Limiti

Tabella dei contenuti

Calcolo infinitesimale

La definizione di limite è **fondamentale** per l'analisi matematica.

Limite finito per x tendente a infinito

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente, e sia L un numero reale. Si dice che il limite di f per x tendente a $+\infty$ equivale ad L (oppure che f tende ad L per x che tende a $+\infty$), quando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \geq K,$$
$$L - \varepsilon \leq \ f(x) \ \leq L + \varepsilon$$

Dimostrazione

Data una $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ come $f(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vogliamo dimostrare che $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario, e per definizione di limite, esiste un K intero positivo tale che $0 < \frac{1}{\varepsilon} \leq K$ per il postulato di Eudosso-Archimede.

Quindi fissiamo una $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq K$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{K} \leq \varepsilon = 0 + \varepsilon \\ \dfrac{1}{n} \geq 0 \geq -\varepsilon = 0 - \varepsilon \end{cases}$$

$\square$

Perciò abbiamo verificato che $L - \varepsilon \leq \ f(n) \ \leq L + \varepsilon$ con $L = 0$ e infatti possiamo scrivere:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nota bene

Questa scrittura è equivalente a $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$.

Limite infinito per x tendente ad infinito

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Si dice che il limite di f per $x \to +\infty$ equivale a $+\infty$ (oppure che f tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$), quando:

$$\forall M > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } \geq K, f(x) \geq M$$

Similmente si dice che il limite di una funzione equivale a $-\infty$ quando:

$$\forall M > 0,\ \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } \geq K, f(x) \leq -M$$

Esempio Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = n^2 + 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, dimostriamo $\lim_{n\to+\infty} = (n^2+1) = +\infty$.

Svolgimento

Fissiamo $M > 0$ arbitrario, per il quale, dal postulato di Eudosso-Archimede, sappiamo che esiste un $K \in \mathbb{N}$ t.c. $K \geq M$. Infine consideriamo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq K$:

$$f(n) = n^2 + 1 \geq K^2 + 1 \geq K \geq M$$

$\square$

Limite inesistente

Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita come $f(n) := (-1)^n$, vale a dire:

$$f(n) := \begin{cases} +1 & \text{n pari} \\ -1 & \text{n dispari} \end{cases}$$

È evidente come il limite non esiste perché la funzione continua ad alternare valori positivi con valori negativi.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ possieda due limiti L ed L' quando $x \to +\infty$. Supponendo che entrambi siano valori finiti, prendiamo un $\varepsilon > 0$ molto piccolo, perciò siamo certi che $0 < \varepsilon < \frac{|L-L'|}{2}$. Ora, per valori di x molto grandi, la funzione deve essere compresa tra le rette orizzontali $y = L + \varepsilon, y = L - \varepsilon$ e contemporaneamente anche tra le rette orizzontali $y = L' + \varepsilon, y = L' - \varepsilon$ il che è una contraddizione, dal momento che la funzione dovrebbe associare allo stesso valore di x due immagini differenti.

Grazie a questo ragionamento proviamo che sono assurdi anche i casi:

- $L \in \mathbb{R},\ L' = \infty$
- $L = \pm\infty,\ L' = \mp\infty$.

Teorema di algebra dei limiti

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Supponiamo che i seguenti limiti esistano e siano finiti:

$$F := \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad G := \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Allora possiamo affermare che:

$$\lim_{x\to+\infty} \Big[f(x) + g(x)\Big] = F + G$$
$$\lim_{x\to+\infty} \Big[f(x) - g(x)\Big] = F - G$$

$$\lim_{x \to +\infty} \Big[f(x) \ \cdot \ g(x) \Big] = F \ \cdot \ G$$
$$\lim_{x \to +\infty} \Big[f(x) \div g(x) \Big] = F \div G$$

Purché nel caso del rapporto $G \neq 0$.

Il teorema viene esteso parzialmente, in alcuni casi dove F oppure G sono infiniti:

$$\begin{aligned} F + \infty = +\infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}, &\quad F - \infty = -\infty \ \ \forall F \in \mathbb{R}, \\ +\infty + \infty = +\infty, &\quad -\infty - \infty = -\infty, \\ \infty \cdot \infty = \infty, & \\ \tfrac{F}{\infty} = 0 \forall F \in \mathbb{R}, &\quad \tfrac{F}{0} = \infty \forall F \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \tfrac{0}{\infty} = 0, &\quad \tfrac{\infty}{0} = \infty \end{aligned}$$

Nota bene

Il teorema **non** si può applicare con le *forme indeterminate*:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\infty}{\infty}$$

Dimostrazione

Considerando il caso $\lim_{x \to +\infty}(f(x) + g(x))$ nel caso in cui i due limiti F, G siano entrambi finiti.

Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$, e per definizione di limite sappiamo che esiste $K_f > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_f$:

$$F - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq F + \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo, esiste $K_g > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_g$:

$$G - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x) \leq G + \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo $K \coloneqq \max(K_f, K_g)$ e prendiamo un qualsiasi $x \in A$ con $x > K$, allora:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) \leq (F + \frac{\varepsilon}{2}) + (G + \frac{\varepsilon}{2}) = F + G + \varepsilon \\ f(x) + g(x) \geq (F - \frac{\varepsilon}{2}) + (G - \frac{\varepsilon}{2}) = F + G - \varepsilon \end{aligned}$$

$$F + G - \varepsilon \leq f(x) + g(x) \geq F + G + \varepsilon$$

Esempio Dato il limite $\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x})$, vogliamo calcolarne il valore.

Svolgimento

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x}) &= \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 2 + 0 = 2+0 = 2\end{aligned}$$

Grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo separare il limite della somma nella somma dei limiti. Successivamente otteniamo il limite di $\frac{1}{x}$ con x tendente ad infinito, e sempre grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo affermare che è zero. Infine il limite della funzione costante equivale a due, perciò otteniamo la somma tra due e zero.

Esercizio Dato il limite $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^2$, vogliamo calcolarne il valore.

Svolgimento

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^2 &= \lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\cdot\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\\ &= (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Grazie al teorema di algebra dei limiti possiamo separare il limite del prodotto, nel prodotto dei limiti. Successivamente risolviamo i due limiti che valgono entrambi $+\infty$. Infine, sempre grazie al teorema di algebra dei limiti moltiplichiamo tra loro i due infiniti applicando le regole del segno.

Teorema di monotonia

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente ed f monotona. Allora il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases}\sup\{f(x) : x\in A\} & \text{se } f \text{ cresce}\\ \inf\{f(x) : x\in A\} & \text{se } f \text{ descresce}\end{cases}$$

Dimostrazione

Considerando f **non decrescente**, sia:

$$L \coloneqq \sup\{f(x) : x \in A\}$$

In base all'insieme A, il valore L potrebbe essere un valore finito o meno. Supponendo che sia finito, allora fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per definizione L è il **minimo dei maggioranti** di $\{f(x) : x \in A\}$, dunque $L - \varepsilon < L$ **non** è a sua volta un maggiorante, questo significa che esiste $K \in A$ t.c. $f(K) \geq L - \varepsilon$.

Prendiamo ora un qualsiasi $x \in A$ con $x \geq K$, poiché in questo caso abbiamo considerato f non decrescente, otteniamo:

$$f(x) \geq f(K) \geq L - \varepsilon$$

Nello stesso momento però, L è maggiorante di $\{f(x) : x \in A\}$, pertanto:

$$f(x) \leq L < L + \varepsilon$$

Per cui il teorema di monotonia è dimostrato $\square$.

Esempio Dato il limite $\lim_{x \to +\infty} \log x$, dimostrare che il suo valore è $+\infty$.

Svolgimento

$$\begin{aligned}\{\log x : x > 0\} &\supseteq \{\log(e^n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \\ &= \{n \log e : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \\ &= \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}\end{aligned}$$

Dimostrando $\sup\{\log x : x > 0\} = +\infty$, dimostriamo che l'insieme dei valori assunti dal logaritmo è **illimitato superiormente**, e allora grazie al teorema di monotonia segue che $\log x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

Infatti, l'ultimo insieme $\{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ è non limitato superiormente per il postulato di Eudosso-Archimede, pertanto neppure $\{\log x : x > 0\}$ lo è $\square$.

Teorema del confronto (o carabinieri)

Siano $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supponiamo che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in A$ e che i limiti esistano e siano uguali fra loro, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

Allora anche possiamo certamente affermare che $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Dimostrazione

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ qualsiasi, per definizione di limite troviamo $K_f > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_f$:

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

Allo stesso modo troviamo $K_h > 0$ t.c. $\forall x \in A$ con $x \geq K_h$:

$$L - \varepsilon \leq h(x) \leq L + \varepsilon$$

Sia quindi $K = \max(K_f, K_h)$, comunque preso $x \in A$ t.c. $x \geq K$ otteniamo:

$$\begin{cases} g(x) \leq h(x) \leq L + \varepsilon \\ g(x) \geq f(x) \geq L - \varepsilon \end{cases} \qquad \square$$

Variante

Date $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\text{Se } f(x) \geq g(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, \text{ allora } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Esempio Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}$ mediante il teorema del confronto.

Svolgimento

Sappiamo che il limite $\lim_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$ e anche che $-1 \leq \sin x \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$, infatti:

$$\underbrace{\frac{-1}{x^2+1}}_{-\frac{1}{\infty}=0} \leq \sin x \leq \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{+\frac{1}{\infty}=0}$$
$$\text{per } x \to +\infty$$

Di conseguenza, per il teorema del confronto, sappiamo che il risultato del limite è 0.

Esempio Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} (x^6 + \cos^2(e^x - \log(|x|))$ mediante il teorema del confronto.

Svolgimento

Sappiamo che $x^6 \longrightarrow +\infty$ per $x \to +\infty$, di conseguenza:

$$\underbrace{x^6 + \cos^2(\dots)}_{f(x)} \geq \underbrace{x^6}_{g(x)} \longrightarrow +\infty \text{ per } x \to +\infty$$

Per cui, sappiamo che il risultato è $+\infty$.

Limite qualsiasi per x tendente a meno infinito

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A non limitato inferiormente ed $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si dice che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
$$\text{Quando}$$
$$\lim_{t \to +\infty} f(-t) = L$$

Limite finito per x tendente ad un valore finito

Dato un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ possiamo definire il limite di una funzione f per $x \to x_0$.

Punto di accumulazione

Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamiamo x_0 *punto di accumulazione* se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ t.c. } x \neq x_0,$$
$$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

Esempio

- 0 è un punto di accumulazione dell'intervallo $(0, 1)$
- Non esiste alcun punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
- L'unico punto di accumulazione di $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ è 0.

Nota bene

> Possiamo definire il limite di una funzione per $x \to x_0$ se e solamente se x_0 è punto di accumulazione del suo dominiio.

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A, quindi si dice che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \neq x_0 \text{ e}$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \text{ vale}$$
$$L - \varepsilon \leq \ f(x) \ \leq L + \varepsilon$$

Limite infinto per x tendente ad un valore finito

Si dice che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \neq x_0 \text{ e },$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \text{ vale } f(x) \geq M$$

Similmente si dice che vale $-\infty$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \neq x_0 \text{ e },$$
$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \text{ vale } f(x) \leq -M$$

Ovviamente il limite può anche non esistere, ma se esiste è unico. Inoltre per definizione $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non dipende dal valore $f(x_0)$ indipendentemente che la funzione sia definita o meno in quel punto.

Esempio Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) \coloneqq x \ \forall x \in \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$. Vogliamo calcolare il limite $\lim\limits_{x \to x_0} x$.

Prendiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo $\delta \coloneqq \varepsilon$, infine consideriamo un $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi con $x \neq x_0$. Per definizione ottengo $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ e devo dimostrare che vale $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$.

In questo caso essendo $f(x) = x$ e $\varepsilon = \delta$ è dimostrato tautologicamente.

Esempio Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) \coloneqq \begin{cases} x & \text{se } x \neq 3 \\ 57 & \text{se } x = 3 \end{cases}$. Vogliamo calcolare il limite.

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} x = 3$$
$$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} x = 4$$

Infine i teoremi di algebra dei limiti e del confronto si possono estendere anche per $x \to x_0$.

Limiti unilateri

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di A, si usa scrivere:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \coloneqq \lim_{x\to x_0} f^+(x_0)$$

Dove $f^+ : A \cap (x_0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f^+(x) \coloneqq f(x)\ \forall x \in A \cap (x_0, +\infty)$. Similmente:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \coloneqq \lim_{x\to x_0} f^-(x_0)$$

Dove $f^- : A \cap (-\infty, x_0) \to \mathbb{R},\ f^-(x) \coloneqq f(x)\ \forall x \in A \cap (-\infty, x_0)$.

Successione

Una funzione che ha come dominio $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N} \setminus 0$) e codominio l'insieme dei reali, viene chiamata *successione di numeri reali*.

Tradizionalmente, al posto di scrivere $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ a(n) \coloneqq n^2 + 1\ \forall n$, è di uso comune la notazione:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \coloneqq n^2 + 1\ \forall n$$

Si dice che una successione $\{a_n\}$ è:

$$\begin{cases} \text{Convergente} \\ \text{Infinitesima} \\ \text{Positivamente divergete} \\ \text{Negativamente divergente} \\ \text{Oscillante} \end{cases} \text{se il limite} \lim_{n\to+\infty} a_n \begin{cases} \text{Esiste ed è finito} \\ \text{Esiste ed è } 0 \\ \text{Esite ed è } +\infty \\ \text{Esiste ed è } -\infty \\ \text{Non esiste} \end{cases}$$

Esempio Dato un numero reale $k > 0$, definiamo la successione $a_n \coloneqq k^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, abbiamo:

1. Se $k = 1$, allora $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$

2. Se $k > 1$, allora $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n = \sup\{k^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ e quindi a_n è strettamente crescente
3. Se $0 < k < 1$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf\{k^n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty$ e quindi a_n è strettamente decrescente.

Esercizi aggiuntivi

Esercizio Dati un numero reale $k < 0$, e la successione $a_n := k^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, determinare se questa è convergente, infinitesima, divergente od osccillante.

Svolgimento

$$\lim_{n \to +\infty} (-k)^n \text{ non esiste}$$

Perciò la successione è oscillante come per la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ f(n) := (-1)^n$.

Esercizio Dato $\alpha \in (-1, 1)$, sia $b_n := \alpha^n \forall n \in \mathbb{N}$. Il limite $\lim_{x \to +\infty} b_n$ esiste? Se si calcolarlo.

Esercizio Esplicitare la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ facendo ricorso ai quantificatori.

Svolgimento

> Per qualsiasi ε positivo esiste un valore K positivo tale per cui dato un qualsiasi x del dominio maggiore di K (cioè successiva nell'asse delle ascisse) la funzione sia compresa tra le due rette orizzontali $L - \varepsilon$ ed $L + \varepsilon$.
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in A \text{ con } x \geq K,$$
> $$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$