

# Conseguenze semantiche

## Tabella dei contenuti

<b>Ragionamento ipotetico deduttivo</b>	<b>2</b>
Conseguenze semantiche . . . . .	2
Tautologie notevoli . . . . .	3
Stringhe ed occorrenze . . . . .	3
Sostituzione . . . . .	3
Definizione iterativa . . . . .	3
Definizione ricorsiva . . . . .	4
Lemma . . . . .	4
Relazioni di equivalenza . . . . .	4
Lemma . . . . .	4

## Ragionamento ipotetico deduttivo

Il ragionamento tipico della matematica è il ragionamento ipotetico-deduttivo, rappresentato in logica dalle conseguenze semantiche.

### Conseguenze semantiche

*Notazione*

- $\Gamma, \Sigma, \Delta$  rappresentano insiemi arbitrari di proposizioni
- $\alpha, \beta, \varphi, \psi$  rappresentano generiche proposizioni

Quindi per indicare che da un'ipotesi segue una proposizione si adotta la scrittura  $\Gamma \models \psi$ , che si legge come “Da  $\Gamma$  segue  $\psi$ ”.

Possiamo affermare che la valutazione di un insieme di proposizioni è uguale ad uno se e solamente se la valutazione di tutti i suoi elementi è tale, infatti, dato un insieme  $\Gamma$  ed una valutazione  $v$ :

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \iff \forall \varphi \in \Gamma, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$$

L'espressione  $\Gamma \models \psi$  si dice conseguenza semantica se e solamente se  $\psi$  è verificata da ogni valutazione  $v$  che verifica anche  $\Gamma$ , per cui scriviamo:

$$\forall v \llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1 \quad (1)$$

**Esempio** Vogliamo provare che se  $\alpha$  ed  $\alpha \rightarrow \beta$  sono vere, allora lo è anche  $\beta$ , cioè che  $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \models \beta$ .

*Svolgimento*

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \rightarrow \beta, \alpha \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\iff (\llbracket \alpha \rrbracket_v \neq 0 \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1) \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \quad \square \end{aligned}$$

**Esercizio** Vogliamo dimostrare che  $(\Gamma, \alpha \models \beta) \implies (\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta)$ .

*Svolgimento*

$$\begin{aligned} \forall v \llbracket \Gamma, \alpha \rrbracket_v = 1 &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \\ &\iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \underline{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0}) \text{ or } \underline{\llbracket \beta \rrbracket_v = 1} \\ &\iff \llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta \quad \square \end{aligned}$$

### Tautologie notevoli

A livello teorico esistono infinite tautologie, ma tra le più importanti citiamo:

- Leggi di De Morgan:  $\begin{cases} \neg(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{cases}$
- Involutività della negazione:  $\{\neg(\neg\alpha) \longleftrightarrow \alpha\}$
- Commutatività:  $\begin{cases} (\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \\ (\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\psi \vee \varphi) \end{cases}$
- Distributività:  $\begin{cases} \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \\ \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \end{cases}$
- Associatività:  $\begin{cases} \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \\ \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \end{cases}$

### Stringhe ed occorrenze

Dato un insieme di simboli generici  $\Omega$ , una stringa su questo insieme è una sequenza di finita lunghezza  $n$ , della forma:

$$s = c_1 c_2 \dots c_n \quad (2)$$

dove per ogni indice  $i$  appartenente all'intervallo  $(1, n)$  il simbolo  $c_i$ , si trova in  $\Omega$ .

Di conseguenza, dato un simbolo  $a \in \Omega$  si dice occorrenza della stringa  $s$ , ogni coppia  $(a, i)$  tale per cui il simbolo di partenza  $a = c_i$ .

### Sostituzione

Siano quindi  $\varphi, \psi \in PROP$  e  $p \in \varphi$ , si scrive  $\varphi[ \psi / p ]$  per indicare che il simbolo  $p$  viene rimpiazzato dalla proposizione  $\psi$ .

#### Definizione iterativa

Per applicare la sostituzione in modo iterativo, si scorre una proposizione per individuare tutte le occorrenze e si rimpiazza il valore.

**Esempio** Data  $\varphi = ((p_1 \rightarrow (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3)$ , vogliamo sostituire  $p_1$  con  $\varphi$ .

*Svolgimento*

Le occorrenze di  $p_1$  sono  $(p_1, 3), (p_1, 8)$ , sostituendo  $p_1$  con  $\varphi$  otteniamo:  $((\varphi \rightarrow (p_5 \vee \varphi)) \wedge p_3)$ .

### Definizione ricorsiva

Sia  $*$  un connettivo tra  $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ , allora:

1.  $\varphi[\psi / p] = \begin{cases} \perp & \text{iff } \varphi = \perp \\ \varphi & \text{iff } \varphi \in AT, \varphi \neq p \\ \psi & \text{iff } \varphi \in AT, \varphi = p \end{cases}$
2.  $(\neg\varphi)[\psi / p] = \neg(\varphi[\psi / p])$
3.  $(\varphi_1 * \varphi_2)[\psi / p] = (\varphi_1[\psi / p] * \varphi_2[\psi / p])$

### Lemma

Sia  $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$ , allora dato  $\models \psi_1 \longleftrightarrow \psi_2$ , vale:  
 $\models \varphi[\psi / p] \longleftrightarrow \varphi[\psi / p]$

### Relazioni di equivalenza

Sia  $A$  un insieme e sia  $R \subseteq A \times A$ , quest'ultima viene chiamata relazione di equivalenza se e solamente:

- È riflessiva:  $\forall a \in A, aRa$
- È transitiva:  $\forall a, b, c \in A, (aRb, bRc) \implies aRc$
- È simmetrica:  $\forall a, b \in A, (aRb, bRa)$

*Nota bene*

Un esempio di relazione di equivalenza è la similitudine tra triangoli.

### Lemma

Si dice che  $\varphi$  è equivalente a  $\psi$  se e solamente se  $\varphi \longleftrightarrow \psi$  è una tautologia, infatti scriviamo che:

$$\varphi \approx \psi \iff \models \varphi \longleftrightarrow \psi$$

Con  $\approx \subseteq PROP \times PROP$ .