Limiti

Tabella dei contenuti

Calcolo infinitesimale

La definizione di limite è **fondamentale** per l'analisi matematica.

Limite finito

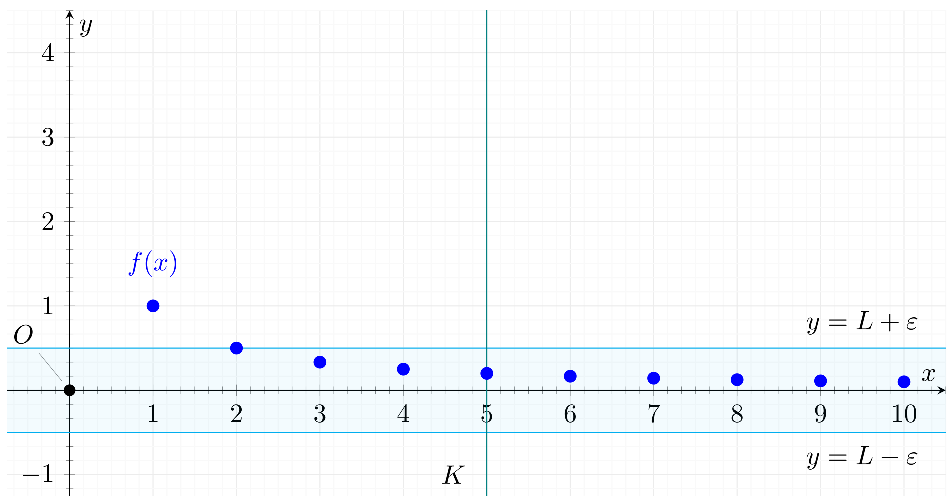
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente, e sia L un numero reale. Si dice che il limite di f per x tendente a $+\infty$ equivale ad L (oppure che f tende ad L per x che tende a $+\infty$), quando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \geq K,$$
$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

Dimostrazione

Data una $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ come $f(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vogliamo dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

Limite finito



Occorre fissare una $\varepsilon > 0$ **arbitrario**, di conseguenza sappiamo che deve esistere un $K \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{\varepsilon} \leq K$ (per il postulato di Eudosso-Archimede).

Quindi fissiamo una $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq K$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{K} \leq \varepsilon = 0 + \varepsilon \\ \dfrac{1}{n} \geq 0 \geq -\varepsilon = 0 - \varepsilon \end{cases} \qquad \square$$

Perciò abbiamo verificato che $L - \varepsilon \leq f(n) \leq L + \varepsilon$ con $L = 0$ e possiamo scrivere:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nota bene

Questa scrittura è equivalente a $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Limite infinito

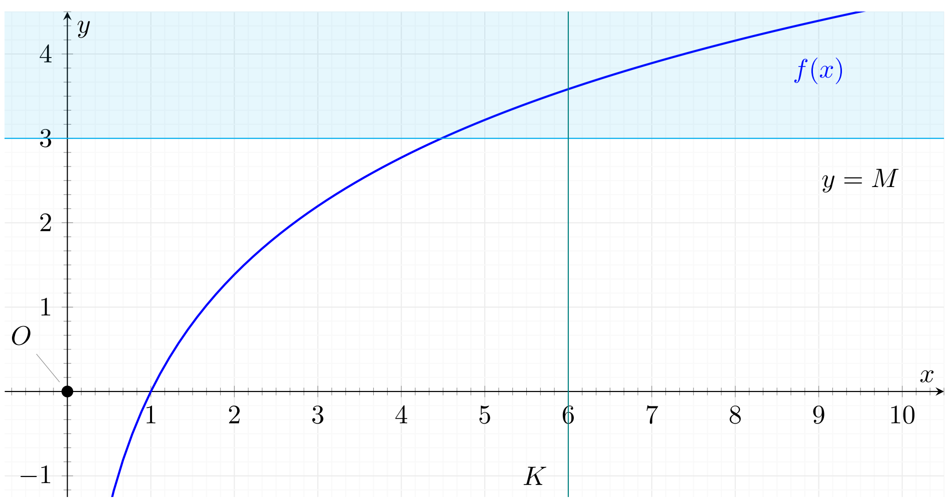
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Si dice che il limite di f per x tendente a $+\infty$ equivale a $+\infty$ (oppure che f tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$), quando:

$$\forall M > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } \geq K, f(x) \geq M$$

Similmente si dice che il limite di una funzione equivale a $-\infty$ quando:

$$\forall M > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } \geq K, f(x) \leq -M$$

Limite infinito



Esempio Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) = n^2 + 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, dimostriamo $lim_{n \to +\infty} = (n^2 + 1) = +\infty$.

Svolgimento: Fissiamo $M > 0$ arbitrario, per il quale, dal postulato di Eudosso-Archimede, sappiamo che esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. $K \geq M$. Infine consideriamo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq K$:

$$f(n) = n^2 + 1 \geq K^2 + 1 \geq K \geq M \qquad \square$$

Nota bene

La disequazione di secondo grado $K^2 + 1 \geq K$ è rispettata per qualsiasi K reale.

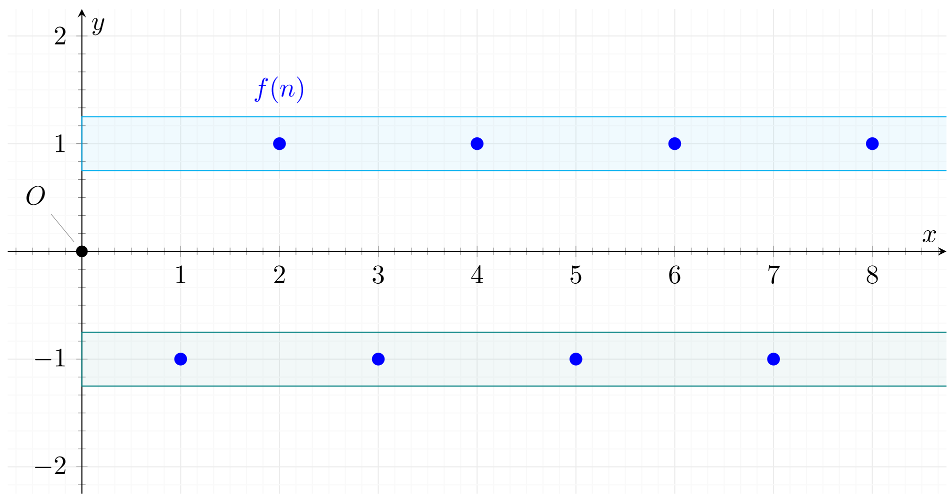
Limite inesistente

Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) \coloneqq (-1)^n$, vale a dire:

$$f(n) \coloneqq \begin{cases} +1 & \text{n pari} \\ -1 & \text{n dispari} \end{cases}$$

Il cui grafico è il seguente:

Limite inesistente



È evidente come il $\lim_{n\to+\infty} f(n)$ non esista.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ possieda due limiti L ed L' quando x tende a $+\infty$. Supponendo che entrambi siano valori **finiti**, prendiamo una $\varepsilon > 0$ molto piccola, perciò siamo certi che $0 < \varepsilon < \frac{|L-L'|}{2}$. Ora, per valori di x molto grandi, la funzione deve essere compresa tra le rette orizzontali $y = L + \varepsilon, y = L - \varepsilon$ e contemporaneamente anche tra le rette orizzontali $y = L' + \varepsilon, y = L' - \varepsilon$ il che è una contraddizione, dal momento che la funzione dovrebbe associare allo stesso valore di x due immagini.

Grazie a questo ragionamento si prova che sono assurdi anche i casi L finito, $L' = \pm\infty$ ed $L = \pm\infty, L' = \mp\infty$.

Teorema di algebra dei limiti

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Supponiamo che i seguenti limiti:

$$F \coloneqq \lim_{x\to+\infty} f(x),\ G \coloneqq \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Esistano e siano finiti, allora possiamo affermare che:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \quad & (f(x) + g(x)) & = F + G \\
\lim_{x\to+\infty} \quad & (f(x) - g(x)) & = F - G \\
\lim_{x\to+\infty} \quad & f(x)\ g(x) & = FG \\
\lim_{x\to+\infty} \quad & \tfrac{f(x)}{g(x)} & = \tfrac{F}{G}
\end{aligned}$$

Purché nell'ultimo caso $G \neq 0$.

Il teorema viene esteso parzialmente, in alcuni casi dove F oppure G sono infiniti:

$$\begin{aligned}
F + \infty = &\quad +\infty \quad \forall F \in \mathbb{R}, \\
F - \infty = &\quad -\infty \quad \forall F \in \mathbb{R}, \\
+\infty + \infty = &\quad +\infty, \\
-\infty - \infty = &\quad -\infty, \\
\infty \cdot \infty = &\quad \infty, \\
\tfrac{F}{\infty} = &\quad 0 \quad \forall F \in \mathbb{R}, \\
\tfrac{F}{0} = &\quad \infty \quad \forall F \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
\tfrac{0}{\infty} = &\quad 0, \\
\tfrac{\infty}{0} = &\quad \infty,
\end{aligned}$$

Il segno dei prodotti e dei rapporti viene determinato secodo le regole usuali.

Nota bene

Il teorema **non** si può applicare con le *forme indeterminate*:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\infty}{\infty}$$

Dimostrazione

Considerando il caso $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x))$ nel caso in cui i due limiti F, G siano entrambi finiti.

Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$, e per definizione di limite sappiamo che esiste $K_f > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_f$:

$$F - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq F + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo, esiste $K_g > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_g$:

$$G - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x) \leq G + \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo $K \coloneqq \max(K_f, K_g)$ e prendiamo un qualsiasi $x \in A$ con $x > K$, allora:

$$\begin{array}{c} f(x) + g(x) \leq (F + \frac{\varepsilon}{2}) + (G + \frac{\varepsilon}{2}) = F + G + \varepsilon \\ f(x) + g(x) \geq (F - \frac{\varepsilon}{2}) + (G - \frac{\varepsilon}{2}) = F + G - \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

$$F + G - \varepsilon \leq f(x) + g(x) \geq F + G + \varepsilon$$

Esempio Dato il limite $\lim\limits_{x \to +\infty}(2 + \frac{1}{x})$, vogliamo calcolarne il valore.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty}(2 + \frac{1}{x}) &= \lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} 2 + 0 = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo separare il limite della somma nella somma dei limiti. Successivamente otteniamo il limite di $\frac{1}{x}$ con x tendente ad infinito, e sempre grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo affermare che è zero. Infine il limite della funzione costante equivale a due, perciò otteniamo la somma tra due e zero.

Esercizio Dato il limite $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 + 1)^2$, vogliamo calcolarne il valore.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty}(x^2 + 1)^2 &= \lim_{x \to +\infty}(x^2 + 1) \cdot \lim_{x \to +\infty}(x^2 + 1) \\ &= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo separare il limite del prodotto, nel prodotto dei limiti. Successivamente risolviamo i due limiti che valgono entrambi $+\infty$. Infine, sempre grazie al teorema di algebra dei limiti moltiplichiamo tra loro i due infiniti applicando le regole del segno.

Teorema di monotonia

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente ed f monotona. Allora il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup \{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ cresce} \\ \inf \{f(x) : x \in A\} & \text{se } f \text{ descresce} \end{cases}$$

Dimostrazione

Considerando f **non decrescente**, sia:

$$L \coloneqq \sup \{f(x) : x \in A\}$$

In base all'insieme A, il valore L potrebbe essere un valore finito o meno. Supponendo che sia finito, allora fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per definizione L è il **minimo dei maggioranti** di $\{f(x) : x \in A\}$, dunque $L - \varepsilon < L$ **non** è a sua volta un maggiorante, questo significa che esiste $K \in A$ t.c. $f(K) \geq L - \varepsilon$.

Prendiamo ora un qualsiasi $x \in A$ con $x \geq K$, poiché in questo caso abbiamo considerato f non decrescente, otteniamo:

$$f(x) \geq f(K) \geq L - \varepsilon$$

Nello stesso momento però, L è maggiorante di $\{f(x) : x \in A\}$, pertanto:

$$f(x) \leq L < L - \varepsilon$$

Per cui il teorema di monotonia è dimostrato $\square$.

Esempio Dato il limite $\lim_{x \to +\infty} \log x$, dimostrare che il suo valore è $+\infty$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \{\log x : x > 0\} &\supseteq \{\log (e^n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \\ &= \{n \log e : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \\ &= \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \end{aligned}$$

Dimostrando $\sup \{\log x : x > 0\} = +\infty$, dimostriamo che l'insieme dei valori assunti dal logaritmo è **illimitato superiormente**, e allora grazie al teorema di monotonia segue che $\log x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

Infatti, l'ultimo insieme $\{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ è non limitato superiormente per il postulato di Eudosso-Archimede, pertanto neppure $\{\log x : x > 0\}$ lo è $\square$.

Teorema del confronto (o carabinieri)

Siano $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supponiamo che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in A$ e che i limiti esistano e siano uguali fra loro, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

Allora anche possiamo certamente affermare che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Dimostrazione

Successione

Una funzione che ha come dominio $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N} \setminus 0$) e codominio l'insieme dei reali, viene chiamata *successione di numeri reali.*

Tradizionalmente, al posto di scrivere $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ a(n) \coloneqq n^2 + 1\ \forall n$, è di uso comune la notazione:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ a_n \coloneqq n^2 + 1\ \forall n$$

Si dice che una successione $\{a_n\}$ è:

$$\begin{cases} \text{Convergente} \\ \text{Infinitesima} \\ \text{Positivamente divergete} \\ \text{Negativamente divergente} \\ \text{Oscillante} \end{cases} \text{se il limite } \lim_{n \to +\infty} a_n \begin{cases} \text{Esiste ed è finito} \\ \text{Esiste ed è } 0 \\ \text{Esite ed è } +\infty \\ \text{Esiste ed è } -\infty \\ \text{Non esiste} \end{cases}$$

Esempio Dato un numero reale $k > 0$, definiamo la successione $a_n \coloneqq k^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, abbiamo:

1. Se $k = 1$, allora $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$
2. Se $k > 1$, allora $\lim_{x \to +\infty} a_n = \sup\{k^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ e quindi a_n è strettamente crescente
3. Se $0 < k < 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{k^n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty$ e quindi a_n è strettamente decrescente.

Esercizi aggiuntivi

Esercizio Dati un numero reale $k < 0$, e la successione $a_n := k^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, determinare se questa è convergente, infinitesima, divergente od osccillante.

Svolgimento:

$$\lim_{n \to +\infty} (-k)^n \text{ non esiste}$$

Perciò la successione è oscillante come per la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ f(n) := (-1)^n$.