第三章　VaR 的误差分析

如何评价 VaR 模型？

3.1 方差和区间估计

3.2 回顾测试

3.3 压力测试和情景分析

3.1 区间估计

3.1.1 VaR 的精度

- 不管使用什么方法，我们所得到的 VaR 只是一个统计上的估计，我们需要对估计结果的精确性进行分析。
- VaR 估计的精确性取决于均值、方差估计的准确性，和资产组合收益分布。
- 在正态分布假设下，计算 $VaR = \alpha\sigma_p P$ 时，σ_P 是无法确知的，其值只能通过对各种风险因子收益的均值和标准差的估计来得到。

3.1.2 VaR 区间估计的主要方法

1) 假设样本服从正态分布

假设收益率样本服从正态正态分布。收益率的均值 μ 未知，则均值的估计值服从正态分布

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \sigma^2 / T\right)$$

σ^2 的估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2$$

且满足

$$\frac{\left(T-1\right)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(T-1\right)$$

则 σ^2 的 95%的置信区间为

$$\frac{(T-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{0.975}} < \sigma^2 < \frac{(T-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{0.025}}$$

如果样本规模 T 足够大，

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{d} N\left(\sigma^2, \sigma^4 \frac{2}{T-1}\right)$$

$$\mathrm{se}(\hat{\sigma}) = \sigma\sqrt{\frac{1}{2T}}$$

因此，也可以用正态分布来近似计算 $\hat{\sigma}^2$ 的方差。

例如，分析 1973 年至 2004 年欧元兑美元的月度回报。样本参数

$$\hat{\mu} = -0.15\%$$
$$\hat{\sigma} = 3.39\%$$

- 均值μ的标准误为 0.17%，σ 的标准误为

$$SE\left(\hat{\sigma}\right) = \hat{\sigma}\sqrt{1/2T} = 0.12\%$$

95%的置信区间为[3.1, 3.63]

- 样本规模扩大，估计也准确

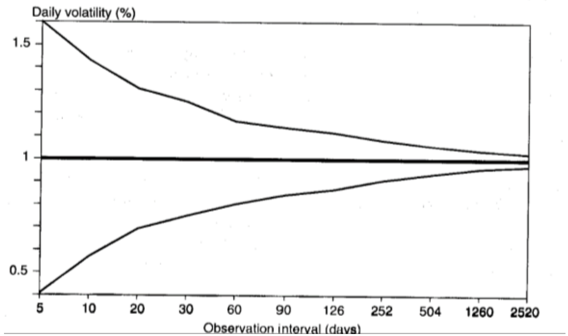

图 3.1 置信区间与样本规模的

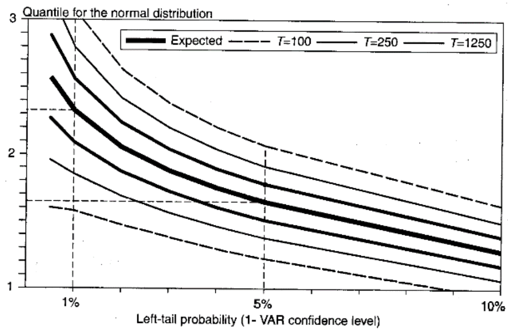

图 正态分布的左尾区间概率

对于正态分布，5%的左尾区间的中心落在 1.645。采用 100 天的观察值，置信带为[1.24，2.04]，这个区间是相当宽的。采用 250 天的观察值，相当于 1 年的交易天数，置信带为[1.38，1.91]。而采用 1250 天或者说 5 年的观察值，这个区间缩减到[1.52，1.76]。

2) 非正态分布—— 样本分位数的估计误差

- Kendall(1994) 证明了分位数 q 的渐近标准差

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\xi_p^* - \xi_p\right) \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(\xi_p)}\right)$$

因此

$$\sigma(\hat{\xi}_p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf(\xi_p)}}$$

其中 ξ_p 是分布函数为 F 的 p 分位数，f 为分布密度函数，ξ_p^* 为经验分位点

3) 用随机模拟的方法来计算置信区间

$$Prob\left(X_L \le VaR \le X_H\right) = 0.95$$

其中 Xi 为模拟产生的资产组合价值，根据次序统计量的理论， X_L and X_H 满足

$$\sum_{i=L}^{H-1} \binom{N}{i} p^i \left(1-p\right)^{N-i} \ge 0.95$$

和

$$\sum_{i=L+1}^{H-1} \binom{N}{i} p^i \left(1-p\right)^{N-i} \le 0.95$$

另外，H 和 L 的选择尽量使得置信区间对称

$$p - \frac{L}{N} \approx \frac{H}{N} - p$$

4) Bootstrap 方法

- Bootstrap 方法估计样本的 p 分位数和区间估计的基本步骤:
  1. 由观测样本 $x=(x_1, \ldots, x_n)$构造经验分布函数 F_n;
  2. 从 F_n 中抽取简单样本 $X^*=(X_1, \ldots, X_m)$，$m<=n$,
  3. 重复步骤（2）N 次，由 Bootstrap 子样得到样本 p 分位数，$\xi_{p,i}$，$i=1, \cdots, N$。
  4. 计算统计量:

$$\hat{\xi}_p=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\xi}_{p,i}\ ;\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\xi}_{p,i}-\hat{\xi}_p)^2\ ;\quad r_j=\sqrt{n}(\hat{\xi}_{p,j}-\hat{\xi}_p)\ ,$$

  5. 由中心极限定理，可以得到ξ_p近似服从正态分布，由此可以得到分位点的点估计和区间估计。

3.1.3 预期亏损 ES 的方差

资料来源：Summary of “Variance of the CTE Estimator,”，文中的 CTE 即为 ES

$$ES = CTE(\alpha) = E\left[X \mid X > q_\alpha\right]$$

$$\Pr\left\{X > q_\alpha\right\} = 1 - \alpha$$

- 将样本值按照从大到小排序 $\left(x_{(1)} \ge x_{(2)} \ge \ldots \ge x_{(n)}\right)$ ，对于 α ，存在 k 使得

$$\alpha = 1 - \frac{k}{n}$$

$$E\hat{S}_n(\alpha) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{(i)},$$

$$V\hat{a}R_n(\alpha) = x_{(k)}$$

- 可以证明下面事实

1. 当样本量充分大，在一定条件下 $\left(E\hat{S}_n, V\hat{a}R_n\right)$ 的渐近分布是多元正态分布。

2. CTE 的估计值是低估了真实值，即 $E\left[E\hat{S}\right] < ES$

但随着样本量的增大，估计值将趋于真实值。

ES 的估计值方差公式

$$VAR\left(E\hat{S}\right)\approx\frac{VAR\left(X\mid X\geq VaR\right)+\alpha\left(E\hat{S}-VaR\right)^{2}}{n\left(1-\alpha\right)}$$

$$VAR\left(V\hat{a}R_{n}\right)\approx\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)}{n\left[f_{X}\left(VaR\right)\right]^{2}}$$

$$Cov\left(E\hat{S}_{n},V\hat{a}R_{n}\right)\approx\frac{\alpha\left(ES-VaR\right)}{nf_{X}\left(VaR\right)}$$

$f_X\left(VaR\right)$ 表示随机变量 X 的概率密度函数 $f_X\left(x\right)$ 在 x=VaR 的取值。

- 整理 ES 的方差公式可得

$$VAR\left[E\hat{S}_{n}\right]=E\left\{VAR\left[E\hat{S}_{n}\mid V\hat{a}R_{n}\right]\right\}+VAR\left\{E\left[E\hat{S}_{n}\mid V\hat{a}R_{n}\right]\right\}$$

例

假设一个 T=10， 执行价格 X=110 的看跌期权 Put option， 当前价格 S=100，$\mu=8\%, \sigma=15\%$，股票价格服从几何布朗运动

$$S(T)=S\cdot e^{\left[\mu T+\sigma\sqrt{T}\cdot Z\right]}$$

期权价格

$$C=e^{-\delta\cdot T}\cdot\max\left[0, X-S\cdot e^{\left(\mu T+\sigma\sqrt{T}\cdot Z\right)}\right]$$

求期权价格的 VaR 和 ES 的标准差

- 根据上式生成 1000 个模拟样本，得到 VaR 对应的分位点的概率分布密度函数

$$\hat{f}(VaR)=\frac{\xi}{\hat{F}_n^{-1}(\alpha)-\hat{F}_n^{-1}(\alpha-\xi)}$$

With $\xi=1/100$

- 计算标准差公式

$$\mathrm{std}\left(ES\right)=\sqrt{\frac{VAR\left(X_{(1)},\ldots,X_{(k)}\right)+\alpha\cdot\left(E\hat{S}-X_{(k)}\right)^{2}}{n\cdot\left(1-\alpha\right)}},$$

$$\mathrm{std}\left(VaR\right)=\frac{1}{\hat{f}\left(VaR\right)}\cdot\sqrt{\frac{\alpha\cdot\left(1-\alpha\right)}{n}},$$

$$C\hat{o}v\left(ES,VaR\right)=\frac{\alpha\cdot\left(E\hat{S}-X_{(k)}\right)}{n\cdot\hat{f}\left(V\hat{a}R\right)}$$

表 10-year European Put Option X=$110, S=$100 置信度为95%的预期亏损 ES 的方差(1000模拟)

	ES_N	Std(ES)	$V\hat{a}R$	$\mathrm{std}\left(V\hat{a}R\right)$	$C\hat{o}v\left(\mathrm{ES},VaR\right)$	$\hat{f}\left(VaR\right)$
解析表达式	13.80	n/a	4.39	n/a	2.37	n/a
第一次模拟	13.67	1.54	5.09	1.40	1.65	0.49%
最后一次模拟	14.93	1.95	3.33	3.07	4.91	0.22%
最小值	7.72	1.01	0	0.19	0.22	0.09%
平均值	13.70	1.63	4.50	1.91	2.42	0.40%
最大值	18.89	2.27	9.17	7.31	13.05	3.65%
标准误	1.63	0.18	1.76	0.77	1.06	0.19%

1. 设置 N = 5000 个情景， ES_N 是在这个大样本上 ES 估计量， $std(ES)_N$ 是给定置信水平的公式标准误差α 。
2. 抽取 m = 100 大小 n = 1000 的随机子样本。
3. 对于每一个 m 个子样本，计算 ES 估计量 ES_N 和 std(ES)估计。 还要检查案 ES_N 是否在

大约 95％置信区间 $ES \pm 2 * std(ES)$。 如果是，我们将 CI（置信区间）计数设置为 1，否则为 0。

4. 使用来自步骤 3 的 ES 估计的标准偏差来检查渐近式公式的有效性。在将其与公式估计比较之前，需要对该数进行简单调整.

An inforce portfolio of U.S. variable annuities with GMDB, GMAB and GMWB features

Table 2: Variance Verification

$$\alpha = 90\%$$

$$N = 5,000 \ Samples$$

$$CTE_N = 2214$$

$$FSE_N = 159$$

$m = 100$ Random Sub Samples of Size $n = 1,000$

	ES	ES 的标准误	CI Count
Mean	2,111	346	94%

First	2,004	355	1
Last	2,242	353	1
Min	1,558	262	0
Max	3,120	376	0
Std Dev'n	316	30	2%

Adjusted Std Dev'n 354 $= Std\ Dev'n/\left(1-n/N\right)^\wedge 1/2$

$$t\ 159\sqrt{5} \approx 355$$

$$t\ \rho = n/N$$

$$\frac{316}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}} = \frac{316}{\sqrt{1-\frac{1000}{5000}}} \approx 354$$

$$E\left[\sum_i \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{m-1}\right] = \sigma^2\left(1-\rho\right)$$

3.2 回顾测试（返回测试）

先看一个案例

美国商业银行 J.P. Morgan（JPM）在其 1998 年年度报告中，显示了 20 天或者说超过 5%的时间的日收益落在下行带（95%的 VAR）；其中 9 天落在 8 月到 10 月期间。

请评价 JPM 的 VaR 模型是否正确？

3.2.1 VaR 的返回测试（Back-Testing）的记号和设定

- 模型准确性检验
  - 假设有在 T 天内 N 个日损失超过了 VaR（出现例外），是否可以足够说明模型是不精确的呢？
  - 假定计算 VaR 的置信水平为 c=1-p*，实际考察天数为 T，例外天数为 N，那么出现例外的概率 p 的估计量为 N/T，这样对 VaR 模型准确性的评估就转化为检验失败概率 p 是否显著不同于 p*。
  - 检验原假设 H0:p=p*，其中 p*=1-c 为给定的值。
  - 根据二项分布，T 日内出现 N 个例外日的概率为 $p^N\left(1-p\right)^{T-N}$
- 运气不好还是模型错误，一类误差与二类误差

决策	模型	
	正确	错误
接受	是	二类误差
拒绝	一类误差	是

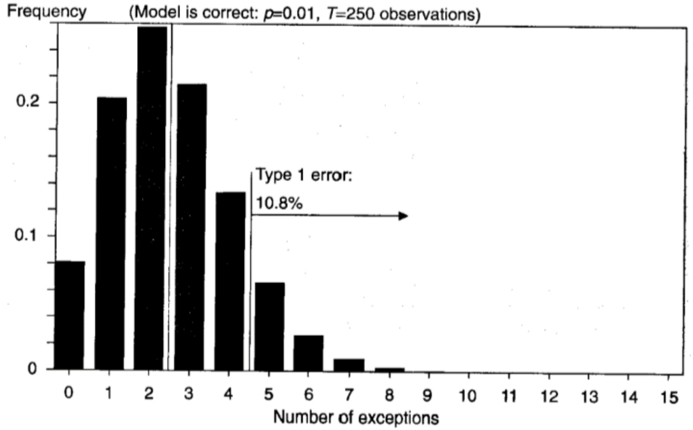

图 在模型正确的情况下的例外次数的分布

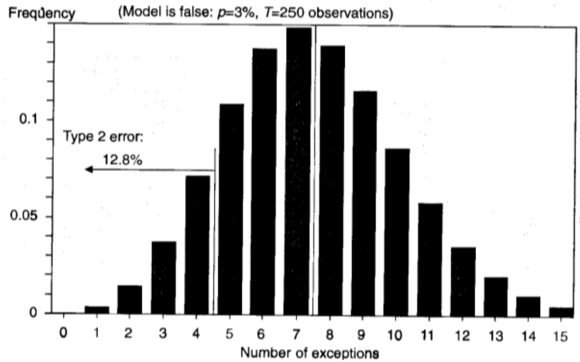

图 在模型不正确的情况下，出现例外的天数的分布

一般情况，先设定较低的一类误差，然后进行测试，得到更低的二类误差.符合规则要求的置信水平选择，和针对 VaR 的量化区间 p 无关，置信水平是由接受和拒绝模型的决策规则来决定的。

3.2.2 检验方法

1、正态近似：当 T 相当大，我们可以用中心极限定理来近似二项分布

$$z=\frac{x-pT}{\sqrt{p(1-p)T}}\approx N(0,1)$$

因此，JMP 摩根的案例中，

$$\begin{aligned}z&=(x-pT)/\sqrt{p(1-p)T}\\&=(20-0.05\times 252)/\sqrt{0.05(0.95)252}=2.14>1.96\end{aligned}$$

- VaR 模型存在偏向性。测试选择 95%的置信水平，不应该是运气不好的问题。
- 银行出现的特例事件太多，因此必须要找到更合适的模型

2、似然比检验

(1)非条件覆盖检验

Kupiec(1995)提出了基于这一思想的非条件覆盖检验（Unconditional coverage test），具体包括以下几个操作步骤：

首先，在分位数水平 p 下定义以下的“碰撞序列”(Hit sequence):

$$Hit_t = \begin{cases} 1, & if\ r_t < -VaR_t \\ 0, & if\ r_t \geq -VaR_t \end{cases}$$

如果用于计算 q 分位数水平下 VaR 的风险测度模型足够准确的话，则该“碰撞序列”应该服从概率为 p=1-c 的伯努利（Bernoulli）分布，即可以定义如下零假设：

$$H_0 : Hit_t \sim Bernoulli(p)$$

依据概率论知识，我们可以写出一个服从 Bernoulli(p)分布的似然函数 L(p):

$$L(p) = \prod_{t=1}^{T} (1-p)^{1-Hit_t}\ p^{Hit_t} = (1-p)^{T_0}\ p^{T_1}$$

其中，T 为碰撞序列的总长度，N 是序列当中取值为 1 的发生个数总和，T-N 是序列当中取值为 0 的发生个数总和。Kupiec(1995)的研究表明，如果零假设是正确的话，则可以证明一下的似然函数比 LR（Likehood ratio）满足：

$$LR_{uc} = -2\ln\left[(1-p)^{T-N}\ p^{N}\right] + 2\ln\left\{\left[1-(N/T)\right]^{T-N}(N/T)^{N}\right\}$$

服从自由度为 1 的χ^2 分布。如果 LR>3.84,拒绝原假设。

但是这个似然比检验比较弱，即使当实际天数与预计天数差别很大，该检验也无法拒绝模型错误。

在 JP 摩根的例子中，T=252，N=20，p=0.95%，LR=3.91>3.84，因此，认为 VaR 模型不正确。

表 例外天数为 N 的后验测试（95%置信水平）的非拒绝域

		例外次数为 N 的非拒绝域		
Probability level p	VAR Confidence Level c	T=252 Days	T=510 Days	T=1000 Days
0.01	99%	N<7	1<N<11	4<N<17
0.025	97.5%	2<N<12	6<N<21	15<N<36
0.05	95%	6<N<20	16<N<36	37<N<65
0.075	92.5%	11<N<28	27<N<51	59<N<92
0.10	90%	16<N<36	38<N<65	81<N<120

注：N 表示在样本容量为 T 的样本中，95%的置信度下不拒绝原假设（p 为正确概率）可能观察到的例外天数。

（2）有条件覆盖模型

- 如果我们观察到的这些特例事件中有 10 个是在过去 2 周内发生的，就应引起注意，如市场遇到较大波动，在 VaR 中没有捕捉到这一信息.
- 设计的检测系统应根据当时情况，能够测量适当的条件覆盖。
- 测试思路如下：我们设定每天损失没有超过 VaR 值时，偏差指数为 0，超过时偏差指数为 1 。定义 T_{ij} 为发生在 i 后一天就发生 状态 j 的天数，π_i 定义为前一天发生状态 i 条件下观察到的特例事件的概率

表 有条件覆盖的预期例外天数表

	条件		
	前一天		
	没有例外	例外	无条件
当天			
没有例外	$T_{00}=T_0(1-\pi_0)$	$T_{10}=T_1(1-\pi_1)$	$T(1-\pi)$

例外	$T_{01}=T_0(\pi_0)$	$T_{11}=T_1(\pi_1)$	$T(\pi)$
总	T_0	T_1	$T=T_0+T_1$

相应的测试统计量为

$$LR_{ind}=-2\ln\left[(1-\pi)^{(T_{00}+T_{10})}\ \pi^{(T_{01}+T_{11})}\right]+2\ln\left[(1-\pi_0)^{T_{00}}\ \pi_0^{T_{01}}\ (1-\pi_1)^{T_{10}}\ \pi_1^{T_{11}}\ \right]$$

其中第一项为假设特例在隔天之间相互独立， $\pi=\pi_0=\pi_1=(T_{01}+T_{11})/T$ 。

第二项为观测数据的最大相似值

条件覆盖总的测试统计量为

$$LR_{cc}=LR_{uc}+LR_{ind}$$

如果 LR>5.991,我们拒绝 95%的测试置信水平。如果 LR>3.841,我们可以只拒绝独立项

案例，摩根的例子

	条件		
	前一天		
	没有例外	例外	无条件
当天			
没有例外	218	14	232
例外	14	6	20
总	232	20	252

$$\pi_0 = 14 / 232 = 6.0\%$$

$$\pi_1 = 6 / 20 = 30.0\%$$

$$LR_{ind} = 9.53$$

3、其他检验

CD （Crnkovic and Drachman）检验法

- 检验观测到来自样本的分位数与来自准确分布的分位数是否有相同的特性。
- 每天，我们预测投资组合的收益概率分布 PDF。第二天，收益率是已知的，这时确定实际收益率所在的分位点。
- 连续 N 日，可得到这些实际发生的分位点。
- 假设这些分位点是独立的，而且是[0，1]均匀分布的，则可以进行拟合优度检验，如 K-S 检验。
- 至少需要 4 年的数据。

3.2.2 返回测试注意事项

1. 样本观察时间应该尽量短，以增大观察事件的数量，减少投资组合构成的变化影响
2. 置信水平不要选太高，因为这样会降低统计测试的有效性或力度。
3. 后验测试需要平衡两种类型误差的选择，拒绝正确模型和接受错误的模型。

3.2.3 实际应用：巴塞尔规则中的返回测试

（1）市场风险资本金

巴塞尔协议允许银行采用风险价值（VaR）模型计量市场风险，估计的风险价值将作为银行计算市场风险资本要求的基础。

<table>
<tr><td>VaR 的一般定义</td><td colspan="3">VaR （Value at Risk，风险价值）是指一定时期内，在一定的置信水平上，可能发生的最大损失
10 天持有期，99％置信度</td></tr>
<tr><td>VaR 模型的主要计算方法</td><td>历史模拟法</td><td>参数法
（方差-协方差法）</td><td>蒙特卡洛模拟法</td></tr>
<tr><td>VaR 的特点</td><td colspan="3">以直观的数字对风险进行量化估计，易于理解
能够简单的回答：“情况究竟可能有多糟糕?”</td></tr>
</table>

（2）市场风险资本金计算

- 市场资本金量为$k \times VaR + SRC$
- k 为乘积因子（由监管者选定，常数 k 的最小值为 3；这里的 VaR 是 10 天在 99%置信度下的 VaR；SRC 是指特定风险资本金数量，其是为企业的特殊风险而设定的。
- 风险加权资产$12.5 \times \left(k \times VaR + SRC\right)$

（）巴塞尔规则中的返回测试

要求银行每天记录上一个年度的每日超过 VaR 特例事件

- 在黄灯区，监管者根据出现特例事件的原因决定是否加以处罚。
  - 模型的构成严谨。偏差的发生是因为头寸报告不准确，或者程序码错误。
  - 模型的准确度科研提高。偏差发生是因为模型不能准确地衡量风险（到期观察值不足）
  - 同日交易。头寸在当天发生变化
  - 运气不好。 市场波动非常大或者相关性变化
- 回溯问题的要点在将运气不好和错误模型分开。下面的表给出了正确模型

表 巴塞尔返回测试惩罚区

Zone	Number of Exceptions	Increase In k
Green 绿灯区	0 to 4	0.00
Yellow 黄灯区	5	0.40
Yellow 黄灯区	6	0.50
Yellow 黄灯区	7	0.65
Yellow 黄灯区	8	0.75
Yellow 黄灯区	9	0.85
Red 红灯区	10+	1.00

TABLE 6-4 巴塞尔返回测试中第一类和第二类错误的概率 (T=250)

		覆盖率 99% 模型正确		覆盖率 97% 模型错误		
区域	例外 N	$P(X=N)$	第一类错误 拒绝模型 $P(X \geq N)$	$P(X=N)$	第二类错误 没有拒绝 $P(X<N)$	Power (Reject) $P(X \geq N)$
Green	0	8.1	100.0	0	0	100
Green	1	20.5	91.9	0.4	0	100
Green	2	25.7	71.4	1.5	0.4	99.6
Green	3	21.5	45.7	3.8	1.9	98.1
Green	4	13.4	24.2	7.2	5.7	94.3
Yellow	5	6.7	10.8	10.9	12.8	87.2
Yellow	6	2.7	4.1	13.8	23.7	76.3
Yellow	7	1.0	1.4	14.9	37.5	62.5
Yellow	8	0.3	0.4	14	52.4	47.6
Yellow	9	0.1	0.1	11.6	66.3	33.7

Red	10	0.0	0.0	8.6	77.9	21.1
Red	11	0.0	0.0	5.8	86.6	13.4

附录：我国商业银行关于返回测试的规定

（一）商业银行应比较每日的损益数据与内部模型产生的风险价值数据，进行返回检验，依据最近一年内突破次数确定市场风险资本计算的附加因子，并按季度将返回检验结果及附加因子调整情况报告银监会。

银监会对商业银行返回检验结果和附加因子调整情况进行监督。

（二）符合以下情况的，商业银行可向银监会申请不根据实际突破次数调整附加因子：

1．商业银行如能合理说明其使用的模型基本稳健，以及突破事件只属暂时性质，则银监会可以决定不将该突破事件计入突破次数。

2．当金融市场发生实质性的制度转变时，市场数据的波动与相关系数的重大变化可能引发短时间内的大量突破事件。在这种情况下，银监会可要求商业银行尽快把制度转变的因素纳入其内部模型，这一过程中可暂不调高附加因子。

（三）内部模型的返回检验应至少满足以下要求：

1．商业银行应每日计算基于 T-1 日头寸的风险价值与 T 日的损益数据并进行比较，如损失超过风险价值则称为发生一次突破。

2．上述风险价值的持有期为 1 天，置信区间、计算方法以及使用的历史数据期限等参

数应与使用内部模型法计提市场风险资本要求时所用参数保持一致。
3．突破的统计方法采用简单突破法，即每季度末统计过去 250 个交易日的返回检验结果中总计发生的突破次数。
4．商业银行向银监会申请实施内部模型法时，应建立返回检验流程，并积累至少一年的返回检验结果数据。
（四）使用内部模型法计量特定市场风险资本要求的，商业银行应对相关的利率和股票类子组合进行返回检验。
（五）商业银行应建立返回检验的文档管理和报告制度。
1．商业银行应对返回检验过程及结果建立完整的书面文档记录，以供内部管理、外部审计和银监会查阅使用。
2．返回检验突破事件发生后，应及时书面报告商业银行负责市场风险管理的高级管理层成员。
3．商业银行正式实施市场风险内部模型法后，应每季度将过去 250 个交易日的返回检验结果报告提交银监会。
（六）按照过去 250 个交易日的返回检验突破次数，其结果可分为绿区、黄区和红区三个区域。
1．绿区，包括 0 至 4 次突破事件。绿区代表返回检验结果并未显示商业银行的内部模型存在问题。

2．黄区，包括 5 至 9 次突破事件。黄区代表返回检验结果显示商业银行的内部模型可能存在问题，但有关结论尚不确定，因此，模型是准确或不准确均有可能。通常情况下，随着出现突破事件次数由 5 次增加至 9 次，模型不准确的可能性会逐步增大。

3．红区，包括 10 次或以上突破事件。红区代表返回检验结果显示商业银行的内部模型存在问题的可能性极大。

（七）市场风险返回检验突破次数、分区及资本附加因子的对应关系见表 1。

表 1：突破次数与附加因子关系表

分区	过去 250 个交易日的返回检验突破次数	资本附加因子
绿区	少于 5 次	0.00
黄区	5 次	0.40
	6 次	0.50
	7 次	0.65
	8 次	0.75

	9 次	0.85
红区	10 次或以上	1.00

（八）模型验证要求

商业银行采用内部模型法计算市场风险监管资本要求，应按本办法的规定对市场风险内部模型及支持体系进行验证，确保模型理论正确、假设合理、数据完整、模型运行情况良好、计算准确、使用分析恰当。市场风险内部模型验证的详细要求见本办法附件 14。

思考题：为什么巴塞尔协议规定附加因子（乘数）是 3

3.3 压力测试和情景分析

资料来源 ERM-120-14: IAA Note on Stress Testing and Scenario Analysis (pp. 1-6 and 14-17)

压力测试和情景分析都是 VaR 的补充。

情景分析：当风险因子发生异常变化时，VaR 会发生什么样的变化。

情景分析中所用的情景通常包括基准情景、最好的情景和最坏的情景。

情景人为设定（如直接使用历史上发生过的情景），例如 1987 年 10 月 19 日，美国股票价格跌 23%。

也可以从对市场风险要素历史数据变动的统计分析中得到，

或通过运行描述在特定情况下市场风险要素变动的随机过程得到 。

3.3.1 如何产生分析情景？

1、复制历史情景

- 例如 1987 年 10 月 19 日
  - 股票市场全球下跌近 20%，波动率从 20%上升-50%
  - 亚洲货币汇率下跌 10%
  - 西方市场利率下跌，香港长期利率上升 40bp，短期利率上升 100bp
  - 商品价格下降

- 例如 1994 年， 美国通货恐慌，联邦银行的货币紧缩政策
  - 隔夜拆借利率上升 100bp，长期利率上升 50bp
  - G-7 国和瑞士利率上升，但没有美国幅度大
  - G-7 国货币贬值
  - 信用利差扩大
  - 股票市场下降 3%-6%，波动性加大

2、*一次性假设情景 Hypothetical One-Off Scenarios*

  - 关于魁北克独立的公民投票
  - 信用利差扩大

- 互换利差扩大或缩小
- 人民币贬值导致的亚洲金融危机

3、最坏情景分析：在一个给定的期间内,资产组合价值可能遭受的最大损失是多少?

- 设 Z_1，…，Z_H 表示投资组合的正则化收益，H 为时间长度，如 250 日。最坏情景分析就是计算 $\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_H)$
- 最坏情景分析需要计算 $\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_H)$分布。常用 Monte Carlo 模拟。
- 最坏情景分析比 VaR 要保守()，2.82〉2.33

	Horizon (days)			
	5	20	100	250
E[number of Z_i<–2.33]	0.05	0.20	1.00	2.50
Expected WCS	–1.16	–1.86	–2.51	–2.82
First percentile of Z	–2.80	–3.26	–3.72	–3.92

The worst case scenario (WCS), i.e., $\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_H)$, denoted Z, is defined as the lowest observation in a vector $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_H)$ of length H = 5, 20, 100, and 250 days of independent draws. These draws are normally distributed with mean 0 and volatility 1.

Source: Boudoukh et al. (1995), Risk 8(9).

在任意的给定 1 年内,某个交易日的实际损失超过 $2.33s_p$ 的可能性是 1%，而最糟糕损失

大约 3.92σ_p 的可能性也有 1%. 预期最糟糕情况的损失为 2.82σ_p.

3.3.2 情景分析的原理

- 定义 s 为选定的一个情景。针对 k 个风险因子，得出一套 $Df_{k,s}$.依据新的虚拟风险因子价值 $f_{k,0}$+ $Df_{k,s}$, 重新估值资产组合的价值，计算投资组合价值的回报。

$$R_{p,s}=V_s-V_0=V(f_{1.0}+\Delta f_{1.s},\cdots,f_{k.0}+\Delta f_{k.s})-V(f_{1.0},\cdots,f_{k.0})$$

3.3.3 压力测试（Stress Testing ）

- 压力测试: 资产组合在极端情况下可能出现多大损失.
- 压力测试的项目
  - 收益率曲线向上或向下平移 100bp
  - 收益率曲线扭转 25bp
  - 股指增加或减少 10% 。
  - 汇率增加或减少 6%。
  - 波动率增加或减少 20%。
- 在上述极端变化下，资产组合的价值将会发生的变化。
- 对某些资产组合，监管者可能要求对一些特殊风险进行压力测试，如流动性风险。

3.3.4 反向压力测试

- 利用计算机算法来求得对应大幅损失的情景。
- 对于压力测试委员会来说是一个有用的参考。
- 金融机构可以求得那些高管没有充分意识到，但会对金融机构产生灾难性影响的情景。
- 压力测试委员会可因此对其他一些情景进行修改来使其合理，然后对这些情景进行更深刻的研究。

3.3.5 压力测试和情境分析的优缺点

- 优点
  - 识别一系列极端事件对资产组合的影响
- 缺点
  - 一些极端事件与经济规律违背，因此在构造一个情景时，最重要的是要确保其具有经济上的意义。
  - 极端事件的可能组合是很多的，但是实际操作中却能分享其中很有限的部分。
  - 市场危机通常会持续一段时间，流动性会消失。而情景分析是静态的。
  - 情景分析只分析最坏损失，但是没有分析发生这些损失的概率。
  - 处理相关性很弱

参考文献

- 刘子斐、 史敬， VaR 模型比较技术及其评价——理论、实证回顾及其应用初探，金融研究，2008 年第 5 期。
- 菲利普 .乔瑞，VaR，金融风险管理新标准