第七章 市场风险建模

主要内容

7.1 ERM 要求

7.2 VaR 系统

7.3 风险敞口建模

7.4 不同资产的风险映射

7.5 案例

参考资料

- ERM-602-12: Investment Management for Insurers, Babbel and Fabozzi,
    - Ch. 11, The Four Faces of an Interest Model
- Financial Enterprise Risk Management, Sweeting
    - Ch. 14 Quantifying Particular Risks
- ERM-104-12: Study Note on Parameter Risk
    - Ch. 15.5 Unquantifiable Risks
- QRM 第 9 章
- Value-at- Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, Jorion, 3rd Edition
    - Ch. 8, Multivariate Models
    - Ch. 11, VAR Mapping
    - Ch. 17, VAR and Risk Budgeting in Investment Management, excluding Sections 17.3 and 17.4

7.1 ERM 要求

- **风险建模**

a）对面临的每一种财务和非金融风险进行定量分析，包括解释诸如风险价值（VaR），随机分析和情景分析等各种技术的优缺点。

b）评估风险的相关性，并给出与正相关的风险和负相关的风险的例子。

c）分析和评估风险汇总技术，包括使用相关性，综合风险分布和 Copulas。

d）在风险测量过程中应用和分析情景和压力测试。

e）评估极值理论在风险测量和建模中的理论与应用。

f）分析分布尾数，尾部相关性和低频/高严重性事件的重要性。

g）分析和评估模型和参数风险。

h）构建各种风险模型的方法，并评估一个实体如何对技术进行建模，测量和整合风险的决策，包括但不限于随机过程.

- **风险测度**

a）应用和构建风险度量，以量化风险敞口的主要类型，如市场风险，信用风险，流动性风险，操作风险，监管风险等，以及综合风险管理流程中的公差。

b）分析和评估风险度量的属性（例如，Delta，波动性，持续时间，VaR，TVaR 等）及其限制。

c）使用现代统计方法分析定量金融市场数据和保险数据（包括资产价格，信用利差和违约，利率，发生率，原因和损失）。

d）分析不容易量化的风险，如经营风险和流动性风险

本章要回答的问题：

一个投资组合通常包含大量头寸比如债券、股票、外汇、商品合约及它们的衍生品。如何计算投资组合的 VaR。例如

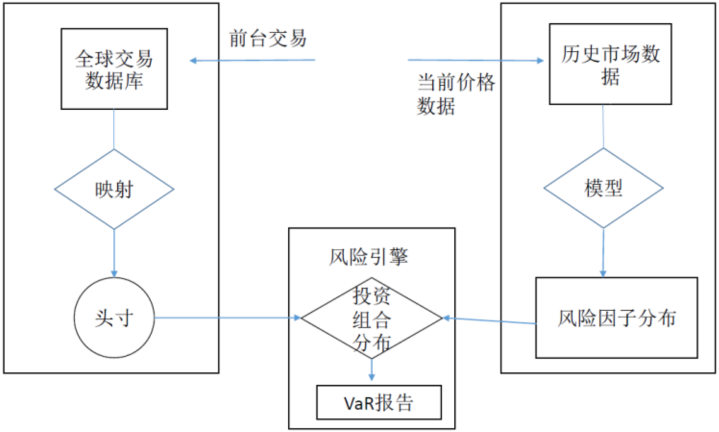
1、 假设你拥有价值 1 亿美元的债券组合，包含 20 种期限的债券，如何计算该组合的 VaR？

2、 假设你持有数千笔美元/欧元的远期合约，每个合约的到期日和交割时间各不相同，如何计算交易组合的 VaR？

3、 假设你持有空头跨式期权组合，如何计算该组合的 VaR 值？

7.2VaR 系统

潜在的收益和损失可以归结为两个来源，风险管理系统的结果通过二分法进行分解：



VaR系统

1、风险敞口：交易员或投资组合经理对投资的主动选择组合的头寸

2、风险因子的变化：

- ■ 参数法
  - ◆ 正态分布、t 分布、多元分布、极值理论
- ■ 非参数方法
  - ◆ 历史数据的经验分布

7.2.1 市场与经济风险建模步骤

第一步：选择合适数量的风险因子，对所有头寸进行合理市场定价，单位按美元或其他货币

第二步：把每一项金融产品头寸映射到各个风险因子上（如图）

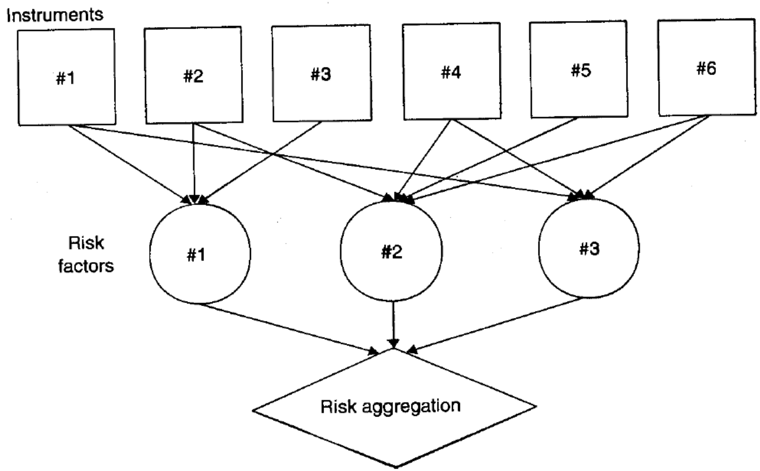
第三步：在整个投资组合基础上对这些风险因子进行汇总，得到映射到风险因子的净头寸

第四步：　计算整体风险 VaR 值

风险映射过程图示

FIGURE 11-1

Mapping instruments on risk factors.



		风险因子敞口		
	市场价值	1	2	3
产品 1	V_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
产品 2	V_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
…	…	…	…	…
产品 6	V_6	x_{61}	x_{62}	x_{63}
总价值	V	$x_1 = \sum_{i=1}^{6} x_{i1}$	$x_2 = \sum_{i=1}^{6} x_{i2}$	$x_3 = \sum_{i=1}^{6} x_{i3}$

例如：第一个金融产品的市场价值为 V1，被分解为 3 个风险敞口，分别是 x11,x12,…,x13 如果当前的市场价值没有被完全分配到 3 个风险因子上，则意味着剩余的价值以现金持有。

7.2.2 如何选择基本风险因子

1、股票：

市场指数是基本风险因子。假设有 N 只股票的投资组合

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

假定特别风险εi与其他股票以及整个市场指数不相关组合中的每一只股票的相对权重为 wi。

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i R_m + \sum_{i=1}^{N} w_i \varepsilon_i$$

把投资组合内的所有股票风险敞口加总

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i$$

如果投资组合的价值为 W，则对指数的映射为 $x = W\beta_p$。

如果对 R_p 方差分解，得到

$$V\left(R_p\right) = \left(\beta_p^2\right)V\left(R_m\right) + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2$$

第一个组成部分是一般市场风险。第二个组成部分是整个投资组合具体风险的整合。该分解说明了对初始信息或者一般市场风险因子了解得越多，在总风险 $V\left(R_p\right)$ 固定的情况下，具体风险会越少。

2、债券组合：

债券头寸可以通过分布在时间上的现金流来描述。

基本风险因子可以是 J 个政府债券到期收益率 zj 的变化的集合,和按照信用等级排序的 K 个信用价差 sk 变化的集合。我们用与其到期日最相近的国债 z 和与它相同信用等级 s 的变化，来描述每只债券的到期收益率变化 dy，剩余的通过εi来表示。

$$dW=\sum_{i=1}^{N}DVBP_i dy_i=\sum_{j=1}^{J}DVBP_j dz_j+\sum_{i=1}^{k}DVBP_i ds_i+\sum_{i=1}^{N}DVBP_i d\varepsilon_i$$

上式中，DVBP 是相关风险因子每一个基点对应的总美元价值，$DVBP_i$的值表示了不同期限下所有债券$DVBP_i$

3、期权：考虑由一个以不发放股利的股票 S 为标的的标准欧式看涨期权构成的投资组合，该期权的到期期限为 T，执行价格为 K。

- 该资产在时刻 t 的 Black-Scholes 价值为$C^{BS}\left(t,S_t,r,\sigma\right)$，其中

$$C^{BS}\left(t,S_t;r,\sigma\right)=S\Phi\left(d_1\right)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2\right)$$

Φ 是标准正态分布的分布函数，r 表示无风险利率，σ 表示标的股票的波动性，且

$$d_1=\frac{\log\left(S/K\right)+\left(r+\sigma^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

在 BS 模型中，假设利率和波动性都是不变的，但实际上它们是会随着时间变化的；因此应该将它们加入风险因子集合中。

- 风险因子: $Z_t=\left(\log S_t,r_t,\sigma_t\right)'$

- 风险因子变化量: $X_t=\left(\log\left(S_t/S_{t-1}\right),r_t-r_{t-1},\sigma_t-\sigma_{t-1}\right)'$

- T 映射: $V_t=C^{BS}\left(\tau_t,S_t;r_t,\sigma_t\right)=g\left(\tau_t,Z_t\right)$

7.3 风险敞口建模

主要有两类建模方法

- 局部估值
  - 线性近似 Delta
  - 非线性近似：Delta-gamma、Delta-Gamma-Delta
- 完全估值
  - 随机模拟
  - 历史模拟

7.3.1 记号

- 设投资组合的价值为 V_t，风险因子是 S
- 随着时间的风险因子变化 $X_{t+1} = S_{t+1} - S_t$.
- .风险因子历史数据一般采用时间序列 $X_{i-n}, \ldots, X_{i-1}, X_t$ 的形式，并且是用来预测 X_{t+1}。
- 投资组合的损失

$$
\begin{aligned}
L_{t+1} &= -\left(V_{t+1} - V_t\right) \\
&= -\left(g\left(\tau_{t+1}, S_{t+1}\right) - g\left(\tau_t, S_t\right)\right) \\
&= -\left(g\left(\tau_t + \Delta t, S_t + X_{t+1}\right) - g\left(\tau_t, S_t\right)\right)
\end{aligned}
$$

- 时刻 t 风险因子的值 S_t 已知，损失 L_{t+1} 是由风险因子的变化 X_{t+1} 决定的。

- 给定的一个实现值，时刻 t 的损失算子定义为

$$l_{[t]}(x) = -\left(g\left(\tau_1 + \Delta t, s_t + x\right) - g\left(\tau_t, s_t\right)\right)$$

  则 $L_{t+1} = l_{[t]}\left(X_{t+1}\right)$.

- 损失算子体现了全面重估的想法。
- .从时刻 t 的角度，损失 L_{t+1} 的分布是由 X_{t+1} 的多元分布决定的。

7.3.2 完全估值模型

完全估值模型需要计算在较宽区间不同价格水平下投资组合的价值损失。主要通过随机模拟的方法，或历史数据（历史模拟法），对每个风险因子设定一个随机过程，模拟出大量的风险因子样本路径，如价格的样本路径，对每一条样本路径进行 完全估值，就可以在指定的期限上得到投资组合价值的分布，最后计算投资组合的 VaR 值。

7.3.2.1 蒙特卡罗模拟步骤

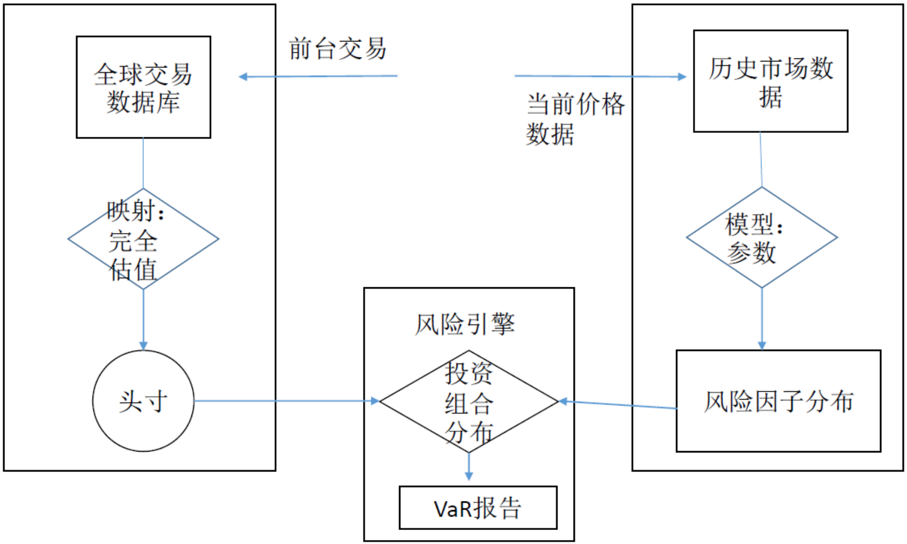
采用蒙特卡罗模拟法，计算交易组合一天展望期的 VaR：

- 利用当前的市场变量对交易组合进行定价得到 V_t
- 选择随机过程和参数
- 从风险因子的变化量 X_t 服从的多元分布或随机过程中进行一次抽样 x
- 由 X_t 的抽样计算出在交易日末的市场变量 $s_t + x$
- 利用新产生的市场变量来对交易组合重新定价 $V_{t+1} = g\left(\tau_{t+1}, S_{t+1}\right)$
- 计算 $L_t = -(V_{t+1} - V_t)$
- 重复 2-5 步的计算足够多次，比如 10000 次

这一过程得出 $L_t^1, \cdots, L_t^{10000}$ 的值，我们可以对其排序，并计算出经验概率分布 $F_{L_t}(x)$ 和分位数 $\pi(F_{L_t}, c)$，以及经验均值和 VaR 值

$$VaR(c,T) = E(L_t) - \pi(F_{L_t}, c)$$

7.3.2.2 随机模拟法流程



随机模拟方法

例：计算股票组合的 VaR

- 首先，选择所有风险因子，设定其动态模型（可能需要估计均值、方差和相关系数等变量），例如股票价格服从如下随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- 其次，构造价格路径，例如上述随机微分方程的解为

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]$$

W_t 是标准布朗运动。

要模拟产生股票价格路径，首先将上述过程离散化，

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta t Z\right]$$

Δt = t-1 到 t 之间的时间间隔

Z = 服从标准正态分布 N(0,1)的变量，则

$$W_t = W_{t-1} + \sqrt{\Delta t} Z$$

利用均匀分布随机数，可以得出构造价格路径所需要的随机数据。

- 当有多个风险资产 $S_t^1, \ldots, S_t^n$ 服从式（27）的几何布朗运动随机过程 ，相关系数为 ρ_{ij}，均值为 μ_i，方差为 σ_i 可将多变量方程写为

$$E\left[W_t^i W_t^j\right] = \rho_{ij} t$$

$$S_t^i = S_0^i \exp\left[\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sqrt{t}\sigma_i X_i\right]$$

$X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ 是多元正态随机向量，均值等于 0，方差矩阵为 Σ，

$\Sigma_{ij} = E\left(XX^T\right) = \rho_{ij}$ 产生随机向量 $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ 的方法

  - 先产生 n 个正态随机变量随机数

- 计算矩阵 A，使得$\Sigma = AA^T$ 例如

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \left(1-\rho^2\right)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \left(1-\rho^2\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

- 产生随机向量

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \left(1-\rho^2\right)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = Y^1$$

$$X^2 = \rho Y^1 + \left(1-\rho^2\right)^{1/2} Y^2$$

- 最后，计算资产组合的价格和 VAR

模拟 10000 次的价格路径，得到资产组合的价格经验分布，计算 1%的分位数。

思考：除了多元正态分布，你还可以产生哪些多元分布的随机数？

例：模拟动态利率路径

单因素利率模型

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma} dz_t$$

参数的含义：

K<1 定义了向长期均值 θ 回归的速度。

如果当前利率较高时，如 $r_t > \theta$ ，表明存在负向漂移，直至利率回归 θ 。反之，则相反

$\gamma = 0$ ===〉Vasicek（1977）

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt$$

$\gamma = 0.5$ ===〉 The Cox–Ingersoll–Ross model

$$\Delta r_t = \left(\alpha_t - \beta r_{t-1}\right)\Delta t + \sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_t$$

$\gamma = 1$ ===〉 对数正态模型

其他模型 Ho-Lee 模型即期利率

可以用Δr_t来表示，r_t和r_{t-1}之间的差别，其中r_t是从时间 t-1 到 t 的利率：

$$\Delta r_t = \alpha \Delta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta r_t = \alpha_t \Delta t + \varepsilon_t$$

Vasicel 和 Hull-White 模型

$$\Delta r_t = \left(\alpha - \beta r_{t-1}\right)\Delta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta r_t = \left(\alpha_t - \beta r_{t-1}\right)\Delta t + \varepsilon_t$$

The Black–Karasinski model:

$$\Delta \ln r_t = \left(\alpha_t - \beta_t \ln r_{t-1}\right)\Delta t + \varepsilon_t$$

多因素利率模型

The Brennan–Schwartz model:

$$\Delta r_{1,t} = \left[\alpha_1 + \beta_1\left(r_{2,t-1} - r_{1,t-1}\right)\right]\Delta t + r_{1,t-1}\varepsilon_{1,t}$$
$$\Delta r_{2,t} = r_{2,t-1}\left(\alpha_2 + \beta_2 r_{1,t-1} + \gamma_2 r_{2,t-1}\right)\Delta t + r_{2,t-1}\varepsilon_{2,t}$$

其中 $r_{1,t}$ 是时间 t 的短期利率，和 r_{2t} 是时间 t 的长期利率。

直观解释

•短期利率的变化与收益率曲线的陡度成比例(即长期利率超过短期利率的程度;

•短期利率的波动性与短期利率水平成正比;

长期利率的变化与长期和短期利率的乘积成比例;

•长期利率的变化与长期利率水平的平方成正比;和

•长期利率的波动性与长期利率水平成正比。

总结：我们已经掌握的随机模拟方法

- 单变量的随机模拟

  正态分布、t 分布、等

- 多变量的随机模拟

  多元正态（Cholesky 分解）、方差混合正态分布、椭圆分布、多元 t 分布、meta-C 分布

- 时间序列的随机模拟
  - 股票价格-几何布朗运动
  - ARMA-GARCH 模型
  - 单因素随机利率模型：vasicek 模型、CIR 模型
  - 多因素随机利率模型

完全估值法的优缺点：

速度与精度的权衡

模型风险

7.3.3 局部估值

局部估值法通过偏导数来测量风险敞口。

为了解释这一过程，我们引入一个金融产品，其价值完全取决于**单一的风险因子 S**。

第一步，先估计该资产在初始位置的价值，即

$$V_t = V\,(S)$$

第二步：对估值函数进行泰勒展开。

A．一阶泰勒展开——Delta-normal 方法

$$\mathrm{dV} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\Big|_0 dS = \Delta_0 \times dS = (\Delta_0 S)\frac{dS}{S}$$

假设风险因子的变化 dS/S 服从正态分布，则

$$\mathbf{VAR} = |\Delta_0| \times \mathbf{VAR}_{\boldsymbol{S}} = |\Delta_0| \times (\boldsymbol{\alpha\sigma S_0})$$

例：债券，风险因子是到期收益率 y，

$$\mathrm{dV} = (-\mathrm{D}^{*}\mathrm{V})\mathrm{dy}$$

D*是修正久期，美元敞口是 x=-D*V。这是，组合的 VaR 值为

$$\mathrm{VAR} = |\mathrm{D}^{*}\mathrm{V}| \times (\alpha\sigma)$$

例：欧式看涨期权

考虑由一个以不发放股利的股票 S 为标的的标准欧式看涨期权构成的投资组合，该期权的到期期限为 T，执行价格为 K。该资产在时刻 t 的 Black-Scholes 价值为$C^{BS}(t,S_t,r,\sigma)$，其中

$$C^{BS}(t,S_t;r,\sigma) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

- 风险因子: $Z_t = (\log S_t, r_t, \sigma_t)'$

- 风险因子变化量： $X_t = \left(\log\left(S_t / S_{t-1}\right), r_t - r_{t-1}, \sigma_t - \sigma_{t-1}\right)'$

- T 映射: $V_t = C^{BS}\left(\tau_t, S_t; r_t, \sigma_t\right) = g\left(\tau_t, Z_t\right)$，用一阶泰勒展开来估计 g

$$g\left(\tau_t + \Delta t, s_t + x\right) \approx g\left(\tau_t, s_t\right) + g\left(\tau_t, s_t\right)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} g_{z_i}\left(\tau_t, s_t\right) x_i$$

其中 τ 和 s_i 分别表示时间和风险因子的偏导。

- 这使得我们能用时刻 t 的线性损失算子来估计中的损失算子：

$$l_{[t]}^{\Delta}(x) := -\left(g_{\tau}\left(\tau_t, \mathrm{s}_t\right)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} g_{z_i}\left(\tau_t, \mathrm{s}_t\right) x_i\right)$$

注意，对一个较短的时间期限 Δt ，一般来说很小，实际中有时可以忽略。

- 对衍生品来说，常常使用线性损失算子：

$$L_{t+1}^{\Delta} = l_{[t]}^{\Delta}\left(X_{t+1}\right) = -\left(g_{\tau}\left(\tau_t, z_t\right)\Delta t + \sum_{i=1}^{3} g_{z_i}\left(\tau_t, z_t\right) X_{t+1,i}\right)$$

其中 g_{τ}, g_{z_i} 表示偏导。

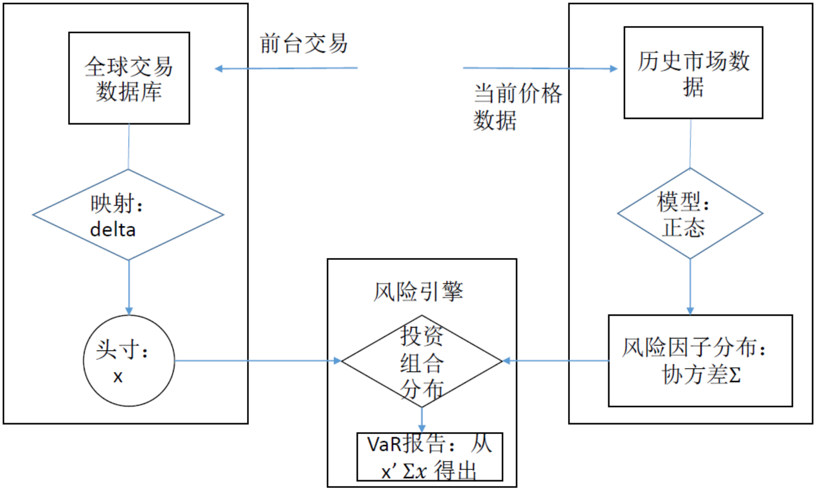
- 由于 Black-Scholes 中的参数是以年计的，则 Δt 是时间间隔的长度（以年计）。
- 对 BS 公式或者 Greek 的衍生，将线性损失算子写成下式更常见：

$$l_{[t]}^{\Delta}\left(x\right) = -\left(C_t^{BS} + C_S^{BS} S_t x_1 + C_r^{BS} x_2 + C_{\sigma}^{BS} x_3\right)$$

  - C_S^{BS} 是期权的 delta。
  - C_{σ}^{BS} is the vega. C_{σ}^{BS} 是期权的 vega。
  - C_r^{BS} 是期权的 rho。

- C_t^{BS} 是期权的 theta。

注意 S_t 是以 C_S^{BS} 的形式出现的。因为风险因子是 $\ln S_t$ 而不是 S_t，并且 $C_{\ln S}^{BS} = C_S^{BS} S_t$。



Delta-Normal

但是一阶线性近似对于非线性产品是不够的。

B．二阶泰勒展开——**Delta-gamma 模型**

首先考虑一个金融产品，其价值完全取决于**单一的风险因子 S**，对定价公式进行二阶泰勒展开

$$\mathrm{dV} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \cdots = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \Theta dt + \cdots$$

$$\mathrm{dV} = -(\mathrm{D^*V})\mathrm{dy} + \frac{1}{2}(CV)dy^2 + \cdots$$

$$\mathrm{VAR} = \mathrm{V}(S_0) - V(S_0 - \alpha\sigma S_0)$$

$$= \mathrm{V}(S_0) - [\mathrm{V}(S_0) + \Delta(-\alpha\sigma S_0) + \frac{1}{2}\Gamma(-\mathrm{\alpha\sigma S})^2]$$

$$= |\Delta|(\mathrm{\alpha\sigma S}) - \frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{\alpha\sigma S})^2$$

对于多个风险因子，设映射函数为 g。

令 $\delta(\tau_t, z_t) = \left(g_{z_1}(\tau_t, z_t), \ldots, g_{z_d}(\tau_t, z_t)\right)'$ 表示映射函数对风险因子的一阶偏导。

令$\omega(\tau_t,z_t)=\left(g_{z_1\tau}(\tau_t,z_t),\ldots,g_{z_d\tau}(\tau_t,z_t)\right)'$表示映射函数对时间和风险因子的混合偏导。

令$\Gamma(\tau_t,z_t)$表示第 i 行，第 j 列的元素为$g_{z_iz_j}(\tau_t,z_t)$的矩阵；该矩阵的对角线元素表示对单个风险因子的 gamma 敏感性，非对角线元素表示两两风险因子的交叉 gamma 敏感性。

映射函数 g 的完全二阶估计为

$$\begin{aligned} g(\tau_t+\Delta t,z_t+x)\approx g(\tau_t,z_t)+g_\tau(\tau_t,z_t)\Delta t+\delta(\tau_t,z_t)'x+ \\ \frac{1}{2}\left(g_{\tau\tau}(\tau_t,z_t)(\Delta t)^2+2\omega(\tau_t,z_t)'x\Delta t+x'\Gamma(\tau_t,z_t)x\right) \end{aligned}$$

实际中，常常忽略$o(\Delta_t)$（Δ_t的无穷小量）。在标准连续时间金融模型中，比如 Black-Scholes，风险因子的变化量是$\sqrt{\Delta_t}$的无穷小量。

从而得到二次损失算子为

$$l_{[t]}^{\Delta\Gamma}(x) = -\left(g_{\tau}(\tau_t, z_t)\Delta t + \delta(\tau_t, z_t)' x + \frac{1}{2} x' \Gamma(\tau_t, z_t) x \right)$$

它要比线性损失算子更精确。

例：债券

债券的价格-收益曲线是非线性的。如果将债券价格公式二阶展开

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{P\left(y+\Delta y\right)-P\left(y\right)}{P\left(y\right)}=\underbrace{\frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta y}}_{D^*}\Delta y+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{P}\frac{\Delta^2 P}{\Delta y^2}}_{CX}\Delta y^2$$

$$\frac{\Delta P}{P}=-D^*\Delta y+\frac{1}{2}CX\Delta y^2$$

$$CX=\frac{1}{P}\frac{\Delta^2 P}{\Delta y^2}=\frac{1}{P}\frac{\Delta}{\Delta y}\left[\frac{\Delta P}{\Delta y}\right]\text{代表凸度}$$

连续复利的凸度,B 为债券价格

$$C=\frac{1}{B}\frac{d^2 B}{dy^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

例（欧式看涨期权）

二次损失算子为

$$C^{BS}\left(t,S_t;r,\sigma\right)=S\Phi\left(d_1\right)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2\right)$$

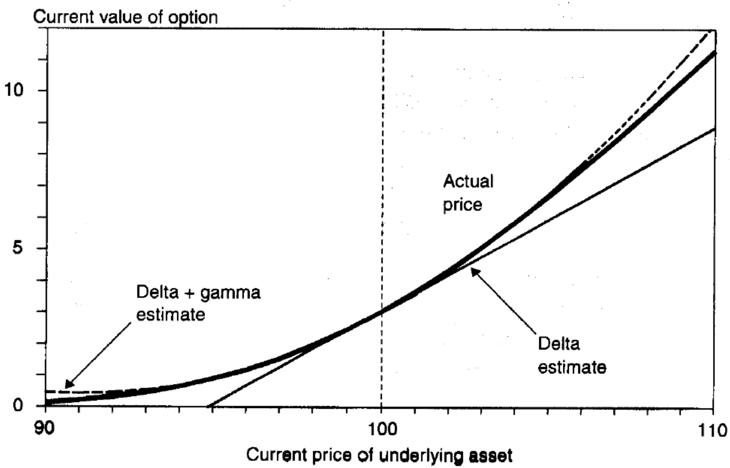
$$l_{[t]}^{\Delta\Gamma}\left(x\right)=l_{[t]}^{\Delta}\left(x\right)-0.5\left(C_{SS}^{BS}S_t^2x_1^2+C_{rr}^{BS}x_2^2+C_{\sigma\sigma}^{BS}x_3^2\right)-\left(C_{Sr}^{BS}S_tx_1x_2+C_{S\sigma}^{BS}S_tx_1x_3+C_{r\sigma}^{BS}x_2x_3\right)$$

二阶 Greeks 的名字相当模糊，这里是部分结果：

- C_{SS}^{BS} is known as the gamma of the option; C_{SS}^{BS} 是期权的 gamma。
- $C_{\sigma\sigma}^{BS}$ is the vomma; $C_{\sigma\sigma}^{BS}$ 是期权的 vomma。
- $C_{S\sigma}^{BS}$ is the vanna. $C_{S\sigma}^{BS}$ 是期权的 vanna。

下面图近似地描绘了看涨期权多头的近似结果

Delta-gamma approximation for a long call.



- 只有当价格围绕原始值做小幅移动时，线性模型才有效
- Delta 并不是固定变化的。

7.4 不同资产的风险映射

为什么要映射。

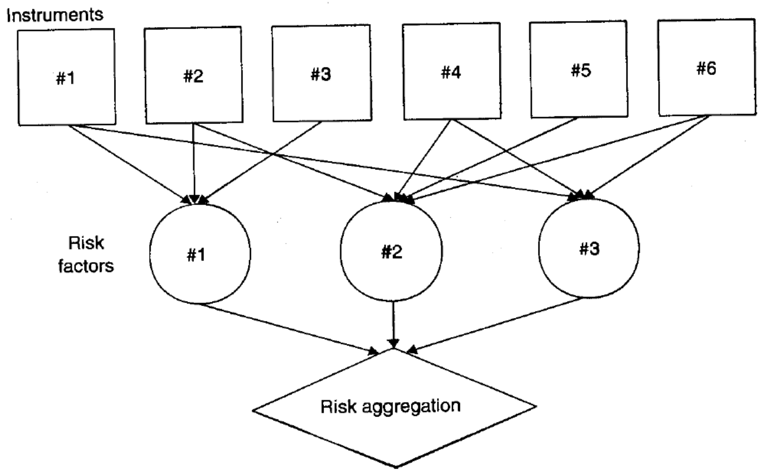
一个投资组合通常包含大量头寸比如债券、股票、外汇、商品合约及它们的衍生品。对每个资产进行分别考虑是不切实际的。映射使得我们可以将大量头寸简化为少量数目的风险因子。例如，某交易员持有数千笔敞口的美元/欧元的远期合约，这些合约的到期日和交割价格各不相同。但这并需要对每个头寸进行单独计算。这些头寸对一个主要风险因子有敞口，即美元/欧元即期汇率。

两种方式

1. 将风险敞口精确分配到风险因子
2. 通过估计得到风险敞口

FIGURE 11-1

Mapping instruments on risk factors.



风险映射过程图示

		Exposure on Risk Factor		
	Market Value	1	2	3
Instrument 1	V_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Instrument 2	V_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
…	…	…	…	…
Instrument 6	V_6	x_{61}	x_{62}	x_{63}
Total portfolio	V	$x_1 = \sum_{i=1}^{6} x_{i1}$	$x_2 = \sum_{i=1}^{6} x_{i2}$	$x_3 = \sum_{i=1}^{6} x_{i3}$

例如：第一个金融产品的市场价值为 V1，被分解为 3 个风险敞口，分别是 x11,x12,…,x13 如果当前的市场价值没有被完全分配到 3 个风险因子上，则意味着剩余的价值以现金持有。

下面介绍主要金融产品的映射过程

- 股票
- 债券
- 远期
- 互换
- 期权

7.4.1 股票组合的风险建模

以均值方差法为例，基本风险因子选取市场指数，Ri 为第 i 支股票的收益率， ε_i 是特定风险

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i R_m + \sum_{i=1}^{N} w_i \varepsilon_i \text{,} \qquad .$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i$$

投资组合的价值是 W，指数的映射为 $x = W\beta_p$。

$$V\left(R_p\right) = \left(\beta_p^2\right) V\left(R_m\right) + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2$$

第一个组成部分是一般市场风险。第二个组成部分是整个投资组合特定风险的整合。该分解说明了对初始信息或者一般市场风险因子了解得越多，在总风险$V\left(R_p\right)$固定的情况下，具体风险会越少。

7.4.2 债券的风险映射

1、头寸和风险因子

债券头寸可以通过分布在时间上的现金流来描述。

基本风险因子可以是 J 个政府债券到期收益率 z_j 的变化的集合，和按照信用等级排序的 K 个信用价差 s_k 变化的集合。我们用与其到期日最相近的国债 z 和与它相同信用等级 s 的变化，来描述每只债券的到期收益率变化 dy，剩余的通过ε_i来表示。

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{DVBP_i} dy_i = \sum_{j=1}^{J} \mathrm{DVBP_j} dz_j + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{DVBP_i} ds_i + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{DVBP_i} d\varepsilon_i$$

上式中，DVBP 是相关风险因子每一个基点对应的总美元价值，$\mathrm{DVBP_i}$的值表示了不同期限下所有债券$\mathrm{DVBP_i}$

总风险可以按照下面的方式进行分解

$$V(dW) = 一般风险 + \sum_{i=1}^{N} DVBP_i^2 V(d\varepsilon_i)$$

2、计算债券组合的 VaR 值的方法

- 映射方法（分为三种）
  - 本金，选上的风险因子与组合的平均到期期限对应。
  - 久期，风险因子要与组合的久期相符
  - 现金流，组合的现金按照期限段进行分组
- 从零息票债券曲线的变动直接推导
- 主成分分析法

方法一：映射法计算 VaR

例：2 只债券：5 年期，面值 1 亿，息票率 6%；1 年期，面值 1 亿，息票率 4%。两只债券都按照面值平价发行，因此组合的市场价值是 2 亿美元，组合的平均期限是 3 年，久期为 2.733。我们要计算该组合在各风险因子的头寸。下表给出了所有现金流的贴现值和映射法结果。

Table　Mapping for a Bond Portfolio ($ Millions)

Term (Year)	风险% VaR	Cash Flows			映射结果		
		5-Year	1-Year	即期利率	本金	久期映射	现金流映射
1	0.4696	$6	$104	4.000%	0.00	0.00	$105.77
2	0.9868	$6	0	4.618%	0.00	0.00	$5.48
2.733		-	-		-	$200.00	-
3	1.4841	$6	0	5.192%	$200.00	0.00	$5.15

4	1.9714	$6	0	5.716%	0.00	0.00	$4.80
5	2.4161	$106	0	6.112%	0.00	0.00	$78.79
Total					$200.00	$200.00	$200.00

(1)、 本金映射 只考虑债券的偿还期。由于组合的平均期限为 3 年。风险为 1.484%，所以组合的 VaR 值是 2 亿*1.4841=297 万美元。

(2)、 久期映射：将组合久期 2.733 分配到相邻的 2 年和 3 年期限的债券组合，有两种方法：久期匹配和方差匹配

A．久期匹配 $$xD_1 + (1-x)D_2 = D_p$$

计算得到 $$x = (D_2 - D_p)/(D_2 - D_1)$$

$$x = (3-2.7325)/(3-2) = 0.2675$$

因此，该债券组合分配给 2 年期的头寸 $\$200 \times 0.2675 = \$53.49$，3 年期的头寸为 1.4651 亿美元。

采用线性内插法，这只假设的零息票债券的利率风险为

$$0.987 + (1.484 - 0.987) \times (2.733 - 2) = 1.351$$

该债券组合 VaR 值为 2*1.351/100=272 万美元。

但是该方法没有创建一个与初始投资组合风险相等的投资组合。

（2）方差匹配

定义 D1、D2 的波动性分别为 σ_1 和 σ_2，相关系数为 ρ ，则投资组合的方差为

$$V(R_p) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_1\sigma_2$$

设定其与两个期限顶点之间零息票债券的方差相等，即 $V(R_p)$=1.351，求解方程

$$\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\right)x^2+2\left(-\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2\right)x+\left(\sigma_2^2-\sigma_p^2\right)=V(R_p)$$

利用一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$，求解得到

$$x=\left(-b\pm\sqrt{b^2-ac}\right)/a\Rightarrow x_1=0.2635,\ \ x_2=5.2168$$

保留第一个根，得到 2 年期的头寸为 5271 万美元，3 年期的头寸为 1.4729 亿美元。下表给出了**久期映射法计算的 VaR 值过程**

Table 确定期限权数

	方差匹配				久期匹配	
Term(Year)	VAR(%)	Correlation	权重	金额	权重	金额
2	0.9868		0.2635	\$52.71	0.2675	\$53.49
3	1.4841	0.9908	0.7365	\$147.29	0.7325	\$146.51
2.7325	1.3510*					

Total			1.0000	$200.00	1.0000	$200.00
VAR				$2.702		$2.698

$* \; 0.987+(1.484-0.987)\times(2.733-2)=1.351$

(3)、 **现金流映射法**是把投资组合内所有的现金流按期限结构的“顶点”进行分组，这些顶点对应于波动率已知的期限。每个现金流都用贴现值表示。计算过程如表：

Table 现金流计算示例

VAR of a $200 Million Bond Portfolio (Monthly VAR at 95 Percent Level)

	PV Cash Flows	Individual VAR	Correlation Matrix R					Component VAR
Term(Year)	x	$x\times V$	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	$x\Delta VAR$
1	$105.77	0.4966	1					$0.45
2	$5.48	0.0540	0.897	1				$0.05

3	$5.15	0.0765	0.886	0.991	1			$0.08
4	$4.80	0.0947	0.866	0.976	0.994	1		$0.09
5	$78.79	1.9115	0.855	0.966	0.988	0.998	1	$1.90
Total	$200.00	2.6335						
Undiversified VAR		$2.63						
Diversified VAR								$2.57

分散化的 VaR

$$VAR = \alpha\sqrt{x'\Sigma x} = \sqrt{(x \times V)'R(x \times V)}$$

无分散化的 VaR

如何计算？

$$VAR = \sum_{i=1}^{N} |x_i| V_i$$

案例：用映射法计算 JP 摩根美国债券指数久期

1 亿美元的 JP 摩根美国债券指数的现金流分解，久期 4.62 年，大约等于 4 年票据的风险水平。我们把债券指数与 2 只债券匹配，表的最右边的部分显示了 5 个与指数久期匹配的两债券组合头寸。由于没有期限恰好为 4.62 年的零息票债券，最接近的组合里，包含的头寸分别为 4 年期和 5 年期，各自所占的权重分别为 3800 万和 6200 万。

Table　$100 Million Bond Index (Monthly Tracking Error VAR at 95 Percent Level)

			Position: Portfolio				
Vertex	Risk (%)	Position: Index (%)	1 (\$)	2 (\$)	3 (\$)	4 (\$)	5 (\$)

≤1m	0.022	1.05	0.0	0.0	0.0	0.0	84.8
3m	0.065	1.35	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6m	0.163	2.49	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1Y	0.470	13.95	0.0	0.0	0.0	59.8	0.0
2Y	0.987	24.83	0.0	0.0	62.6	0.0	0.0
3Y	1.484	15.40	0.0	59.5	0.0	0.0	0.0
4Y	1.971	11.57	38.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5Y	2.426	7.62	62.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7Y	3.192	6.43	0.0	40.5	0.0	0.0	0.0
9Y	3.913	4.51	0.0	0.0	37.4	0.0	0.0
10Y	4.250	3.34	0.0	0.0	0.0	40.2	0.0
15Y	6.234	3.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

20Y	8.146	3.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30Y	11.119	1.31	0.0	0.0	0.0	0.0	15.2
Total		100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.0
Duration		4.62	4.62	4.62	4.62	4.62	4.62
Absolute VAR		$1.99	$2.25	$2.16	$2.04	$1.94	$1.71
Tracking error VAR		$0.00	$0.43	$0.29	$0.16	$0.20	$0.81

我们尝试把指数与两只债券匹配，表的最右边显示了两只债券组合几种匹配的头寸

跟踪误差 Tracking error 将组合的新头寸向量定义为 x，指数的为 x0，得出相对基准指数偏离的 VaR 值为

$$Tracking\ error\ VAR = \alpha\sqrt{\left(x - x_0\right)'\Sigma\left(x - x_0\right)}$$

经过计算，我们得到这一久期组合对冲的跟踪误差为 43 万元。远远低于指数 199 万美元的绝对风险。

我们也可以用**方差减少衡量**方差的改进

$$1-\left(\frac{0.43}{1.99}\right)^2=95.4\%$$

接下来，我们探讨改变跟踪组合构成会带来怎样的影响。

组合 2 把现金流放宽到第 3 年和第 7 年

组合 3

组合 4

组合 5

哪个的跟踪误差最小？

方法二：利用收益率曲线的变动计算投资组合价值的 VaR

（1）零息收益率曲线上一点的扰动

假设零息曲线上有 n 个点,交易组合对应收益率曲线的第 i 点的局部久期

$$D_i = -\frac{1}{P}\frac{\Delta P_i}{\Delta y_i}, \quad \frac{\Delta P_i}{P} = -D_i \Delta y_i$$

表 某一零息收益率曲线（利率为连续复利）

期限（年）	1	2	3	4	5	7	10
Rate（%）	4.0	4.5	4.8	5.0	5.1	5.2	5.3

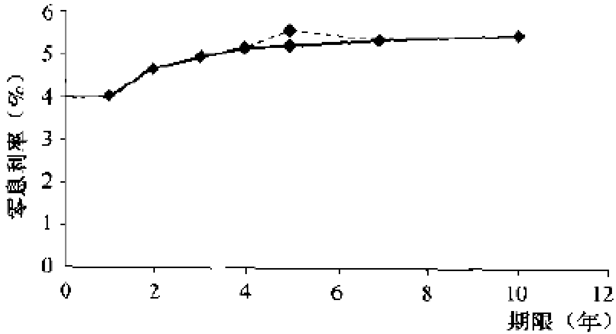


图 表的零息收益率曲线上一点的扰动

例一个价值 500 万美元的交易组合的局部久期如表所示，

表 某投资组合的局部久期

期限（年）	1	2	3	4	5	7	10	总计
久期	2.0	1.6	0.6	0.2	-0.5	-1,8	-1.9	0.2

当 1 年利率增长 10 个基点时，组合价值变化为

$$-2 \times 5\,000\,000 \times 0.001 = -10\,000$$

（即交易组合价值减少量为 10000 美元）；当 4 年利率增长 5 个基点时，组合价值变化为

$$-0.2 \times 5\,000\,000 \times 0.000\,5 = -500$$

（即交易组合价值减少量为 500 美元）；当 10 年利率增长 2 个基点时，组合价值变化为

$$1.9 \times 5\,000\,000 \times 0.000\,2 = 1900$$

即 1900 美元

注意：对应短期期限的久期为正,对应长期期限的久期为负。

（2）零息收益率曲线平行移动

假定组合由多种资产组成,第 i 个资产价值为 X_i,其对应的久期为 D_i，零息收益率曲线平行移动Δy

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta y},\Rightarrow D=-\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta X_i}{\Delta y}$$

$$令D_i=-\frac{1}{X_i}\frac{\Delta X_i}{\Delta y},\qquad D=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{P}D_i$$

$$\frac{\Delta P}{P}=-D\Delta y+\frac{1}{2}C\left(\Delta y\right)^2$$

（3）零息收益率曲线非平行移动

假设原始收益曲线如图所示，我们在此可以定义一种转动方法，对应于 1 年、2 年、3 年、4 年、5 年、7 年及 10 年节点利率变动量为-3e，-2e，-e，0，e，3e 及 6e，这里 e 为一个基点，即 0.0001，图 7-5 是次扰动的图形显示。采用表 7-5 中的局部久期数据和式（7-9），我们得出交易组合对 1 年利率扰动的敏感性为

$$-2.0\times\left(-3e\right)=6e$$

我们得出交易组合对 1 年利率扰动的敏感性为

$$-1.6\times\left(-2e\right)=3.2e$$

最终，我们得出交易组合对所有扰动的敏感性的总和为 27.1e，对于曲线的一个小的变动 e，交易组合价值的相对变化为-0.2e，这一结果显示具有表 7-5 所示的局部久期的交易组合对于这一转动的敏感性远大于对平行移动的敏感性。

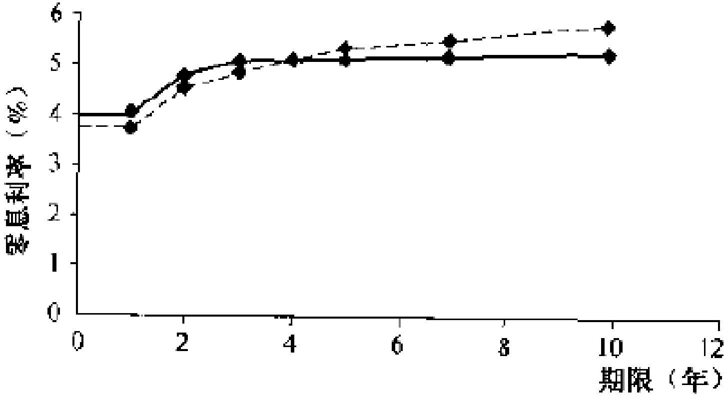


图 利率曲线的旋转

（4）下面利用零息票债券收益率曲线计算债券组合的 VaR

假设到期收益率曲线完全相关

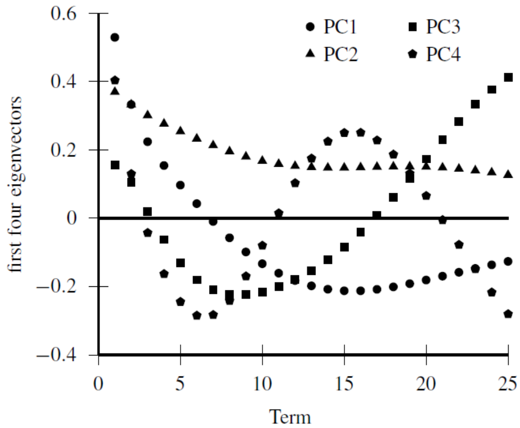
Table 11-3 通过零息票债券的价格变化来计算 VaR

Term(Year)	Cash Flows	Old Zero Value	Old PV of Flows	Risk(%)（VaR 值已知）	零息债券新值	新现金流的贴现值
1	$110	0.9615	$105.77	0.4696	0.9570*	105.27
2	$6	0.9136	$5.48	0.9868	0.9046	5.43
3	$6	0.8591	$5.15	1.4841	0.8463	5.08
4	$6	0.8006	$4.80	1.9714	0.7848	4.71
5	$106	0.7433	$78.79	2.4261	0.7252	76.88
Total			$200.00			193.37
Loss				2.63		

$* \, 0.9615 \times (1 - 0.4696/100) = 0.9570$

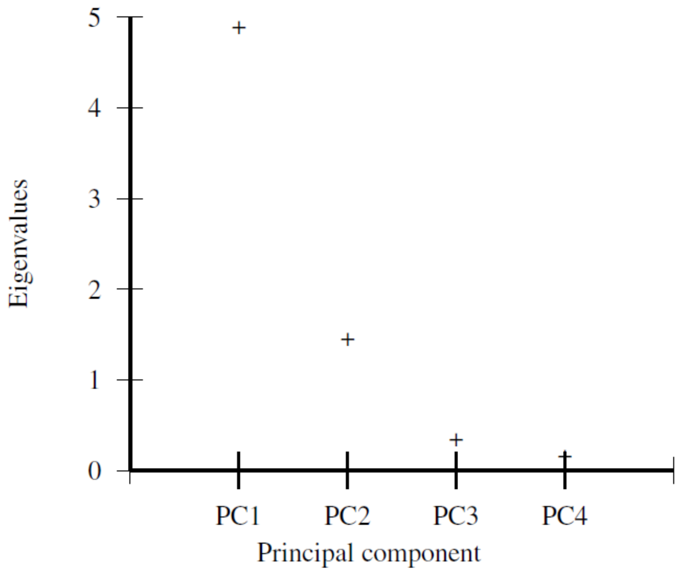
方法三：用主成分方法计算投资组合的价值的变化

使用英格兰银行提供的从 1999 年底到 2009 年底的每日远期利率确定英国远期利率曲线的前五个主要组成部分。通过考虑各种远期利率的超额收益之间的相关性来验证结果。



		Term

		1	7	13	19	25
Term	1	1.0000	0.1649	-0.6919	-0.6715	-0.4710
	7	0.1649	1.0000	0.3870	0.2894	0.2137
	13	-0.6919	0.3870	1.0000	0.9364	0.5965
	19	-0.6715	0.2894	0.9364	1.0000	0.7904
	25	-0.4710	0.2137	0.5965	0.7904	1.0000



Eigenvalues
5
4
3
2
1
0
PC1
PC2
PC3
PC4
Principal component

7.4.3 线性衍生产品的映射

（1）远期合约建模

远期合约是指在确定的将来时间按确定的价格购买或出售某项资产的协议。

常见的远期合约有：远期外汇交易和远期利率合约

远期合约定价公式

$$f_t = F_t e^{-r\tau} - Ke^{-r\tau} = \left(F_t - K\right)e^{-r\tau}$$

S=每单位相关现金资产的即期价格；K=远期合约价格；r=国内无风险利率；y=资产的收入

t=到期期限；

例：考虑一份 1 年期远期合约，该合约以 130086000 美元购买 1 亿欧元。

请思考在这份合约中有哪些风险因子。

背景知识：两种货币的离散复合现货利率和汇率变动可以相关如下

$$\frac{e_0}{e_T}\left(1+r_{Y,T}\right)=1+r_{X,T}$$

由 $f_t=F_t e^{-r\tau}-Ke^{-r\tau}=\left(F_t-K\right)e^{-r\tau}$ 可推出远期合约的价值

$$f_t=\$1.2877\frac{1}{\left(1+2.2810/100\right)}-\$1.3009\frac{1}{\left(1+3.3304/100\right)}=\$1.2589-\$1.2589=0$$

表　远期合约风险因子的风险和相关系数 (Monthly VAR at 95 Percent Level)

			Correlations		
风险因子	Price or Rate	VaR(%)	EUR Spot	EUR 1Y	USD 1Y
EUR 即期汇率 S	$1.2877	4.5381	1	0.1289	0.0400
EUR 票据多头 P	2.2810%	0.1396	0.1289	1	-0.0583
美元 票据空头 P*	3.3304%	0.2121	0.0400	-0.0583	1
EUR 远期合约	$1.3009				

合约的价值为 0，但这以价值可能会发生变化，从而产生市场风险。

$$f_t = \$1.2877\frac{1}{(1+2.2810/100)} - \$1.3009\frac{1}{(1+3.3304/100)} = \$1.2589 - \$1.2589 = 0$$

请问有哪几种风险来源？

头寸分解 $f_t = F_t e^{-y\tau} - Ke^{-r\tau} = (F_t - K)e^{-r\tau}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial r^*}dr^* + \frac{\partial f}{\partial r}dr = e^{-r^*\tau}dS - Se^{-r^*\tau}\tau dr^* + Ke^{-r\tau}\tau dr$$

因为 $P = e^{-r\tau}$ 和 $P^* = e^{-r^*\tau}$，我们将 dr 和 dr^* 用 $dP = (-\tau)e^{-r\tau}dr$）和 $dP^* = (-\tau)e^{-r^*\tau}dr^*$ 来代替远期合约风险变为

$$df = \left(Se^{-r^*\tau}\right)\frac{dS}{S} + \left(Se^{-r^*\tau}\right)\frac{dP^*}{P^*} - \left(Ke^{-r\tau}\right)\frac{dP}{P}$$

（1）欧元的外汇现货多头，一年后 1 亿欧元价值相当于 1.3009 亿美元，贴现值为 1.2589 亿美元；

（2）欧元投资的多头，现值为 1.2589 亿美元

（3）美元投资的空头，价值是 1 年后 1.3009，贴现值为 1.2589 亿美元

因此

远期合约多头=外汇即期多头+外汇票据多头+美国国库券空头

头寸	Present-Value Factor	Cash Flows(CF)	PV of Flows, x	Individual VAR, $\lvert x \rvert V$	Component VAR, $x\Delta VAR$
欧元现汇			$125.89	$5.713*	$5.704
欧元票据多头	0.977698	EUR100.00	$125.89	$0.176	$0.029
美元空头	0.967769	-$130.09	-$125.89	$0.267	$0.002

Undiversified VAR				\$6.156	
Diversified VAR					\$5.735

$*1.2589 \times 4.538\% = 571.3$，（外汇即期头寸的 VaR 值）

商品远期合约

- 与金融资产的期货合约的区别是没有收入流 y，如外国利率、息票或股息
- 商品并不用于货币支付而是用于消费，是一种隐含收益。扣除存储成本后的收益流称做便利收益流，并不与某个金融变量之间有联系，有自身的风险来源。
- 合约价值主要通过商品当前的远期价格决定。

$$f_t = F_t e^{-r\tau} - K e^{-r\tau} = \left(F_t - K\right) e^{-r\tau}$$

Table 11-8 Risk of Commodity Contracts(Monthly VAR at 95 Percent Level)

	Energy Products			
到期期限	天然气 Natural Gas	民用燃油	无铅汽油 Unleaded Gasoline	WTI 原油 Crude Oil-WTI
1 month	28.77	22.07	20.17	19.20
3 months	22.79	20.60	18.29	17.46
6 months	16.01	16.67	16.26	15.87
12 months	12.68	14.61	--	14.05

计算商品远期合约 VaR 的公式

$$df = \frac{\partial f}{\partial F} dF = e^{-r\tau} dF = \left(e^{-r\tau} F \right) \frac{dF}{F} \tag{11.14}$$

例如，每桶油价格为 45.2 美元，期限为 12 个月的 100 万桶原油的 VaR 值

$$\begin{aligned} VaR &= 0.967769 \times 45.2 \times 1000000 \times 4.05/100 \\ &= \$43,743,000 \times 14.05/100 \\ &= \$6,146,000 \end{aligned}$$

结论：

商品比金融资产的波动性要高

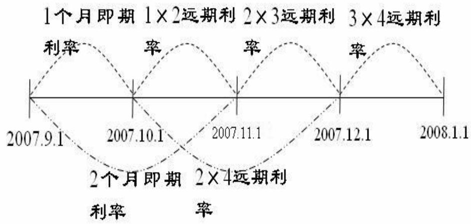
波动率随期限增加而降低

2、远期利率协议的 VaR

远期利率协议指交易双方同意在合约签订日提前确定未来一段时间（即协定利率的期限）的贷款利率或投资利率的一种合约。

通过远期利率合约，提前将利率确定下来，锁定成本，但同时也丧失了一旦利率朝有利于自己的方向变动时可能带来的收益。远期利率与即期利率的关系

$$(1+R_2\tau_2)=(1+R_1\tau_1)\left[1+F_{1,2}(\tau_2-\tau_1)\right]$$



例如，你卖出一份 1 亿美元的 6*12 的远期利率协议，这相当于借入 6 个月期的 1 亿美元，并投资本息 12 个月。如果 360 天的即期利率 5.8125，180 天的即期利率是 5.6250 则远期利率必须满足下面关系：

$$\left(1+F_{1,2}/2\right)=\frac{1+5.8125}{\left(1+5.6250/200\right)}$$

$$F=5.836$$

远期利率协议可以被拆分为两个零息票债券模块

6×12 远期利率协议多头=6 个月国库券多头+12 月国库券空头

下面的表说明了计算过程。

Table 11-9 计算远期利率协议的 VaR 值

(Monthly VAR at 95 Percent Level)

Position	PV of Flows, x	Risk (%), V	Correlation Matrix, R		Individual VAR, $\|x\|V$	Component VaR, $x\Delta VAR$
180 days	-$97.264	0.1629	1	0.8738	$0.158	-$0.116
360 days	$97.264	0.4696	0.8738	1	$0.457	$0.444
Undiversified VAR					$0.615	
Diversified VAR						$0.327

3、利率互换的 VaR

利率互换：两个交易对手相互交换一组资金流量，并不涉及本金的交换，而仅就利息支付方式进行交换。在利率互换的有效期内，交易的一方同意以固定利率的方式支付另一方利息，而交易的另一方同意以某一特定利率基准（如 LIBOR）的浮动利率支付给对方利息。

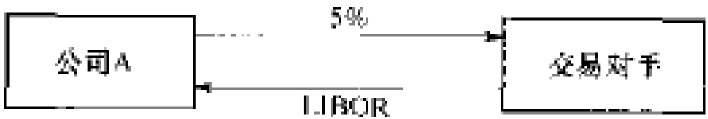


图 基本（标准）利率互换示例

例面值为 1 亿美元的互换，浮动了利率每 6 个月设定一次

表利率互换中公司 A 的现金流

日期	6 个月 LIBOR 利率（%）	收入的浮动现金流	支出的固定现金流	净现金流
2010 年 3 月 5 日	4.20			
2010 年 9 月 5 日	4.80	+2.10	-2.50	-0.40
2011 年 3 月 5 日	5.30	+2.40	-2.50	-0.10
2011 年 9 月 5 日	5.50	+2.65	-2.50	+0.15
2012 年 3 月 5 日	5.60	+2.75	-2.50	+0.25
2012 年 9 月 5 日	5.90	+2.80	-2.50	+0.30

2013 年 3 月 5 日	6.40	+2.95	-2.50	+0.45

假定，互换合约的浮动利率每 6 个月设定一次，互换合约的面值为 1 亿美元，互换合约的期限为 3 年。表 5-4 显示公司 A 的收入及支出的现金流，表中第 2 列显示出 6 个月期的 IRBOR 利率，这里利率互换在 2010 年 3 月 5 日开始。在利率互换初始日，6 个月期的 IRBOR 利率为每年 4.2%，这相当于每 6 个月利率为 2.1%，由此我们可以得出在 2010 年 9 月 5 日浮动利率现金流为 0.021×1 亿美元=210 万美元。而在 2010 年 9 月 5 日，6 个月期浮动利率为每年 4.8%（每 6 个月为 2.4%），从而我们可以算出在 6 个月之后的浮动现金流为 240 万美元。依次类推，我们可以计算出所有浮动现金流量。由固定利率所决定的现金流一直为 250 万美元（此值是 1 亿美元以 5%计息，半年应得利息）。请注意在利率互换中，现金流的计算方式同一班 LIBOR 现金流计算方式等同，这就是说，通常在某一利率时间段开始时要确定利率，而现金流的交割时间是在利率时间段的最后。

表 某利率互换造市商提供的互换利率（年利率，%）

满限（年）	买入价（做市商付固定利率）	卖出价（做市商收固定利率）	互换利率
2	6.03	6.06	6.045
3	6.21	6.24	6.225
4	6.25	6.39	6.370
5	6.47	6.51	6.490
7	6.65	6.68	6.665
10	6.83	6.87	6.850

计算利率互换的 VaR 值

下面的例子是一个本金 1 亿美元，每年支付年利率 6.195%的 5 年期固定利息，然后收取 Libor 浮动利率。

利率互换可由两种不同的方法表示(1）由固定利率债券和浮动利率债券构成的组合头寸（见 Table 11-10）（2）远期合约组成的投资组合。（见 Table 11-11）

Table 11-10 Computing the VAR of a $100 Million Interest-Rate Swap (Monthly VAR at 95 Percent Level)

	Cash Flows					
Term(Year)	Fixed	Float	Spot Rate	PV of 净现金流	Individual VAR	Component VAR
0	$0	+$100		+$100.00	$0	$0
1	-$6.195	$0	5.813%	-$5.855	$0.027	$0.024
2	-$6.195	$0	5.929%	-$5.521	$0.054	$0.053
3	-$6.195	$0	6.034%	-$5.196	$0.077	$0.075
4	-$6.195	$0	6.130%	-$4.883	$0.096	$0.096
5	-$106.195	$0	6.217%	-$78.546	$1.905	$1.905

Total				$0.000		
Undiversified VAR					$2.160	
Diversified VAR						$2.152

Table 11-11 把利率互换当做 5 份远期合约加总(Monthly VAR at 95 Percent Level)

	PV of Flows: Contract					
Term(Year)	1	1×2	2×3	3×4	4×5	VAR
1	-$100.36	$94.50				
2		-$94.64	$89.11			
3			-$89.08	$83.88		
4				-$83.70	$78.82	

5					-$78.55	
VAR	$0.471	$0.571	$0.488	$0.446	$0.425	
Undiversified VAR						$2.401
Diversified VAR						$2.152

1 年期的合约承诺支付 1 亿美元外加利率为 6.195%的息票，按照 5.81%的 1 年期即期利率进行贴现，得到贴现值为 1.0036 亿美元

接下来是 1 份 1*2 期的远期合约，承诺两年以后支付 1 亿美元及固定利息，总共 1.06195 亿没有，按照 2 年期的即期利率贴现，得到的贴现值为 0.9464 亿美元。该远期合约在 1 年后将 1 亿美元进行互换，后者按照 1 年期即期利率折现为 0.945 亿美元。

4、期权的 VaR

期权合约是具有未来选择权**(option)**的一种基本的衍生产品**，**它赋予期权的持有者（购买者或多头）拥有在将来某一时间，以某一确定的执行价格购买或者出售一项资产（标的资产）的**权利**，而并**没有**这样的**义务**。同时期权买方必须支付给卖方一笔**期权费**。

期权的风险因子

$$c = c\left(S, K, \tau, r, r^{*}, \sigma\right) = Se^{-r^{*}\tau}N\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}N\left(d_2\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(Se^{-r^{*}\tau} / Ke^{-r\tau}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$
\begin{aligned}
dc &= \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial c}{\partial r^*} dr^* + \frac{\partial c}{\partial r} dr + \frac{\partial c}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial c}{\partial t} dt \\
&= \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 + \rho^* dr^* + \rho dr + \Delta d\sigma + \Theta dt
\end{aligned}
$$

表 E-1 资产收益率为 q 的期权的希腊值

希腊值	看涨期权	看跌期权
Delta	$e^{-qT} N(d_1)$	$e^{-qT}\left[N(d_1)-1\right]$
Gamma	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$

Theta（每年）	$-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})+qS_0N(d_1)e^{-qT}$ $-rKe^{-rT}N(d_2)$	$-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})-qS_0N(-d_1)e^{-qT}$ $+rKe^{-rT}N(-d_2)$
Vega（每%）	$\dfrac{S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}}{100}$	$\dfrac{S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}}{100}$
Rho（每1%）	$\dfrac{KTe^{-rT}N(d_2)}{100}$	$-\dfrac{KTe^{-rT}N(-d_2)}{100}$

例一个 3 个月不同执行价格的欧式看涨期权

$$S=\$100,\sigma=20\%,r=5\%,r^{*}=3\%,\tau=3\,months$$

			Exercise Price		
	Variable	Unit	K=90	K=100	K=110

c		Dollars Change Per	11.01	4.20	1.04
Δ	Spot price	Dollar	0.869	0.536	0.195
Γ	Spot price	Dollar	0.020	0.039	0.028
Λ	Volatility	(% pa)	0.102	0.197	0.138
ρ	Interest rate	(% pa)	0.190	0.123	0.046
ρ^*	Asset yield	(% pa)	-0.217	-0.133	-0.049
θ	Time	Day	-0.014	-0.024	-0.016

德尔塔并不是恒定不变的，因此用线性方法来衡量期权风险并不合适。

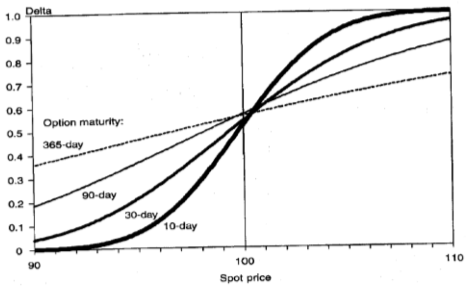


Figure 11-2 Delta as a function of the risk factor

对于非线性产品，可以用 Delta-gamma-正态法。对近似二次项的两边取方差，我们得到

$$\sigma^2(dc) = \Delta^2\sigma^2(dS) + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2\sigma^2(dS^2) + 2\left(\Delta\frac{1}{2}\Gamma\right)\mathrm{cov}(dS, dS^2)$$

如果变量 dS 是正态分布的，那么所有的奇数阶矩均为 0， 那么上式最后一项为 0. 在同样的假定下，我们可以证明

$$v\left(dS^{2}\right)=2v(dS)^{2}$$

于是方差被简化为

$$\sigma^{2}\left(dc\right)=\Delta^{2}\sigma^{2}\left(dS\right)+\frac{1}{2}\left(\Gamma\sigma^{2}\left(dS\right)\right)^{2}$$

如果假定变量 dS 和 dS^2 服从正态分布，则 dc 也服从正态分布

$$\mathrm{VaR}=\alpha\sqrt{\Delta^{2}\sigma^{2}\left(dS\right)+\frac{1}{2}\left(\Gamma\sigma^{2}\left(dS\right)\right)^{2}}$$

但是，这只是一个近似。即使 dS 是正态的，它的平方 dS^2 应该付出卡方分布。

可以引入偏度系数ξ = [E(dc，

$$\xi=[E(dV^{3})-3E(dV^{2})E(dV)+2E(dV)^{3}]/\sigma^{3}(dV)$$

$$E(dV^3) = (9/2)\Delta^2\Gamma S^4\sigma^4 + (15/8)\Gamma^3 S^6\sigma^6.$$

令$\alpha' = \alpha - \frac{1}{6}(\alpha^2 - 1)\xi$ 来代替α。

局部估值模型的优缺点

主要优点：

- 简明直观；
- 应用方便；
- 最适合于由**单个**市场风险因子驱动的金融工具且市场**因子变化很小**的情形。

不足：

- 难以定义受多个市场风险因子影响的资产组合的灵敏度指标；
- 无法对不同市场因子驱动的风险大小进行横向比较；
- 一阶灵敏度方法一般不考虑风险因子之间的相关性。
- 敏感性因子不能汇总。不同市场的敏感性也不能相加。
- 敏感性不能直接用来衡量风险资本 .
- 敏感性不利于风险控制，他们不能很容易转化为”接受的最大损失”

总结

风险因子的分布	VaR 方法	
	局部估值法	完全估值法
解析的	Delta-正态	
	Delta-Gamma-正态	
模拟的	Delta-Gamma-MC	MC
		格点 MC
		历史模拟

7.5 案例：巴林银行

背景：

1995 年 2 月 27 日，英国中央银行突然宣布：巴林银行不得继续从事交易活动并将申请资产清理。这个消息让全球震惊，因为这意味着具有 233 年历史、在全球范围内掌管 270 多亿英镑的英国巴林银行宣告破产。具有悠久历史的巴林银行曾创造了无数令人瞠目的业绩，其雄厚的资产实力使它在世界证券史上具有特殊的地位。可以这样说：巴林银行是金融市场上的一座耀眼辉煌的金字塔。

年仅 28 岁的交易员尼克·里森将已有 233 年历史的英国巴林银行赔了个精光，真是巨石激起滔天浪，一时间各方争相报道巴林事件。尼克·里森也由此成为了世界知晓的人物，挤进了各大报刊杂志的头版。当然，无数的假设与理性分析判断亦风起云涌，大量的猜测与结论令人眼花缭乱。

那么，这个金字塔怎样就顷刻倒塌了呢：究其原因还得从 1995 年说起，当时担任巴林银行新加坡期货公司执行经理的里森，同时一人身兼首席交易员和清算主管两职。

有一次，他手下的一个交易员，因操作失误亏损了 6 万英镑，当里森知道后，却因为害怕事情暴露影响他的前程，便决定动用 88888“错误帐户”。而所谓的“错误帐户”，是指银行对代理客户交易过程中可能发生的经纪业务错误进行核算的帐户（作备用）。以后，他为了私利一再动用“错误帐户”，创造银行帐户上显示的均是赢利交易。随着时间的推移，备用帐户使用后的恶性循环使公司的损失越来越大。此时的里森为了挽回损失，竟不惜最后一博。由此造成在日本神户大地震中，多头建仓，最后造成损失超过 10 亿美元。这笔数字，可以称是巴林银行全部资本及储备金的 1．2 倍。233 年历史的老店就这样顷刻瓦解了，最后只得被荷兰某集团以一英镑象征性地收购了。

表 1 88888 账户之中的交易对巴林银行财务状况的影响

		Unaudited		Audited	
		Year ended 31 December 1994 £'000	Half year ended 30 June 1994 £'000	Year ended 31 December 1993 £'000	Year ended 31 December 1992 £'000
A	Notional profit before bonus and tax	204,762	109,528	200,206	42,528
B	Assumed bonus (50% x A)	(102,381)	(54,764)	(100,103)	(21,264)
C	Reported profit before tax	102,381	54,764	100,103	21,264
D	Tax	(39,410)	(18,459)	(31,800)	(8,916)
E	Reported profit after tax	62,971	36,305	68,303	12,348
	Reported shareholders' funds	354,371	336,037	308,814	253,895
F	Unreported loss in Account '88888'	(185,000)	(93,000)	(21,000)	(2,000)
	Adjusted for loss in Account '88888'				
G	Profit before bonus and tax (line A less line F)	19,762	16,528	179,206	40,528
H	Bonus (50% x G)	(9,881)	(8,264)	(89,603)	(20,264)
I	Profit before tax	9,881	8,264	89,603	20,264
J	Tax *	(39,410)	(18,459)	(31,800)	(8,916)
K	Profit (loss) after tax	(29,529)	(10,195)	57,803	11,348
	Adjusted shareholders' funds	250,371	278,037	297,314	252,895

案例讨论要点

- 简要介绍里森当时的投资策略的损益。
- 简要介绍当时的宏观经济环境。
- 里森的投资策略会面临哪些风险？
- 如果你是里森，你会如何管理里森的投资策略组合风险
- 如何使用 VaR 系统去识别里森的风险。如果存在一个有效的 VaR 系统，是否可以回答以下问题：
    - 使用完全估值和局部估值来计算里森的跨式期权 VaR 值
    - 里森的真实 VaR 值是多少？
    - 哪些构成成分对 VaR 影响最大？
    - 头寸之间是否实现了相互对冲，还是增强了总体风险