第二章 在险价值 VaR

本章内容提要

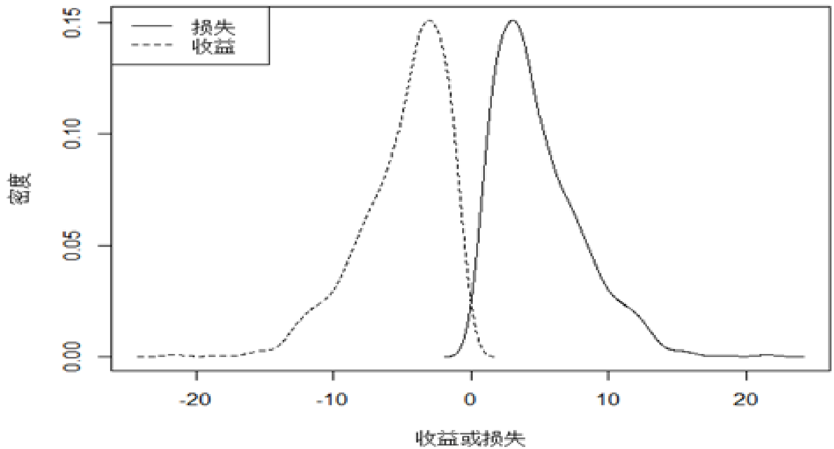
- VaR 的定义和性质
- 历史模拟法
- 均值方差法
- 极值理论
- VaR 的误差分析
- 回顾测试

2.1 VaR 的定义和性质

2.1.1 VaR 的定义

- VaR 的含义是处于风险中的价值，“VaR(VauleatRiks)是指在市场的正常 波动下，在给定的置信水平下，某一金融资产或者证券投资组合在未来的特定的一段时间内的最大的可能的损失。
- 更正式的讲，VaR 是描述一定目标时段下资产(或资产组合)的损益分布的分位点。
- 例如：某个敞口在 99%的置信水平下的日 VaR 值为 1000 万美元。

损失和收益的关系可以由图表示，其中右侧的实线表示损失，左侧的实线表示收益。



损失
收益
0.15
0.10
0.05
0.00
密度
-20
-10
0
10
20
收益或损失

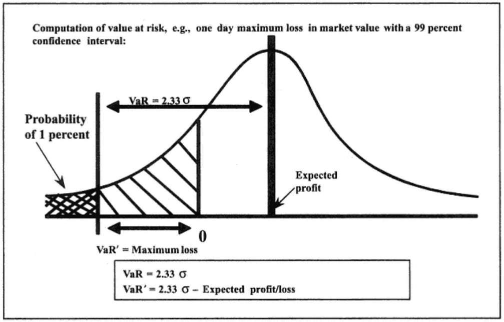
- 绝对 VaR 和相对 VaR
  1、 绝对 VaR， 给定置信水平（99%）下的最大损失，也称 VaR（零值）

$$VaR(zero) = W_0 - W^* = -W_0 R^*$$

  2、 相对 VaR（均值）

$$VAR(mean) = E(W) - W^* = -W_0 (R^* - \mu)$$

第二种 VaR 定义方式与经济资本分配和风险调整后资本收益率（RAROC ）计算一致。
:



VaR 的计算，例如，99%置信度下市场价值一天内的最大损失

$$VaR' = Maximum\ loss$$

$$VaR = 2.33\sigma$$
$$VaR' = 2.33\sigma - Expected\ \ profit / loss$$
$$P(Y \le VaR(p)) = 1 - p$$

注：

- 大多数 VaR 都是短期风险，如 1 天、10 天（监管者要求）
- 巴塞尔协议规定 p=99%
- 对于内部资产，p=99.96%

2.1.2 VaR 的性质

1、 单调性：如果 $L_1 \le L_2$ 在任何情况下都成立，则

$$VaR_\tau(L_1) \le VaR_\tau(L_2)$$

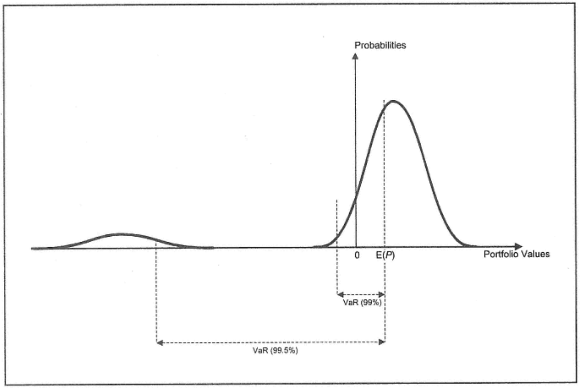
2、 正齐次性：对于任意正数 h ，有

$$VaR_\tau(hL) \le hVaR_\tau(L)$$

3、 平移不变性：对于任意一个固定的常数 α ，有

$$VaR_\tau(L) \le VaR_\tau(L) + \alpha$$

4、 不满足次可加性



VaR 不满足次可加性的例子

例

假定两个独立贷款项目在 1 年内均有 0.02 的概率损失 1000 万美元，同时均有 0.98 的概率损失 100 万美元，任意一个单笔贷款在展望期为 1 年、97.5%的置信区间下 VaR 为 100 万美元。

将两个贷款叠加产生一个资产组合，组合有 $0.02\times0.02=0.0004$ 的概率损失 2000 万美元，并且有 $2\times0.02\times0.98=0.0392$ 的概率损失 1100 万美元，有 $0.98\times0.98=0.9604$ 的概率损失 200 万美元。在展望期为 1 年，97.5%的置信度下，组合的 VaR 为 1100 万美元，单笔贷款所对应的 VaR 的和为 200 万美元，贷款组合的 VaR 比贷款 VaR 的总和高 900 万美元，违反了次可加性。

2.1.3 预期亏损 ES 的定义和性质

- ES（TVaR，CVaR， CED）

对于金融资产损失函数 L ，在 VaR 的基础上，可以给出置信水平$100(1-\tau)\%$ 的 ES 定义如下

$$ES_{1-\tau}(L)=E\left[L_t \mid L_t > VaR_{1-\tau}(L)\right]$$

- ES 的性质
  - 单调性
  - 正齐次性
  - 平移不变性
  - 次可加性

2.2 计算 VaR

2.2.1 影响 VaR 计算的几个主要因素

1、 上尾部概率τ

2、 持有期Δt

3、 损失的累积分布函数

4、 金融头寸的资产价值

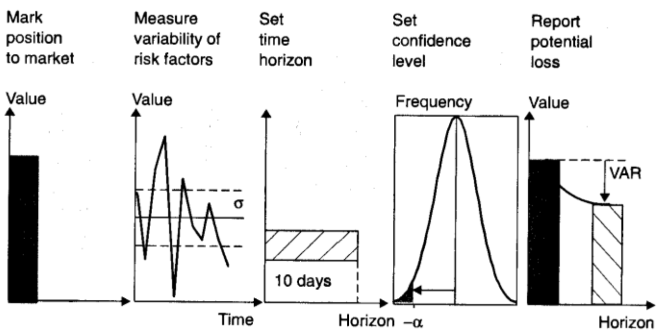
- 需要注意的是，空头头寸与多头头寸在实际分析过程中有明显不同。

2.2.2 计算 VaR 的步骤

- 逐日盯市确认投资组合的市值
- 衡量风险因素的变化率，如波动率 15%
- 设定时间区域，样本观察时间段，如 10 天
- 设定置信水平，如 99%，
- 假设分布，如正态分布
- 分析前面信息数据，得出收入的分布概率，计算潜在的最大损失，综合得出 VaR，如在 99%的置信水平的 VaR 为 700 美元

FIGURE 5-1

Steps in computing VAR.



Sample computation:

$$\$100M \times 15\% \times \sqrt{(10/252)} \times 2.3$$

2.2.3 VaR 的计算方法

- 非参数法：使用历史数据，计算经验分布和经验分位数。

  1、历史模拟法

- 参数法：假定收益率服从某种分布，估计参数，计算分布的分位数。

  1、正态分布

  2、T 分布

  3、极值分布

- 随机模拟方法

2.3 历史模拟法（Historical Simulation Approach）

2.3.1 历史模拟法的步骤

- 首先选择风险因子的历史数据，例如 500 个交易日数据。
- 其次，用历史数据计算资产组合的价值和价值的变化.
- 最后，构建直方图，找到 1%的分位点，即第 5 个最坏的损失。计算 VAR。

我们将某市场变量在第 i 天所对应的数值记为 v_i，假定今天为第 n 天，市场变量在明天所对应的第 i 个情景为

$$v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

2.3.2 历史模拟法计算例子

考虑一个美国投资者,在2008年9月25日持有价值1000万的投资组合(如图),组合中有 4 个股票指数,指数价格以美元计算,下面显示了 4 个指数的收盘价格的历史数据(可下载)

表 2-1 用于演示 VaR 计算过程的投资组合

指数	组合价值(以 1000 美元计)
DJLA	4000
FTSE 100	3000
CAC 40	1000
Nikkei 225	2000
总计	10000

资料来源《风险管理与金融机构》

表 2-2 采用历史模拟法计算 VaR 所需的股票指数数据(以美元计)

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7, 2006	11219.38	11131.84	6373.89	131.77

1	Aug. 8, 2006	11173.59	11096.28	6378.16	134.38

表 2-3 由表 2-2 数据产生的对于 2008 年 9 月 26 日的市场变量的不同情景

情景数据	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	组合价值（千美元）	损失（千美元）
1	10977.08	9569.23	6204.55	115.05	10014.334	-14.334
2	10925.97	9676.96	6293.60	114.13	10027.481	-27.481

注：所有指数均以美元计。

在 2008 年 9 月 25 日，DJLA 的取值为 11022.06，在 2006 年 8 月 7 日的取值为 11219.38，在 2006 年 8 月 8 日下跌为 11173.59，因此，DJLA 在情景 1 下的取值为

$$11022.06 \times \frac{11173.59}{11219.38} = 109$$

与此类似，在情景 1 下，FTSE 100，CAC 40，Nikkei 225 的取值分别为 9569.23,6204.55 和 115.05。因此在情景 1 下，组合资产价值为（以 1000 计）

$$4000\times\frac{10977.08}{11022.06}+3000\times\frac{9569.23}{9599.90}+1000\times\frac{6204.55}{6200.40}+2000\times\frac{115.05}{112.82}=10014.334$$

表 2-4 对应 500 个情景损失的排序

情景编号	损失数量（千美元）	情景编号	损失数量（千美元）
494	477.841	473	191.269
339	345.435	306	191.050
349	282.204	477	185.127
329	277.041	495	184.450
487	253.385	376	182.707
227	217.974	237	180.105
131	205.256	365	172.224
238	201.389	…	…

10 天 VaR 等于

$$\sqrt{10}\times 253385=801274$$

2.3.3 历史模拟法的几种推广

1、对观察值设定权重

- 使权重随时间回望期的延伸而按指数速度递减

$$\lambda^{n-i}\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^n}$$

- 将所有观测值由最坏到最好进行排序
- 由损失最坏的情形开始，累积计算每一项权重的和，直到达到某指定分位数界限时为止。
- 可以通过回顾检验中，测试不同的λ，来选取最佳参数 λ

表 2-5 对于设有权重的 500 个情景的损失（由高到低排序）

情景编号	损失（千美元）	权重	累积权重
494	477.841	0.00528	0.00528
339	345.435	0.00243	0.00771
349	282.204	0.00255	0.01027
487	253.385	0.00510	0.01768
227	217.974	0.00139	0.01906
238	201.389	0.00146	0.02138
473	191.269	0.00476	0.02614
…	…	…	…

$$\frac{(0.995^{6})\times 0.005}{1-0.995^{500}}=0.00528, \lambda=0.995$$

2、更新波动率

- 利用第 i 天波动率与当前波动率的不同，使用一种更新波动率的模式，并基于在第 i 天观测到的百分比变化来调整市场变量。例如,假定 σ_{n+1} 是 σ_i 的两倍。
- 市场变量在第 i 个情形会变成

$$v_n \frac{v_{i-1} + (v_i - v_{i-1})\sigma_{n+1} / \sigma_i}{v_{i-1}}$$

表 2-6 利用 EWMA 模型计算出的波动率（%每天），$\lambda = 0.94$

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 400	Nikkei 225
0	2006 年 8 月 7 日	1.11	1.42	1.40	1.38
1	2006 年 8 月 8 日	1.08	1.38	1.36	1.43
2	2006 年 8 月 9 日	1.07	1.35	1.36	1.41
3	2006 年 8 月 10 日	1.04	1.36	1.39	1.37

对于 DJLA、FTSE 100、CAC 40 和 Nikkei 225 指数在 2008 年 9 月 26 日得出的波动率（表的最后一行）与 2008 年 8 月 8 日得出的波动率（表的第 1 行）的比率分别为 1.94,2.26,2.21,1.15。这些比率是作为 2006 年 8 月 7 日至 8 月 8 日指数变化的乘数因子；类似地，对于这些股票指数，在 2008 年 9 月 26 日得出的波动率（表的最后一行）与在 2008 年 8 月 9 日得出的波动率（表的第 2 行）的比率分别为 2.03,2.33,2.28,1.12，这些比率是作为 2006 年 8 月 8 日至 8 月 9 日指数。

表 2-7 经波动率调节的 500 个情景的、由高到低进行排序后的损失

情景编号	损失（千美元）	情景编号	损失（千美元）
131	1082.969	339	546.540
494	715.512	74	492.764
227	687.720	193	470.092
98	661.221	487	458.177
329	602.968		

2.4 均值方差法

2.4.1 计算公式

假设资产的初始价值为 W_0，资产的收益率为 R，服从正态分布

$$f(R)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(R-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$Prob(R<R^*)=\int_{-\infty}^{R^*}f(R)dR=Prob(Z<\frac{R^*-\mu}{\sigma})=1-c$$

标准化收益率 $Z=\left(R-\mu\right)/\sigma$ 服从标准正态分布 $N\left(0,1\right)$

$Z=\left(R-\mu\right)/\sigma$ 表示一个标准正态变量，$N\left(0,1\right)$

$$-\alpha=\frac{-\left|R^*\right|-\mu}{\sigma}$$ 表示标准正态分布 1-c 的分位点

设初始资产为 W_0

令$R^* = -\alpha\sigma + \mu$，资产的在险价值为

$$VAR(mean) = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$VAR(zero) = -W_0 R^* = W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t)$$

表 **2-7** 不同置信水平对应的临界值

c	$\alpha = \frac{R^* - \mu}{\sigma}$
99.97%	-3.43
99.87%	-3.00
99%	-2.33
95%	-1.65

注：

（1）如何选择 c 和时间段Δt

- 公司范围内不同市场风险的比较，99%，1 天
- 潜在损失的衡量
- 满足资本充足率
- 回溯标准

（2）10 日 VaR

假设市场是有效的，每日收益 R_t 是独立同分布的，服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，

则 10 日收益率 $R(10)=\sum_{t=1}^{10}R_t$ 也是服从正态分布，均值10μ，方差是$10\sigma^2$

$$VaR(10;c)=\sqrt{10}VaR(1;c)$$

2.4.2 应用：计算股票组合的 VaR

假设持有两种股票，价格分别为 S1（持有数量 n1）、 S2（持有数量 n2），则股票组合的价值为

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2$$

(1) 风险因子选择股票价格，

$$R_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{n_1 S_1}{V}\frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{n_2 S_2}{V}\frac{\Delta S_2}{S_2} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i R_i$$

R_V = 资产组合收益率

R_i =第 i 种股票的收益率，$i = \Delta S_i / S_i$

w_i =资产组合中投资于第 i 种股票的比重, *I*, = 1,2, with

$\Sigma w_i = 1$

(2) 计算风险因子 R_v 的分布：假设价格服从对数正态分布，日收益率

$$R_t = \ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) = \ln(1 - \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}) \sim \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}$$

服从正态分布。假设股票收益率 R_i 服从正态分布，μ_i 和 σ_i 相关系数为 ρ 。

$$R_i = \frac{\Delta S_i}{S_i} \sim N(\mu_i, \sigma_i) \ for\ i = 1, 2$$

(3) 计算股票 i 的 1 日和 10 日 VAR

$$VaR_i(1;99) = 2.33 \cdot \sigma_i \cdot S_i$$

$$VaR_i(10;99) = \sqrt{10} \cdot VaR_i(1;99) = 2.33\sqrt{10}\sigma_i \cdot S_i$$

(4) 计算资产组合 1 日和 10 日的 VaR

$$R_V \sim N(\mu_V, \sigma_V)$$

$$\mu_V = \sum_{i=1}^{2} \omega_i \mu_i$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2{}_V &= \omega_1{}^2 \sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2 \sigma_2{}^2 + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) \\
&= \omega_1{}^2 \sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2 \sigma_2{}^2 + 2\omega_1\omega_2 \rho\sigma_1\sigma_2 \\
&= (\omega_1 \quad \omega_2) \begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= (\omega_1 \quad \omega_2) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= w\Omega w^T = w\sigma C\sigma w^T
\end{aligned}$$

$$VaR_V(1;99) = 2.33 \cdot \sigma_V V$$

$$VaR_V(10;99) = \sqrt{10} VaR_V(1;99) = 2.33 \cdot \sqrt{10} \cdot \sigma_V V$$

$$VaR_V(1;99) = 2.33 [w\sigma C\sigma w^T]^{1/2} V = [VaR \cdot C \cdot VaR^T]^{1/2}$$

a) 通过对这两支股票一年的历史数据，可以估计收益率的均值和方差分别为，

$$\mu_1 = 0.155\%$$
$$\mu_2 = 0.0338\%$$
$$\sigma_1 = 2.42\%$$
$$\sigma_2 = 1.68\%$$
$$\rho = 0.14$$

b) 代入数据

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2 = \$18,662$$
$$\omega_1 = \frac{n_1 S_1}{V} = 0.49$$
$$\omega_2 = \frac{n_2 S_2}{V} = 0.51$$

$$\mu_V = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 = 0.093\%$$

$$\sigma_V{}^2 = \omega_1{}^2\sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2\rho\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 = 0.00024$$

$$\sigma_V = 1.55\%$$

$$VaR_1(1;99) = 2.33\sigma_1 n_1 S_1 = \$517$$

$$VaR_2(1;99) = 2.33\sigma_2 n_2 S_2 = \$370$$

$$VaR_V(1;99) = 2.33\sigma_V V = \$677$$

这里 VaR_1, VaR_2，和 VaR_V 表示 99%的置信水平下一日的相对 VAR。

绝对 VaR

$$VaR_1'(1;99) = (2.33\sigma_{1-\mu_1})n_1 S_1 = \$503$$

$$VaR_2'(1;99) = (2.33\sigma_{2-\mu_2})n_2 S_2 = \$367$$

$$VaR_V'(1;99) = (2.33\sigma_{V-\mu_V})V = \$657$$

注意，资产组合的 VaR 小于两个资产的 VaR 的和，这反映了由于权益资产不完全相关而引起的资产组合效应。

表 **2-8　VaR** 对相关系数的敏感性

ρ	VaR(1;99)	分散效应
-1.0	$887	$0
0.5	$772	$115
0	$636	$251
-0.5	$461	$426
-1.0	$146	$741

2.4.3 应用：均值方差法计算其他金融产品的 VaR

假设持有风险资产，价值为 V，将 V 表述为 n 个风险因子 f_i 的函数，$i = 1, . . . , n.$，则一阶泰勒展开近似为

$$dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial f_i} df_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i df_i$$

Δ_i 通常称为“delta”

假设风险因子都服从正态分布，则

$$\sigma(dV) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 \sigma^2 \left(df_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Delta_i \Delta_j \operatorname{cov}\left(df_i, df_j\right)}$$

$$VaR(1;99) = 2.33 \cdot \sigma\left(dV\right)$$

我们将在市场风险建模一章详细介绍债券和衍生产品

2.4.4 均值方差分析的优缺点

优点：

i. 计算方便

ii. 根据中心极限定理，风险因子不一定需要满足正态性

iii. 不需要定价模型，只需敏感因子

缺点

iv. 收益正态性假设

v. 不满足胖尾性

vi. 需要估计波动率和相关系数

2.4.5 均值方差的推广

a) 时变方差：EWMA、GARCH

b) 使用其它分布， 随机模拟产生 DP 的分布

   1) t 分布

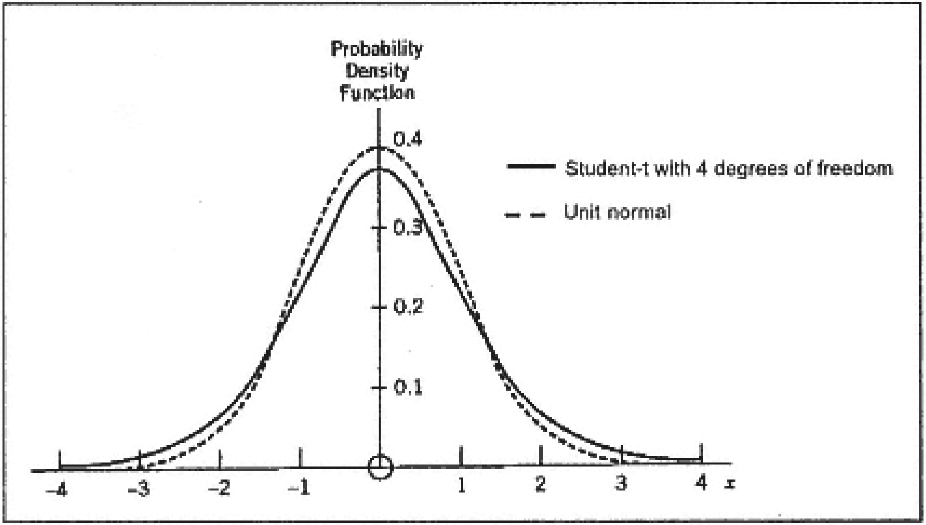
   2) 极值分布

   3) 广义帕累托分布

1）、t 分布

大多数收益率是“胖尾”的。可使用 t 分布来描述，用三个指标：均值 μ 、方差 σ^2 和自由度 v。v 描述了胖尾形， v 越小，尾部越胖；v 越大，t 分布越趋于正态分布。对于金融时间序列，v 的取值常在 4 和 8 之间。

$$VaR_\alpha(R)=\mu+\sigma t_v^{-1}\left(\alpha\right)$$


Probability Density Function
0.4
0.3
0.2
0.1
Student-t with 4 degrees of freedom
Unit normal
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

2）、极值分布

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为独立同分布的随机变量序列，记 $M_n = \max\{X_1,\cdots,X_n\}, n > 2$，如果存在规范化常数列 {an>0},{bn}与某一非退化分布函数 H(x)，使得下式成立，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x\right) = H(x)$$

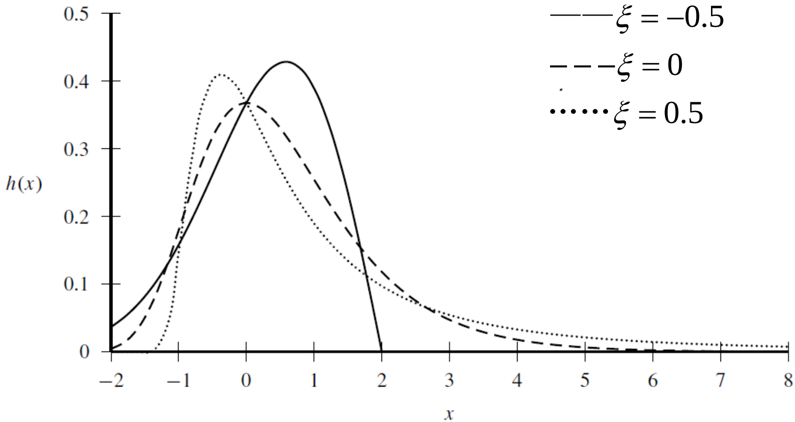
则 Fisher-Tippett 定理指出，H(x)必为广义极值分布，其分布函数形式为

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-e^{-x}\right\}, & \xi = 0;\ x \in R \\ \exp\left\{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & \xi \neq 0; 1+\xi x > 0 \end{cases}$$

更广义的极值分布

$$H(x) = \Pr\left(X_M \le x\right) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} & if\, \xi \ne 0; \\ e^{-e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}} & if\ \ \xi = 0. \end{cases}$$

- 如果$\xi > 0$，则分布是 Fr'echet 型 GEV 分布。 Fr'echet 类型的 GEV 分布具有遵循幂律的尾部，来自学生的 t 分布，帕累托分布或者 L'evy 分布
- 如果$\xi = 0$，则分布是 Gumbel 型 GEV 分布。 这里，尾部将是指数的，如正态分布和伽马分布及其近亲。
- 如果$\xi < 0$，则分布是威布尔型 GEV 分布。 这有一个快速下降尾巴，实际上有一个有限的右端点的分布，如 beta，均匀和三角分布



ξ = −0.5
ξ = 0
ξ = 0.5
h(x)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x

GEV 分布估计方法

a) 块最大值法 The Block Maxima Method

我们用 M_{nj} 表示第 j 个块的块最大值，所以我们的数据是 $M_{n1},\ldots,M_{nm}$。

GEV 分布可以使用各种方法拟合，包括最大似然

$$l\left(\xi,\mu,\sigma;M_{n1},\ldots,M_{nm}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\ln h_{\xi,\mu,\sigma}\left(M_{ni}\right)$$
$$=-m\ln\sigma-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+\xi\frac{M_{ni}-\mu}{\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(1+\xi\frac{M_{ni}-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

条件 $1+\xi\left(M_{ni}-\mu\right)/\sigma>0$

b) 如何确定 m、n 的值？

c) R 软件包？ extRemes

d) GEV 方法的主要缺点是通过在每个数据块中仅使用最大值或多个值，它忽略了许多可能有用的信息。例如，如果使用返回级别方法并且每个块有一千个观察，则 99.9％的信息被丢弃。

e) 因此，广义帕累托分布更常用。

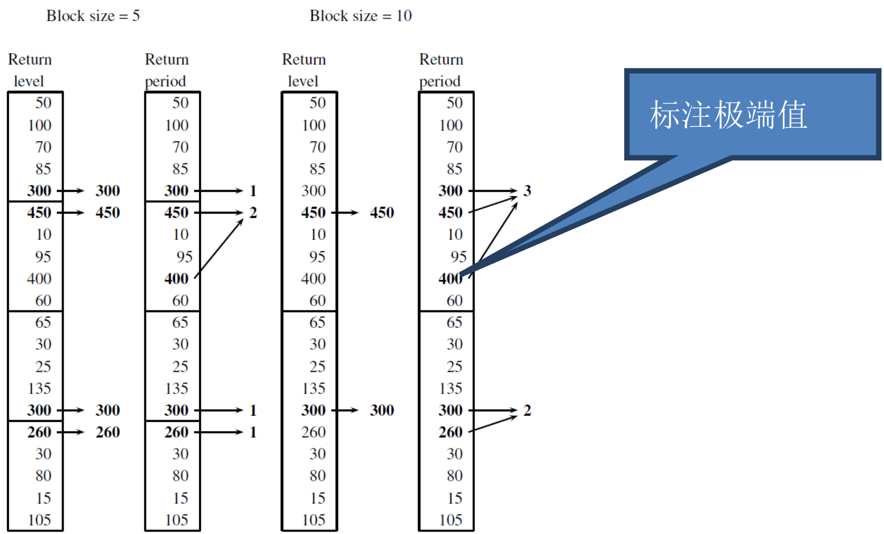


Figure 12.3 Comparison of GEV approaches and block sizes

3）、广义帕累托分布

Balkema-Haan-Pickands 定理

a) 设随机变量的分布为$F\left(x\right)$，右端点为x_F，称分布函数

$$F_u(x)=P(X-u\leq x\,|\,X>u),x\geq 0$$

为随机变量 X 超出量分布函数；定义平均超额函数

$$e(u)=E(X-u\,|\,X>u)$$

b) 当 u 足够大，Fu（x）可以用 GPD 分布来 近似。

$$G\left(x\right)=\Pr\left(X-u\leq x\,|\,X>u\right)=\frac{F\left(x+u\right)-F\left(u\right)}{1-F\left(u\right)}$$

$$=\begin{cases}1-\left(1+\dfrac{x}{\beta\gamma}\right)^{-\gamma} & if\ \ \gamma\neq 0;\\ 1-e^{-\frac{x}{\beta}} & if\ \ \gamma=0.\end{cases}$$

c) Balkema-Haan-Pickands 定理表明当且仅当分布F属于 GEV 的最大值吸引域时，

GPD 就是超出量分布的极限分布。

d) 确定阈值u是 POT 建模的前提，若阈值选取过低，超出量分布不能显著收敛于极限分布；同时u不能过大，否则落入阈值以上的数据可能很少，导致信息很少。

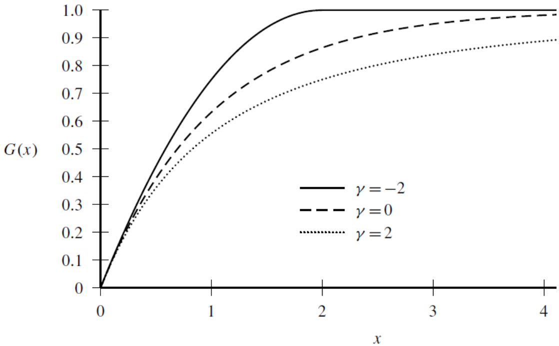


Figure 12.4 Various generalised Pareto distribution functions

$\beta = 1$

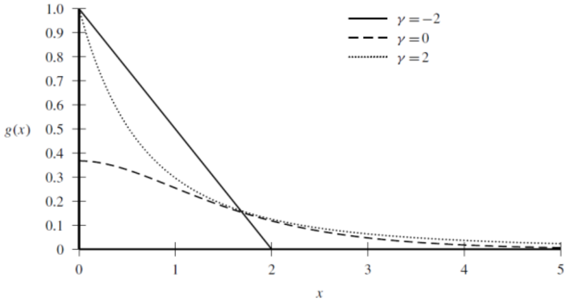


Figure 12.5 Various generalised Pareto density functions

确定阈值的方法

（1）平均超额函数法

$$e_n(u)=\frac{\sum_1^n(x_i-u)}{\sum_1^n I_{\{x_i>u\}}}$$

$$e(u)=\frac{\sigma+\xi u}{1-\xi}$$

当u达到某临界值u_0以后，若经验平均超出量函数$e_n u$ 呈线性变化，则可以确定u_0为阈值。

（2）Hill 图法

$$H_{k,n}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \ln\frac{x_{(i)}}{x_{(k)}}$$

$$\left\{\left(k,H_{k,n}^{-1}\right);k=1,2,\ldots,n\right\}$$

在 Hill 图形中，尾部稳定区域的起点横坐标k所对应的次序统计量 $x_{(k)}$ 可以作为阈值u。

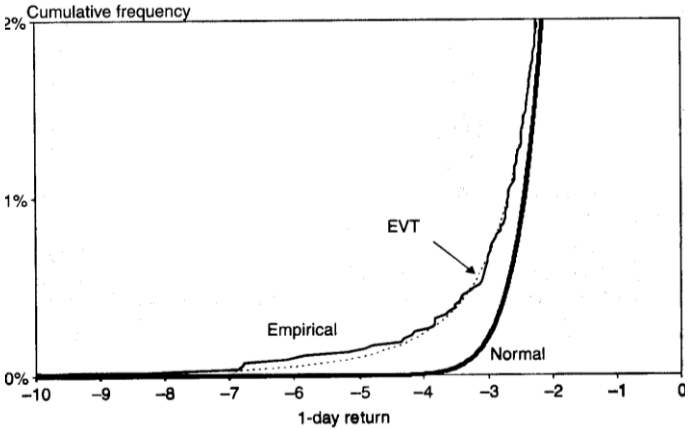


图 1984-2004 的 S&P 500 收益率的分布拟合图

（3）经验法则：保证 u 近似等于实证分布中的 95%的分位数。

广义帕累托分布的 VaR 值

对应于置信水平为 q 的 VaR，我们对 $F\left(VaR\right)=q$ 求解

$$q=1-\frac{n_u}{n}\left(1+\xi\frac{VaR_q-u}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

因此

$$V\widehat{a}R_q=u+\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left\{[(n/n_u)(1-q)]^{-\hat{\xi}}-1\right\}$$

$$ES_q=\frac{VaR}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}$$

应用：广义帕累托分布计算 VaR 的例子

表 2-8 用于演示 VaR 计算过程的投资组合

指数	组合价值（以 1000 美元计）
DJLA	4000
FTSE 100	3000
CAC 40	1000
Nikkei 225	2000
总计	10000

资料来源《风险管理与金融机构》

表 2-9 采用历史模拟法计算 VaR 所需要的数据

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7, 2006	11219.38	5828.8	4956.34	15154.06
1	Aug. 8, 2006	11173.59	5818.1	4967.95	15464.66

表 2-10 由表 2-2 数据产生的对于 2008 年 9 月 26 日的市场变量的不同情景

情景数码	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	组合价值（千美元）	损失(千美元）
1	10977.08	5187.46	4236.71	12252.62	10021.502	-21.502
2	10925.97	5234.87	4275.48	12155.54	10023.327	-23.327
3	11070.01	5164.10	4186.01	11986.84	9985.478	14.522

$$v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

$$11022.06 \times \frac{11173.59}{11219.38} = 10977.08$$

$$4000 \times \frac{10977.08}{11022.06} + 3000 \times \frac{5187.46}{5197.0} + 1000 \times \frac{4236.71}{4226.81} + 2000 \times \frac{12252.62}{12006.53} = 10021.502$$

表 2-11 对应 500 个情形损失的排序

情形编号	损失数量（以 1000 计）
494	499.395
339	359.440
329	341.366
349	251.943
487	247.571
131	241.712
227	230.265
495	227.332
441	225.051
376	217.945

306	211.797
365	202.970
242	200.116
238	199.467
477	188.758

表 2-12 对于表 2-11 的极值理论计算

情形数码	损失（以 1000 美元计）	排序	$\ln\left[\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\xi(v_i-u)}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}\right]$
494	499.395	1	-8.79
339	359.440	2	-7.10
329	341.366	3	-6.82
349	251.943	4	-5.11
487	247.571	5	-5.01

131	241.712	6	-4.87
227	230.265	7	-4.58
495	227.332	8	-4.50
441	225.051	9	-4.43
376	217.945	10	-4.24
306	211.797	11	-4.06
365	202.970	12	-3.78
242	200.116	13	-3.69
总计			-66.98
EVT 系数试验计算估计			
ξ	β		
0.3	40		

注：$u=200$, β=40 和ξ=0. 3

令 $u=200, n_u=13$。采用 Excel 计算中的 Solve 程序，可求得使似然函数达到最大值的参数值为

$$\beta = 43.526$$

$$\xi = 0.371$$

在 99%的置信水平下的 VaR 值为

$$200+\frac{43.526}{0.371}\left[\left(\frac{500}{13}(1-0.99)\right)^{-0.371}-1\right]=249.9$$

ii. 有关 u 的选择

2.5 蒙特卡罗模拟

采用蒙特卡罗模拟法，计算交易组合一天展望期的 VaR，计算步骤如下

i. 利用当前的市场变量对交易组合进行定价

ii. 从 Δx_i 服从的多元正态分布中进行一次抽样

iii. 由 Δx_i 的抽样计算出在交易日末的市场变量

iv. 利用新产生的市场变量来对交易组合重新定价

v. 计算 ΔP

vi. 重复 2-5 步的计算，得出 ΔP 的概率分布

应用：计算股票组合的 VaR

a) 首先，选择所有风险因子，设定其动态模型（可能需要估计均值、方差和相关系数等变量），例如股票价格服从如下随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

b) 其次，构造价格路径，例如上述随机微分方程的解为

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]$$

with W_t denoting the cumulative innovations from 0 to t.

将上述过程离散化，

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta t Z\right]$$

Δt = t-1 到 t 之间的时间间隔

Z = 服从标准正态分布 N(0,1)的变量，则

$$W_t = W_{t-1} + \sqrt{\Delta t} Z$$

利用均匀分布随机数，可以得出构造价格路径所需要的随机数据。

c) 当有多个风险资产 $S_t^1,\dots,S_t^n$ 服从的几何布朗运动随机过程 ，相关系数为 ρ_{ij}，

均值为 μ_i，方差为 σ_i 可将多变量方程写为

$$E\left[W_t^i W_t^j\right]=\rho_{ij}t$$

$$S_t^i=S_0^i\exp\left[\left(\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t+\sqrt{t}\sigma_i X_i\right]$$

$X=\left(X_1,\dots,X_n\right)$ 是多元正态随机向量，均值等于 0，方差矩阵为 Σ，

$\Sigma_{ij}=E\left(XX^T\right)=\rho_{ij}$ 产生随机向量 $X=\left(X_1,\dots,X_n\right)$ 的方法

i. 先产生 n 个正态随机变量随机数

ii. 计算矩阵 A，使得 $\Sigma=AA^T$ 例如

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \rho & \left(1-\rho^2\right)^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho \\ 0 & \left(1-\rho^2\right)^{1/2}\end{pmatrix}$$

iii. 产生随机向量

$$\begin{pmatrix}X^1 \\ X^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \rho & \left(1-\rho^2\right)^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y^1 \\ Y^2\end{pmatrix}$$

$$X^1=Y^1$$

$$X^2=\rho Y^1+\left(1-\rho^2\right)^{1/2}Y^2$$

d) 最后，计算资产组合的价格和 VAR

模拟 10000 次的价格路径，得到资产组合的价格经验分布，计算 1%的分位数。

随机模拟法的优缺点

优点：

i. 可以考虑其他分布，如允许胖尾，跳跃等特殊现象存在
ii. 可以将任何复杂的资产组合纳入模型
iii. 可计算置信区间
iv. 敏感性分析和压力测试

缺点

v. 某些意外情况未被纳入分布中。
vi. 计算机能力限制