量化金融R语言第二讲——债券模型

（一）固定收益债券

固定收益投资组合管理的一般目标是在给定的风险/回报配置下建立固定收益证券的投资组合。这个过程包括了对收益率曲线、预付行为以及默认证券的动态建模。 固定收益证券的风险包括信用风险、流动性风险以及市场风险等。前两者为非系统性风险，后者为系统性风险。固定收益证券的市场风险通常可以通过久期、修正久期、主要久期或者因子久期来刻画。所有这些利率风险的度量都可以用于固定收益证券。

一、度量固定收益证券的市场风险

1. 固定收益证券现值的一般公式为：

$$P=\sum_{t=0}^{T}\frac{CF_t}{(1+y_t)^t}$$

   其中，T是证券到期的时间，CF_t是证券在时间t 的现金流，y_t是投资者在时间t收到现金的折现率。 市场风险源于利率的变动，它引起了再投资风险和流动性风险。前者会影响到可用于再投资的息票利息支付的收益率，后者会影响到债券的市场价格。

2. 研究债券价格的到期收益率y的函数公式$P=\sum_{t=0}^{T}\frac{CF_t}{(1+y_t)^t}$可以度量利率变动的市场价格影响。将债券的价格函数用泰勒级数展开，则有：

$$\Delta P=\frac{dP}{dy}\Delta y+\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}(\Delta y)^2+\cdots$$

   在收益率中一个Δy的变动引起的价格变动的百分比可以表示为:

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}\Delta y+\frac{1}{2P}\frac{d^2P}{dy_2}(\Delta y)^2+\cdots$$

   二阶近似是：

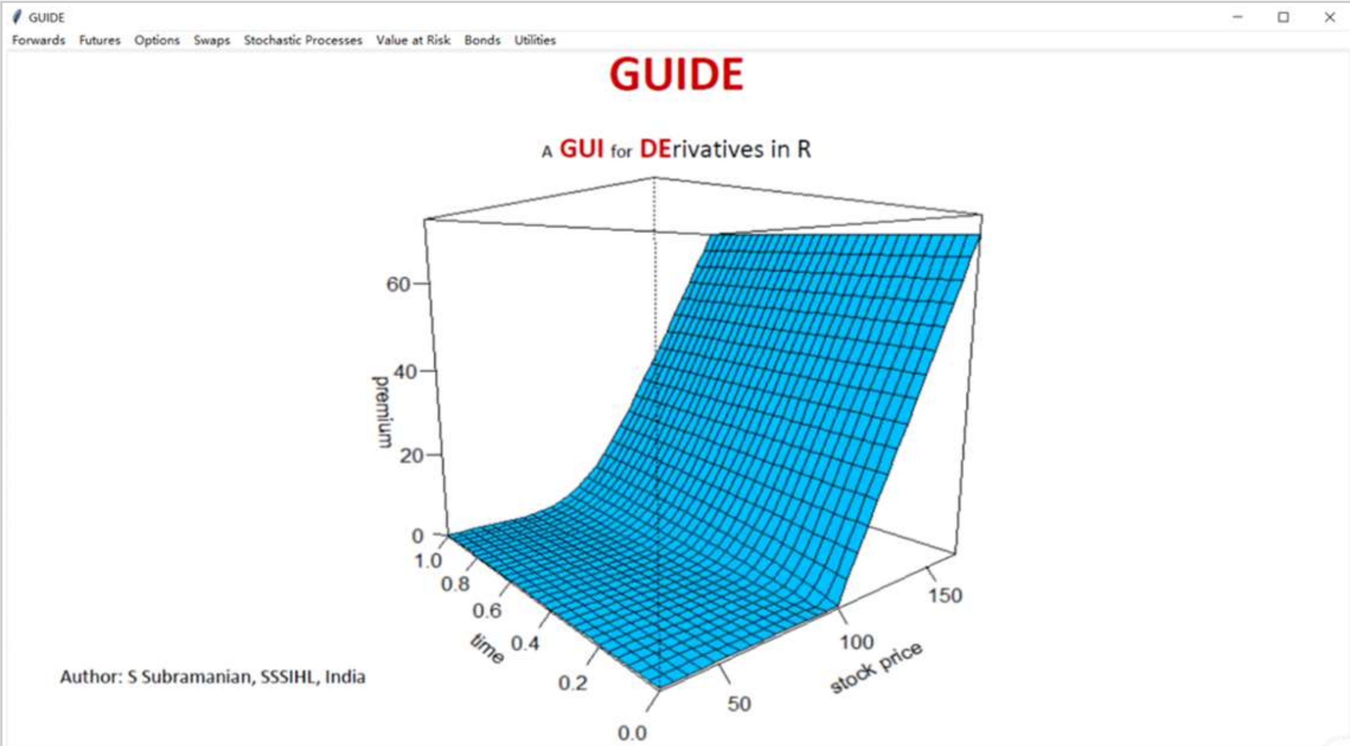
$$\frac{\Delta P}{P} = -D^* \Delta y + \frac{1}{2} Convexity(\Delta y)^2$$
$$= -\frac{D}{1+y} \Delta y + \frac{1}{2} Convexity(\Delta y)^2$$

3. **复合久期**(D)：$D = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}(1+y) = \sum_{t=0}^{T} t \times \frac{CF_t/(1+y)^t}{P}$
   修正久期(D^*)：$D^* = D/(1+y)$
   凸度：$Convexity = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{1}{P}\frac{1}{(1+y)^2}\sum_{t=0}^{T} t \times \frac{CF_t(t^{2+t})}{(1+y)^t}$

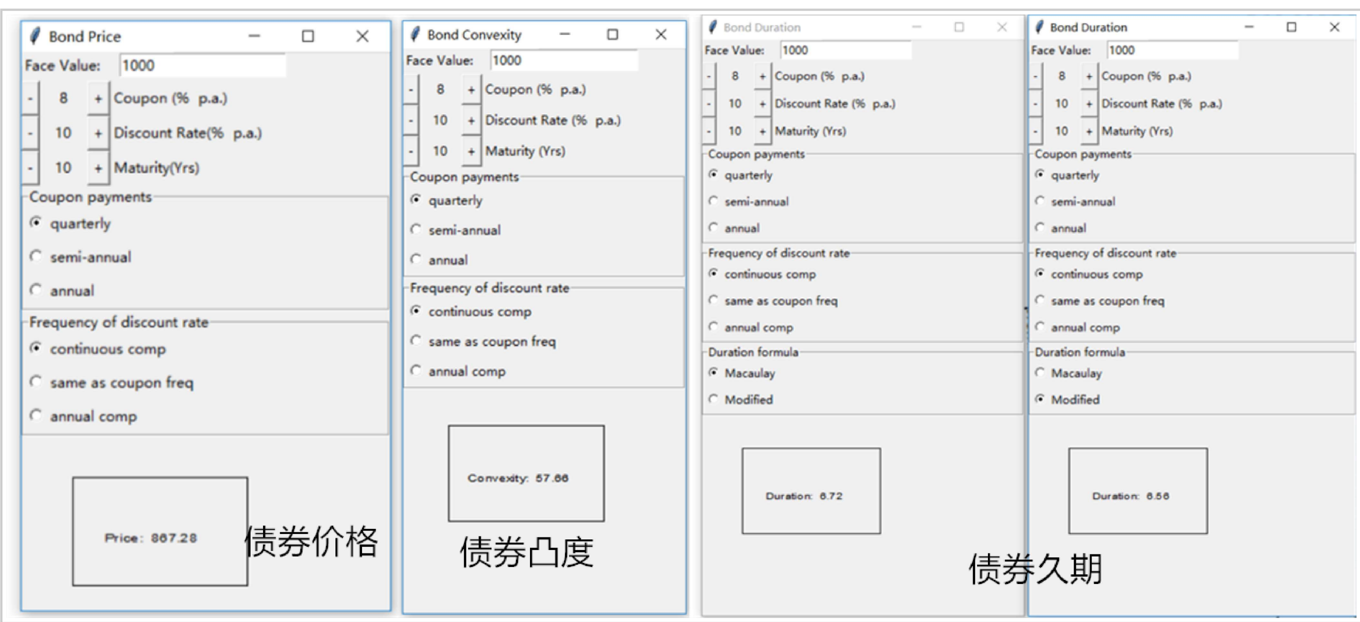
4. 债券的定价公式表现了债券的到期收益率(y)与价格(P)之间的反向关系。
   因为久期刻画了债券相对于价格变动而产生的到期收益率的变动，因此它是债券利率风险的最重要度量。久期是债券期限的加权平均。

5. 案例
   考虑一个到期时支付票面价值1000美元的10年期债券，年化息票率为8%，利息每个季度支付一次，同时假定连续复利收益率曲线在10%处平坦。
   使用GUIDE 包，它对多种金融计算和金融衍生品定价的交互图形提供了图形用户界面，因此下面的案例与其他各章相比，参数设置的方式更加直观。

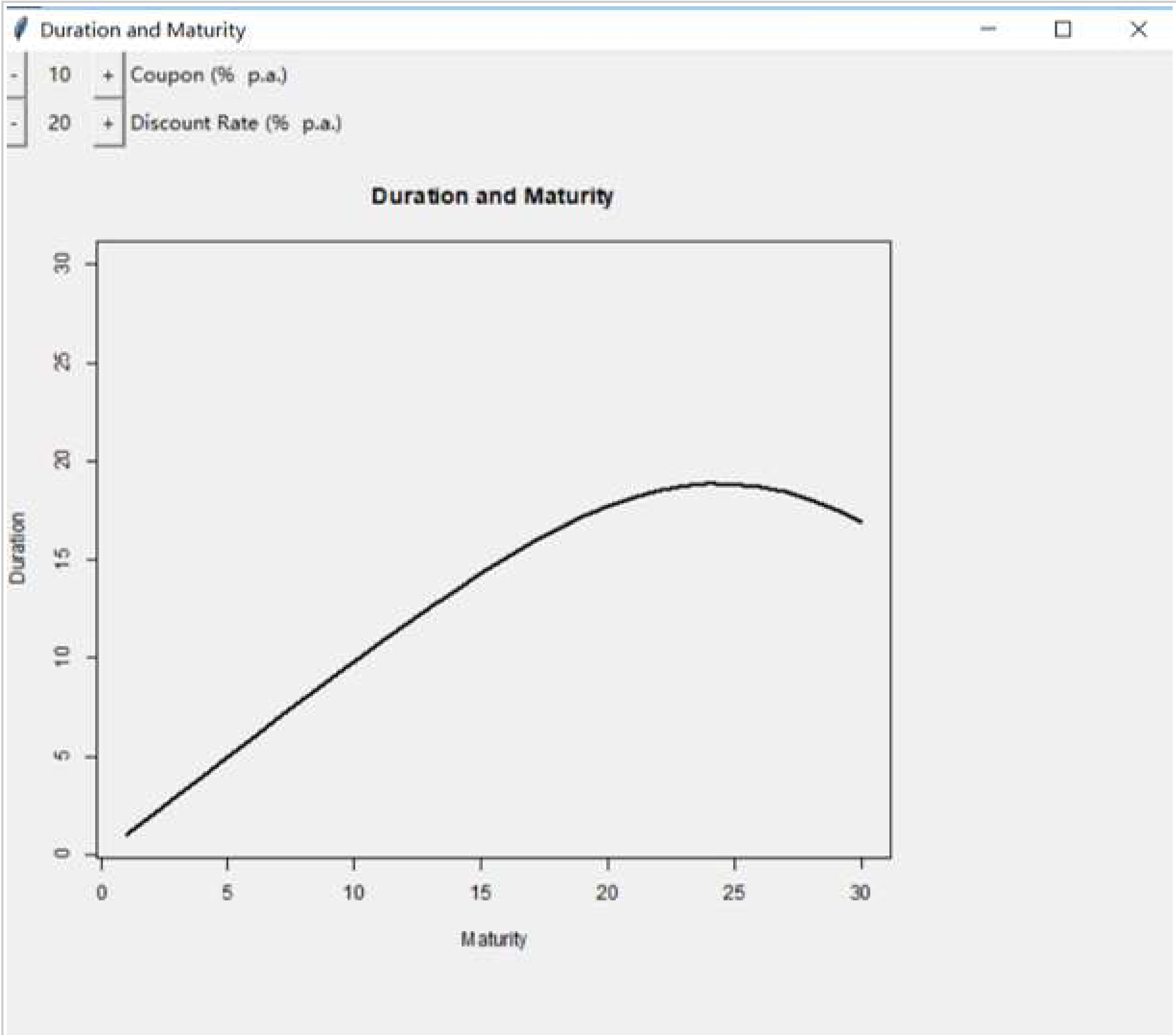
```
install.packages('GUIDE')
library(GUIDE)
GUIDE()
```



载入主窗口后，可以访问包内的55个函数，简易计算债券价格、久期、凸度等。



也可以绘制久期与到期的关系图等：



二、固定收益投资组合的免疫

如果一个投资组合不会受到利率改变的影响，那么它是**免疫**的。
免疫策略有两种不同的类型：净值免疫和目标日期免疫。

1. **净值免疫**
   利率变化对资产和负债的市场价值都会产生影响，将资产负债进行适当搭配，使得利率变化对资产和负债的影响方向相反、数额相等，互相抵消，就会消除净资产面临的利率风险。
   主要用于资产和负债都受利率变化影响的机构，如商业银行。银行尽力使其资产与负债的久期相等，以便其全部资产与负债有效免于利率波动的风险。

2. **目标日期免疫**
   目标日期免疫与净值免疫的实质是相同的，只不过其直接的出发点不是当前的资产净值，而是使资产的未来积累的价值在目标日期内不受利率波动的影响。

主要用于未来支付固定的机构，例如养老基金、保险公司等机构通常都从这一角度考虑免疫策略的运用，考虑更多的是未来的支付义务。

3. **定制**
   一种类型特殊的目标日期免疫，即现金流匹配,使债券组合产生的现金流与负债的现金流在时间上和金额上正好相等，这样就可以完全满足未来负债产生的现金流支出需要，完全规避利率风险。
   为了实现这种免疫，一种方式是通过零息债券为相应的债务部分融资。

三、可转换债券的定价

1. **可转换债券**
   可转换债券持有者有把债券转换为特定数量的发行公司股票份额的权利。
   投资者持有一张与可转债相同利率的普通债券，一张数量为转换比例、期权行使价为初始转股价格的美式买权(赎回条款)，一张美式卖权(回售条款)，同时向发行人无条件出售了一张美式买权。所以，可转换公司债券的价值可以用以下公式近似表示：

$$\text{可转换公司债券价值} \approx \text{纯粹债券价值} + \text{期权价值}$$

2. **信用利差**
   指同期限信用债券与无风险债券收益率之差，源于投资者对信用债券的信用风险以及流动性不足等风险所要求的风险补偿。

3. 考虑一个5年期的可转换债券，票面价值100美元，息票率5%，按年付息，可以选择在票面到期时转换为4 股普通股。假定无风险收益率对所有的到期都是5%，债券的信用利差是2%，基础股票的价格是20 美元，股票的波动率是20%，而股息率是0。

```
library(RQuantLib)
# 使用的的日期定义为今天
today <- Sys.Date()
# 设置交易,结算日期和远期利率时间间隔
params <- list(tradeDate = today - 2,settleDate = today, dt = 0.25)
# 给定一条平坦的收益率曲线,从0 到10 步长为0.1 的序列
times <- seq(0, 10, 0.1)
# 股息率为0
dividendYield <- DiscountCurve(params, list(flat = 10e-6), times)
# 无风险收益率为5%
riskFreeRate <- DiscountCurve(params, list(flat = 0.05), times)
```

构建BlackScholes过程和二叉树定价的参数

```
process <- list(underlying = 20, divYield = dividendYield, rff = riskFreeRate, volatility =
0.2)
```

构建可转换证券部分的参数，包括期权类型、证券面值、可赎回价格、利差、转换

```
bondparams <- list(exercise = "eu", faceAmount = 100, redemption = 100,
                   creditSpread = 0.02, conversionRatio = 4,
                   issueDate = as.Date(today + 2),
                   maturityDate = as.Date(today + 1825))
```

我们还需要设定转换比率，它决定了如果债券持有者决定把债券转换为股票，那他会得到多少普通股。同时也在这里设定债券的票面价值和信用利差。

```
dateparams <- list(settlementDays = 3, dayCounter = "ActualActual",
                   period = "Annual", businessDayConvention = "Unadjusted")
```

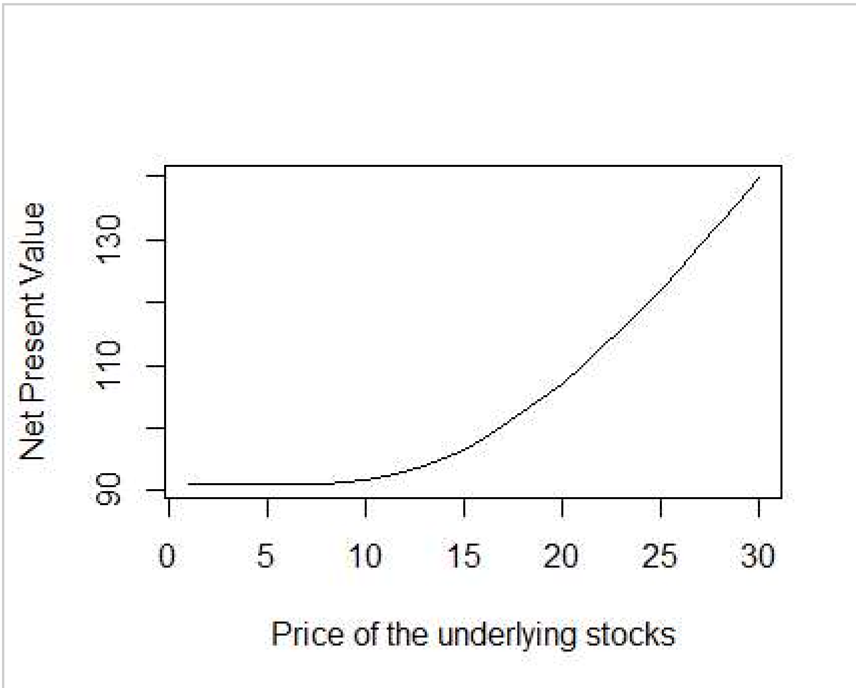
dateparams中daycounter为计息规则：实际计息天数/一年实际天数，对应actual/actual businessDayConvention: 一种工作日惯例，即假日、周六或周日的付款日顺延到下一个目标工作日。如果该日在下一个日历月，则付款日将回滚到目标工作日的前一个工作日。

```
ConvertibleFixedCouponBond(bondparams, coupon = 0.05, process, dateparams)
```

```
Concise summary of valuation for ConvertibleFixedCouponBond
 Net present value :  107.0975
       clean price :  107.06
       dirty price :  107.1
    accrued coupon :  0.041096
             yield :  0.033848
```

如果排除了可转换特征，债券价值大约为92 美元，而带有额外特征的债券价值变成107.1美元。现在，我们从1 ~ 30 提高基础股票的价格，同时检查净现值的改变。

```
res <- sapply(seq(1, 30, 1), function(s){
              process$undrlying = s,
              ConvertibleFixedCouponBond(bondparams,
              coupon = 0.05, process, dateparams)$NPV
})
plot(1:30, res, type = "l", xlab = "Price of the underlying stocks",
     ylab = "Net Present Value")
```



(二) 估计利率期限结构

一、利率期限结构与相关函数

1. 函数$d:[0,T]\rightarrow R$叫作**折现函数。**
   到期面值为1，年限为t的零息债券的市场价格$d(t)$,也叫作t年折现因子。
   无套利假设：$d(0)=1$和$d(t)$单调下降，$d(t)>0$，且二阶连续可微。

2. 函数$r:[0,T]\rightarrow R$叫作（零息债券）**收益率曲线。**
   令$r(t)$是t年零息债券的连续复合年化收益率，它的定义如下：

$$r(t)=\frac{1}{t}ln(\frac{1}{d(t)})$$

3. 函数$f:[0,T]\rightarrow R$叫作（瞬时）远期利率曲线，

$$f(t)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{ln\mid d(t)/d(t+h)|}{h}=-\frac{d^{'}(t)}{d(t)}$$

4. 在这里，$f(t)$是在交易双方基于假设的远期贷款协议商定的利率，当这个合约签订时，其中的一方承诺在t年的时刻以一个非常短的期限和这个谈好的固定利率，向另一方贷出某个数目的资金。
   折现函数、收益率曲线以及远期利率曲线彼此相互依赖，它们都可以是利率期限结构的某种表达形式。期限结构可以和其中的任何函数或者全部函数有关

二、估计问题

1. 我们不能直接观测期限结构，但是我们能观测依赖于价格期限结构的产品的市场价格，并由此估计期限结构。
   对于期限结构的一个好的信息来源是**政府债券市场**，其中交易着大量的价格仅仅依赖于期限结构的流动性证券

2. 想象有n只债券交易，它们的毛价格（或肮脏价格）表示为$p\in R^n$。有m个日期，其中至少一位债券所有者会收到支付。
   这些支付分别预定于$t_1,t_2,...,t_m$年时刻收取，其中$0<t_1<t_2<\cdots<t_m=T$。$n\times m$的矩阵C包含债券的现金流。我们把债券价格作为债券现金流的现值与正态分布的误差项之和来建模。

$$p=Cd+\varepsilon$$

   这里d是一个包含折现因子$d(t_j)$的向量，ε是一个包含误差项的向量。

3. 误差项产生原因
   （1）债券的观测市场价格中存在观测误差;
   （2）市场中存在着轻微的不完美，比如交易成本会使理论价格与市场价格之间存在差异，并且这种差异无法用于套利交易，从而使债券的观测市场价格不等于债券现金流的现值。

4.

$$E(\varepsilon)=0$$

$$E(\varepsilon\varepsilon^{'}) = \sigma^2\Omega$$

这里的Ω是一个$n \times n$半正定的对角阵。假设债券价格中的误差标准差与它的买卖价差（即，债券的买入报出价格和卖出报出价格的差异）成比例，这是符合逻辑的。于是，ω_{ii}通常选取为证券i报价差的平方。

5. 模型看起来是一个典型的线性回归，但通常来说它无法直接估计，因为观测（债券价格）的个数常常少于待估计的系数个数。因此，我们建模时需要待估计的参数个数减少的期限结构模型，并需要保证期限结构的估计结果合理。

三、基于线性回归的期限结构估计

1. 假设折现函数可以表达为二次连续可微的函数$f_1, f_2, \ldots, f_l$的线性组合：

$$d(t) = \sum_{k=1}^{l} w_k f_k(t)$$

其中，

$$d(0) = \sum_{k=1}^{l} w_k f_k(0) = 1$$

2. 通过广义最小二乘法，我们可以估计权重w_k。随后我们会讨论函数f_k的选择。需要估计的折现函数是估计权重$\hat{w_k}$的函数。

$$\hat{d}\,(t) = \sum_{k=1}^{l} \hat{w}_k f_k(t)$$

3. 令D表示$m \times l$矩阵，它的d_{jk}元素是$f_k(t_j)$，并且$w \in R^l$是包含权重w_k的向量。于是，

$$d = Dw$$

并且，

$$p = Cdw + \varepsilon$$

这是一个在约束$d(0) = 1$之下的线性回归模型，该约束也可以表示如下：

$$r^{'}w = 1$$

其中，$r^{'} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_t(0))$ 在此约束下，方程的权重的广义最小二乘估计如下：

$$\hat{w} = w^{*} - (X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}r[r^{'}(X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}r]^{-1}(r^{'}w^{*} - 1)$$

其中，$X^{'} = CD$，$w^{*} = (X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X^{'}\Omega^{-1}p$

四、三次样条回归

1. 如何估计一个合理的折现函数结果？仔细选择函数f_k。

- 线性or非线性?
  典型的折现函数是非线性的。这是一个单调递减函数，在无穷远处渐进收敛到0。因此不能拟合一条直线。
- 低阶or高阶?
  可以尝试拟合一个多项式折现函数，不过这个解也不令人满意。如果拟合低阶多项式，它们通常不够灵活，不能很好拟合，（短期到期日）如果我们拟合高阶多项式，它们可以很好地拟合，但债券相对较少时会在债券的长期到期期限上产生剧烈波动。这些剧烈波动常常会产生不符合实际的期限结构估计结果。

2. **样条函数**
   样条函数能够在不增加估计函数的多项式阶数的前提下，在需要的局部增加灵活性。
   最早 McCulloch 在 1971 年提出，通过对折现函数拟合三次样条来估计期限结构。
   三次样条是实函数，定义域是实数轴上的一个区间。定义域$[b_0, b_K]$通过所谓的节点$b_0, b_1, \ldots, b_K$划分为子区间，其中$0 < b_0 < b_1 < \cdots < b_K$。在每个子区间上，三次样条函数是一个三次多项式。
   这些三次多项式在节点处连接起来，这样条函数是连续的，并且它在$[t, T]$上是二阶连续可微的。每一个$[0, T]$上的三次样条函数以及一个给定的节点集合$b_0, b_1, \ldots, b_K$可以表达为$K+3$个样条基函数的线性组合，**样条基函数**是覆盖在同样节点上的三次样条函数。
   因此，如果想对折现函数拟合一个三次样条，我们可以简单地把函数f_k选择为三次基样条。

3. 一个重要的问题是设定节点的个数以及放置节点。第一个节点和最后一个节点分别是0和T，其他节点的选择需要使每个子区间内的到期债券的数量大致相同。设定节点的个数就不那么直接。这将会决定要估计的参数个数，更加会影响待估计的期限结构。

- 我们可以通过设置$K = 1$开始估计过程，接着循环增加一个节点并进行估计，直到拟合优度明显提高并且估计的期限节构表现良好为止。
- 也可以遵循 McCulloch提出的经验法则：节点的个数近似为$\sqrt{n}$。