1.30-	2.38-	11.24-	64.86-	19.79-

Source: Standard & Poor’s CreditWeek (April 15,1996).

8.3.3 Creditmetrics 方法

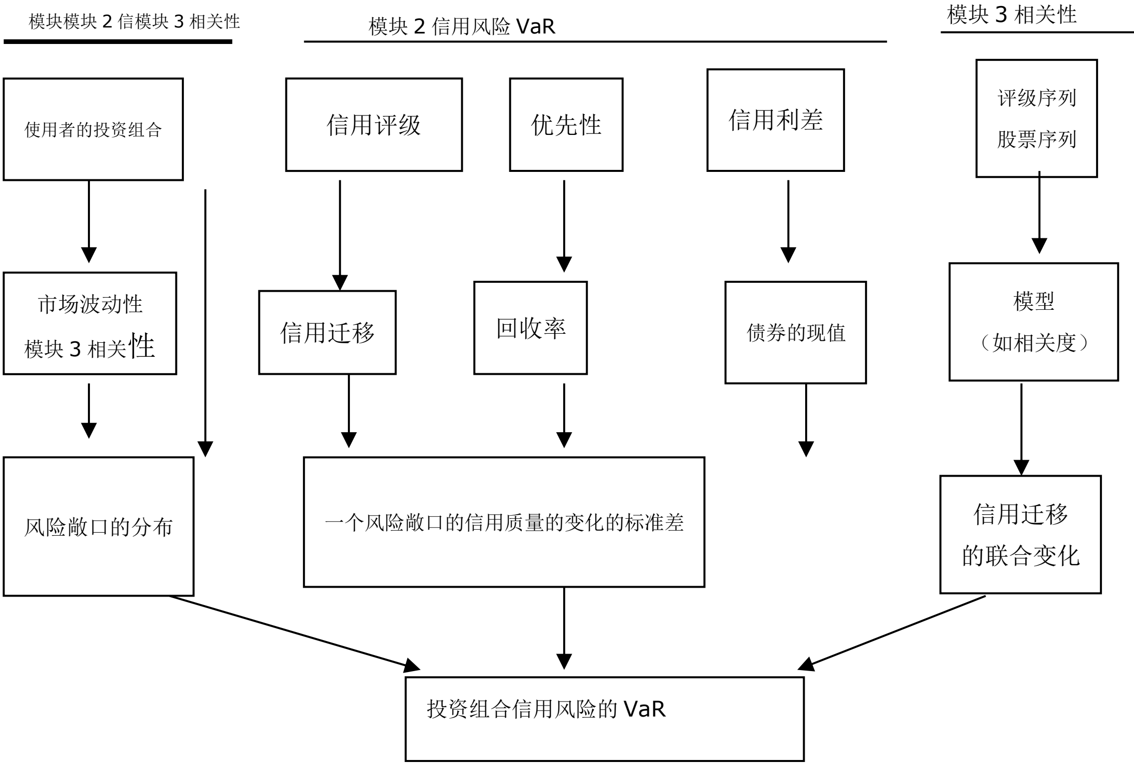
假设资产组合的价值的变化只与信用等级转移有关。
通过掌握借款企业的资料如:

（1）借款人的信用等级资料

（2）下一年度该信用级别水平转换为其它信用级别的概率

（3）违约贷款的收复率

来计算出非交易性的贷款和债券的市值 P 和市值变动率 σ，从而利用 VaR 方法对单笔贷款或贷款组合的 VaR 进行度量。


模块模块 2 信模块 3 相关性
模块 2 信用风险 VaR
模块 3 相关性
使用者的投资组合
信用评级
优先性
信用利差
评级序列
股票序列
市场波动性
模块 3 相关性
信用迁移
回收率
债券的现值
模型
（如相关度）
风险敞口的分布
一个风险敞口的信用质量的变化的标准差
信用迁移
的联合变化
投资组合信用风险的 VaR

这个框架有两个主要组成部分：

- 单一金融工具的“信用风险的在险价值”
- 资产组合的在险价值，这说明了资产组合的分散效应。

两个辅助函数

- 相关度

  导出资产组合的相关性，计算联合概率。
- 风险

  计算衍生证券的远期风险。

8.3.3.1 Credit VaR for a Bond (模块 1)

第一步

- 选定一个评级体系，包括评级类别和在给定的时间区间内信用转移概率。
- 假定同一的信用级别内的企业具有相同的信用风险，即具有相同的迁移概率和违约概率。
- 信用级别的评定可以来自外部或内部评级法。

第二步，设定时间区间，通常取一年，或长期，10 年。

第三步，设定远期贴现率，估计投资组合变化的远期分布。

Step 1—设定转移矩阵

例如，一年期的信用转移矩阵，如表 15

表 15 一年期的信用转移矩阵

Initial Rating	Rating at Year-End (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81-	8.33-	0.68-	0.06-	0.12-	0	0	0

AA	0.70-	90.65-	7.79-	0.64-	0.06-	0.14-	0.02-	0
A	0.09-	2.27-	91.05-	5.52-	0.74-	0.26-	0.01-	0.06-
BBB	0.02-	0.33-	5.95-	86.93-	5.30-	1.17-	1.12-	0.18-
BB	0.03-	0.14-	0.67-	7.73-	80.53-	8.84-	1.00-	1.06-
B	0	0.11-	0.24-	0.43-	6.48-	83.46-	4.07-	5.20-
CCC	0.22-	0	0.22-	1.30-	2.38-	11.24-	64.86-	19.79-

Source: Standard & Poor’s CreditWeek (April 15,1996).

违约是指债务人无法偿还同债券或贷款相关的债务-无论是利息支付和本金支付都发生了困难。

表 16 长期违约概率（%）

Term	1	2	3	4	5	7	10	15
AAA	0.00-	0.00-	0.07-	0.15-	0.24-	0.66-	1.40-	1.40-
AA	0.00-	0.02-	0.12-	0.25-	0.43-	0.89-	1.29-	1.48-
A	0.06-	0.16-	0.27-	0.44-	0.67-	1.12-	2.17-	3.00-
BBB	0.18-	0.44-	0.72-	1.27-	1.78-	2.99-	4.34-	4.70-
BB	1.06-	3.48-	6.12-	8.68-	10.97-	14.46-	17.73-	19.91-
B	5.20-	11.00-	15.95-	19.40-	21.88-	25.14-	29.02-	30.65-
CCC	19.79-	26.92-	31.63-	35.97-	40.15-	42.64-	45.10-	45.10-

Source: Standard & Poor’s CreditWeek (April 15,1996).

假定和注意：

- 假定转移矩阵是时间稳定的 Markov 矩阵，因此 n 个矩阵相乘可以得到 n 年的转移矩阵。
- 注意，事实上转移矩阵不是时间稳定的，因此这是一个很强的假定。
- 当人们运用信用迁移模型时，就应当对平均历史数值进行调整，使得调整过的数值同人们对当前的经济环境的估测相吻合。

表 17 1970-1995 之间各信用等级的 1 年内违约概率

Credit Rating	One-Year Default Rate	
	Average(%)	Standard Deviation(%)
Aaa	0.00	0.0
Aa	0.03	0.1
A	0.01	0.0
Baa	0.13	0.3
Ba	1.42	1.3
B	7.62	5.1

Source: Carty and Lieberman (1996).

Step 2—设定时间区间

时间区间的设定通常是一年，与转移矩阵的时间一致 Table 8.1.

时间区间设定需要考虑会计数据和评级机构的财务报告。

Step 3—设定远期定价模型

1.对某种债券的估价是从债券发行人信用级别对应的零息收益曲线推导得到债券的远期价值。

表 18 各信用等级一年期远期零利率曲线(%)

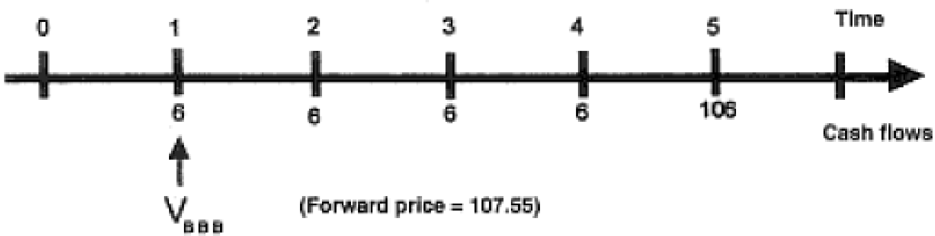
Category	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Source: Credit Metrics, JP Morgan.

例如 BBB 级债券，假定息票率为 6%，一年的远期价格为,

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{1.041} + \frac{6}{(1.0467)^2} + \frac{6}{(1.0525)^3} + \frac{106}{(1.0563)^4} = 107.55$$

Where the discount rates are taken from Table 8.4.



类似的，可以得到各信用等级的债券的远期价格.

表 19 BBB 债券一年期远期价值

Year-End Rating	Value($)
AAA	109.37
AA	109.19
A	108.66
BBB	107.55
BB	102.02
B	98.10
CCC	83.64
Default	51.13

Source: CreditMetrics, JP Morgan.

注意，如果债券发行人在年终违约的话，我们并不假设一切都损失了，根据该种工具在偿付上的优先权，投资者可以根据回收率收回一部分投资。

2. 设定回收率，可以通过对历史数据统计分析获得，如下表是穆迪的回收率。

表 20 按优先级划分的 6%回收率(面值的百分比，即“Par”)

Seniority Class	Mean (%)	Standard Deviation (%)

Senior Secured	53.80	26.86
Senior Unsecured	51.13	25.45
Senior Subordinated	38.52	23.81
Subordinated	32.74	20.18
Junior Subordinated	17.09	10.90

Source: Carty and Lieberman (1996).

在我们的例子中，BBB 级的回收率是 51.13 %，假设回收率服从 beta 分布，标准差为 25.45%。

Step 4—推导投资价值变化的远期分布

下面给出了债券远期价格变化的值，于是可计算均值和方差。

表 21 一年内债券价值的分布，以及 BBB 债券价值的变化情况

Year-End Rating	Probability of State: p(%)	Forward Price: V(S)	Change in Value:
AAA	0.02	109.37	1.82
AA	0.33	109.19	1.64

A	5.95	108.66	1.11
BBB	86.93	107.55	0
BB	5.30	102.02	-5.53
B	1.17	98.10	-9.45
CCC	0.12	83.64	-23.91
Default	0.18	51.13	-56.42

Source: CreditMetrics, JP Morgan.

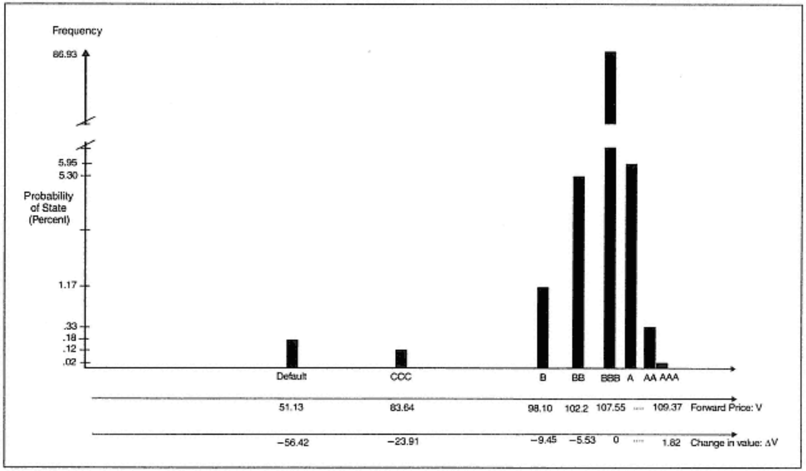


图 11 违约概率直方图

VaR 的计算

- 违约概率等于 0.18%<1%
- 信用转移到 CCC 级的概率是 0.12%，
- 信用转移到 B 级的概率是 1.17%

- 因此违约，信用等级下降到 CCC 或 B，三者的概率之和为 1.47%，超过 1%，这时债券的价值为 98.10，等于 107.09-98.1=8.99。
- 因此，1%债券价值的变化的 VaR 为 107.55-83.64=23.91

对比正态分布 VaR。假设ΔV服从正态分布 N（m，σ^2），

$$
\begin{aligned}
m &= mean\left(\Delta V\right) = \sum_i p_i \Delta V_i \\
&= 0.02\% \times 1.82 + 0.33\% \times 1.64 + \ldots + 0.18\% \times \left(-56.42\right) \\
&= -0.46
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{var}\left(\Delta V\right) = \sum_i p_i \left(\Delta V_i - m\right)^2 \\
&= 0.02\%\left(1.82 + 0.46\right)^2 + 0.33\%\left(1.64 + 0.46\right)^2 + \ldots + 0.18\%\left(-56.42 + 0.46\right)^2 \\
&= 8.95
\end{aligned}
$$

99%水平 VaR 是-23.91，远低于正态分布的 VaR 值-7.43。

考虑回收率分布的的计算

表 **22** 计算由于信用质量变化引起的价值波动

Year-end rating	Probability of state (%)	New bond value plus coupon ($)	Probability weighted value ($)	Difference of value from mean ($)	Probability weighted difference squared
AAA	0.02	109.37	0.02	2.28	0.0010
AA	0.33	109.19	0.36	2.10	0.0146
A	5.95	108.66	6.47	1.57	0.1474
BBB	86.93	107.55	93.49	0.46	0.1853
BB	5.30	102.02	5.41	(5.06)	1.3592
B	1.17	98.10	1.15	(8.99)	0.9446
CCC	0.12	83.64	1.10	(23.45)	0.6598
Default	0.18	51.13	0.09	(55.96)	5.6358
		Mean=	$107.09	Variance=	8.9477
				Standard deviation=	$2.99

记 p_i 为第 1 列的概率， μ_i 为第 2 列值

$$\mu_{Total} = \sum_{i=1}^{S} p_i \mu_i$$

$$= \begin{pmatrix} 0.02\% \times 109.37 + 0.33\% \times 109.19 + 5.95\% \times 108.66 + 86.93\% \times 107.55 + \\ 5.30\% \times 102.02 + 1.17\% \times 98.10 + 0.12\% \times 83.64 + 0.18\% \times 51.13 \end{pmatrix}$$

$$= 107.09$$

$$\sigma_{Total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{S} p_i \mu_i^2 - \mu_{Total}^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.02\% \times 109.37^2 + 0.33\% \times 109.19^2 + 5.95\% \times 108.66^2 + 86.93\% \times 107.55^2 + \\ 5.30\% \times 102.02^2 + 1.17\% \times 98.10^2 + 0.12\% \times 83.64^2 + 0.18\% \times 51.13^2 \end{pmatrix} - 107$$

$$= 2.99$$

考虑回收率的不确定性后均值和方差计算

$$\mu_{Total} = \sum_{i=1}^{S} p_i \mu_i$$

$$= \begin{pmatrix} 0.02\% \times 109.37 + 0.33\% \times 109.19 + 5.95\% \times 108.66 + 86.93\% \times 107.55 + \\ 5.30\% \times 102.02 + 1.17\% \times 98.10 + 0.12\% \times 83.64 + 0.18\% \times 51.13 \end{pmatrix}$$

$$= 107.09$$

$$\sigma_{Total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{S} p_i \left(\mu_i^2 + \sigma_i^2\right) - \mu_{Total}^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.02\% \times \left(109.37^2 + 0^2\right) + 0.33\% \times \left(109.19^2 + 0^2\right) + 5.95\% \times \left(108.66^2 + 0^2\right) + 86.93\% \times \left(107.55^2 + 0^2\right) + \\ 5.30\% \times \left(102.02^2 + 0^2\right) + 1.17\% \times \left(98.10^2 + 0^2\right) + 0.12\% \times \left(83.64^2 + 0^2\right) + 0.18\% \times \left(51.13^2 + 25.45^2\right) \end{pmatrix} - 1$$

$$= 3.18$$

方差中 0 的含义是信用等级的变化，这里我们假设没有变化

贷款和债券组合的信用 VaR (模块 2)

首先考虑两个债券组合：信用级别为 BBB(6% annual coupon, 5-year maturity) 和 A(5% annual coupon, three-year maturity)的两个债券转移矩阵如下表。

先假设信用质量没有相关性。

- 计算联合转移矩阵，见表。

- 为简单起见，将股票价值视为企业的资产价值。
- 根据 Merton 的模型，企业的资产结构为股票 S、零息票债券 B，见表。违约发生在资产的价值（B+S）低于债券的面值 F 时。
- Creditmetric 扩展了 merton 的模型，增加了信用质量变动的因素，并将资产收益的变动限定在一定范围内。

Step #1: 建立联合信用转移

表 23 联合迁移概率（零相关） (%)

Obligor#1(BBB)		Obligor#2 (single-A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.01	0.30	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.01	0.14	5.42	0.33	0.04	0.02	0.00	0.00
BBB	86.93	0.08	1.98	79.15	4.80	0.64	0.23	0.01	0.05
BB	5.30	0.00	0.12	4.83	0.29	0.04	0.01	0.00	0.00
B	1.17	0.00	0.03	1.06	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.11	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Default	0.18	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

$$\underbrace{79.15\%}_{\substack{\text{Chance both}\\ \text{retain current rating}}} = \underbrace{86.93\%}_{\substack{\text{Chance a BBB}\\ \text{retains at BBB}}} \times \underbrace{91.05\%}_{\substack{\text{Chance an A}\\ \text{retains at A}}}$$

表 24 Merton 模型的资产负债表

资产		负债/权益
风险资产:V_t		负债:$B_t(F)$
		权益:S_t
总计	V_t	V_t

$$V_t = B_t(F) + S_t$$

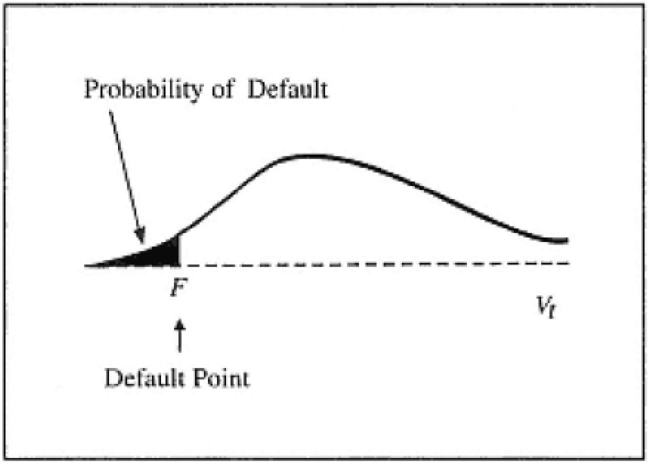


图 12 违约点和违约距离

Merton 模型设定

V_t，服从标准几何布朗运动

$$V_t = B_t + S_t$$

$$V_t = V_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right\}$$

$V(t)$的动态过程为

$$dV_t / V_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

其中W_t是标准布朗运动。

$$\sqrt{t}Z_t = W_t - W_0$$

记 Prob(Def) 为违约概率:

$$\text{Prob}\left(Def\right) = \text{Prob}\left[V_t \leq V_{Def}\right] \quad (9)$$

$$\text{Prob}\left(Def\right) = \text{Prob}\left[\frac{\ln\left(\frac{V_{Def}}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} > Z_t\right]$$

$$= \text{Prob}\left[Z_t \leq -\frac{\ln\left[\frac{V_0}{V_{Def}}\right] + \left[\frac{\mu - \sigma^2}{2}\right]t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = N\left(-d_2\right) \quad (10)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{Def}}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

令 $Z_{CCC}=d_2$ 为标准正态分布的违约点，阀值点。定义标准化收益

$$r=\frac{\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

当标准化收益 r 小于 Z_{CCC}，则违约。

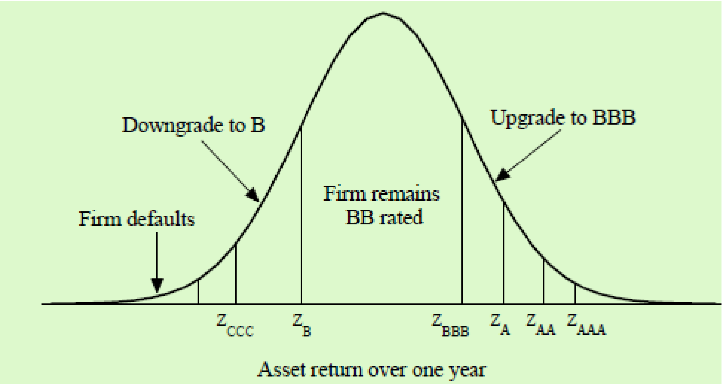


图 13 不同信用级别的标准化收益率阈值

$$\Pr\left(Default\right)=\Pr\left(R<Z_{Def}\right)=\Phi\left(Z_{Def}/\sigma\right)$$

$$\Pr\left\{CCC\right\}=\Pr\left\{Z_{de(f<)}R<Z_{CCC}\right\}=\Phi\left(Z_{CCC}/\sigma\right)-\Phi\left(Z_{Def}/\sigma\right)$$

Z_{AAA} 表示从 BB 级上升到 AAA 级发生的概率 0.03，所对应的正态分位点

Z_{AA} 到 Z_{AAA} 对应的正态分布曲线之间面积为从 BB 到 AA 的概率 0.14

表 25　BB 级债务人一年的转移概率

信用等级	信用等级转移概率 from the transition matrix (%)	资产价值模型转移概率
AAA	0.03	$1-\Phi\left(Z_{AA}/\sigma\right)$
AA	0.14	$\Phi\left(Z_{AA}/\sigma\right)-\Phi\left(Z_{A}/\sigma\right)$
A	0.67	$\Phi\left(Z_{A}/\sigma\right)-\Phi\left(Z_{BBB}/\sigma\right)$
BBB	7.73	$\Phi\left(Z_{BBB}/\sigma\right)-\Phi\left(Z_{BB}/\sigma\right)$
BB	80.53	$\Phi\left(Z_{BB}/\sigma\right)-\Phi\left(Z_{B}/\sigma\right)$

B	8.84	$\Phi\left(Z_B / \sigma\right)-\Phi\left(Z_{XXX} / \sigma\right)$
CCC	1.00	$\Phi\left(Z_{XXX} / \sigma\right)-\Phi\left(Z_{Def} / \sigma\right)$
Default	1.06	$\Phi\left(Z_{Def} / \sigma\right)$

两个债券 BB 和 A 的转移概率和对应的阀值.

表 26　BBB 评级债务人的资产收益率阈值

Threshold	Value
Z_{AA}	3.43σ
Z_{A}	2.93σ
Z_{BBB}	2.39σ

Z_{BB}	1.37σ
Z_{B}	-1.23σ
Z_{CCC}	-2.04σ
Z_{Def}	-2.30σ

表 **27** 评级的转换概率和资产回报率阈值

Rating	Probability	Threshold	Value
AAA	0.09%		
AA	2.27%	Z'_{AA}	$3.12\sigma'$
A	91.05%	Z'_{A}	$1.98\sigma'$

BBB	5.52%	Z'_{BBB}	$-1.51\sigma'$
BB	0.74%	Z'_{BB}	$-2.30\sigma'$
B	0.26%	Z'_{B}	$-2.27\sigma'$
CCC	0.01%	Z'_{CCC}	$-3.19\sigma'$
Default	0.06%	Z'_{Def}	$-3.24\sigma'$

假定信用质量之间有相关性，

假设 $\rho = 0.2$

$$f\left(r_{BB}, r_A; \rho\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[r_{BB}^2 - 2\rho r_{BB} r_A + r_A^2 \right] \right\}$$

违约的相关性为

$$corr\left(Def_A, Def_{BB}\right) = \frac{\text{Prob}\left(Def_A, Def_{BB}\right) - \text{Prob}\left(Def_A\right)\text{Prob}\left(Def_{BB}\right)}{\sqrt{\text{Prob}\left(Def_A\right)\left[1-\text{Prob}\left(Def_A\right)\right]\text{Prob}\left(Def_{BB}\right)\left[1-\text{Prob}\left(Def_{BB}\right)\right]}}$$
$$= 1.9\%$$

根据 Merton 的模型，两个债务人都发生违约的概率为：

$$\text{Prob}\left(Def_A, Def_{BB}\right) = \text{Prob}\left[V_A \le V_{DefA}, V_{AB} \le V_{DefBB}\right]$$

违约概率等价于

$$\text{Prob}\left(Def_A, Def_{BB}\right) = \text{Prob}\left[r_A \le d_2^A, r_2 \le d_2^{BB}\right] = N_2\left(-d_2^A, -d_2^{BB}, \rho\right)$$

其中 r_A 和 r_{BB} 表示标准化后的资产收益率

代入 $d_2^A = 3.24, d_2^{BB} = 2.3$，计算得

信用级别保持不变的概率为 $\text{Prob}\left(DefA, DefBB\right) = 0.0054\%$

类似可计算其他的信用组合概率。

$$\text{Prob}\left(-1.23 < r_{BB} < 1.37, -1.51 < r_A < 1.98\right) = 0.7365$$

表 28 当资产回报率的相关性为 20%时，BB 和 A 评级债务人的联合评级概率

BB 级公司	A 级公司								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def	Total
AAA	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03
AA	0.00	0.01	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
A	0.00	0.04	0.61	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67
BBB	0.02	0.35	7.10	0.20	0.02	0.01	0.00	0.00	7.69
BB	0.07	1.79	73.65	4.24	0.56	0.18	0.01	0.04	80.53
B	0.00	0.08	7.80	0.79	0.13	0.05	0.00	0.01	8.87
CCC	0.00	0.01	0.85	0.11	0.02	0.01	0.00	0.00	1.00
Def	0.00	0.01	0.90	0.13	0.02	0.01	0.00	0.00	1.07
Total	0.09	2.29	91.06	5.48	0.75	0.26	0.01	0.06	100

Source: CreditMetrics, JP Morgan.

考虑资产之间的相关性 BBB 与 A 的转移矩阵

表 29 联合转移概率(%)（资产相关性 0.30）

(BBB)		single-A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
BBB	86.93	0.07	1.81	79.69	4.55	0.57	0.19	0.01	0.04
BB	5.30	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.01
B	1.17	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	0.18	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

根据二元正态分布计算,假设边缘分布为标准正态分布。

多个债券组合的信用风险建模

例子 3:三个债券的组合

公司#1:BBB 评级，高级无抵押，年息 6%，5 年期(名义金额 4 毫米)

公司#2:A 级，高级无抵押，年息 5%，3 年期(金额:2m)
公司#3:CCC 评级，高级无抵押，10%年息，2 年期(金额:1mm)

V_1, V_2，V_3,表示这三个债券在期末的价值

根据前面的方法介绍，可以计算出每个债券的一年末价值。

表 30 下次评级后债券的价值($mm)

	资产价值($mm)		
未来评级	Firm 1	Firm 2	Firm 3
AAA	4.375	2.132	1.162
AA	4.368	2.130	1.161
A	4.346	2.126	1.161
BBB	4.302	2.113	1.157
BB	4.081	2.063	1.142
B	3.924	2.028	1.137
CCC	3.346	1.774	1.056
Default	2.125	1.023	0.551

$$\mu_1 = \$4.28mm \qquad \sigma^2(V_1) = 0.014$$

$$\mu_2 = \$2.12mm \qquad \sigma^2(V_2) = 0.001$$

$$\mu_3 = \$0.97mm \qquad \sigma^2(V_3) = 0.044$$

表 31 未来评级后两支债券组合的价值($mm)

New rating for Firm 1 (currently BBB)	New rating for Firm 2 (currently A)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC6.14	Default
AAA	6.51	6.51	6.50	6.49	6.44	6.40	6.15	5.40
AA	6.50	6.50	6.49	6.48	6.43	6.40	6.14	5.39
A	6.48	6.48	6.47	6.46	6.41	6.37	6.12	5.37
BBB	6.43	6.43	6.43	6.42	6.37	6.33	6.08	5.33
BB	6.21	6.21	6.21	6.19	6.14	6.11	5.86	5.10
B	6.06	6.05	6.05	6.04	5.99	5.95	5.70	4.95
CCC	5.48	5.48	5.47	5.46	5.41	5.37	5.12	4.37
Default	4.26	4.26	4.25	4.24	4.19	4.15	3.90	3.15

如何导出组合的均值和标准差？

1.均值

$$\mu_p = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 7.38mm$$

2.方差

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(V_1) + \sigma^2(V_2) + \sigma^2(V_3) + 2COV(V_1, V_2) + 2COV(V_1, V_3) + 2COV(V_2, V_3)$$

$$\sigma^2(V_1 + V_2) = \sigma^2(V_1) + 2COV(V_1, V_2) + \sigma^2(V_2)$$

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(V_1 + V_2) + \sigma^2(V_1 + V_3) + \sigma^2(V_2 + V_3) - \sigma^2(V_1) - \sigma^2(V_2) - \sigma^2(V_3)$$

从而将 3 项资产的问题转化为 2 项资产的问题，计算过程与前面 2 种债券相同。

$$COV(V_1, V_2) = \frac{\sigma^2(V_1 + V_2) - \sigma^2(V_1) - \sigma^2(V_2)}{2}$$

$$CORR(V_1,V_2)=\frac{COV(V_1,V_2)}{\sqrt{\sigma^2(V_1)\times\sigma^2(V_2)}}$$

$$CORR(V_1,V_2)=40.1\%$$

$$CORR(V_1,V_3)=50.4\%$$

$$CORR(V_2,V_3)=45.2\%$$

多个资产组合信用分析(模块 2)-随机模拟

当组合中包含的资产更多时，转化成若干个包含两个债券的组合就变得不那么容易了，这时，就需要用到模拟的方法。

当投资组合的资产大于 2 个时，可以按照下面的步骤来分析

1.推导出每个资产的收益率的阀值。

2.估计资产之间的相关性。

3.根据资产组合的联合分布产生收益的随机数。利用 Cholesky 分解.

4.对每个投资方案、对每个债务人，根据步骤 1 计算对应阀值和违约概率、转移矩阵以及标准化收益.

5.给定每个级别的利差曲线（spread curves），重新估计资产组合的价值。
6.将 2-5 步重复许多次，如 100,000 次，绘制资产组合的收益率分布曲线。
7.根据分布曲线计算分位数。

随机模拟步骤

第 1 步：计算 3 个公司的价值。3 个公司分别的转移概率矩阵

表 32 转移概率 (%)

	Transition Probability (%)		
Rating	Firm 1	Firm 2	Firm 3
AAA	0.02	0.09	0.22
AA	0.33	2.27	0.00
A	5.95	91.05	0.22
BBB	86.93	5.52	1.30
BB	5.30	0.74	2.38
B	1.17	0.26	11.24
CCC	0.12	0.01	64.86
Default	0.18	0.06	19.79

通过模拟的方法产生如下 10 种情景，并找到对应的级别状态：

表 33　资产收益率的阈值

Threshold	Firm 1	Firm 2	Firm 3
Z_{AA}	3.54	3.12	2.86
Z_{A}	2.78	1.98	2.86
Z_{BBB}	1.53	-1.51	2.63
Z_{BB}	-1.49	-2.30	2.11
Z_{B}	-2.18	-2.72	1.74
Z_{CCC}	-2.75	-3.19	1.02
Z_{Def}	-2.91	-3.24	-0.85

假设这 3 个公司之间的相关系数如下表所示

表 34 相关系数

	Firm 1	Firm 2	Firm 3
Firm 1	1.0	0.3	0.1
Firm 2	0.3	1.0	0.2
Firm 3	0.1	0.2	1.0

通过模拟的方法产生如下 10 种情景，并找到对应的级别状态：

表 35 不同情景下资产的状态

情景	资产收益率			新评级		
	Firm 1	Firm 2	Firm 3	Firm 1	Firm 2	Firm 3
1	-0.7769	-0.8750	-0.6874	BBB	A	CCC
2	-2.1060	-2.0646	0.2996	BB	BBB	CCC
3	-0.9276	0.0606	2.7068	BBB	A	A
4	0.6454	-0.1532	-1.1510	BBB	A	Default
5	0.4690	-0.5639	0.2832	BBB	A	CCC
6	-0.1252	-0.5570	-1.9479	BBB	A	Default

7	0.6994	1.5191	-1.6503	BBB	A	Default
8	1.1778	-0.6342	-1.7759	BBB	A	Default
9	1.8480	2.1202	1.1631	A	AA	B
10	0.0249	-0.4642	0.3533	BBB	A	CCC

第 2 步：计算组合远期价值($mm)

表 36

Scenario	Rating			Value			
	Firm 1	Firm 2	Firm 3	Firm 1	Firm 2	Firm 3	Portfolio
1	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
2	BB	BBB	CCC	4.081	2.063	1.056	7.200
3	BBB	A	A	4.302	2.126	1.161	7.589
4	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.657	7.085
5	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
6	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.754	7.182
7	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.269	6.697

8	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.151	6.579
9	A	AA	B	4.346	2.130	1.137	7.613
10	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484

Note：这里注意违约时的价值不是单纯的使用了回收率的均值，而是根据回收率的均值和标准差及其分布产生的随机数。

第 3 步，计算信用风险 VaR

$$\mu_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V^{(i)} = \$7.24mm$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(V^{(i)} - \mu\right)^2} = \$0.37mm$$

Note：使用标准差作为风险的测量有时是不精确的，因为我们不能确定资产价值服从正态分布，因此，我们可以使用分位数来衡量，本例中，10%的分位数在$6.58mm 和$6.70mm 之间。

此处加入信贷投资组合模型

8.3.4 Creditrisk+模型

与前面方法不同的是

- 只考虑违约风险，不考虑降级风险
- 违约风险与资本结构没有关系
- 对违约的原因没有假设，债务人只有处于违约（概率 P_A ）和不违约（1-概率 P_A ）两个状态。

模型假设

- 在给定时期（如一个月）内，贷款违约的概率与其他时期一样。
- 在给定的时期的违约数与其他时期的违约数独立。
- 对于大量的债务人，一个特定的债务人的违约概率非常小。也就是说，在某一时间点，最多发生一件违约事件，即稀有事件。

在上述假设下，一个给定的时期内（一年）的违约数服从泊松分布

$$\text{Prob}\left(n\ defaults\right)=\frac{\bar{n}^{n}e^{-\bar{n}}}{n!}\quad for\ n=0,1,2... \tag{11}$$

其中

$$\bar{n}=average\ number\ of\ \ defaults\ \ per\ \ year\left(\bar{n}=\sum_{A}P_{A}\right)$$

因此，我们只需要确定参数 $\bar{n}$ ，就可以确定违约概率和违约数。例如，假设参数等于 3，则不违约概率为

$$\text{Prob}\left(0\ default\right)=\frac{3^{0}e^{-3}}{0!}=0.05=5\%$$

$$\text{Prob}\left(3\ defaults\right)=\frac{3^{3}e^{-3}}{3!}=0.224=22.4\%$$

Creditrisk+模型框架

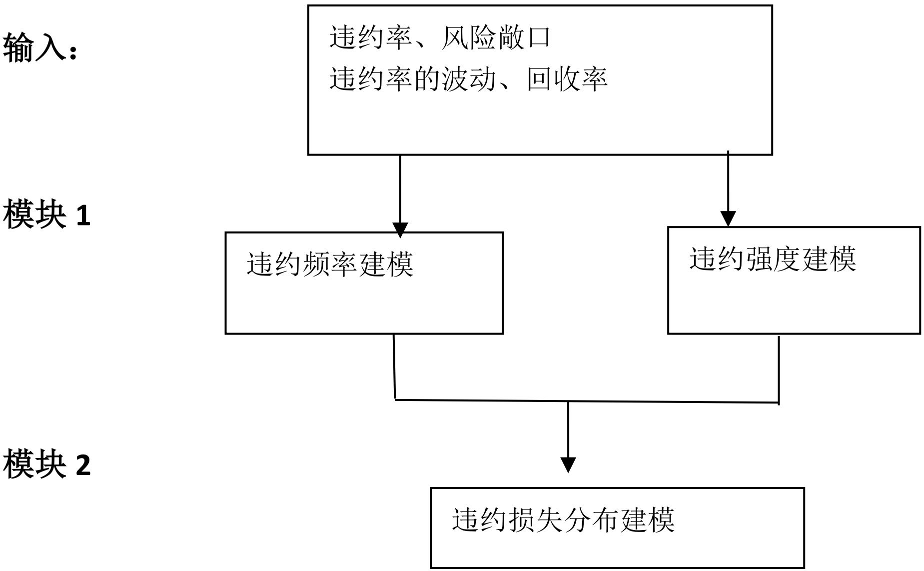


图 14　creditRisk+的流程图

基本思路

精算方法

- 求违约频率分布
- 求违约强度分布
- 计算复合分布

Common shock models

三个泊松冲击，λ_1， λ_2 和 λ_3 只影响一个公司;

三个泊松冲击，λ_{12}， λ_{13} 和 λ_{23} 分别影响两个公司

单一泊松冲击 λ_{123} 影响所有三家公司。

$$
\begin{aligned}
\Pr(\textit{exactly one default}) = & \left(1-e^{-\lambda_1 T}\right)e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{123})T} + \\
& \left(1-e^{-\lambda_2 T}\right)e^{-(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{123}T)} + \\
& \left(1-e^{-\lambda_3 T}\right)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{123})T}
\end{aligned}
$$

$$
\Pr(\textit{exactly one default}) = \sum_{n=1}^{N}\left(1-e^{-\lambda_1 T}\right)e^{-\left(\sum_{m=1}^{M}\lambda_m-\lambda_n\right)T}
$$

直到时刻 **t**，债券没有发生过违约的概率为：

$$
\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t h(s)ds}
$$

If $h(t)$ is taken to be a constant, h, then this expression becomes

$$\bar{F}(t) = e^{-ht}$$

$$F(t) = 1 - e^{-ht} = \alpha, so\ h = -\frac{\ln(1-\alpha)}{t}$$

8.4 交易对手风险

8.4.1 交易对手风险简介

交易对手风险的起源

- OTC（柜台上的）衍生品，一些著名的例子是

  利率互换;

  外汇远期;

  信用违约掉期

- 证券融资交易

  回购和反向回购;

  e 证券借贷

OTC 衍生品虽然非常强大，但可能导致重大风险，其中许多已经被多年来充分记录。由于 2007 年开始的信用危机，是交易对手风险。交易对手风险是衍生交易中的交易对手在交易期满前违约的风险，因此不会产生合同要求的当前和未来付款。

8.4.2 下列哪种情况会产生信用风险

首先考虑市场上只有一个衍生品交易情形，交易是衍生产品交易商与一个对手之间，有三种情况

- 这一衍生品永远是交易方的债务
- 这一衍生品永远是交易方的资产
- 这一衍生品可能是交易方的债务，也可能是交易方的资产

你能举一些例子吗？

8.4.3 交易对手类型

大衍生品玩家，通常是大银行;

- 有大量的 OTC 衍生品交易在他们的书上;
- 彼此交易，并有许多其他客户;
- 所有或许多不同资产类别的覆盖（利率，外汇，股权，商品，信用衍生工具）。

中衍生玩家，通常是较小的银行或其他金融机构，如对冲基金或养老保险基金;

- 将有许多 OTC 衍生品交易在他们的书;
- 将与相对大量的客户进行交易;
- 将涵盖几个资产类别，虽然可能不是所有的活动（可能，为例如，不是贸易信用衍生产品或商品，可能不会处理与更奇怪的衍生品）。

小衍生品玩家，通常是具有重要衍生产品需求的大型公司（例如，对冲需求）或小型金融机构;

- 有几个 OTC 衍生品交易;
- 只与几个不同的客户进行交易;

- 可专门用于单一资产类别（例如，某些公司只有贸易外汇产品，航空公司可以只交易石油期货，养老基金可能只对利率和通货膨胀产品有效）。

案例

请分析一家保险公司会面临哪些交易对手风险。

保险公司偿付能力监管规则第 8 号：信用风险最低资本

8.4.4 衍生产品的信用风险暴露

假定交易没有清算中心的介入，总会有以下三种情况：

- 这一衍生品永远是交易商的债务
- 这一衍生品永远是交易商的资产
- 这一衍生品既可能是交易商的债务，也可能是债务 $\max(V,0)$

8.4.5 如何转移风险

- 净额结算
- 抵押
- 信用衍生品
- 中心清算
- Hedging.

（1）净额结算

净额结算是指在场外衍生产品合约中，如果交易的一方在与某一交易对手的一份合约中违约，那么这一方必须在与同一对手的所有合约中违约。

例如：假定一家银行与某交易对手有 3 笔互换交易，对于银行而言，这 3 笔合约的价格分别为+2400 万，-1700 万及+800 万。假如交易对手因为财务困难违约，对交易对手而言，这 3 笔合约的价值分别为-2400 万，+1700 万和-800 万。

- 如果没有净额结算，交易对手会对第 1\3 个合约违约，保持第 2 个合约，此时银行的损失为 3200 万（=2400+800）。
- 如果有净额结算，银行损失为 1500 万元

净额结算公式

假设一个金融机构与某交易对手有 N 笔交易，第 i 笔交易的当前价值为V_i，

在没有净额结算的情况下，交易对手违约时触发的损失为$\sum_{i=1}^{N}\max\left(V_i, 0\right)$

在有净额结算的情况下，交易对手违约触发的损失为$\max\left(\sum_{i=1}^{N}V_i, 0\right)$

（2）抵押品

一个典型的抵押品条款约定交易双方合约定期（每天）定价，计算结果可能会触发交易的一方向另一方索要额外的抵押品。

- 无抵押界定（threshold）：需要支付抵押品时所对应的市场价值。例如，在交易商 A 与交易商 B 签署信用支持附件中，对于交易商 A 的无抵押界定为 500 万美元，这意味着在 A 方与 B 方交易的净市场价值低于 500 万美元（对于 B 而言）之前，A 方不需要支付抵押品，界定范围（此例中为 500 万美元）可被看作是 B 方给 A 方设定的贷款额度。
- 独立数量（independent amount）：一方需要另一方最初支付的保证金，独立数量可以看作是负数量的无抵押界定。
- 最小支付数量（minimum transfer amount）：为执行 CAS，进行了市场价值计算后，交易的一方支付给另外一方的抵押品的最小数量。设定最小支付数量是为了避免不太重要的小金额抵押品的支付。假定最小支付数量为 100 万美元，这意味着只有在净市场价值计算显示需要的额外抵押品价值超过 100 万美元时，才会出现抵押品的支付。
- 合格证券和货币（eligible securities and currencies）：可以作为抵押品的证券和货币的类型。

- 证券折价（haircut on a security）：当证券作为抵押品使用时，其减价的比率，例如，假定某债权的市场价值为 1 亿美元，对该类债券实行 20%折价，是指在进行抵押品使用时，债券的价值会被认定为 8000 万美元。

单向和双向抵押

比如，考虑单向抵押情形，A 方需要向方支付抵押品，假定无抵押界定为 1000 万美元，合约每天都要进行定价。假如在某天，对于 B 方而言合约净价值为 900 万美元（因此对于 A 方而言，净价值为-900 万美元），这时 A 方不需要支付抵押品。

- 假定在接下来一天，对于 B 方而言，合约净价值由 900 万美元升至为 1200 万美元，B 方会从 A 方收到 200 万美元抵押品（这里假定最低转移数量低于 200 万美元）。
- 假定在接下来一天，合约净价值升至 1500 万美元，B 方会向 A 方要求再支付抵押品 300 万美元。
- 如果在接下来一天，合约净价值降至为 1100 万美元，A 方会向 B 方要求退还其支付抵押品 500 万美元中的 400 万美元。对于现金抵押，收

到抵押品的一方要支付利息。

（3）中心清算

衍生产品交易可以通过中心清算机构 CCP 来进行清算。

初始保证金，每笔交易每天定价，因此会触发保证金的变动。

市场参与者可能与 CCP 有多个交易

每个 CCP 成员都要向 CCP 注入资金，来形成保证基金

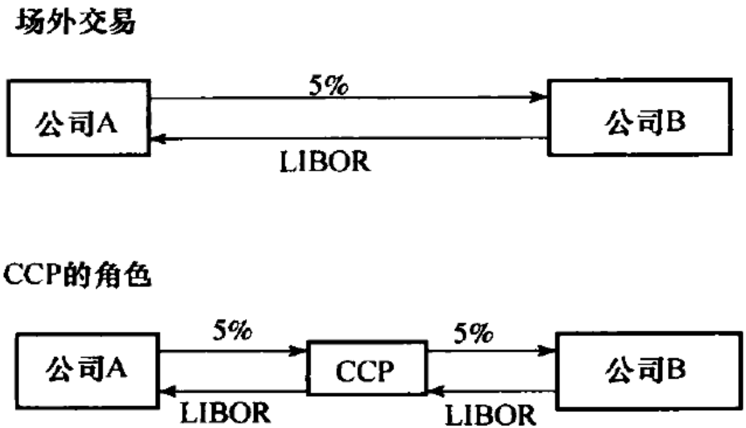


图 15 中心结算示意图

双边清算和中心清算

假定市场上有 8 个衍生产品交易商，我们利用图 17-2 来说明双边清算与中心清算的差别。在中心清算情形，假定 CCP 对每个交易商都进行清算，我们很容易看到，中心清算机构提高了净额结算的益处，对于每个交易商而言，与其进行 7 个不同的清算（与每个交易商都要进行结算），只需要与 CCP 进行一个清算。假定一个交易商与 7 个不同交易商进行的交易的市场价值分别为+10，+15，-20，+5，-10，+10 和+5。采用双边清算，整体风险（在考虑抵押品之前）为 45；采用中心清算，在进行净额结算以后，整体风险仅为 15。进而，这个整体风险所带来的信用风险是面对信用风险很低的 CCP（希望如此），而不是面对每个交易商。

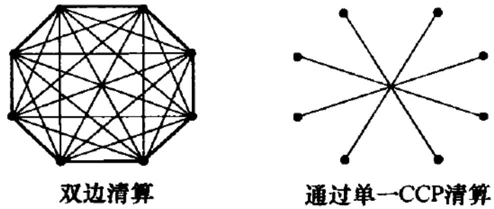


图 16 双边结算与中心结算的比较

CCP 有时会让事情变得更糟

假定市场上有三家交易商和一家 CCP，虚线代表的交易为标准交易，这些交易经过中心清算；实线代表的交易为非标准交易，这些交易通过双边清算。例如，在 B 方与 A 方的交易中，非标准交易对于 B 方而言，价值为 100，对于 A 方而言，价值为-100；标准交易对于 A 方而言，价值为 50，对于 B 方而言，价值为-50。在没有中心清算的前提下，三方所面临的风险暴露平均值为+40；在引入 CCP 以后，包括 CCP 在内的信用风险暴露平均值为 110，不考虑 CCP 在内的信用风险暴露平均值为 70。对于该简单情形，中心清算并不能改

善保证金的要求，当对交易进行保证金要求时，假定无抵押界定上限为 0，在中心清算机制下，市场参与者要注入更多的抵押品。

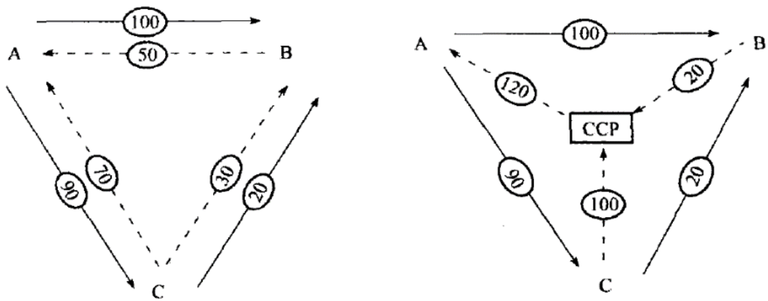


图 17 中心结算机制

左边情形

表 37

交 易 商	双边净值结算后的暴露
A	0
B	100

C	20
平均	40

右边情形

表 38

交易商	包括 CCP 的净值结算后的暴露	不包括CCP 的净值结算后的暴露
A	120	0
B	120	120
C	90	90
平均	110	70

注：其中一类可以被结清，另一类则不能。

交易对手风险与贷款风险区别

贷款风险的特征

- 贷款期间任何时间的风险名义金额通常是已知的。通常会产生利率等市场变量只有中等的不确定性。
- 只有一方有贷款风险。债券持有人承担相当大的信用风险，但如果债券的买方违约，债券发行人不会蒙受损失。

交易对手风险

- 未来衍生品合约的价值是不确定的。在潜在默认日期的衍生工具的价值将是根据该合同进行的所有未来现金流的净值。这个未来值可以是正的或负的，并且通常是非常不确定的（从今天开始看）。
- 由于衍生工具合约的价值可以是正数或负数，因此对手方风险通常是双边的。换句话说，在衍生交易中，每个交易对手有风险对另一个。交易对手风险的双边性质是近期信贷危机的一个特别重要的特征。

交易对手风险的构成

1.信用风险暴露， $\max(V,0)$

以交易对手违约为条件
需要回答下面问题

- 假设交易对手在 1 年内违约，1 年内的风险暴露是多少？
- 假设交易对手在 2 年内违约，在 2 年内的风险暴露是多少？
- 等等。

2. 违约概率
在某个时间范围内，交易对手违约的概率是多少？
交易对手在一定时间范围内信用质量下降的概率是多少（例如，评级下调）？
3. 信用转移
交易对手信用质量的变化
4.回收率
5.替换成本 Replacement cost
6. Exposure

量化交易对手风险

以下是评估单笔交易交易对手风险的三个层面:

- 贸易水平。结合贸易的所有特征和相关的风险因素。
- 交易对手层。为每个交易对手单独纳入风险缓释措施，如净额结算和担保。
- 投资组合水平。考虑所有交易对手的风险，知道在给定时间段内只有一小部分可能违约。

CVA

在衍生产品的双边清算中，对于每一个交易对手，交易商都要计算一个信用价值调节量 CVA，是对交易对手违约所带来的预期损失的估计。

所有交易对手的信用调节量都要从交易商的资产平衡表的衍生产品总价值中剔除，某个时间段内 CVA 价值总和的变化要被包含在该时间段的利润表中。

计算公式

假定净风险暴露与对手违约概率无关，对手在第 i 个时间段违约所产生的预期损失的当前值为

$$(1-R)\,q_i v_i$$

整体预期损失为

$$CVA=\sum_{i=1}^{n}(1-R)\,q_i v_i \qquad (12)$$

变量 q_i 可以由对手的信用溢差来进行估计。假定 s_i 为交易对手对应于时间 t_i 的信用溢差，结果显示，时间 0 到 t_i 的平均风险率为

$$\lambda_i = \frac{s_i}{1-R}$$

时间 0 到 t_i 的不违约概率为 $e^{-\lambda t_i}$

因此 $q_i = e^{-\lambda_{i-1} t_{-1i}} - e^{-\lambda_i t_i}$ 或者

$$q_i = \exp\left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{1-R}\right) - \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1-R}\right) \qquad （13）$$

一些简单例子

价值为正的单笔交易，假定没有抵押品，衍生产品的最终回报只是在产品最终到期日才会获得在将来任意时刻，交易对手对交易商的风险暴露等于交易的价值，因此，在 t_i 时刻的预期风险暴露的贴现值（被计为 v_i ）等于交易在 t_i 时刻预期价值的贴现值。因为我们假定在期满之前交易没有任何回报，交易在 t_i 时刻预期价值的贴现值等于产品的当前价值。

因此，式（12）变为

$$CVA = \left(1 - R\right) f_0 \sum_{i=1}^{n} q_i$$

式中， f_0 是在假设交易对手不会违约的前提下的衍生产品价值，假定 f_0^* 为将对手违约可能考虑在内的衍生产品价值： $f_0^* = f_0 - CVA$

或者

$$f_0^* = f_0\left[1-(1-R)\sum_{i=1}^{n} q_i\right] \tag{14}$$

这意味着在这一情形下，对手违约对于衍生产品价值的影响是将其价值按一定的比率减小，这里的比率如式（14）所示，等于累计风险中性违约概率乘以 1 减去回收率的乘积。

我们现在考虑一个由交易对手发行的无抵押零息债券，债券在 T 时刻支付 1000 美元。定义 B_0 为无违约风险时的债券价格，B_0^* 为债券的实际价格。假定在违约时，债券的支付优先权与衍生产品支付的优先权等同，因此，违约时衍生产品的回收率等于债券的回收率，类似于式（14）式，我们可以得出

$$B_0^* = B_0\left[1-(1-R)\sum_{i=1}^{n} q_i\right] \tag{15}$$

由式（14）和式（15）得出

$$\frac{f_0^*}{f_0} = \frac{B_0^*}{B_0} \tag{16}$$

如果 y 为在 T 时刻到期的无风险零息债券的收益率，y^* 为在 T 时刻到期的由衍生产品交易对手发行的零息债券收益率，即 $B_0 = e^{-ry}$ 与 $B_0^* = e^{-y^*T}$，式（16）给出

$$f_0^* = f_0 e^{-\left(y^* - y\right)T} \tag{17}$$

式（17）说明，衍生产品的价格等于无风险的衍生产品价格以 $y^* - y$ 的溢差进行贴现。

例：考虑公司 X 在场外市场卖出的一个 2 年期的期权，在无违约前提下，期权价值为 3 美元。假定由公司 X 发行的 2 年期零息债券的收益率比相应的无风险利率高 1.5%，期权的实际价值为

$$3e^{-0.015\times 2}=2.91$$

即 2.91 美元。

利率互换与货币互换

单一远期交易

下面一个例子是交易商与交易对手之间进行的一笔远期交易，其中交易商要在将来时间 T 以固定价格买入资产，假定在交易中没有抵押品，假定资产在今天的远期价格为 F_0（在今天为已知），在时间 t（$t\le T$）的远期价格为 F_t（在今天为未知）。如附录 C 所示，远期价格在时间 t 的价值为

$$\left(F_t-K\right)e^{-r\left(T-t\right)}$$

式中，r 为无风险利率（假定为常数）。
在时间 t 的风险暴露为

$$\max\left[\left(F_t - K\right)e^{-r(T-t)}, 0\right] = e^{-r(t-T)}\max\left[\left(F_t - K\right), 0\right] \qquad (18)$$

风险暴露的当前价值等于在时间 t 支付回报 $\max\left[\left(F_t - K\right), 0\right]$ 的衍生产品的贴现值，该衍生产品是关于远期价格的期权，由附录 E 的期权公式得出，该衍生产品的价值为

$$e^{-rt}\left(F_0 N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(F_0 / K\right) + \sigma^2 t / 2}{\sigma\sqrt{t}}$$

及

$$d_2 = \frac{\ln\left(F_0 / K\right) - \sigma^2 t / 2}{\sigma\sqrt{t}}$$

式中，σ 为资产远期价格的波动率，由式（17-11）（18）得出，在时间的风险暴露的当前值为

$$e^{-rt}\left[F_0 N\left(d_1\right)-KN\left(d_2\right)\right]$$

因此式（12）中的 v_i 满足

$$v_i=e^{-rt}\left[F_0 N\left(d_{1,i}\right)-KN\left(d_{2,i}\right)\right]$$

其中

$$d_{1,i}=\frac{\ln\left(F_0/K\right)+\sigma^2 t_i/2}{\sigma\sqrt{t_i}}$$

及

$$d_{2,i}=\frac{\ln\left(F_0/K\right)-\sigma^2 t_i/2}{\sigma\sqrt{t_i}}$$

例 假定银行和一家矿产公司进行了一笔关于黄金的远期交易，远期合同阐

明在两年后银行将以每盎司 1500 美元的价格买入 100 万盎司黄金，黄金的远期价格为每盎司 1600 美元，矿业公司在第一年的违约概率 2%，在第二年的违约概率为 3%，假定矿业公司违约的时间发生在每年的年正中，无风险利率为每年 5%，金融机构预测矿业公司违约回收率为 30%，在黄金远期合约两年满期时，远期价格的波动率为 20%。

在这一情形下

$$v_1 = e^{-0.05\times 2}\left[1600N\left(d_{1,1}\right) - 1500N\left(d_{2,1}\right)\right]$$

其中

$$d_{1,1} = \frac{\ln\left(1600/1500\right) + 0.2^2 \times 0.5/2}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.5271$$

和

$$d_{2,1} = \frac{\ln\left(1600/1500\right) - 0.2^2 \times 0.5/2}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.3856$$

由此得出 $v_1 = 132.38$，进而

$$v_2 = e^{-0.05\times 2}\left[1600N\left(d_{1,2}\right)-1500N\left(d_{2,2}\right)\right]$$

其中

$$d_{1,2}=\frac{\ln\left(1600/1500\right)+0.2^2\times 1.5/2}{0.2\sqrt{1.5}}=0.3860$$

和

$$d_{2,2}=\frac{\ln\left(1600/1500\right)-0.2^2\times 1.5/2}{0.2\sqrt{1.5}}=0.1410$$

由此得出 $v_2 = 186.65$

其他变量的取值为 $q_1 = 0.02, q_2 = 0.03$ 以及 $R = 0.3$，因此

$$CVA=\left(1-0.3\right)\times\left(0.02\times 132.38+0.03\times 186.65\right)=5.77$$

在没有违约假设下，远期合约的价值为 $\left(1600-1500\right)e^{-2\times 0.05}=90.48$，将对手违

约考虑在内，远期合约的价值为$90.48-5.77=84.71$
我们对此例可以推广到矿业公司的违约发生时间更为频繁的情形。

抵押品和补救期

在计算v_i的过程中，我们需要考虑抵押品。如果没有抵押品，交易商面临的净风险暴露为

$$E_{NC}=\max\left(w\left(t\right),0\right)$$

假设无抵押界定为 K 并且在交易对手无法支付抵押品是，交易商马上可以宣布提前终止事件，在 t 时刻的抵押品数量为

$$\max\left(w\left(t\right)-K,0\right)$$

在实践中，交易商会面临一个补救期，也被称为风险边际期，即为当交易对手停止支付抵押品之后，交易商所需要的消除裸露风险所需要的时间，补救期的终端时间被称为平仓时刻。
假定补救期的长度为 c，在时间 t 平仓时，抵押品数量为

$$C(t)=\max\left(w(t-c)-K,0\right) \tag{19}$$

独立数量可以被看作是负的无抵押界定，因此

$$C(t)=\max\left(w(t-c)+I,0\right) \tag{20}$$

因此在时间，去除抵押品以后，净风险暴露量等于

$$E_{NET}(t)=\max\left(E_{NC}(t)-C(t),0\right) \tag{21}$$

假定第 i 个区间的中间值为t_i^*，即$t_i^*=\left(t_{i-1}+t_i\right)/2$，通过蒙特卡洛模拟计算$v_i$时，计算过程既要考虑交易在$t_i^*$的价值，也要考虑交易在$t_i^*-c$的价值（$i=1,2,\ldots,n$），在每次模拟过程中，交易在$t_i^*-c$的价值是被用于式（19）和式（20）来求得抵押品的数量，然后利用式（21）可求得净风险暴露。

新交易对 CVA 的影响

新增交易的价值与交易商和这一对手之间的其他交易有正的相关性

新增交易的价值与交易商和这一对手之间的其他交易有负的相关性

当引入一个新交易，计算 CVA 增量，可以采用已经被记录的市场变量，并基于这些市场变量来对新增交易的将来价值进行计算，由此可以求得新增交易的对于交易组合在将来每个路径上价值的附加效应。

为了说明计算过程，假定交易商与某交易对手的交易组合的价格与黄金价格有关，在计算 CVA 的模拟过程中，对应于 2.5 年的时间节点，在第 545 次抽样中，金价为每盎司 1572 美元，投资组合的价值为 240 万美元，假定没有抵押品，此价值也对应于风险暴露，如果第 2.5 年也对应于第 20 步时间步长的中间值，这意味着 v_{20} 等于第 2.5 年的价值（即 240 万美元）的贴现，假定贴现值为 230 万美元。

假定在完成 CVA 计算不久，我们要与交易对手进行一笔新的交易，交易价值于黄金价格有关。对于这笔交易，在所有的关于金价的模拟路径上，我们要对新增交易进行定价，假定在第 545 次模拟路径上，在第 2.5 年（黄金价格为 1572 美元），新增交易组合的价值为-420 万美元，这意味着交易组合价值在加入了新交易以后，在第 545 次的模拟路径上，在第 2.5 年时间节点

上，交易组合由最初的 230 万美元减至负 190 万美元，因此风险暴露也减至 0，新的 v_{20} 的取值也为 0。因此新交易的效果是将 v_{20} 的值减小了 230 万美元。

对于所有的模拟和时间节点，我们可以进行类似的计算。对于所有模拟我们可以求得 v_{20} 变化的均值 Δv_{20}，其他 Δv_i 也可以采用类似的方法得出。进而，新增交易对于既存交易组合的附加效应也可以由以下表达式估算得出

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-R\right)q_i\Delta v_i$$

CVA 风险

决定 v_i 数量的市场变量包括利率、汇率、大宗商品价格等，对这些变量来计算希腊值会花费较长时间，例如，在计算 CVA 对于汇率的敏感性（delta）时，我们要对汇率进行扰动，然后重新计算 CVA。

决定 q_i 的变量为交易对手的信用溢差，溢差与期限有关，由式（13）得出

$$q_i = \exp\left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{1-R}\right) - \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1-R}\right)$$

由式(12)

$$CVA = \sum_{i=1}^{n} (1-R) q_i v_i$$

利用 delta/gamma 近似，当信用溢差的期限结构有一个平行移动Δs时（假定其他决定v_i数量的市场变量不变），相应的 CVA 变化为

$$\Delta(CVA) = \sum_{i=1}^{n} \left[t_i \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1-R}\right) - t_{i-1} \exp\left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{1-R}\right) \right] v_i \Delta s$$
$$+ \frac{1}{2(1-R)} \sum_{i=1}^{n} \left[t_{i-1}^2 \exp\left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{1-R}\right) - t_i^2 \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1-R}\right) \right] v_i (\Delta s)^2$$

一旦确定了v_i，以上计算非常简单。

巴塞尔协议中的 EAD

商业银行应采用现期风险暴露法计算场外衍生工具交易的违约风险暴露（EAD），计算规则如下：

EAD = MTM + Add-on

其中：

（1）MTM 为按盯市价值计算的重置成本与 0 之间的较大者；

（2）Add-on 为反映剩余期限内潜在风险暴露的附加因子。

（3）潜在风险暴露的附加因子（Add-on）等于衍生工具的名义本金乘以相应的附加系数。

衍生工具的附加系数表。

表 39 衍生工具的附加系数表

剩余期限	利率（%）	汇率和黄金（%）	股权（%）	黄金以外的贵金属（%）	其他商品（%）
不超过 1 年	0.0	1.0	6.0	7.0	10.0
1 年以上，不超过 5	0.5	5.0	8.0	7.0	12.0

年					
5 年以上	1.5	7.5	10.0	8.0	15.0

表 40 信用衍生工具的附加系数

类型	参照资产	信用保护买方（%）	信用保护卖方（%）
总收益互换	合格参照资产	5	5
	不合格参照资产	10	10
信用违约互换	合格参照资产	5	5
	不合格参照资产	10	10

巴塞尔协议中的 CVA 风险加权资产

商业银行应采用以下公式计算信用估值调整（CVA）风险加权资产：

$$=12.5\times 2.33\sqrt{h}$$

$$\bullet\sqrt{\left[\sum_{t}0.5w_i\left(M_i\cdot EAD_i^{total}-M_i^{hedge}\cdot B_i\right)-\sum_{ind}w_{ind}\cdot M_{ind}\cdot B_{ind}\right]^2+\sum_{i}0.75w_i\left(M_i\cdot EAD_i^{total}-M_i^{hedge}\cdot B_i\right)^2}$$