Funzioni reali

Tabella dei contenuti

Funzioni reali a variabile reale

Dati due insiemi A, B, una funzione $f : A \to B$ è una relazione che associa ad ogni elemento del *dominio* A **uno ed un solo** elemento del *codominio* B.

Noi ci interessiamo alle funzioni reali di variabile reale, cioè a quelle del tipo $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nota bene

> Al fine di definire una funzione è essenziale specificarne il dominio.

Iniettività, suriettività e biettività

Una funzione $f : A \to B$ si dice:

- *Iniettiva* se possiede **al massimo una** soluzione $x \in A$
- *Suriettiva* se possiede **almeno una** soluzione $x \in A$
- *Biettiva* o *biunivoca* se possiede **esattamente una** soluzione $x \in A$, cioè se è sia *iniettiva* che *suriettiva*.

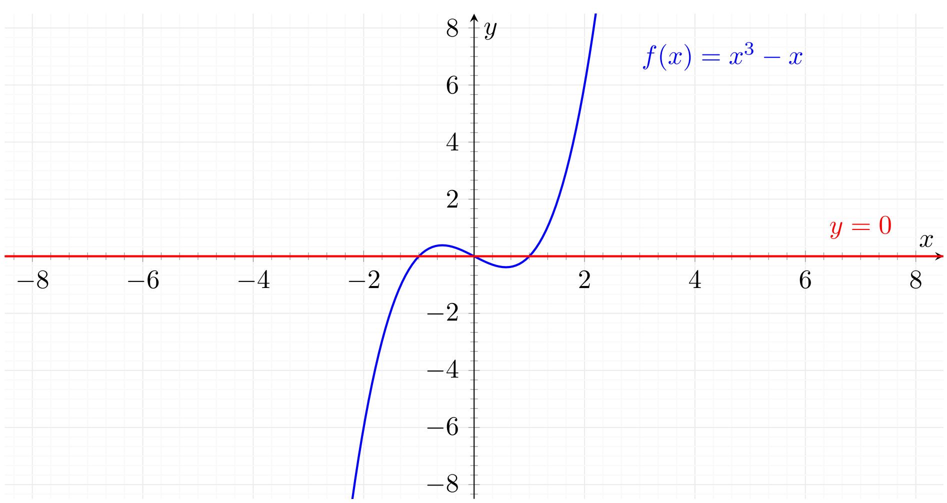
All'espressione $f(x) = y$ per ogni $y \in B$.

Nota bene

> Per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queste proprietà si possono dedurre dal numero di volte che ogni retta orizzontale interseca il grafico di f, ad esempio $f(x) = x$ incontra tutte le rette orizzontali una volta sola.

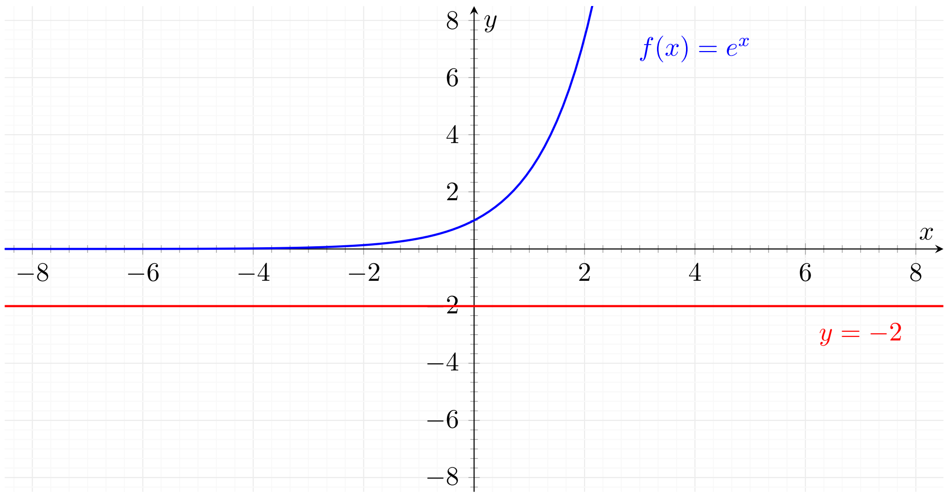
Esempio La funzione $f(x) = x^3 - x$ interseca tutte le rette orizzontali almeno una volta, ma incontra tre volte la retta orizzontale $y = 0$.

Funzione suriettiva



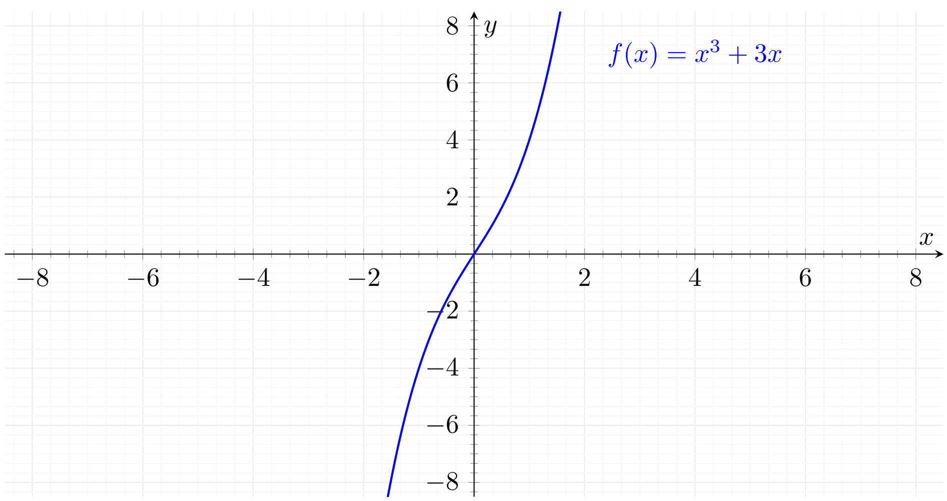
Esempio La funzione $f(x) = e^x$ interseca alcune rette orizzontali una sola volta ma non interseca alcuna retta orizzontale al di sotto di $y = 0$.

Funzione iniettiva



Esempio La funzione $f(x) = x^3 + 3x$ interseca tutte le rette orizzontali esattamente una singola volta come $g(x) = x$.

Funzione biettiva



Nota bene

> Ovviamente esistono anche funzioni che non godono di queste proprietà, come ad esempio la funzione $f(x) \coloneqq x^2 - 1$

Funzioni monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:

- *Non decrescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$
- *Strettamente crescente* se $f(x_1) < f(x_2)$
- *Non crescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$
- *Strettamente decrescente* se $f(x_1) > f(x_2)$

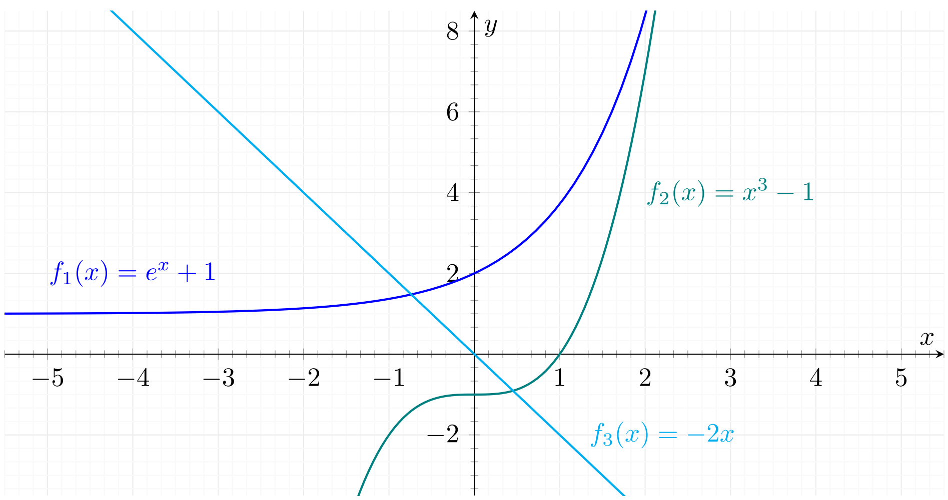
Per ogni $x_1 \in A, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$.

Nota bene

> Le funzioni strettamente monotone sono **sempre** iniettive.

Esempio Le funzioni $f_1(x) = e^x + 2$, $f_2(x) = x^3 - 1$ ed $f_3(x) = -2x$ sono rispettivamente: strettamente crescente, non decrescente e strettamente decrescente.

Funzioni monotone



Nota bene

> Esistono anche funzioni che non godono di queste proprietà, come ad esempio la funzione $f(x) \coloneqq x^2 - x$.

Funzioni pari e dispari

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:

- *pari* se $\forall x \in A,\ f(-x) = f(x)$
- *dispari* se $\forall x \in A,\ f(-x) = -f(x)$.

E soprattutto se il suo dominio A è simmetrico rispetto all'origine.

Nota bene

> Possiamo dire che quando la funzione è pari, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, mentre la funzione è dispari quando il grafico è simmetrico all'origine.

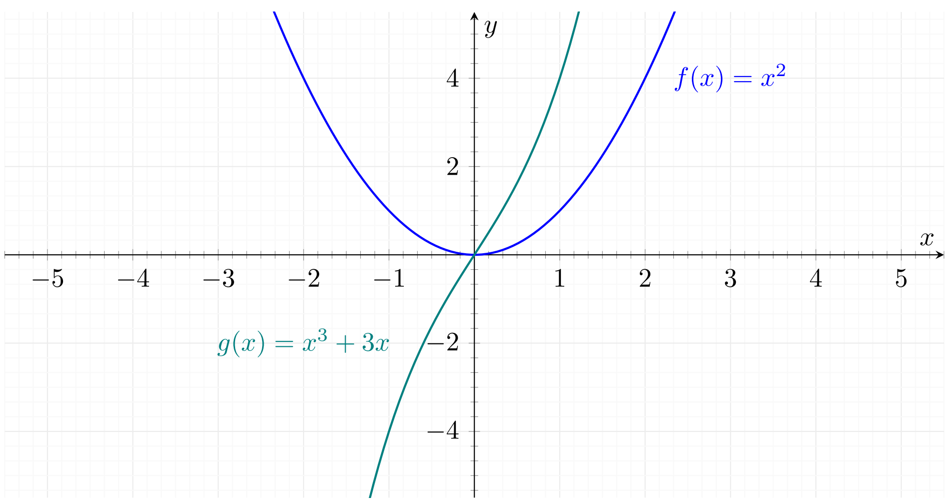
Quando f è un **polinomio**, possiamo affermare che è pari quando **l'esponente di grado più alto** all'interno è pari, al contrario affermiamo che è dispari quando l'esponente di grado più alto è dispari.

Nota bene

> La funzione coseno è pari, mentre la funzione seno è dispari.

Esempio Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite come $f(x) \coloneqq x^2,\ g(x) \coloneqq (x^3\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ sono rispettivamente: pari e dispari.

Funzioni pari e dispari



Alcune funzioni importanti

- Funzioni polinomiali: sono quelle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma:

$$f(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono numeri reali dati.

- Funzioni razionali: sono quelle funzioni della forma:

$$f(x) \coloneqq \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Con P, Q polinomi e il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : \; Q(x) \neq 0\}$.

- Funzioni trigonometriche $(\sin, \cos, \tan)$
- Funzioni esponenziale e logaritmo.