# Conseguenze semantiche



# Ragionamento ipotetico deduttivo

Il ragionamento tipico della matematica è il ragionamento ipotetico-deduttivo, rappresentato in logica dalle conseguenze semantiche.

## Conseguenze semantiche

Notazione

- $\Gamma, \Sigma, \Delta$ rappresentano insiemi arbitrari di proposizioni
- $\alpha, \beta, \phi, \psi$ rappresentano generiche proposizioni

Quindi per indicare che da un'ipotesi segue una proposizione si adotta la scrittura $\Gamma \vDash \psi$, che si legge come "Da $\Gamma$ segue $\psi$".

Possiamo affermare che la valutazione di un insieme di proposizioni è uguale ad uno se e solamente se la valutazione di tutti i suoi elementi è tale, infatti, dato un insieme $\Gamma$ ed una valutazione $v$:

$$[\![ \Gamma ]\!]_v = 1 \iff \forall \phi \in \Gamma,\ [\![ \phi ]\!]_v = 1$$

L'espressione $\Gamma \vDash \psi$ si dice conseguenza semantica se e solamente se $\psi$ è verificata da ogni valutazione $v$ che verifica anche $\Gamma$, per cui scriviamo:

$$\forall v [\![ \Gamma ]\!]_v = 1 \implies [\![ \psi ]\!]_v = 1 \tag{1}$$

**Esempio** Vogliamo provare che se $\alpha$ ed $\alpha \to \beta$ sono vere, allora lo è anche $\beta$, cioè che $\alpha \to \beta, \alpha \vDash \beta$.

Svolgimento:

$$
\begin{aligned}
[\![\, \alpha \to \beta, \alpha \,]\!]_v = 1 &\iff [\![\, \alpha \to \beta \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\iff (\cancel{[\![\, \alpha \,]\!]_v = 0} \text{ or } [\![\, \beta \,]\!]_v = 1) \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Esercizio** Vogliamo dimostrare che $(\Gamma, \alpha \vDash \beta) \implies \Gamma \vDash \alpha \to \beta$.

Svolgimento:

$$
\begin{aligned}
\forall v [\![\, \Gamma, \alpha \,]\!]_v = 1 \implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 &\iff ([\![\, \Gamma \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1) \implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \\
&\iff ([\![\, \Gamma \,]\!]_v \neq 1 \text{ or } \underline{[\![\, \alpha \,]\!]_v = 0}) \text{ or } \underline{[\![\, \beta \,]\!]_v = 1} \\
&\iff [\![\, \Gamma \,]\!]_v \neq 1 \text{ or } [\![\, \alpha \to \beta \,]\!]_v = 1 \\
&\implies \Gamma \vDash \alpha \to \beta \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Tautologie notevoli**

A livello teorico esistono infinite tautologie, ma tra le più importanti citiamo:

- Leggi di De Morgan

$$
\begin{aligned}
\neg(\phi \wedge \psi) &\longleftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\neg(\phi \vee \psi) &\longleftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}
$$

- Involutività della negazione

$$\neg(\neg\alpha) \longleftrightarrow \alpha$$

- Commutatività

$$
\begin{aligned}
(\phi \wedge \psi) &\longleftrightarrow (\psi \wedge \phi) \\
(\phi \vee \psi) &\longleftrightarrow (\psi \vee \phi)
\end{aligned}
$$

- Distributività

$$
\begin{aligned}
\phi \wedge (\psi \vee \sigma) &\longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma) \\
\phi \vee (\psi \wedge \sigma) &\longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)
\end{aligned}
$$

- Associatività

$$
\begin{aligned}
\phi \wedge (\psi \wedge \sigma) &\longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \\
\phi \vee (\psi \vee \sigma) &\longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \sigma
\end{aligned}
$$

## Stringhe ed occorrenze

Dato un insieme di simboli generici $\Omega$, una stringa su questo insieme è una sequenza di finita lunghezza $n$, della forma:

$$s = c_1\ c_2\ \dots\ c_n \tag{2}$$

dove per ogni indice $i$ appartenente all'intervallo $(1, n)$ il simbolo $c_i$, si trova in $\Omega$.

Di conseguenza, dato un simbolo $a \in \Omega$ si dice occorrenza della stringa $s$, ogni coppia $(a, i)$ tale per cui il simbolo di partenza $a = c_i$.

## Sostituzione

Siano quindi $\phi, \psi \in PROP$ e $p \in \phi$, si scrive $\phi[\,\psi \,/\, p\,]$ per indicare che il simbolo $p$ viene rimpiazzato dalla proposizione $\psi$.

### Definizione iterativa

Per applicare la sostituzione in modo iterativo, si scorre una proposizione per individuare tutte le occorrenze e si rimpiazza il valore.

**Esempio** Data $\phi = ((p_1 \to (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3)$, vogliamo sostituire $p_1$ con $\phi$.

Svolgimento:

> Le occorrenze di $p_1$ sono $(p_1, 3), (p_1, 8)$, sostituendo $p_1$ con $\psi$ otteniamo: $((\psi \to (p_5 \vee \psi)) \wedge p_3)$.

### Definizione ricorsiva

Sia $*$ un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \to\}$, allora:

1. $\phi[\,\psi \,/\, p\,] = \begin{cases} \perp \text{ iff} & \phi = \perp \\ \phi \text{ iff} & \phi \in AT,\ \phi \neq p \\ \psi \text{ iff} & \phi \in AT,\ \phi = p \end{cases}$
2. $(\neg\phi)[\,\psi \,/\, p\,] = \neg(\ [\,\psi \,/\, p\,]\ )$
3. $(\phi_1 * \phi_2)[\,\psi \,/\, p\,] = (\ \phi_1[\,\psi \,/\, p\,] * \phi_2[\,\psi \,/\, p\,]\ )$

### Lemma

Sia $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_1)$, allora dato $\vDash\ \psi_1 \longleftrightarrow \psi_2$, vale: $\vDash \phi[\,\psi \,/\, p\,] \longleftrightarrow \phi[\,\psi \,/\, p\,]$

## Relazioni di equivalenza

Sia $A$ un insieme e sia $R \subseteq A \times A$, quest'ultima viene chiamata relazione di equivalenza se e solamente:

- È riflessiva: $\forall a \in A, aRa$
- È transitiva: $\forall a, b, c \in a, (aRb, bRc) \implies aRc$
- E simmetrica: $\forall a, b \in A, (aRb, bRa)$

Nota bene

Un esempio di relazione di equivalenza è la similitudine tra triangoli.

**Lemma**

Si dice che $\phi$ è equivalente a $\psi$ se e solamente se $\phi \longleftrightarrow \psi$ è una tautologia, infatti scriviamo che:

$$\phi \approx \psi \iff \models \phi \longleftrightarrow \psi$$

Con $\approx \subseteq PROP \times PROP$.