

Conseguenze semantiche

Tabella dei contenuti

Ragionamento ipotetico deduttivo	2
Conseguenze semantiche	2
Tautologie notevoli	3
Stringhe ed occorrenze	3
Sostituzione	3
Definizione iterativa	3
Definizione ricorsiva	4
Lemma	4
Relazioni di equivalenza	4
Lemma	4

Ragionamento ipotetico deduttivo

Il ragionamento tipico della matematica è il ragionamento ipotetico-deduttivo, rappresentato in logica dalle conseguenze semantiche.

Conseguenze semantiche

Notazione

- Γ, Σ, Δ rappresentano insiemi arbitrari di proposizioni
- $\alpha, \beta, \phi, \psi$ rappresentano generiche proposizioni

Quindi per indicare che da un'ipotesi segue una proposizione si adotta la scrittura $\Gamma \models \psi$, che si legge come “Da Γ segue ψ ”.

Possiamo affermare che la valutazione di un insieme di proposizioni è uguale ad uno se e solamente se la valutazione di tutti i suoi elementi è tale, infatti, dato un insieme Γ ed una valutazione v :

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \iff \forall \phi \in \Gamma, \llbracket \phi \rrbracket_v = 1$$

L'espressione $\Gamma \models \psi$ si dice conseguenza semantica se e solamente se ψ è verificata da ogni valutazione v che verifica anche Γ , per cui scriviamo:

$$\forall v \llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1 \quad (1)$$

Esempio Vogliamo provare che se α ed $\alpha \rightarrow \beta$ sono vere, allora lo è anche β , cioè che $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \models \beta$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \rightarrow \beta, \alpha \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\iff (\llbracket \alpha \rrbracket_v \neq 0 \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1) \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio Vogliamo dimostrare che $(\Gamma, \alpha \models \beta) \implies \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \forall v \llbracket \Gamma, \alpha \rrbracket_v = 1 &\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \\ &\iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0) \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \\ &\iff \llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_v = 1 \\ &\implies \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta \quad \square \end{aligned}$$

Tautologie notevoli

A livello teorico esistono infinite tautologie, ma tra le più importanti citiamo:

- Leggi di De Morgan: $\begin{cases} \neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi) \end{cases}$
- Involutività della negazione: $\{\neg(\neg\alpha) \longleftrightarrow \alpha\}$
- Commutatività: $\begin{cases} (\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\psi \wedge \phi) \\ (\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\psi \vee \phi) \end{cases}$
- Distributività: $\begin{cases} \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma) \\ \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma) \end{cases}$
- Associatività: $\begin{cases} \phi \wedge (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \\ \phi \vee (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \sigma \end{cases}$

Stringhe ed occorrenze

Dato un insieme di simboli generici Ω , una stringa su questo insieme è una sequenza di finita lunghezza n , della forma:

$$s = c_1 c_2 \dots c_n \quad (2)$$

dove per ogni indice i appartenente all'intervallo $(1, n)$ il simbolo c_i , si trova in Ω .

Di conseguenza, dato un simbolo $a \in \Omega$ si dice occorrenza della stringa s , ogni coppia (a, i) tale per cui il simbolo di partenza $a = c_i$.

Sostituzione

Siano quindi $\phi, \psi \in PROP$ e $p \in \phi$, si scrive $\phi[\psi / p]$ per indicare che il simbolo p viene rimpiazzato dalla proposizione ψ .

Definizione iterativa

Per applicare la sostituzione in modo iterativo, si scorre una proposizione per individuare tutte le occorrenze e si rimpiazza il valore.

Esempio Data $\phi = ((p_1 \rightarrow (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3)$, vogliamo sostituire p_1 con ϕ .

Svolgimento:

Le occorrenze di p_1 sono $(p_1, 3), (p_1, 8)$, sostituendo p_1 con ϕ otteniamo: $((\psi \rightarrow (p_5 \vee \psi)) \wedge p_3)$.

Definizione ricorsiva

Sia $*$ un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, allora:

1. $\phi[\psi / p] = \begin{cases} \perp & \text{iff } \phi = \perp \\ \phi & \text{iff } \phi \in AT, \phi \neq p \\ \psi & \text{iff } \phi \in AT, \phi = p \end{cases}$
2. $(\neg\phi)[\psi / p] = \neg(\phi[\psi / p])$
3. $(\phi_1 * \phi_2)[\psi / p] = (\phi_1[\psi / p] * \phi_2[\psi / p])$

Lemma

Sia $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$, allora dato $\models \psi_1 \longleftrightarrow \psi_2$, vale:
 $\models \phi[\psi / p] \longleftrightarrow \phi[\psi / p]$

Relazioni di equivalenza

Sia A un insieme e sia $R \subseteq A \times A$, quest'ultima viene chiamata relazione di equivalenza se e solamente:

- È riflessiva: $\forall a \in A, aRa$
- È transitiva: $\forall a, b, c \in A, (aRb, bRc) \implies aRc$
- È simmetrica: $\forall a, b \in A, (aRb, bRa)$

Nota bene

Un esempio di relazione di equivalenza è la similitudine tra triangoli.

Lemma

Si dice che ϕ è equivalente a ψ se e solamente se $\phi \longleftrightarrow \psi$ è una tautologia, infatti scriviamo che:

$$\phi \approx \psi \iff \models \phi \longleftrightarrow \psi$$

Con $\approx \subseteq PROP \times PROP$.