第 5 章 Copula 和相关性

内容提要

- Copula 定义和性质
- 相关性
- 常见的 Copula 函数
- Copula 的拟合
- Copula 在风险管理的应用

参考资料

- Value-at- Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, Jorion, 3rd Edition
    - Ch. 9 Forecasting Risk Correlations (only Section 9.3 Modelling Correlations, pp. 232-236)
- Measurement and Modeling of Dependencies in Economic Capital, Ch. 4-5
    - 4. Correlation as the Simplest Type of Dependency
    - 5. Risk Aggregation
- ERM-125-15: Loss Models Further Topics, Klugman, Panjer and Wilmot,
    - Ch. 10 Copula models
- QRM，2015

本章回答如下问题

- Copula 的定义与性质
- 相依性是什么意思？
- 相关系数是一个好相依性度量工具吗？
  - 随着时间的推移，相关性是否稳定，它们如何变化？- 风险多样化效益现实吗？
  - 当他们谈论“尾部相依”时，人们意味着什么？
  - 如何向董事会汇报相依建模对经济资本结果的影响？
- 如何用 Copula 来描述相关性
- Copula 在风险管理中的应用

5.1 Copula 的定义和性质

定义 5.1（Copula）Copula C 是一个多元分布函数，且边际分布服从均匀分布 U(0,1)。具体来说,$C:[0,1]^d \to [0,1]$是 copula 函数当且仅当：

1) C 是 grounded。也就是说，如果至少存在一个 $j \in \{1,\dots,d\}$，使得$u_j = 0$ ，则 $C(u_1,\dots,u_d) = 0$ 成立。

2) C 的单变量边际分布为(0,1)上的均匀分布。即对所有$u_j \in [0,1]$，$j \in \{1,\dots,d\}$，$C(1,\dots,1.u_j,1,\dots,1) = u_j$ 成立。

3) C 是 d 维递增函数，即对所有$a,b \in [0,1]^d$，$a \le b$，

$$\Delta_{(a,b]}C = \sum_{i \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{j=1}^{d} i_j C\left(a_1^{i_1} b_1^{1-i_1},\dots,a_d^{i_d} b_d^{1-i_d}\right)} \ge 0$$

成立。同样的，密度函数 c 如果存在，则对所有$u \in (0,1)^d$，密度$c(u) \ge 0$成立。

注：2 维递增的含义

$$\Delta_{(a,b]}C = C(b_1,b_2) - C(b_1,a_2) - C(a_1,b_2) + C(a_1,a_2)$$
$$= P(U \in (a,b]) \overset{!}{\geq} 0$$

C 对它的每一个变量都是单调递增的

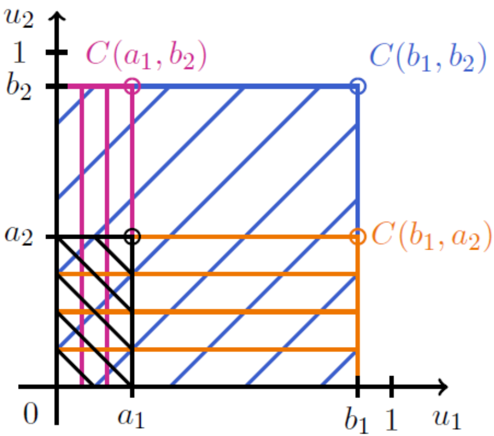


图 5.1　2 维递增函数 $\Delta_{(a,b]}C$ 的直观解释

$\Rightarrow \Delta_{(a,b]}C$ 是随 机向量 $U \sim C$ 在区间 $(a,b]$ 内的概率。

预备知识-广义逆变换

定义 5.2(**广义逆变换**)对任意递增函数 $T: R\to R$ 且 $T(-\infty)=\lim\limits_{x\downarrow-\infty}T(x)$, $T(\infty)=\lim\limits_{x\uparrow\infty}T(x)$

广义逆变换 $T^{\leftarrow}: R\to\bar{R}=[-\infty,\infty]$ 定义为

$$T^{\leftarrow}(y)=\inf\{x\in R: T(x)\geq y\}, y\in R$$

且约定 $\inf\varnothing=\infty$，如果 T 是一个分布函数，则 $T^{\leftarrow}:[0,1]\to\bar{R}$ 是 T 的分位数函数。

引理 5.1 (概率变换)

令 $X\sim F$， F 连续，则 $F(X)\sim U(0,1)$。

证明思路：

$$P\left(F\left(X\right)\leq u\right)=P\left(F^{\leftarrow}\left(F\left(X\right)\right)\leq F^{\leftarrow}\left(u\right)\right)=P\left(X\leq F^{\leftarrow}\left(u\right)\right)=F\left(F^{\leftarrow}\left(u\right)\right)=u, u\in\left[0,1\right];$$

注意这里 F 必须是连续的，否则 $F\left(X\right)$ 的值不能覆盖所有 $\subseteq\left[0,1\right]$ 的区间。

引理 5.2（分位点变换）

令 $U \sim U(0,1)$ ，且 F 是任意密度函数，则 $X = F^{\leftarrow}(U) \sim F$ 。

证明：

$$P\left(F^{\leftarrow}(U) \le x\right) \underset{(GI5)}{=} P\left(U \le F(x)\right) = F(x), x \in R$$

注：概率变换和分位点变换是所有涉及 copulas 的应用的关键。它们使得我们能用 R^d 的概率分布产生 $[0,1]^d$ 的概率分布，用 $[0,1]^d$ 的概率分布得到 R^d 上的概率分布。

定理 5.1（Sklar 定理）

F 是一个 R^d 联合分布函数，其边际分布为 $F_1,\ldots,F_d$。则存在一个 copula C: $[0,1]^d \to [0,1]$，使得对所有在 $\bar{R}=[-\infty,\infty]$ 中的 $x_1,\ldots,x_d$，

$$F(x_1,\ldots,x_d)=C\left(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right) \tag{1}$$

成立。如果边际分布是 $F_1,\ldots,F_d$ 连续的，则 C 是唯一的；否则 C 由 $Ran\,F_1\times Ran\,F_2\times\ldots\times Ran\,F_d$ 唯一决定，其中 $Ran\,F_i=F_i\left(\bar{R}\right)$ 表示 F_i 的极差。

反过来，如果 C 是一个 copula 并且 $F_1,\ldots,F_d$ 是单变量分布函数，则（1）定义的函数 F 是一个边际分布为 $F_1,\ldots,F_d$ 的联合分布函数。

证明 1）只证明$\mathbf{F_1}, \dots, \mathbf{F_d}$是连续分布函数。设 X~F，定义$\mathrm{U_j} = F_j(X_j), j \in \{1, \dots, \mathrm{d}\}$,根据概率变化原理，$\mathrm{U_j} \sim U(0.1), j \in \{1, \dots, d\}$,因此 U 的分布函数 C 是 Copula。因为$\mathrm{F_j}$在$\mathrm{X_j}$的支撑集上递增，所以$\mathrm{X_j} = F_j^{\leftarrow}\left(F_j(X_j)\right) = F_j^{\leftarrow}(U_j), j \in \{1, \dots, d\}$。因此

$$
\begin{aligned}
F(t_1,\dots,t_n) &= \Pr(T_1 \le t_1,\dots,T_n \le t_n) \\
&= \Pr\left(F_1^{-1}(U_1) \le t_1,\dots,F_n^{-1}(U_n) \le t_n\right) \\
&= \Pr\left(U_1 \le F_1(t_1),\dots,U_n \le F_n(t_n)\right) \\
&= C\left(F_1(t_1),\dots,F_n(t_n)\right)
\end{aligned}
$$

2) For $\boldsymbol{U} \sim C$, define $\boldsymbol{X} = (F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$. Then

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(F_j^{\leftarrow}(U_j) \leq x_j \ \forall j) \underset{\text{(GI5)}}{=} \mathbb{P}(U_j \leq F_j(x_j) \ \forall j)$$

$$= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Therefore, F defined by (29) is a df (that of $\boldsymbol{X}$), with margins $F_1, \dots, F_d$ (obtained by the quantile transformation). $\square$

Sklar 意义在于研究分布模型时可以将一个联合分布分解为一系列边际分布和一个 Copula 函数的组合,而这个 Copula 函数则描述了各个变量间的相关性。也就是说,Copula 函数事实上是一类将联合分布函数与其对应的边缘分布函数连接在一起的结构,因而时常也有人称其为连接函数。

定义 5.3 (分布函数的 copula).如果随机向量 X 的联合分布函数为 F，边际分布 $F_1,\ldots,F_d$ 连续，则 F（或者 X）的 copula 是 $\left(F_1\left(X_1\right),\ldots,F_d\left(X_d\right)\right)$ 的分布函数 C。

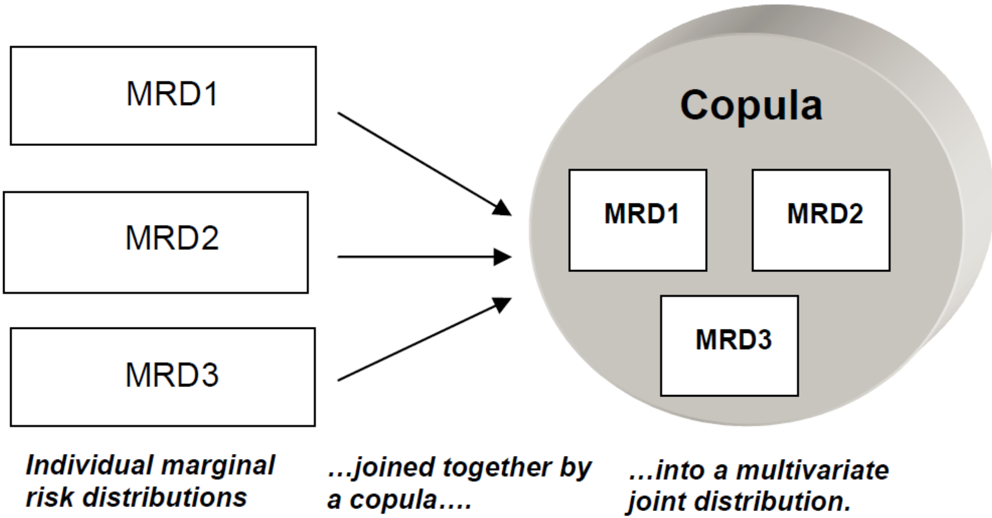


图 5.2 Sklar 定理图解

Sklar 定理的可视化（1）

左边：来自分布$\left(X_1, X_2\right) \sim N_2\left(0, P\right)$的样本量为 1000 的样本的散点图，其中

$P=\begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$。我们标出了 3 个点，分别是 A，B，C。

右边：相应的高斯 copula 的散点图（在应用了正态分布$N\left(0,1\right)$的密度函数Φ之后）。

注意 A，B，C 怎样变化。

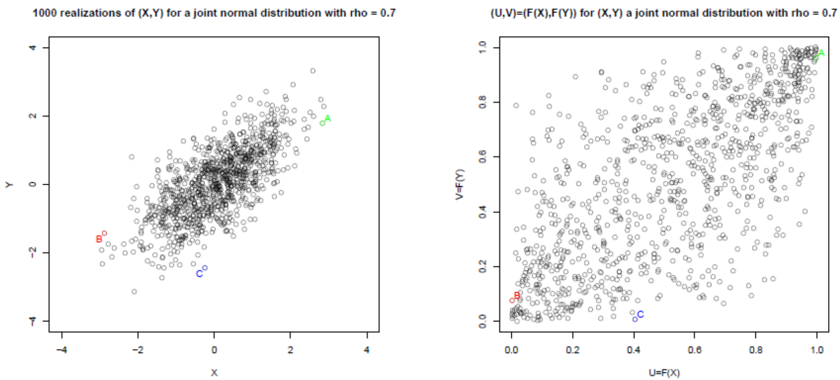


图 5.3 Sklar 定理的可视化化（1）

Sklar 定理的可视化部分(2)

左边：与之前相同的高斯 copula 散点图。指数分布 Exp(2)是边际分布，即

$$\left(F_j^{-1}(u) = -\log(1-u)/2,\ j \in \{1,2\}\right)$$

右边：相应的变换后的随机变量。注意 A，B，C 的变化。

<u>R 程序实现</u>

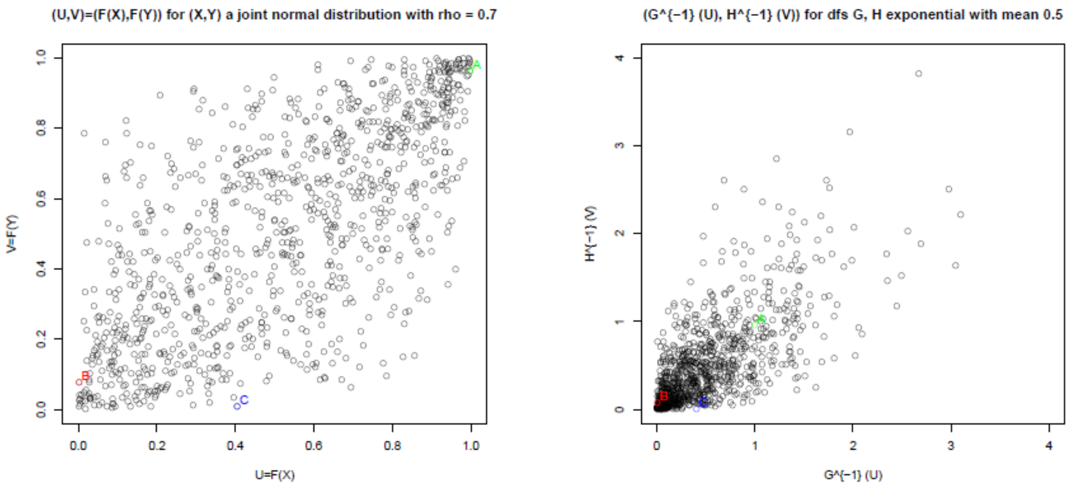


图 5.4 Sklar 定理的可视化（2）

当 X_i 的分布是离散分布时，对应的 Copula 的个数不是唯一的

例 1（二元贝努利的 copulas）设(X_1, X_2)服从二元贝努利分布，满足

$$P(X_1=0, X_2=0)=\frac{1}{8},\ P(X_1=1, X_2=1)=\frac{3}{8}$$
$$P(X_1=0, X_2=1)=\frac{2}{8},\ P(X_1=1, X_2=0)=\frac{2}{8}$$

显然，$P(X_1=0)=P(X_2=0)=\frac{3}{8}$以及$X_1$的边际分布$F_1$与$X_2$的边际分布$F_2$相同。由 Sklar 定理知，存在 copula C 使得$P(X_1\le x_1, X_2\le x_2)=C(P(X_1\le x_1), P(X_2\le x_2))$。对所有$x_1, x_2$以及部分。

由于$Ran\ F_1=Ran\ F_2=\left\{0,\frac{3}{8},1\right\}$，显然对 C 唯一的限制就是$C\left(\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8}$。任意满足这一条件的 copula 都是$(X_1, X_2)$的一个 copula。满足这一条件的 copulas 有无穷多个。

5.1.2 Copula 的性质

- **定理 5.2（不变原理）**设 $X \sim F$，边际分布为 $F_1,\ldots,F_d$ 且连续，copula 为 C。如果变换 T_j 在 $ran\ X_j$ 上递增，即 $T_j\uparrow$，则 $\left(T_1\left(X_1\right),\ldots,T_d\left(X_d\right)\right)$ 的 copula 也为 C。

简单证明：

$$
\begin{aligned}
F_{T_j(X_j)}(x) &= \mathbb{P}(T_j(X_j) \le x) = \mathbb{P}(T_j(X_j) < x) \underset{\text{(GI5)}}{=} \mathbb{P}(X_j < T_j^{\leftarrow}(x)) \\
&= \mathbb{P}(X_j \le T_j^{\leftarrow}(x)) = F_j(T_j^{\leftarrow}(x)), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

This implies that $\mathbb{P}(F_{T_j(X_j)}(T_j(X_j)) \le u_j\,\forall\, j)$ equals

$$
\mathbb{P}(F_j(T_j^{\leftarrow}(T_j(X_j))) \le u_j\,\forall\, j) \underset{\text{(GI3)}}{=} \mathbb{P}(F_j(X_j) \le u_j\,\forall\, j) \underset{\text{“only if”}}{\overset{\text{L.7.6}}{=}} C(\boldsymbol{u}).
$$

Sklar 定理和不变性原理的意义

1) Sklar 定理的部分 1)使得任意多元分布函数可以被分解为它的边际密度与 copula。这与 copula 的不变性共同使得通过 $U=\left(F_1\left(X_1\right),\ldots,F_d\left(X_d\right)\right)$ 而不是 $X=\left(X_1,\ldots,X_d\right)$ 来研究相关性成为可能。
2) 部分 2)允许为特定应用构造灵活的多元分布。

因此，Copula 是描述相关性的一种有用的工具

与其他的基于联合分布函数的建模方法相比，Copula 函数模型应用起来更为灵活：

- 首先，Copula 函数模型不限制边缘分布的选择，由于 Copula 函数模型有很多分布族，因此，当正态分布假设被拒绝时，还可以选择不同的边缘分布和 Copula 函数进行更好地拟合。
- 其次，Copula 模型能将随机变量间的相关程度和相关模式有机的结合在一起，不仅可以得到度量相关程度的相关参数，而且可以得到描述相关模式的具体的 Copula 函数，可以更全面的刻画随机向量间的相关关系。

定理 5.3（Fr’echet-Hoffding 边界）

令 $W(u)=\max\left\{\sum_{j=1}^{d}u_j-d+1,0\right\}$ 以及 $M(u)=\min_{1\le j\le d}\left\{u_j\right\}$ ，

1) 对任意 d 维 copula C，$W(u)\le C(u)\le M(u),\quad u\in[0,1]^d$
2) W 是一个 copula 当且仅当 $d=2$
3) 对所有 $d\ge 2$，M 是一个 copula。

证明：

对所有 i，$\bigcap_{1\le j\le d}\left\{U_j\le u_j\right\}\subset\left\{U_i\le u_i\right\}$ ，可以推出第二个不等式。

第一个不等式的证明如下：

$$C(u)=P\left(\bigcap_{1\le i\le d}\{U_i\le u_i\}\right)=1-P\left(\bigcup_{1\le i\le d}\{U_i>u_i\}\right)$$

$$\ge 1-\sum_{i=1}^{d}P(U_i>u_i)=1-d+\sum_{i=1}^{d}u_i$$

对 $U\sim U(0,1)$，容易证明

$(U,\ldots,U)\sim M$

$$\left(U,1-U\right)\sim W$$

注:Frechet-Hoffding 边界相当于完全相关（W 是完全负相关， M 是完全正相关）。Frechet-Hoffding 边界可以引出分布函数 F 的边界，

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{d}F_j\left(x_j\right)-d+1,0\right\}\leq F\left(x\right)\leq\min_{1\leq j\leq d}\left\{F_j\left(x_j\right)\right\}$$

。

我们之后会由此推出相关系数的边界。

5.1.3 常见 Copula

1、基础 copula

独立 copula: $\prod(u)=\prod_{j=1}^{d}u_j$ 是独立 copula

由于 $C\left(F_1\left(x_1\right),\ldots,F_d\left(x_d\right)\right)\underset{Sklar}{=}F\left(x\right)\underset{ind.}{=}\prod_{j=1}^{d}F_j\left(x_j\right)$，当且仅当 $C\left(u\right)=\Pi(u)$（用 $F_j^{\leftarrow}\left(u_j\right)$ 代替 x_j 并应用公式（1）。

因此， $X_1,\ldots,X_d$ 是相互独立的当且仅当它们的 copula 是 Π；分布函数为

$c\left(u\right)=1, u\in\left[0,1\right]^d$ 。

反单调 copula: *countermonotonicity copula*

Frechet-Hoffding 边界 W 是反单调 copula。它是$(U,1-U)$的分布函数。

如果 X_1,X_2 是完全负相关（X_2 几乎处处是 X_1 的严格减函数），它们的 copula 为 W。

同单调 copula: comonotonicity copula

Frechet-Hoffding 边界 M 是同单调 copula。它是$(U,\ldots,U)$的分布函数。

如果 $X_1,\ldots X_d$ 是完全正相关 perfectly positively dependent,即 $X_2,\ldots,X_{d-1}$ 几乎处处是 X_1 的严格增函数），它们的 copula 为 M。

定义 5.4（同单调**(comonotonicity)**）

随机变量 $X_1,\ldots X_d$ 是同单调的，如果它们满足 Frechet 上边界

$$M(u_1,\ldots,u_d)=\min\{u_1,\ldots,u_d\}。$$

命题 5.1： $X_1,\ldots X_d$ **是同单调的当且仅当存在随机变量 Z 和递增函数** $v_1,\ldots,v_d$ **满足**

$$\left(X_1,\ldots,X_d\right)\overset{d}{=}\left(v_1\left(Z\right),\ldots,v_d\left(Z\right)\right) \qquad \textbf{(3)}$$

命题 5.2： $X_1,\ldots X_d$ **是有连续分布函数的随机变量**。它们是同单调的当且仅当对任意一对$\left(i,j\right)$，存在递增变换T_{ji}使得$X_j=T_{ji}\left(X_i\right)$几乎处处成立。

命题 5.2 的证明：

根据定义 5.2 知， $X_1,\ldots X_d$ 是同单调的。令 U 是任意服从均匀分布的随机变量， F 是 $X_1,\ldots X_d$ 的联合分布函数 $F_1,\ldots,F_d$ ，是 $X_1,\ldots X_d$ 的边际函数。

由（1）知对任意 $U \sim U(0,1)$

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\ldots,x_d) &= \min\left\{F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right\} \\
&= P\left(U \le \min\left\{F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right\}\right) \\
&= P\left(U \le F_1(x_1),\ldots,U \le F_d(x_d)\right) \\
&= P\left(F_1^{\leftarrow}(U) \le x_1,\ldots,F_d^{\leftarrow}(U) \le x_d\right)
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式使用了命题 A.3(iv)。它满足

$$
(X_1,\ldots,X_d) \overset{d}{=} \left(F_1^{\leftarrow}(U),\ldots,F_d^{\leftarrow}(U)\right), \tag{4}
$$

反过来，如果（2）成立，则

$$
F(x_1,\ldots,x_d) = P\left(v_1(Z) \le x_1,\ldots,v_d(Z) \le x_d\right) = P\left(Z \in A_1,\ldots,Z \in A_d\right)
$$

其中，A_i 是一个类似于 $(-\infty, k_i]$ 或者 $(-\infty, k_i)$ 的区间，从而一个区间 A_i 是所有其他区间的子区间。因此

$$F(x_1,\dots,x_d)=\min\{P(Z\in A_1),\dots,P(Z\in A_d)\}=\min\{F_1(x_1),\dots,F_d(x_d)\}$$

同单调性得证。

.

定义 5.5（反单调性） 随机变量 X_1 和 X_2 是反单调的，如果它们满足 Frechet 下边界

$W(u_1,u_2)=\max\{u_1+u_2-1,0\}$。

命题 5.3 X_1 和 X_2 是反单调的当且仅当对部分随机变量 Z 和增函数 v_1，减函数 v_2（反之亦然）满足 $(X_1,X_2)\overset{d}{=}(v_1(Z),v_2(Z))$

证明自行完成。

2、隐性 copula

（1）高斯 Copula

如果 $X \sim N_d(0,P)$ 是一个高斯随机向量，则它的 copula 就是高斯 copula。标准化边际数量：

$$\begin{aligned} C_P^{Ga}(u) &= P\left(\Phi\left(X_1\right) \le u_1, \dots, \Phi\left(X_d\right) \le u_d\right) \\ &= \Phi_P\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right), \dots, \Phi^{-1}\left(u_d\right)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

因此，高斯 copula 由协方差矩阵决定.
高斯 copula 没有简单的解析表达式,，它可以通过对 X 的分布函数积分得到。

$$C_\rho^{Ga}(u_1,u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\left(1-\rho^2\right)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-\left(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2\right)}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} ds_1 ds_2$$

根据 Sklar's 定理，$C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$的密度函数为

$$c(u)=\frac{f(F_1^{\leftarrow}(u_1),\ldots,F_d^{\leftarrow}(u_d))}{\prod_{j=1}^{d} f_j(F_j^{\leftarrow}(u_j))},\ u\in(0,1)^d$$

特别的，C_P^{Ga}的密度函数为

$$c_P^{Ga}(u)=\frac{1}{\sqrt{\det P}}\exp\left(-\frac{1}{2}x'(P^{-1}-I_d)x\right)$$

其中$x=(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_d))$

独立和同调是高斯 copula 的特殊情况.

- 如果 $P=I_d$， $C(u)=F(F$ 得到独立 copula；
- 如果 $P=J_d$， d 阶矩阵中每个元素都是 1，我们得到同单调 copula；
- 如果 $d=2$， $\rho=P_{12}=-1$，则高斯 copula 与反单调 copula 相同。
- ρ 表示相关程度。

(2)*t copulas*

考虑 $X \sim t_d(\nu,0,P)$。T copula 表示为

$$\begin{aligned} C_{\nu,P}^t(u) &= P\left(t_\nu(X_1) \le u_1, \ldots, t_\nu(X_d) \le u_d\right) \\ &= t_{\nu,P}\left(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)\right) \end{aligned}$$

其中 $t_{\nu,P}$ 是 $t_d(\nu,0,P)$ 的密度函数，t_ν 是自由度为 ν 的单变量 t 分布的密度函数。

Sklar 定理 $\Rightarrow C_{\nu,P}^t$ 的密度函数为

$$c_{\nu,P}^t(u) = \frac{\Gamma\left((\nu+d)/2\right)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\det P}}\left(\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma\left((\nu+1)/2\right)}\right)^d \frac{\left(1+x'P^{-1}x/\nu\right)^{-(\nu+d)/2}}{\prod_{j=1}^d \left(1+x_j^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2}}$$

for $x = \left(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)\right)$ 。

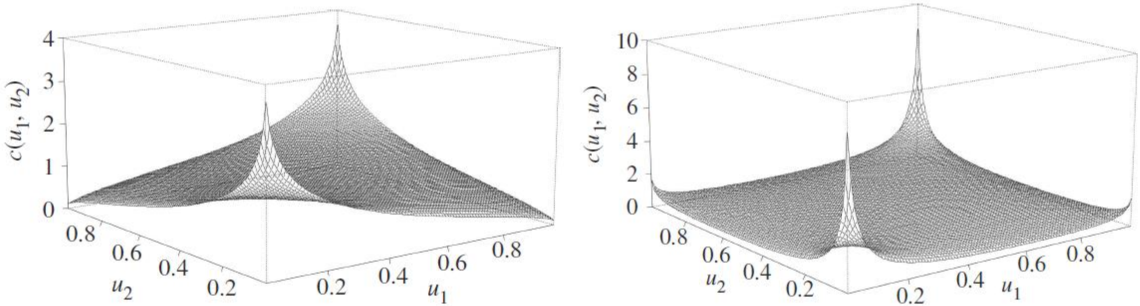
特例：

- $P = J_d = 11'$ 则 $C = M$，同单调。

- 但是，如果 $P = I_d$，则 $C \neq \prod$ ，即 C 不是独立。（除非 $\nu = \infty$，此时 $C_{\nu,P}^{t} = C_{P}^{Ga}$）。

- 如果 $d = 2$， $\rho = P_{12} = -1$，则 $C = W$ 。

$C_{\rho=0.3}^{Ga}$（左边）和 $C_{4,\rho=0.3}^{t}(u)$（右边）的密度函数透视图。



3、显性 copula

阿基米德 Archimedean copulas

$$C(u)=\psi\left(\psi^{-1}(u_1)+\ldots+\psi^{-1}(u_d)\right),\quad u\in[0,1]^d$$

其中 Archimedean 生成算子 $\psi:[0,\infty)\to[0,1]$ 在 $[0,\inf\{t:\psi(t)=0\}]$ 上$\downarrow$，且满足

$\psi(0)=1,\psi(\infty)=\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$；令 $\psi^{-1}(0)=\inf\{t:\psi(t)=0\}$。所有生存算子的集合

用 Ψ 来表示。如果 $\psi(t)>0, t\in[0,\infty)$，则称 ψ 严格。

阿基米德 Archimedean copulas 的例子

- ***Gumbel copula***

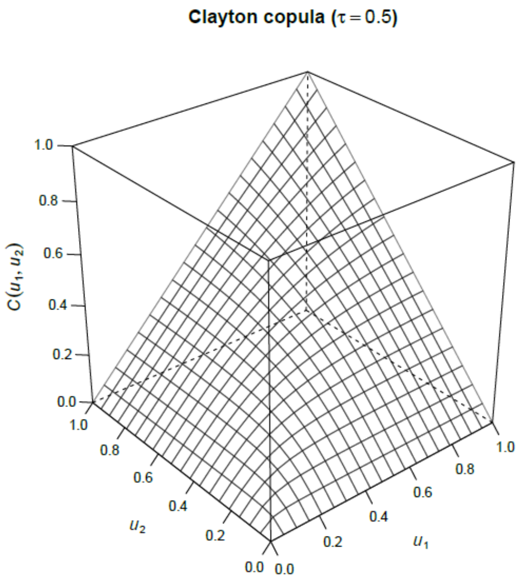
$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2)=\exp\left\{-\left((-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right\},\quad 1\le\theta\le\infty$$

  - 如果$\theta=1$，得到的特例是一个独立 copula。
  - 当$\theta\to\infty$时，C_θ^{Gu}的极限是二维同单调 copula。

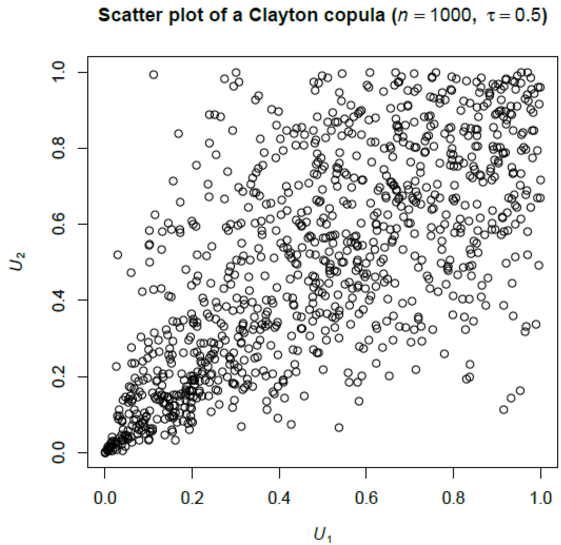
- ***Clayton copula:***

$$C_\theta^{C1}(u_1,u_2)=\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{-1/\theta},\quad 0<\theta<\infty$$

当$\theta\to 0$时我们得到独立 copula，当$\theta\to\infty$时我们得到二维同单调 copula。



左边：二元 Clayton copula 图



右边：相应的散点图（样本量 $n = 1000$ ）

图 5.5 Clayton copula

表 5.1 最常用的单参数 Archimedean Copulas

Family	θ	$\psi(t)$	$V \sim F = LS^{-1}(\psi)$
A	$[0,1)$	$(1-\theta)/(\exp(t)-\theta)$	$Geo(1-\theta)$
Clayton	$(0,\infty)$	$(1+t)^{-1/\theta}$	$\Gamma(1/\theta,1)$
Frank	$(0,\infty)$	$-\log\left(1-\left(1-e^{-\theta}\right)\exp(-t)\right)/\theta$	$Log\left(1-e^{-\theta}\right)$
Gumbel	$[1,\infty)$	$\exp\left(-t^{1/\theta}\right)$	$S\left(1/\theta,1,\cos^{\theta}\left(\pi/(2\theta)\right),I_{\{\theta-1\}};1\right)$
Joe	$[1,\infty)$	$1-\left(1-\exp(-t)\right)^{1/\theta}$	$Sibuya(1/\theta)$

二元 Archimedean copulas 的充分必要条件

回忆一个（ Archimedean）构造函数ψ是$\psi:[0,\infty)\to\left[0,1\right]$的映射，在区间$\left[0,\inf\left\{t:\psi\left(t\right)=0\right\}\right]$上是↓，且满足$\psi\left(0\right)=1,\psi\left(\infty\right)=\lim_{t\to\infty}\psi\left(t\right)=0$；所有构造函数的集合用$\Psi$来表示。

定理 5.4 *对*$\psi\in\Psi,C\left(u_1,u_2\right)=\psi\left(\psi^{-1}\left(u_1\right)+\psi^{=1}\left(u_2\right)\right)$*是一个 copula 当且仅当*$\psi$ *是凸函数。*

（3）多元 Archimedean copulas

定义 5.6 称ψ是完全单调的（c.m.），如果对所有$t\in(0,\infty)$和$k\in N_0$，都有

$(-1)^k\psi^{(k)}(t)\geq 0$成立。完全单调的构造函数的集合$\Psi_0$用来表示。

定理 5.5（Kimberling(1974)

如果$\psi\in\Psi$，对$\forall d$，$C(u)=\psi\left(\sum_{j=1}^{d}\psi^{-1}(u_j)\right)$是一个 copula，当且仅当$\psi\in\Psi_\infty$。

Bernstein 定理涵盖了所有$\psi\in\Psi_\infty$。

定理 5.6（Bernstein(1928)）

$\psi(0)=1$，ψ完全单调，当且仅当$\psi(t)=E(\exp(-tV))$，其中$V\sim G$，$V\geq 0$，且$G(0)=0$。

我们因此使用$\psi=\hat{G}$这一概念，并且将所有满足$\psi\in\Psi_\infty$的显性 copulas 称为 LT-Archimedean copulas。

命题 5.4（随机表达，相关性质）

令$\psi\in\Psi_\infty$，满足$V\sim G$，$\hat{G}=\psi$；令$E_1,\dots,E_d\underset{ind.}{\sim}Exp(1)$与 V 独立。则

1) $X=\left(\frac{E_1}{V},\dots,\frac{E_d}{V}\right)$的生存 copula 是 Archimedean (with ψ).。

2) 假设 V 满足$P\left(U_j\le u\,|\,V=v\right)=\exp\left(-v\psi^{-1}(u)\right)$，则$U=\left(\psi(X_1),\dots,\psi(X_d)\right)\sim C$ 和 U_j是条件独立的。

证明：

X 的联合生存函数为

$$\bar{F}(x)=P\left(X_j>x_j,\ \forall j\right)=\int_0^\infty P\left(E_j/V>x_j,\forall j\,|\,V=v\right)dG(v)$$

$$=\int_0^\infty P\left(E_j>vx_j,\forall j\right)dG(v)=\int_0^\infty\prod_{j=1}^{d}\exp\left(-vx_j\right)dG(v)$$

$$=\int_0^\infty\exp\left(-v\sum_{j=1}^{d}x_j\right)dG(v)=\psi\left(\sum_{j=1}^{d}x_j\right)$$

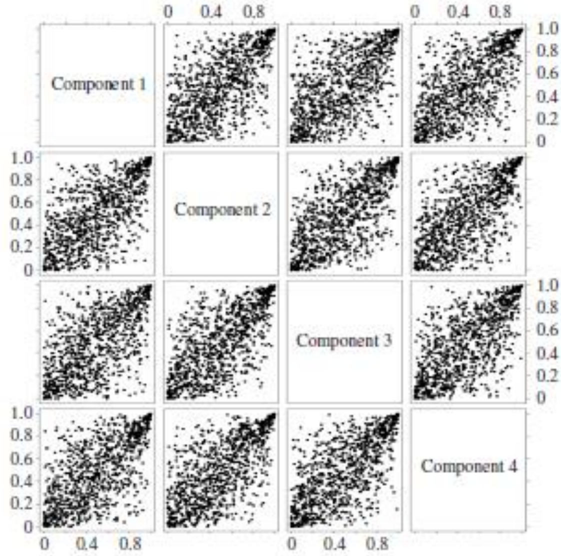
由命题 5.4 可以得到 *Archimedean* Copula 的模拟算法（Marshall and Olkin(1988)）

（1） 根据分布 G，产生随机变量 V 的模拟值

（2） 模拟产生 d 个参数等于 1 的指数分布的随机数 $E_1,\cdots,E_d$ ，这些随机数与 V 独立。

（3） 返回 $U=(\psi(E_1/V),\cdots,\psi(E_n/V))$

1000 samples of a 4-dim. Gumbel copula ($\rho_\tau = 0.5$; $\lambda_u \approx 0.5858$)



- Various non-exchangeable extensions to Archimedean copulas exist.
- For fixed d, c.m. can be relaxed to d-monotonicity; see McNeil and Nešlehová (2009).

Archimedean copulas copulas 的优缺点：

优点：

- 显性表达式（如果ψ^{-1}已知）
- 在计算中很有用：其形状可以用ψ来表示
- 多种例子的分布密度已知
- 通常来说，抽样简便
- 不一定径向对称

缺点：

- 所有同维边际分布相同（对称或者可交换）
- 经常仅使用很少的参数（还可以得到一些推广，但仍然少于$d(d-2)/2$）

4、Meta-C 分布族

meta-Gaussian 分别族:具有 Gauss copula C_P^{ga}，边际分布为任意分布.

推广：

- a meta-tv 分布具有 t copula，边际分布为任意分布
- a meta-Clayton 具有 Clayton copula，边际分布为任意分布.

5.1.4 模拟 copula 函数

由于 copula 的构造是通过 Sklar 定理的，具体的 copulas 可以通过不变引理来模拟

算法（模拟具体 copulas）

模拟 $X \sim F$，其中 F 是密度函数，边际分布的密度函数 $F_1,\dots,F_d$ 连续。

返回 $U = \left(F_1\left(X_1\right),\dots,F_d\left(X_d\right)\right)$（概率变换）

1、 模拟高斯 copulas C_P^{Ga} ：

(1)模拟 $X \sim N_d\left(0,P\right)\left(X \overset{d}{=} AZ \text{ for } AA' = P, Z \sim N_d\left(0, I_d\right)\right)$

(2)返回 $U = \left(\Phi\left(X_1\right),\ldots,\Phi\left(X_d\right)\right)$.

2、 模拟 t_ν copulas $C_{\nu,P}^{t}$:

(1)模拟 $X \sim t_d\left(\nu,0,P\right)\left(X \overset{d}{=} \sqrt{W}AZ \ \ for\, W = \dfrac{1}{V}, V \sim \Gamma\left(\dfrac{\nu}{2},\dfrac{\nu}{2}\right)\right)$

(2)返回 $U = \left(t_\nu\left(X_1\right),\ldots,t_\nu\left(X_d\right)\right)$

3、 模拟 阿基米德 couplas

Algorithm 7.32 (Marshall and Olkin (1988))

1) Sample $V \sim G$ (df corresponding to ψ).
2) Sample $E_1, \ldots, E_d \overset{\text{ind.}}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$ independently of V.
3) Return $U = (\psi(E_1/V), \ldots, \psi(E_d/V))$ (conditional independence).

4、 模拟 meta 分布

Meta-C 分布可以通过 Sklar 定理部分 2)模拟

算法 7.11（模拟 meta-C 模型）

（1）模拟 $U \sim C$

（2）返回 $X = \left(F_1^{\leftarrow}(U_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(U_d)\right)$（分位点变换）

4、一般 copula C 抽样算法

对一个一般的 copula C（没有更多的信息），唯一已知的抽样算法是条件分布方法。参考 Embrechts et al. (2003) and Hofert (2010, p.41).

定理 5.7（条件分布方法）

如果 C 是一个 d 维 copula 并且满足 $U' \sim U(0,1)^d$ ***，则*** $U \sim C$ ***，其中***

$$U_1 = U_1',$$
$$U_2 = C_{2|1}^{\leftarrow}\left(U_2' \mid U_1\right),$$
$$U_3 = C_{3|1,2}^{\leftarrow}\left(U_3' \mid U_1, U_2\right),$$
$$\vdots$$
$$U_d = C_{d|1,\ldots,d-1}^{\leftarrow}\left(U_d' \mid U_1, \ldots, U_{d-1}\right)$$

其中

$$C_{j|1,\ldots,j-1}(u_j \mid u_1,\cdots,u_{j-1}) = \frac{D_{j-1,\ldots,1}C^{(1,\cdots,j)}(u_1,\cdots,u_j)}{D_{j-1,\ldots,1}C^{(1,\cdots,j-1)}(u_1,\cdots,u_{j-1})}$$ ，这里

$C^{(1,\cdots,j)}(u_1,\cdots,u_j)=C(u_1,\cdots,u_j,1,\cdots,1)$ ，$D_{j-1,\cdots,1}$ 表示对 $u_1,\cdots,u_{j-1}$ 的微分算子。

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{D_1C(u_1,u_2)}{1} = D_1C(u_1,u_2)$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{C(u_1+h,u_2)-C(u_1,u_2)}{h}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_1 \le u_1+h, U_2 \le u_2) - \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2)}{h}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_2 \le u_2, u_1 < U_1 \le u_1+h)}{\mathbb{P}(u_1 < U_1 \le u_1+h)} = \lim_{h\downarrow 0} \mathbb{P}(U_2 \le u_2 | u_1 < U_1 \le u_1+h).$$

5.2 相关性

5.2.1 相关性测度 Dependence Measures

相关性在金融领域中非常重要,描述的是变量之间的相互关系,常见的相关性有

- 完全相关
- 线性相关
- 秩相关
- 尾相关

5.2.1 完全相关 Perfect dependence

如果(X_1, X_2)的 copula 为 W，则X_1, X_2是反单调的。

如果$(X_1,..., X_d)$的 copula 为 M，则$X_1,..., X_d$是同单调的。

命题 5.5（完全相关）

1) $T(x)=F_2^{\leftarrow}(1-F_1(x))$递减（反单调）对$X_2=T(X_1)$几乎处处成立，当且仅当

   $C(u_1,u_2)=W(u_1,u_2), u_1,u_2 \in [0,1]$

2) $T_j(x)=F_j^{\leftarrow}(F_1(x)),\ j \in \{2,...,d\}$递增（同单调）对$X_j=T_j(X_1)$几乎处处成立，

   当且仅当$C(u)=M(u), u \in [0,1]^d$

5.2.2 Linear Correlation 线性相关

linear or *Pearson's 相关系数*

$$\rho_{ij}=\rho\left(X_i,X_j\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(X_i\right)\operatorname{var}\left(X_j\right)}}$$

命题 5.6 （Hӧffding's formula 公式）

设 $X_j\sim F_j, j\in\{1,2\}$ 是两个随机变量， $E(X_j^2)<\infty$ （ $j\in\{1,2\}$ ），联合分布 F， 则

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(F(x_1,x_2)-F_1(x_1)F_2(x_2)dx_1dx_2$$

线性相关性的经典性质

（1） X_1 和 X_2 是两个随机变量，满足 $E\left(X_j^2\right)<\infty,\ j\in\{1,2\}$

注意 ρ 取决于边际分布！特别的，二阶矩必须存在（二阶矩不存在的的例子，比如

$X_1, X_2 \overset{ind.}{\sim} F(x) = 1 - x^{-3}$）

（2）$|\rho| \le 1$。$|\rho| = 1$ 的含义：$X_2 = \alpha + \beta X_1$

（3）如果 X_1 和 X_2 是相互独立的，则 $\rho = 0$。然而，反过来未必成立；见例 7.17。

（4）相关性 ρ 在 $ran\ X_1 \times ran\ X_2$ 严格增加的线性变换下是不变的，但在非线性严格增加的变换下不是不变的 $\rho(T(X_1), T(X_2)) \ne \rho(X_1, X_2)$。比如 $(X_1, X_2) \sim N_2(0, P)$，满足 $P_{12} = \rho$。尽管 $\rho(X_1, X_2) = \rho$，但是 $\rho(F_1(X_1), F_2(X_2)) = \frac{6}{\pi}\arcsin(\rho/2)$。

（5）因为皮尔森相关性系数是协方差与标准差的比值，所以它对数据是有比较高的要求的：

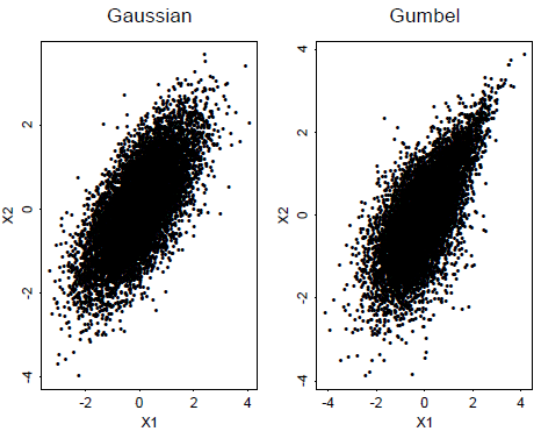
第一， 实验数据通常假设是成对的来自于正态分布的总体。通常还会用 t 检验之类的方法来进行皮尔森相关性系数检验，而 t 检验是基于数据呈正态分布的假设的。

第二， 实验数据之间的差距不能太大，或者说皮尔森相关性系数受异常值的影响比较大。

线性相关的 3 个谬误 (Correlation fallacies)（自学）

谬误 1： F_1, F_2 **和** ρ **可以唯一决定** F

对二元椭圆分布来说是对的，但是广义上来说是错的。下面的样本都有服从正态分布 $N(0,1)$ *的边际分布和相关系数* $\rho = 0.7$ *，但是却来自不同的 copula 模型：*



例3（不相关⇏独立）

- 考虑以下两个风险：

$X_1 = Z$ （国家A的收益和损失）

$X_2 = ZV$ （国家B的收益和损失）

其中V，Z相互独立，满足$Z \sim N(0,1)$和$P(V=-1)=P(V=1)=1/2$。则$X_2 \sim N(0,1)$，且$\rho(X_1,X_2)=\mathrm{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)\underset{ind.}{=}E(V)E(Z^2)=0$，但是$X_1$和$X_2$不是相互独立的（事实上，V在反单调和同单调中相互转化）

- 考虑$(X_1^{'},X_2^{'}) \sim N_2(0,I_2)$。$(X_1^{'},X_2^{'})$和$(X_1,X_2)$都有服从正态分布$N(0,1)$的边际分布和$\rho=0$，但是$(X_1^{'},X_2^{'})$的copula是$\Pi$，而$(X_1,X_2)$的copula是凸组合

  $C(u)=\lambda M(u)+(1-\lambda)W(u)$，其中$\lambda=0.5$。

谬误 2：在给定 F_1, F_2 的情况下，ρ 可能取到区间[-1，1]中的任意值

(X_1, X_2) *是椭圆分布，满足* $E(R^2) < \infty$ *（corr* $X = P$ *）是成立的，但是广义上来说是错误的：*

- *如果* F_1 *和* F_2 *不是相同类型（非线性），* $\rho(X_1, X_2)$ *取不到* ***1*** *（回忆一下，* $|\rho| = 1$ *当且仅当存在常量* $a \in R \setminus \{0\}, b \in R$ *使得* $X_2 = aX_1 + b$ *几乎处处成立）。*

- *那* ρ *能取到什么范围内？* ***Hoffding*** *公式*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(C\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right) - F_1(x_1)F_2(x_2)\right)dx_1 dx_2$$

可以推断出 ρ *的可取边界，*

$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ *（* $\rho_{\min}$ *由* $C = W$ *得出，* $\rho_{\max}$ *由* $C = M$ *得出）。*

定理 5.8（相关系数的取值范围） (X_1, X_2) 是一个随机向量，其边际分布函数为 F_1 和 F_2，且边际分布方差有限，联合分布未知；另外假设 $\mathrm{var}(X_1) > 0$ 和 $\mathrm{var}(X_2) > 0$。则下列论断成立。

(1) 相关系数的可取范围是一个闭区间 $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$，且 $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$。

(2) 相关系数取到最小 $\rho = \rho_{\min}$，当且仅当 X_1 和 X_2 是反单调的。相关系数取到最大 $\rho = \rho_{\max}$，当且仅当 X_1 和 X_2 是同单调的。

(3) $\rho_{\min} = -1$ 当且仅当 X_1 和 $-X_2$ 属于相同类型，$\rho_{\max} = 1$ 当且仅当 X_1 和 X_2 属于相同类型。

例 4（对数正态随机变量相关系数的取值范围）

$\ln X_1 \sim N(0,1)$ *及* $\ln X_2 \sim N\left(0,\sigma^2\right)$

当 $\sigma \neq 1$ *时，对数正态随机变量* X_1 *和* X_2 *不属于相同类型（尽管* $\ln X_1$ *和* $\ln X_2$ *属于相同类型），因此由定理 5.8(3)知，* $\rho_{\max} < 1$ *。随机变量* X_1 *和* $-X_2$ *也不属于相同类型，则* $\rho_{\min} > -1$ *。*

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)\left(e^{\sigma^2}-1\right)}}, \quad \rho_{\max} = \frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)\left(e^{\sigma^2}-1\right)}}$$

具体地，假设 $X_1 \sim LN(0,1)$ 及 $X_2 \sim LN(0,\sigma^2)$。下图表示 $\rho_{\min}$ 和 $\rho_{\max}$ 随 σ 的变化而变化：

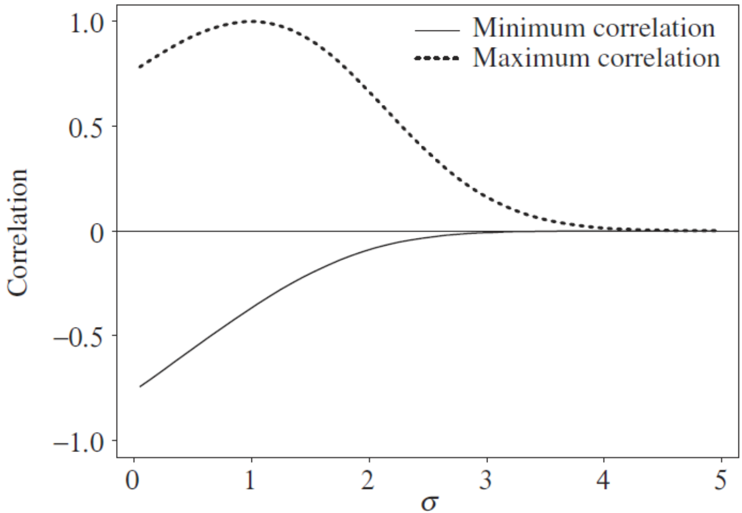
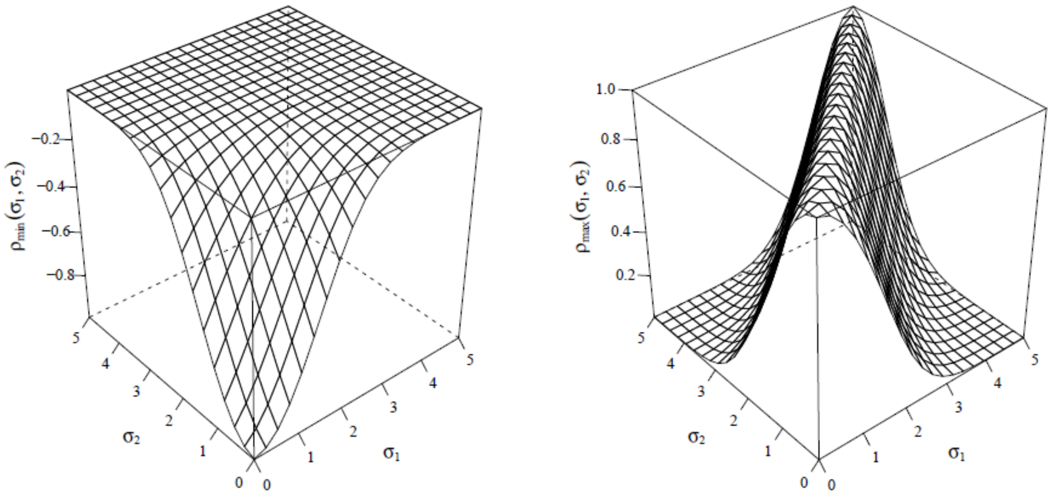


图 5.6 随着 σ 的增加，区间的两侧边界都快速趋向 0。

同单调的随机变量可以取到相当小的相关系数。

例 5（边际分布为 $LN\left(0,\sigma_j^2\right)$ 的模型的相关系数的可取边界）

假设 $X_j \sim LN\left(0,\sigma_j^2\right),\ j\in\{1,2\}$。可以证明最小的相关系数（左）和最大的相关系数（右）如下所示：



当 $\sigma_1^2=1,\sigma_2^2=16$ 时，相关系数 $\rho\in[-0.0003,0.0137]$！

谬误3：ρ 取到最大（也就是$C=M$）$\Rightarrow VaR_{\alpha}\left(X_1+X_2\right)$取到最大

当$\left(X_1,X_2\right)$服从椭圆分布时该论断正确。由于相关系数最大能取到1 可以推断出是同单调的，因此满足可加性；

任意超可加性的例子$VaR_{\alpha}\left(X_1+X_2\right)>VaR_{\alpha}\left(X_1\right)+VaR_{\alpha}\left(X_2\right)$可以用来作反例，只有在同单调（相关系数最大）时不等式右手边才能等于$VaR_{\alpha}\left(X_1+X_2\right)$。

除了线性相关外,变量之就可以有许多不同形式的关联关系

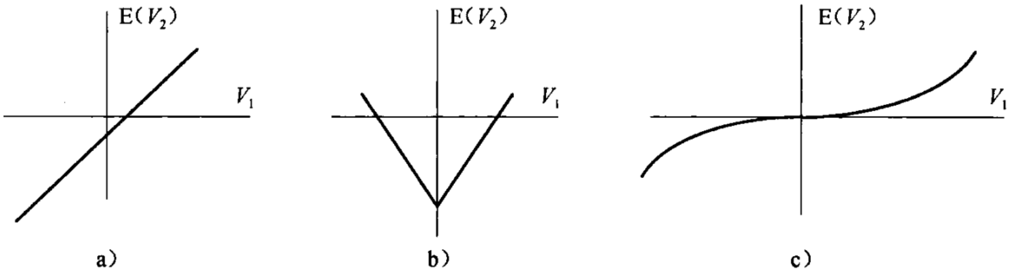


图 5.7 V1 与 V2 的相互依赖关系

5.2.3 Rank Correlation 秩相关

1、Kendall 相关

定义 5.7（***Kendall's tau*** 等级相关）

假设 $X_j \sim F_j$，$j \in \{1,2\}$，且 F_j 连续。$\left(X_1^{'}, X_2^{'}\right)$ 是 $\left(X_1, X_2\right)$ 的一个独立副本。Kendall's tau 定义为：

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= E\left(sign\left(\left(X_1 - X_1^{'}\right)\left(X_2 - X_2^{'}\right)\right)\right) \\ &= P\left(\left(X_1 - X_1^{'}\right)\left(X_2 - X_2^{'}\right) > 0\right) - P\left(\left(X_1 - X_1^{'}\right)\left(X_2 - X_2^{'}\right) < 0\right)\end{aligned}$$

其中 $sign(x) = I_{(0,\infty)}(x) - I_{(-\infty,0)}(x)$（即 $x<0$ 时取-1，$x=0$ 时取 0，$x>0$ 时取 1）。

高维情形

$$\rho_\tau(\mathbf{X}) = \operatorname{cov}\left(sign\left(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\right)\right)$$

其中 $\tilde{X}$ 是 X 的一个独立副本。

Kendall 秩相关系数可以看作是二元随机向量同调性的度量。

- 如果 $(x_1-\tilde{x}_1)(x_2-\tilde{x}_2)>0$，则同调
- 如果 $(x_1-\tilde{x}_1)(x_2-\tilde{x}_2)<0$，则不同调

命题 5.7（秩相关系数的计算公式）

假设 $X_j \sim F_j$， $j\in\{1,2\}$ ，且 F_j 连续；copula 为 C。则

$$\rho_\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)\,dC(u_1,u_2)-1 = 4E\left(C(U_1,U_2)\right)-1$$

其中 $(U_1,U_2)\sim C$

证明略。

一般可以用样本的等级相关系数来估计 ρ_τ：

同样，用 $rank(X_{t,i})$ 来表示 $X_{1,i},\ldots,X_{n,i}$ 中 $X_{t,i}$ 的序（即在排序样本中的位置），可以计算 $\{(rank(X_{t,i}),rank(X_{t,j}))\}$ 的相关系数，进而得到 ***Kendall's rank correlation*** **样本相关系数**。

$$\frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{t=1}^{n}\left(rank(X_{t,i})-\frac{1}{2}(n+1)\right)\left(rank(X_{t,j})-\frac{1}{2}(n+1)\right)$$

$$\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\le t<s\le n}\mathrm{sign}\left((X_{t,i}-X_{s,i})(X_{t,j}-X_{s,j})\right)$$

$$r_n^{\tau}=\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}sign\left((X_{i_1 1}-X_{i_2 1})(X_{i_1 2}-X_{i_2 2})\right)$$

例 6：对某地区 12 个街道进行调查，并对经济发展水平和卫生水平按规定的标准打分，评定结果如下表，分析经济发展水平和卫生水平的相关程度。

区县编号	经济水平(x)	卫生水平(Y)
1	82	86

2	87	78
3	60	65
4	98	88
5	75	64
6	89	90
7	84	80
8	78	77
9	80	76
10	94	96
11	85	85
12	68	70

数据来源：《非参数统计：方法与应用》　易丹辉、董寒青　中国统计出版社　138 页例 7.7

手算：

将上表中经济发展水平的评分按从小到大的顺序排列，得到下表：

区县编号	经济水平(x)	卫生水平(Y)
3	60	65
12	68	70

5	75	64
8	78	77
9	80	76
1	82	86
7	84	80
11	85	85
2	87	78
6	89	90
10	94	96
4	98	88

计算卫生水平的一致对数目：

$$\mathrm{U}=10+9+9+7+7+3+4+3+3+1=56$$

Kendall 秩相关系数：

$$T=\frac{4\times 56}{12\times(12-1)}-1=0.6970$$

$$r_n^{\tau}=\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\le i_1\le i_2\le n} sign\left(\left(X_{i_1 1}-X_{i_2 1}\right)\left(X_{i_1 2}-X_{i_2 2}\right)\right)$$

R 程序计算：

```
> x=c(82,87,60,98,75,89,84,78,80,94,85,68)
> y=c(86,78,65,88,64,90,80,77,76,96,85,70)
> cor.test(x,y,meth="kendall")
```

2、Spearman’s rho 相关系数

定义 5.8（spearman 相关系数）

随机向量 X_1 和 X_2，其边际分布函数分别为 F_1 和 F_2，spearman 相关系数用下式来表示：

$$\rho_S\left(X_1, X_2\right)=\rho\left(F_1\left(X_1\right), F_2\left(X_2\right)\right).$$

对于连续随机变量， Spearman 相关系数是其对应的 Copula 的线性相关系数。

命题 5.8（spearman 相关系数的公式）

假设 $X_j \sim F_j$ ， $j \in\{1,2\}$ ，且 F_j 连续；copula 为 C。则

$$\rho_S=12 \int_0^1 \int_0^1 C\left(u_1, u_2\right) d u_1 d u_2-3=12 E\left(C\left(U_1^{'}, U_2^{'}\right)\right)-3 \text{，其中} \left(U_1^{'}, U_2^{'}\right) \sim \Pi \text{ 。}$$

证明：用 Hoffding 公式，得到

$$
\begin{aligned}
\rho_S\left(X_1,X_2\right) &= \rho\left(F_1\left(X_1\right),F_2\left(X_2\right)\right) \\
&= 12\int_0^1\int_0^1\left(C\left(u_1,u_2\right)-u_1u_2\right)du_1du_2 \\
&= 12\int_0^1\int_0^1 C\left(u_1,u_2\right)du_1du_2-3
\end{aligned}
$$

对$\kappa=\rho_\tau$和$\kappa=\rho_S$，Embrechts et al. (2002)证明了$\kappa=\pm1$当且仅当X_1， X_2是同/反单调的。一般来说，由$\kappa=0$不能推出独立性。

样本 Spearman 相关系数

假设原始的数据 xi，yi 已经按从大到小的顺序排列，记 x'i，y'i 为原 xi，yi 在排列后数据所在的位置，则 x'i，y'i 称为变量 x'i，y'i 的秩次，则 di=x'i-y'i 为 xi，yi 的秩次之差。

如果没有相同的秩次，则 ρ_s 可由下式计算

$$
\rho_s=1-\frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}
$$

如果有相同的秩次存在，那么就需要计算秩次之间的 Pearson 的线性相关系数

$$
\rho_s=\frac{\sum_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_i(x_i-\bar{x})^2\sum_i(y_i-\bar{y})^2}}
$$

例：样本 Spearman 秩相关计算例

原始位置	原始 X	排序后	秩次 X'	原始 Y	排序后	秩次 Y'	秩次差 d_i 的平方
1	11	490	5	2	75	6	1
2	490	43	1	75	44	1	0
3	14	30	4	3	42	5	1
4	43	14	2	44	7	2	0
13.png	30	11	3	7	3	4	1
6	3	3	6	42	2	3	9

```
> X 《-c(11,490,14,43,30,3)
> Y 《-c(2,75,3,44,7,42)
> cor(X,Y,method="spearman")
[1] 0.6571429
```

三种相关系数的比较

让我们考虑一下表，从两个风险因素 A 和 B 中得出 10 个共同的观察结果。

Table　风险因子 A 和 B 的相关系数

Observations	Risk A	Risk B	Risk A Rank	Risk B Rank
Observations 1	0.5	0.2	5	1
Observations 2	0.6	0.9	6	8
Observations 3	0.4	0.6	4	5
Observations 4	0.8	0.3	8	2
Observations 5	0.3	0.4	3	3
Observations 6	0.2	0.7	2	6
Observations 7	0.9	0.5	9	4
Observations 8	0.7	0.9	7	8
Observations 9	0.1	1	1	10
Observations 10	100	0.8	10	7
Linear Correlation	0.21			
Spearman	-0.19			

Correlation	
Kendall’s Tau	-0.16
Concordant pairs	19
Discordant pairs	26

观察差异性

Kendall’s Tau ， Spearman 相关系数与线性相关系数差别很大。这是因为线性相关系数受到极端值（最后一个观察值）的影响。

5.2.4 尾相关系数 Coefficients of Tail Dependence

目标：度量极值相关性，即尾部相关性

定义 5.9（尾相关） $X_j \sim F_j,\ j \in \{1,2\}$ 是连续随机变量。如果下面两个式子的极限存在， X_1 和 X_2 的左侧（lower）尾部相关系数 λ_l 和右侧（upper）尾部相关系数 λ_u 定义为：

$$\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} P\left(X_2 \le F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 \le F_1^{\leftarrow}(u)\right),$$
$$\lambda_u = \lim_{u \uparrow 1} P\left(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(u)\right)$$

如果 $\lambda_l \in (0,1]\left(\lambda_u \in (0,1]\right)$，则 $\left(X_1, X_2\right)$ 是左侧（右侧）尾部相关的。

如果 $\lambda_l = 0\left(\lambda_u = 0\right)$，则 $\left(X_1, X_2\right)$ 是左侧（右侧）尾部相关的。

作为（条件）概率，显然有 $\lambda_l, \lambda_u \in [0,1]$

尾相关系数与 Copula

- 如果 F_1 和 F_2 是连续的分布函数，则我们可以得到 λ_l 和 λ_u 的简单表达式：

$$P\left(X_2 \le F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 \le F_1^{\leftarrow}(u)\right) = \frac{P\left(X_1 \le F_1^{\leftarrow}(u), X_2 \le F_2^{\leftarrow}(u)\right)}{P\left(X_1 \le F_1^{\leftarrow}(u)\right)}$$

$$= \frac{F\left(F_1^{\leftarrow}(u), F_2^{\leftarrow}(u)\right)}{F_1\left(F_1^{\leftarrow}(u)\right)} \underset{(GI\,4)}{\overset{Sklar}{=}} \frac{C(u,u)}{u},\ u \in (0,1)$$

所以
$$\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u,u)}{u}$$

- 如果 $u \mapsto C(u,u)$ 在 0 的领域内可导且极限存在，则 $\lambda_l = \lim_{u\downarrow 0} \frac{d}{du} C(u,u)$（l'Hpital's rule）。

- 如果 C 在 0 的邻域内完全可导且极限存在，则

$$\lambda_l = \lim_{u\downarrow 0}\left(D_1C(u,u) + D_2C(u,u)\right)$$（Chain Rule）。

- 且如果 C 对称，则

$$\lambda_l = 2\lim_{u\downarrow 0} D_1 C(u,u) \underset{Th.7.13}{=} 2\lim_{u\downarrow 0} C_{2|1}(u\,|\,u) = 2\lim_{u\downarrow 0} P(U_2 \le u \,|\, U_1 = u),$$

其中 $(U_1,U_2)\sim C$。

- 再结合任意连续分布函数 F，且由 $(X_1,X_2)=\left(F_{\cdot}^{\leftarrow}(U_1),F_{\cdot}^{\leftarrow}(U_2)\right)$，得到

$$\lambda_l = 2\lim_{x\downarrow -\infty} P(X_2 \le x \,|\, X_1 = x) \underset{density}{\overset{if}{=}} 2\lim_{x\downarrow -\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{X_2|X_1=x}(x_2)\,dx_2$$

- 右侧尾部相关系数与上述过程相似，

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{u\uparrow 1}\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \lim_{u\downarrow 0}\frac{\hat{C}(u,u)}{u} \\ &= \lim_{u\uparrow 1}\frac{2(1-u)-(1-C(u,u))}{1-u} = 2-\lim_{u\uparrow 1}\frac{1-C(u,u)}{1-u}\end{aligned}$$

- 对所有径向对称的 copulas（比如二元 G_P^{Ga} 和 $C_{\nu,P}^{t}$ copula），$\lambda_l = \lambda_u =: \lambda$ 成立。

- 对具有严格递减ψ的 Archimedean copulas，由 l'Hopital's Rule 知：

$$\lambda_l = \lim_{u\downarrow 0}\frac{\psi\left(2\psi^{-1}(u)\right)}{u} = \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)},$$

$$\lambda_u = 2-\lim_{u\uparrow 1}\frac{1-\psi\left(2\psi^{-1}(u)\right)}{1-u} = 2-\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-\psi(2t)}{1-\psi(t)} = 2-2\lim_{t\downarrow 0}\frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)}$$

例如：Clayton：对$\theta>0$，$\lambda_l = 2^{-1/\theta}, \lambda_u = 0$ ，有左侧尾部相关性；

Gumbel：对 θ > 1，$\lambda_l = 0, \lambda_u = 2-2^{1/\theta}$ ，有右侧尾部相关

高斯和 t Copulas 的尾相关

- 考虑二元正态分布 $N(0,P)$ 的密度函数，可以证明（利用

$$f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$ ） $X_2 \mid X_1 = x \sim N\left(\rho x, 1-\rho^2\right)$。由此推断出

$$\lambda = 2\lim_{x\downarrow -\infty} P\left(X_2 \le x \mid X_1 = x\right) = 2\lim_{x\downarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = I_{\{\rho=1\}}$$ （无尾部相关性）。

- 对 $C_{\nu,P}^t$，可以证明 $X_2 \mid X_1 = x \sim t_{\nu+!}\left(\rho x, \frac{\left(1-\rho^2\right)\left(\nu+x^2\right)}{\nu+1}\right)$，以及

$$P\left(X_2 \le x \mid X_1 = x\right) = t_{\nu+1}\left(\frac{x-\rho x}{\sqrt{\frac{\left(1-\rho^2\right)\left(\nu+x^2\right)}{\nu+1}}}\right)$$ 。

因此

$$\lambda = 2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$$ （尾相关；$\rho\uparrow$和$\nu\downarrow$时，$\lambda\uparrow$）。

$$\lambda = 2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$$ （尾相关；$\rho\uparrow$和$\nu\downarrow$时，$\lambda\uparrow$）。

ν	$\rho = -0.5$	$\rho = 0$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.9$	$\rho = 1$
∞	0	0	0	0	1
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1

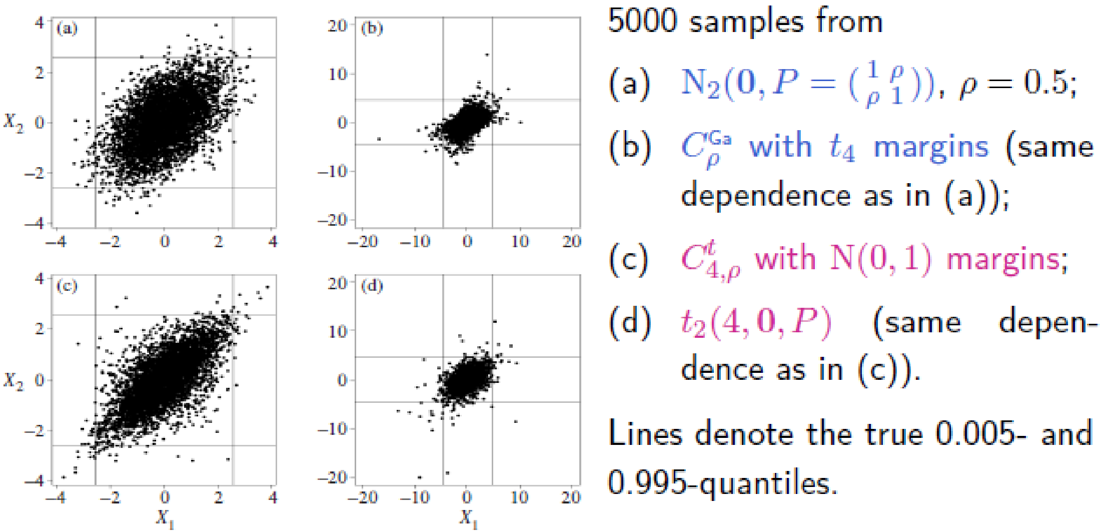


图 5.8 高斯和 t Copula 的尾部比较

- **联合尾部概率（t-Copula）** $P(U_1 > u, U_2 > u)$

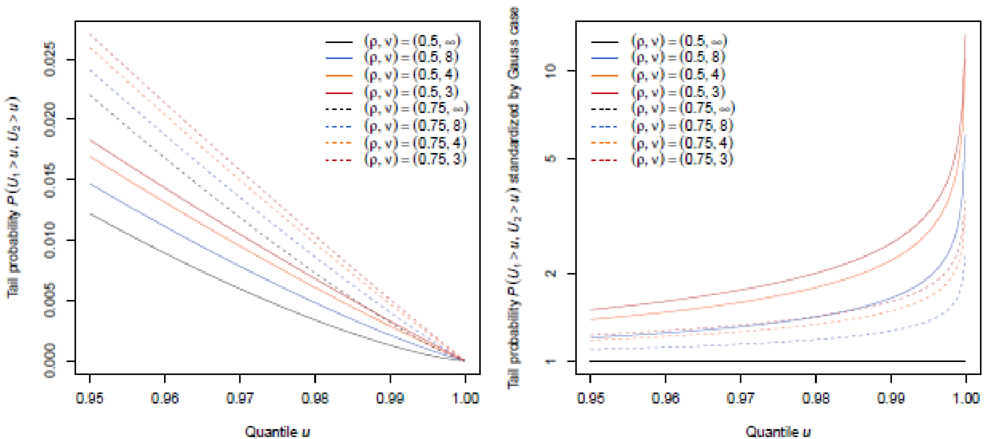


图 5.9　t 分布的 2 维联合尾部概率

右边的图说明

$$u \mapsto \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)}{\mathbb{P}(V_1 > u, V_2 > u)} \underset{\text{symm.}}{\overset{\text{radial}}{=}} \frac{C^t_{\nu,\rho}(u,u)}{C^{\text{Ga}}_{\rho}(u,u)}$$

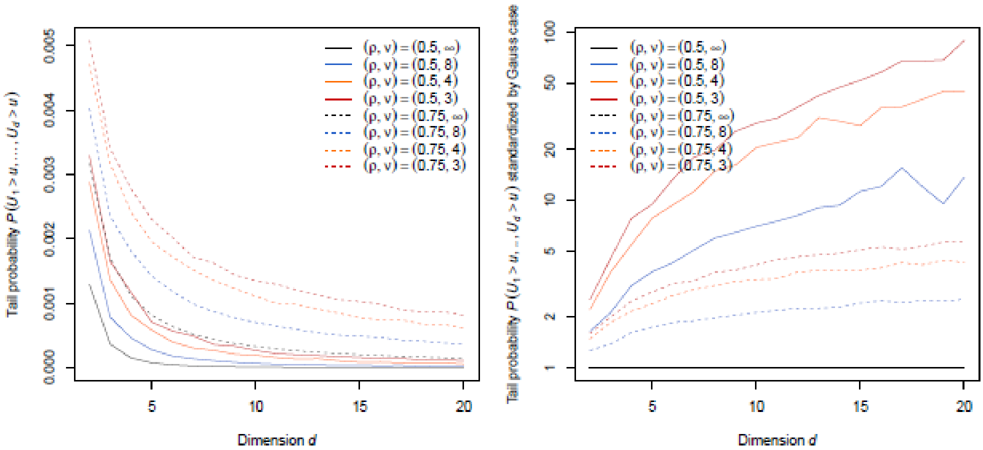


图 5.10　t 分布的 d 维联合尾部概率

右边的图说明

$$d \mapsto \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, \dots, U_d > u)}{\mathbb{P}(V_1 > u, \dots, V_d > u)} \overset{\text{radial}}{\underset{\text{symm.}}{=}} \frac{C^{t}_{\nu,\rho}(u, \dots, u)}{C^{\mathrm{Ga}}_{\rho}(u, \dots, u)} \text{ for } u = 0.99.$$

例 8 联合尾部概率的直观解释

考虑 5 天的负（对数）收益 ***X = (X₁, . . . ,X₅)***，边际分布固定，且两两相关系数 *ρ = 0.5*。但是，还不能确定最佳联合模型。

- 如果 X 的 copula 是 $C_{\rho=0.5}^{Ga}$，则 5 天的负收益高于 99%分位点的概率为

$$P\left(X_1 > F_1^{\leftarrow}(u),\dots,X_5 > F_5^{\leftarrow}(u)\right) = P\left(U_1 > u,\dots,U_5 > u\right) \underset{MC\ error}{\approx} 7.48\times 10^{-5}$$

。

长期来看，该事件平均每$1/7.48\times 10^{-5} \approx 13369$交易日会发生一次（51.4 年一次；假设一年有 260 个交易日）。

- 如果 X 的 copula 是 $C_{\nu=4,\rho=0.5}^{t}$，则该事件的发生频率会变为之前的 7.68 倍，即约为 6.7 年一次。如果 d 更大会更严重！

5.4 Copula 的拟合估计

设 X 满足 $X_1,...,X_n \overset{ind.}{\sim} F$，边际分布连续 $F_1,...,F_d$，且 copula C 连续。假设数据 $x_1,...,x_n$ 为 $X_1,...,X_n$ 的实现。

假设：

- 对部分 $\theta_{0,j} \in \Theta_j, j \in \{1,...,d\}$ ，满足 $F_j = F_j\left(\cdot;\theta_{0,j}\right)$；（对 $\forall \theta_j \in \Theta_j, j \in \{1,...,d\}$ ，假设 $F_j\left(\cdot;\theta_j\right)$ 连续）。
- 对部分 $\theta_{0,C} \in \Theta_C$ ，满足 $C = C\left(\cdot;\theta_{0,C}\right)$。

因此需要估计 F 的未知参数向量 $\theta_0 = \left(\theta_{0,C}^{'}, \theta_{0,1}^{'},...,\theta_{0,d}^{'}\right)$。

这里，我们尤其要关注 $\theta_{0,C}$。必要时，假设边际分布 $F_1,\ldots,F_d$ 和 Copula C 是绝对连续的，相应的密度函数 $f_1,\ldots,f_d$ 为和 c。

此外假设所选的 copula 是合适的（就对称性之类而言）。

5.4.1 矩估计

主要思想：假设有一个先验的理由，认为所选择的 Copula 是一个合适的模型，根据秩相关系数和 Copula 函数之间的理论关系来估计 Copula 参数。
将秩相关系数的经验值替换为该关系，以获得部分或全部 Copula 参数的估计。

我们这里主要关注单参数 copulas，即 $\boldsymbol{\theta}_{0,C} = \theta_{0,C}$。

- 对 $d = 2$，Genest 和 Rivest（1993）认为通过 $\rho_\tau\left(\theta_C\right) = r_n^\tau$ 求 θ_C 来估计 $\theta_{0,C}$，即 $\hat{\theta}_{n,C}^{IKTE} = \rho_\tau^{-1}\left(r_n^\tau\right)$，（Kendall’s tau 估计值的反函数）。其中用自变量为 θ 的函数

$\rho_\tau(\cdot)$表示 Kendall's tau， r_n^τ是 Kendall's tau 的样本值（利用$X_1,\ldots,X_n$或者 $U_1,\ldots,U_n$计算）。

- 椭圆 copulas 的标准方差矩阵 P 可以通过 Kendall's tau 的两两反函数来估计。如果$r_{n,j_1j_2}^\tau$表示数据(j_1, j_2)Kendall's tau 的样本值，则

$$\hat{P}_{n,j_1j_2}^{IKTE} = \sin\left(\frac{\pi}{2} r_{n,j_1j_2}^\tau\right)。$$

- 同样可以使用 Spearman 相关系数。对高斯 copulas，

$$\rho \approx \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{2} \underset{\text{Prop.7.26}}{=} \rho_S$$

估计误差相对来说很小，则两两 Spearman 相关系数矩阵是 P 的一个估计。

- .对 t copulas，可以用$\hat{P}_n^{IKTE}$来估计 P，可以用基于$\hat{P}_n^{IKTE}$的极大似然估计来估计 ν。see Mashal and Zeevi (2002)

矩估计的优点

边际分布不需要估计，因此关于 copula 的推断在某种意义上是“无边际”。

下面分类讨论:

1、二元 Archimedean Copulas （单参数）

假设模型形式为 $F\left(x_1,x_2\right)=C_\theta\left(F_1\left(x_1\right),F_2\left(x_2\right)\right)$，其中 θ 是一个要估计的单参数。

对很多这样的 copulas，Kendall’s tau 和 θ 之间或者 Spearman 相关系数和 θ 之间存在简单的函数关系。具体来说，考虑 Gumbel, Clayton 和 Frank copulas；在这个例子中，关系的一般形式为 $\rho_\tau\left(X_1,X_2\right)=f\left(\theta\right)$；如下表所示。

对一个严格连续二次可导函数 ψ ，可以证明

$$\rho_\tau=1-4\int_0^\infty t\left(\psi'\left(t\right)\right)^2 dt=1+4\int_0^1 \frac{\psi^{-1}\left(t\right)}{\left(\psi^{-1}\left(t\right)\right)'}dt$$

如果 ψ 是严格的，则 $\lambda_l=2\lim_{t\to\infty}\dfrac{\psi'\left(2t\right)}{\psi'\left(t\right)}$，且 $\lambda_u=2-2\lim_{t\downarrow 0}\dfrac{\psi'\left(2t\right)}{\psi'\left(t\right)}$

Archimedean Copulas 对应的相关系数

Family	ρ_τ	λ_1	λ_2
A	$1-2\left(\theta+(1-\theta)^2\log(1-\theta)\right)/\left(3\theta^2\right)$	0	0
C	$\theta/(\theta+2)$	$2^{-1/\theta}$	0
F	$1+4\left(D_1(\theta)-1\right)/\theta$	0	0
G	$(\theta-1)/\theta$	0	$2-2^{1/\theta}$
J	$1-4\sum_{k=1}^{\infty}1/\left(k(\theta k+2)\left(\theta(k-1)+2\right)\right)$	0	$2-2^{1/\theta}$

假设 $\hat{\theta}$ 是在 copulas 参数有效范围内。首先计算 r^{τ} 的样本值，然后解方程 $r^{\tau}=f\left(\hat{\theta}\right)$ 得到 $\hat{\theta}$，比如，假设 $r^{\tau}\geq 0$，令 $\hat{\theta}=\left(1-r^{\tau}\right)^{-1}$ 可以校准 Gumbel copula 的参数。Clayton copula 处在完全负相关和完全正相关之间，可以使用区间 $(-1,1)$ 中任意的 Kendall's tau 的值来进行来校准参数。

2、用 Spearman 相关系数校准高斯 copulas

假设 X 是一个 meta-高斯模型，copula 为 C_P^{Ga}，想要估计相关系数矩阵 P。根据定理知

$$\rho_S\left(X_i,X_j\right)=\left(6/\pi\right)\arcsin\frac{1}{2}\rho_{ij}\approx\rho_{ij}$$

其中最后的估计值很精确。这说明可以用两两 Spearman 秩相关系数 R^S 矩阵来估计 P。这个例子也可应用于 t copula 模型。但是不如应用于 Gaussian copula 模型的结果精确度高。

5.4.2 极大似然估计

分布 $F(x)=C\left(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right)$ 的密度函数为（如果存在的话）:

$$f(x;\theta_0)=c\left(F_1(x_1;\theta_{0,1}),\ldots,F_d(x;\theta_{0,d});\theta_{0,C}\right)\prod_{j=1}^{d}f_j\left(x_j;\theta_{0,j}\right)$$

$X_1,\ldots,X_n$ 的对数似然函数为

$$\begin{aligned}l\left(\theta;X_1,\ldots,X_n\right)&=\sum_{i=1}^{n}l\left(\theta;X_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}l_C\left(\theta_C;F_1\left(X_{i1};\theta_1\right),\ldots,F_d\left(X_{id};\theta_d\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}l_j\left(\theta_j;X_{ij}\right)\end{aligned}$$

其中

$$l_C\left(\theta_C;u_1,\ldots,u_d\right)=\log c\left(u_1,\ldots,u_d;\theta_C\right)$$
$$l_j\left(\theta_j;x\right)=\log f_j\left(x;\theta_j\right),\ j\in\{1,\ldots,d\}$$

θ_0 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_n^{MLE} = \arg\sup_{\theta\in\Theta} l\left(\theta; X_1, \ldots, X_n\right).$$

这种最优化通常是通过数值均值来完成的。注意这个条件是非常苛刻的，尤其是在高维的情况。

Joe 和 Xu 提出了两步估计方法：

第一步：对 $j \in \{1, \ldots, d\}$，用极大似然估计 $\hat{\theta}_{n,j}^{MLE}$ 来估计 $\theta_{0,j}$。

第二步：用下式估计 $\theta_{n,C}$

$$\hat{\theta}_{n,C}^{IFME} = \arg\sup_{\theta_C\in\Theta_C} l\left(\theta_C, \hat{\theta}_{n,1}^{MLE}, \ldots, \hat{\theta}_{n,d}^{MLE}; X_1, \ldots, X_n\right)$$

The inference functions for margins estimator (IFME) of θ_0 is thus

$$\hat{\theta}_n^{IFME} = \left(\hat{\theta}_{n,C}^{IFME}, \hat{\theta}_{n,1}^{MLE}, \ldots, \hat{\theta}_{n,d}^{MLE}\right)$$

这个计算要比 $\hat{\theta}_n^{MLE}$ 容易得多，而且结果很理想。

$\hat{\theta}_n^{IFME}$ 也可以作为计算 $\hat{\theta}_n^{MLE}$ 的初值。

$\hat{\theta}_n^{IFME}$ 和 $\hat{\theta}_n^{MLE}$ 对应了不同的极大似然函数

$\hat{\theta}_n^{MLE}$ 是 $\left(\frac{\partial}{\partial \theta_C} l, \frac{\partial}{\partial \theta_1} l, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} l\right) = 0$ 的解

$\hat{\theta}_n^{IFME}$ 是 $\left(\frac{\partial}{\partial \theta_C} l, \frac{\partial}{\partial \theta_1} l_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} l_d\right) = 0$ 的解

其中

$$l = l\left(\theta; X_1, \ldots, X_n\right)$$

$$l_j = l_j\left(\theta_j; X_{1j}, \ldots, X_{nj}\right) = \sum_{i=1}^{n} l_j\left(\theta_j; X_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} \log f_j\left(X_{ij}; \theta_j\right)$$

5.4.3 用 copula 构造一个 Pseudo 样本

- 一般来说 $X_1,\ldots,X_n$ 的边际分布不服从均匀分布 $U\left(0,1\right)$。为应用 copula 方法，需要产生来自 C 的 pesudo 观察值。
- 一般的，取 $\hat{U}_i=\left(\hat{U}_{i1},\ldots,\hat{U}_{id}\right)=\left(\hat{F}_1\left(X_{i1}\right),\ldots,\hat{F}_d\left(X_{id}\right)\right),i\in\left\{1,\ldots,n\right\}$，其中 $\hat{F}_j$ 表示 F_j 的估计。注意一般 $\hat{U}_i,\ldots,\hat{U}_n$ 既不是相互独立的（即使 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立）也不是完全服从 $U\left(0,1\right)^d$。

5.4.5 获取边际分布的方法

- 参数估计：（比如 t，帕累托等；如果 n 比较小）。也经常使用（34）来估计 $\theta_{0,C}$（保证较小的由边际错误导致的误差）。
- 半参数估计（比如 EVT 基础：主体采用经验估计，半参数尾部采用以 GPD 基础的 Smith 尾部估计）。
- 采用经验分布的非参数估计，则

$$\hat{U}_{ij}=\frac{n}{n+1}\hat{F}_{n,j}\left(X_{ij}\right)=\frac{R_{ij}}{n+1}$$

其中 R_{ij} 表示 X_{ij} 在 $X_{1j},\ldots,X_{nj}$ 中的顺序。缩放是为了避免估计 $[0,1]^d$ 边界上的密度。

如果 n 足够大，一般用

5.5 Copular 在信用风险管理的应用

一元高斯 Copula 函数的一种应用

银行有一个巨额贷款组合，每支贷款每年的违约可能性为 1%

若贷款违约相互独立：每年违约率期望值为 1%

事实上，贷款违约不是相互独立的（系统性风险）

表 5.2 1970-2010 年所有被评级公司的年百分比违约率

年份	违约率	年份	违约率	年份	违约率
1970	2.641	1984	0.927	1998	1.255
1971	0.285	1985	0.950	1999	2.214
1972	0.455	1986	1.855	2000	2.622

1973	0.454	1987	1.558	2001	3.978
1974	0.275	1988	1.365	2002	3.059
1975	0.360	1989	2.361	2003	1.844
1976	0.175	1990	3.588	2004	0.855
1977	0.351	1991	3.009	2005	0.674
1978	0.352	1992	1.434	2006	0.654
1979	0.087	1993	0.836	2007	0.367
1980	0.343	1994	0.614	2008	2.028
1981	0.163	1995	0.935	2009	5.422
1982	1.036	1996	0.533	2010	1.283
1983	0.967	1997	0.698		

资料来源：穆迪。

5.5.1 应用 Copula 函数给违约率建模

假设 1：所有贷款的违约时间 T_i 的累计概率分布函数相同，定义为 Q

假设 2：对于每一个 i 我们将 T_i 分布的分位数与 U_i 分布（标准正态分布）的分位数之间进行一一对应的映射，当 $U = N^{-1}[Q_i(T)]$时，$\text{Prob}(T_i < T) = \text{Prob}(U_i < U)$.

$U = N^{-1}\left(Q_i\left(T\right)\right)$

假定 3： U_i 之间的结构满足因子模型

$$U_i = aF + \sqrt{1-a^2}Z_i$$

式中，变量 F 及 Z_i 为互相独立的正态分布，Z_i 之间也相互独立。在这种情况下，每对贷款之间的 Copula 相关性是相等的，均为 $\rho = a^2$

$$U_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}Z_i$$

5.5.2 贷款组合违约率的估计

$$U = N^{-1}\left(Q_i\left(T\right)\right)$$

其中：$\mathrm{Prob}\left(T_i < T\right) = \mathrm{Prob}\left(U_i < U\right)$

在因子 F 的条件下，$U_i < U$ 的条件概率为

$$\mathrm{Prob}\left(U_i < U \mid F\right) = \mathrm{Prob}\left(Z_i < \frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) = N\left(\frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

已知 Prob(U_i < U ｜ F) = Prob(T_i < T ｜ F)，我们有，因此

$$\mathrm{Prob}\left(T_i < T \mid F\right) = N\left(\frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad （1）$$

变量$Q(T)$是一支贷款到T时是违约的无条件概率。我们将其记为 PD（违约概率 Probability of Default 的简写），并有$U = N^{-1}(PD)$。式（1）变为

$$\mathrm{Prob}\left(T_i < T \mid F\right) = N\left(\frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

即为贷款组合违约率（Default rate）

5.5.3 最坏贷款组合违约率

因子 F：可以理解为宏观经济指数

F 高，U_i趋向于更高的值，$\mathrm{Prob}\left(T_i < T\right) = \mathrm{Prob}\left(U_i < U\right)$较低

F 低，则反之。

当 F 减小时，违约率会增加，那么违约率的最坏情况会是怎样的呢？因为 F 服从标准正态分布，$F < N^{-1}(Y)$ 的概率为 Y。因此，存在一个概率 Y，使得违约率大于

$$N\left(\frac{N^{-1}(PD)-\sqrt{\rho}N^{-1}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

定义：WCDR(T,X) (worst case default rate)为置信度为 X%，展望期为 T 的情况下的最坏违约率。也即我们有 X%的把握，在时间 T 内违约率不会超过 WCDR(T,X)

$$WCRD(T,X)=N\left(\frac{N^{-1}(PD)-\sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (2)$$

5.5.4 贷款组合的风险价值度

假定，我们有一个贷款组合，其中所有贷款的数额和违约可能性都相等。上述结论可以用来计算在展望期 T，X 置信区间的条件下，贷款组合的风险价值度为

$$VaR(T,X)=L\times(LGD)\times WCDR(T,X)$$

式中，LGD 是违约损失率（loss given default），即贷款违约时，以本金百分比计算的预期损失，L 是贷款组合的总规模。

在一篇重要的论文中，Gordy 论证了这一结果可以被扩展。对一个有 M 支贷款的大组合，当每支贷款的规模与整个组合的总规模相比都比较小时，下式基本成立

$$VaR\left(T,X\right)\sum_{i=1}^{M} L_i \times LGD_i \times WCDR_i\left(T,X\right) \quad (3)$$

式中，L_i 为第 i 支贷款的大小，LGD_i 为第 i 支贷款的违约损失率，$WCDR_i\left(T,X\right)$ 为第 i 支贷款在最坏情况下的违约率（即式（2））中，令 PD 等于第 i 支贷款的违约率时 WCDR 的值）。

5.5.5 估计违约概率和相关性

违约率：$DR = N\left(\dfrac{N^{-1}\left(PD\right)+\sqrt{\rho}N^{-1}\left(G\left(DR\right)\right)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$

违约率的累计概率分布函数：$G\left(DR\right) = N\left(\dfrac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}\left(DR\right)-N^{-1}\left(PD\right)}{\sqrt{\rho}}\right)$求导

违约率的概率密度函数:

$$g\left(DR\right)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(N^{-1}\left(DR\right)\right)^{2}-\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}\left(DR\right)-N^{-1}\left(PD\right)}{\sqrt{\rho}}\right)^{2}\right]\right\} \quad (4)$$

最大似然估计步骤

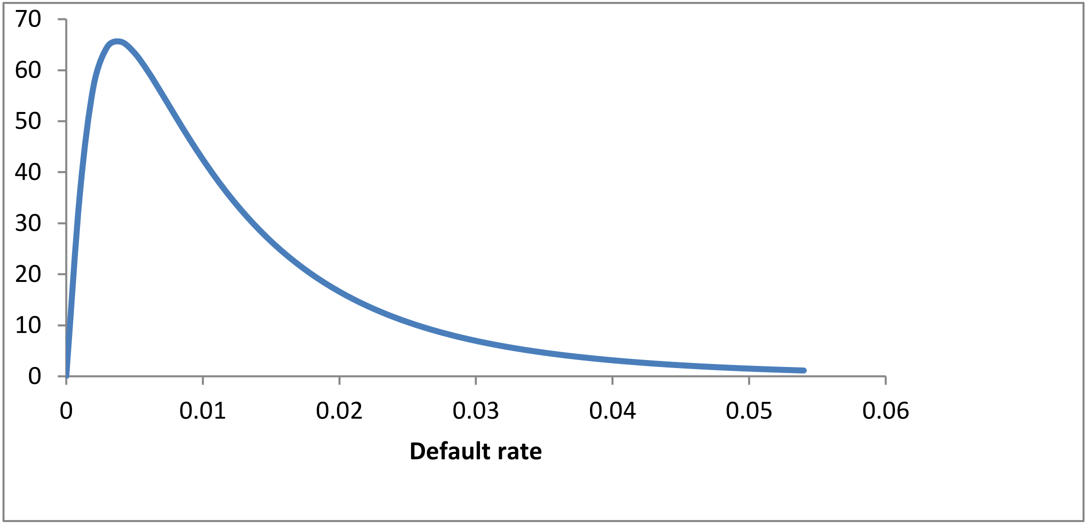
由历史违约数据计算违约概率 PD 的相关性 ρ 的最大似然估计的步骤如下：

1. 选择 PD 和 ρ 的初始值；

2. 对 DR 的每个观察值，计算式（5）中概率密度函数的对数；

3. 使用 Slover 搜索 PD 和 ρ 的值使得步骤 2 中的值得最大。

应用表 5.3 的违约率数据做实证分析



5.5.6 其他 copula 函数

单因子高斯 copula 模型有其局限性。如上图所示，其得出的尾部相关性很小。这意味着一个公司的意外提早违约和另一家公司的意外提早违约很少同时发生。要找到合

适的ρ来拟合数据可能比较困难。例如，如果 PD 为 1%而 10 年中某年的违约率达到 3%，则找不到ρ的值可以跟这种情况保持一致。其他一些具备更强的尾部相关性的单因子 copula 模型可以更好地拟合数据。开发这样一种模型的方法是 F 为 Z，或选取比式（11-9）中的正态分布具有更厚尾部的分布（这些分布要被方所，以保证均值为 0，标准差为 1）。然后U_i的分布再由 F 和Z_i的分布（可能通过数值方法）决定。式（2）变为

$$WCDR(T, X) = \Phi\left(\frac{\Psi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Theta^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

式中，Φ、Ψ和Θ分别是Z_i，F和U_i的累计概率分布函数。此时，式（3）变为

$$G(DR) = \Theta\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(DR) - \Psi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$$