基于 Copula 的组合风险指标计算——浦发&联通

一、 Visualizing Sklar's Theorem

1.1 (通过已知分布得到 copula) 实现 PPT285 页图：生成 1000 个二元正态（相关性为 0.3）样本，绘制二元正态分布和 Gauss copula 样本散点图。

绘制二元正态分布和 Gauss copula 的样本散点图如图 1：

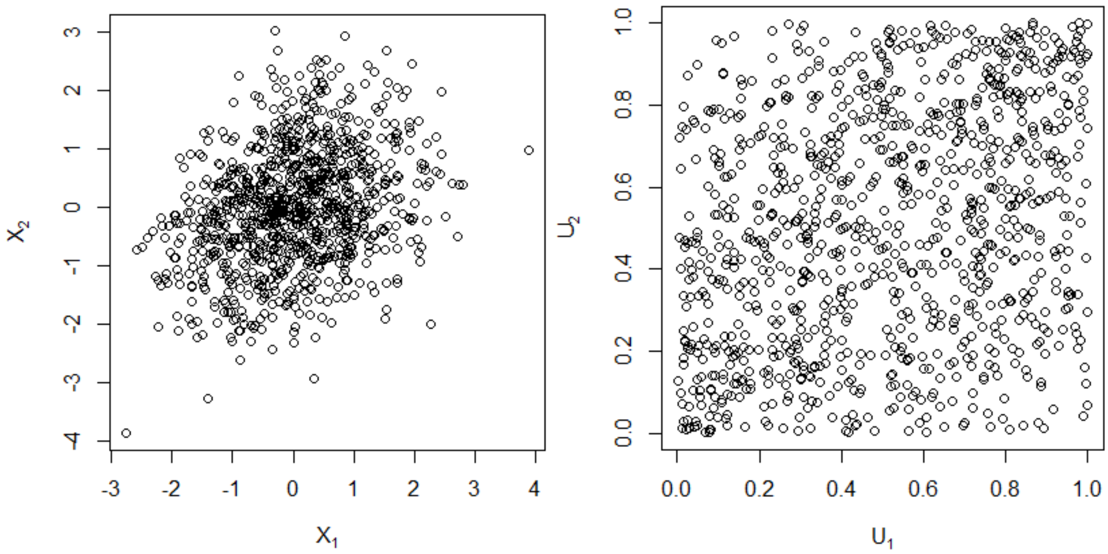

图 1：二元正态分布（左）和 Gauss copula（右）的样本散点图

1.2 实现 PPT286 页图：得到相依结构为上述 Gauss copula，边缘分布为指数分布 Exp(4)的 1000 个样本散点图。

相依结构为上述 Gauss copula，边缘分布为指数分布 Exp(4)的 1000 个样本散点图如图 2：

感谢中国人民大学统计学院杨昊宇同学提供的代码与报告

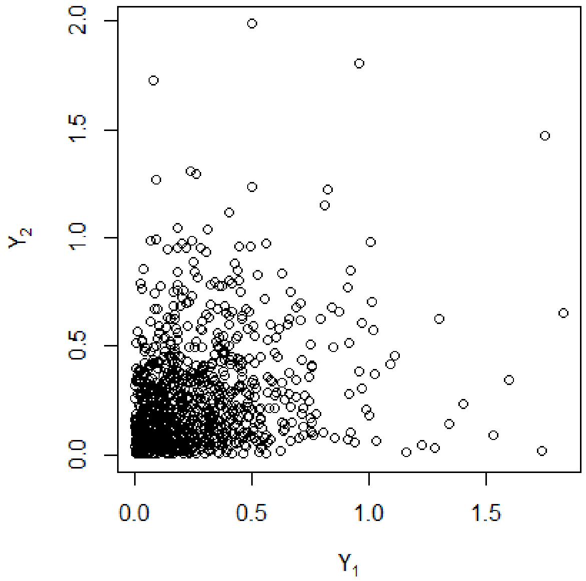

图 2：相依结构为上述 Gauss copula，边缘分布为指数分布 Exp(4)的 1000 个样本散点图

二、 以第三次作业中的两只股票日收益率数据为研究对象

2.1 计算两只股票日收益率的样本相关系数、样本 Kendall’tau、样本 Spearman’s rho。

选择的两只股票分别为“浦发银行”（PF）和“中国联通”（ZGLT）。计算结果见表 1：

表 1：两只股票日收益率数据计算结果

	相关系数	Kendall’tau	Spearman’s rho
PF& ZGLT	0.417	0.267	0.376

2.2 绘制上尾相依图和下尾相依图。

上尾相依：$u \to \mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(u)), u \in [0.9,1)$

下尾相依：$u \to \mathbb{P}(X_2 \le F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 \le F_1^{\leftarrow}(u)), u \in (0,0.1]$

以 0.001 为间隔，在区间$[0.9,1)$和区间$(0,0.1]$上分别绘制两只股票日收益率数据的上尾相依和下尾相依图，如图 3：

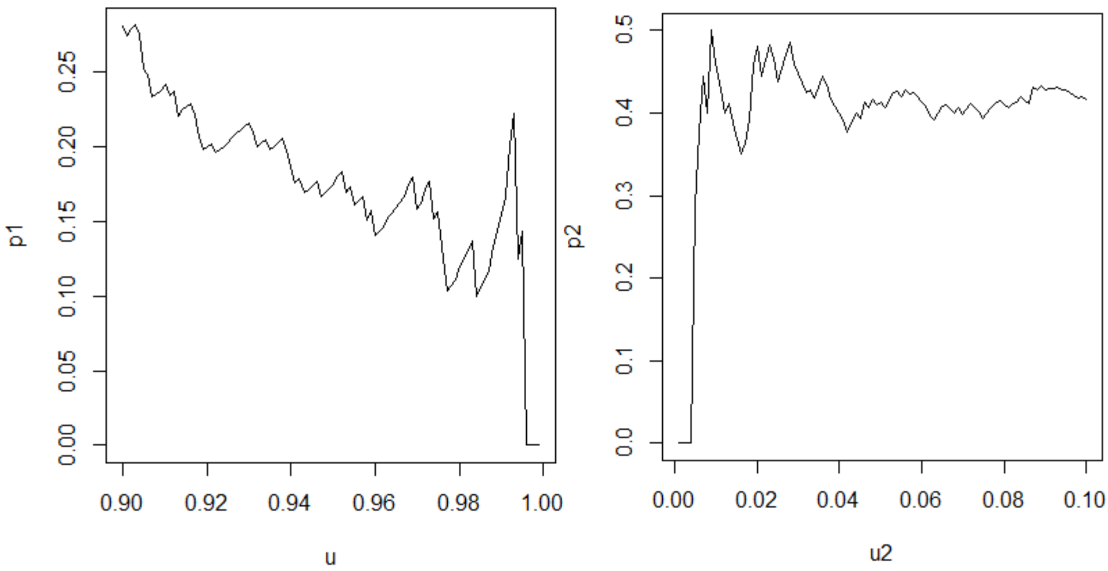

图 3：两只股票日收益率数据的上尾相依图（左）和下尾相依图（右）

由图 3 可以看出第二支股票（中国联通）再给定第一支股票（浦发银行）下的条件概率基本上都大于 0，表现出明显的上尾相依性和下尾相依性；但在接近 0 或接近 1 的区间上（u=0.996,0.997,0.998,0.999 以及 u=0.001,0.002,0.003,0.004）时，条件概率值为 0。

三、 对上述两只股票日收益率数据进行模型拟合。

3.1 分别用 Gauss 分布和 t 分布拟合两只股票日收益率的边缘分布。

利用 Gauss 分布拟合两只股票日收益率的边缘分布，拟合结果如表 2：

表 2：Gauss 分布拟合两只股票日收益率的边缘分布结果

	μ	σ
PF	3.91e-04	0.017
ZGLT	5.16e-04	0.027

利用 t 分布拟合两只股票日收益率的边缘分布，拟合结果如表 3：

表 3：t 分布拟合两只股票日收益率的边缘分布结果

	μ	σ	df
PF	-6.76e-05	6.89e-05	1.961
ZGLT	-3.34e-04	1.77e-04	1.973

3.2 分别拟合 Gumbel copula 和 t copula 的参数。

感谢中国人民大学统计学院杨昊宇同学提供的代码与报告

拟合 Gumbel copula 的参数：alpha=1.334；

拟合 t copula 的参数：ρ=0.4086，df=3.8852。

四、假设在两只股票的投资比例均为 0.5，基于随机模拟法计算后一天的组合收益率 $0.5X_1(t+1)+0.5X_2(t+1)$ 的 VaR 和 ES 风险指标（α=0.95），分别考虑四种情形：

- 1. Meta-Gumbel with Gauss margins
- 2. Meta-Gumbel with t margins
- 3. Meta-t with Gauss margins
- 4. Meta-t with t margins

给定置信水平 α 时，投资组合损失不超过 VaR 的可能性为 α，即

$$P(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2\le VaR_\alpha)=\iiint_\Omega f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\alpha \tag{1}$$

其中 ω_1 和 ω_2 分别表示浦发银行和中国联通产品在投资组合中所占的权重值，$\Omega=\left\{(x_1,x_2)\,|\,\omega_1 x_1+\omega_2 x_2\le VaR_\alpha\right\}$， $f(x_1,x_2)$ 是两种产品的联合概率密度函数。

通过 Copula 函数 $C(u_1,u_2)$ 的密度函数 $c(u_1,u_2)$ 和边缘分布函数 F_1,F_2 可以求出两种产品的联合概率密度函数：

$$f(x_1,x_2)=c(F_1(x_1),F_2(x_2))f(x_1)f(x_2) \tag{2}$$

将（2）式代入（1）式可得

$$\iiint_\Omega c(F_1(x_1),F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2)dx_1dx_2=\alpha \tag{3}$$

其中，F_n 和 f_n 分别是第 n 种产品的分布函数和密度函数，$c(u_1,u_2)$ 为 t copula 或 Gumbel copula 函数的密度函数。

给定置信水平 α，将边缘分布函数和 copula 密度函数式代入（3）式，可通过积分反解得到 VaR 的值。但由于解析表达式在计算上十分复杂，通常采用蒙特卡罗模拟方法估计 VaR 和 ES 。

计算步骤如下：

1) 根据确定的 Copula 函数做蒙特卡罗模拟。模拟生成 n 组服从 Copula 函数的随机数对 $\{(u_{1t},u_{2t})\},t=1,2,\cdots,n$ ，表示两种产品的收益率序列的分布函数值

感谢中国人民大学统计学院杨昊宇同学提供的代码与报告

（拟合所需的参数值为第三题中得到的参数）；

2) 根据边缘分布函数的逆函数拟合收益率序列$r_{it}=F^{-1}(u_{it}),\{r_{it}\}$为第 i 种产品的价格收益率序列（拟合所需的参数值为第三题中得到的参数）；

3) 根据两种产品的价格序列在投资组合中的权重ω_i计算总收益率序列$\{r_t\}$，其中$r_t=r_{1t}\cdot\omega_1+r_{2t}\cdot\omega_2$；

4) 对总收益率序列$\{r_t\}$排序，假设序列中有 n 个值，则对置信水平（1-α），取第（n×α）+1 个数的绝对值即为相应置信水平下的VaR；

5) 根据计算出的r_t和VaR，由公式：$ES=-\mathbb{E}(r_t\,|\,r_t\le VaR)$得到$ES$。

计算结果如表 4：

表 4：组合收益率在四种情形下的 VaR 和 ES 风险指标（α=0.95）

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
VaR	0.030	2.429	0.031	2.823
ES	0.038	4.187	0.042	5.341

感谢中国人民大学统计学院杨昊宇同学提供的代码与报告