Derivazioni

Tabella dei contenuti

Deduzione

Dedurre significa riuscire a dimostrare qualcosa partendo da un insieme di ipotesi. Infatti *ipotesi* è ciò che **si assume essere vero**, mentre *tesi* è ciò che **si vuole dimostrare** dalle ipotesi.

In simboli scriviamo:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Ipotesi}\\ \mathcal{D}\\ \text{Tesi}\end{array}\right\} = \text{Derivazione}$$

La derivazione può anche essere chiamata *deduzione* o *dimostrazione* ed è la formalizzazione del concetto di dimostrazione. Al contrario, la semantica, cioè conseguenze logiche e tautologie rappresentano le dimostrazioni di tipo matematico, ad esempio:

$$\underbrace{\Gamma, \neg\alpha \models \bot}_{\text{Ipotesi}} \implies \underbrace{\Gamma \models \alpha}_{Tesi}$$

Deduzione naturale

La deduzione naturale è il processo deduttivo che riguarda i connettivi proposizionali $\wedge, \vee, \rightarrow$ e serve per dimostrare tautologie senza utilizzare i principi della semantica.

Per indicare una derivazione di β scriviamo:

$$\begin{array}{c}\alpha_1, \dots, \alpha_n\\ \mathcal{D}\\ \beta\end{array}$$

Dove le proposizioni α_i potrebbero far parte delle ipotesi della derivazione di β, non indica che siano effettivamente presente o che debbano esserlo.

Invece, per indicare *l'insieme delle ipotesi* della derivazione $\mathcal{D}$ scriviamo:

$$\text{hp}(\mathcal{D}) = \{\dots\}$$

Derivazione minima

La derivazione più semplice che si possa creare è α stessa, perché ipotesi e tesi coincidono. In altre parole, significa che $\alpha \implies \alpha$ ed è inconfutabile.

Regole di derivazione

Quando si opera con delle deduzioni naturali esistono delle regole per eliminare od introdurre i vari connettivi logici.

Eliminazione dell'implicazione

L'eliminazione dell'implicazione è una regola binaria che permette di togliere l'implicazione nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta} \; (\to E) \right.$$

Introduzione dell'implicazione

L'introduzione dell'implicazione è una regola unaria, che permette di inserire una nuova implicazione nel risultato della derivazione. Dobbiamo supporre che tra le ipotesi della derivazione di β vi sia anche α, per cui possiamo scrivere:

$$\bar{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{c} [\alpha^1] \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\beta}{\alpha \to \beta} \; (\to I)^1 \end{array} \right.$$

Perciò si diramano due possibilità:

1. La proposizione α è realmente in $\mathrm{hp}(\mathcal{D})$

   Allora possiamo dire che α è stata *scaricata* o *cancellata*, cioè l'abbiamo utilizzata e ora non fa più parte delle ipotesi di $\bar{\mathcal{D}}$.

$$\mathrm{hp}(\bar{\mathcal{D}}) = \mathrm{hp}(\mathcal{D}) \setminus \{\alpha\}$$

2. La proposizione α non fa parte di $\mathrm{hp}(\mathcal{D})$

   Allora la formula è stata indebolita:

$$[\![\beta]\!]_v = 1 \implies \underbrace{[\![\alpha \to \beta]\!]_v = 1}_{[\![\alpha]\!]_v = 0 \text{ or } \underline{[\![\beta]\!]_v = 1}}$$

Introduzione dell'and

L'introduzione dell'and è una regola binaria, che permette di inserire una nuova and nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta} \; (\wedge I) \right.$$

Eliminazione dell'and

L'eliminazione dell'and è una regola unaria che permette di togliere l'and ed uno dei due congiunti nel risultato della derivazione. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{D}_a = \left[\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \; (\wedge E1) \right. \qquad \mathcal{D}_b = \left[\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \; (\wedge E2) \right.$$

Teoremi

Possiamo dire di aver dimostrato l'ipotesi α se esiste una sua derivazione $\mathcal{D}$ tale per cui $\text{hp}(\mathcal{D}) = \emptyset$. Dunque possiamo dire che α è un *teorema* e lo indichiamo con:

$$\vdash \alpha$$

Perciò, possiamo dire che $\alpha \to (\beta \to (\alpha \land \beta))$ è un teorema dal momento che esiste una sua derivazione priva di ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha^2] \quad [\beta^1]}{\alpha \land \beta}\ (\land\ I)}{\beta \to (\alpha \land \beta)}\ (\to I)^1}{\alpha \to (\beta \to (\alpha \land \beta))}\ (\to I)^2 \right.$$

Di conseguenza, è corretto scrivere $\vdash \alpha \to (\beta \to (\alpha \land \beta))$.

Correttezza debole

Quando α è dimostrato essere un teorema, allora siamo certi che sempre α è anche una tautologia. Per cui:

$$\vdash \alpha \implies \vDash \alpha$$

Completezza debole

Quando α è dimostrato essere una tautologia, allora siamo certi che sempre α è anche un teorema. Per cui:

$$\vDash \alpha \implies \vdash \alpha$$

Occorrenze

Data la seguente derivazione come esempio:

$$\mathcal{D} = \left[\dfrac{\dfrac{[\alpha^1] \quad [\alpha^1]}{\alpha \land \alpha}\ (\land\ I)}{\alpha \to (\alpha \land \alpha)}\ (\to I)^1 \right.$$

Nota bene

> Possono essere ripetute più occorrenze della stessa ipotesi, a patto che quando si scarica tale ipotesi, tutte le sue occorrenze vengano cancellate.

Esempio Dimostrare che se $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$ allora esiste una derivazione tale per cui vale $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
[\![\alpha \to (\beta \to \alpha)]\!]_v = 1 &\iff [\![\alpha]\!]_v = 1 \implies [\![\beta \to \alpha]\!]_v = 1 \\
&\iff [\![\alpha]\!]_v = 0 \text{ or } ([\![\beta]\!]_v = 1 \implies [\![\alpha]\!]_v = 1) \\
&\iff \underline{[\![\alpha]\!]_v = 0} \text{ or } [\![\beta]\!]_v = 0 \text{ or } \underline{[\![\alpha]\!]_v = 1} \\
&\implies Vero \qquad \square
\end{aligned}$$

Dato che $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ è una tautologia, allora siamo sicuri che è un teorema, perciò esiste una sua derivazione senza ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[\dfrac{\dfrac{[\alpha^1]}{\beta \to \alpha}\ (\to I)}{\alpha \to (\beta \to \alpha)}\ (\to I)^1 \right.$$

Esercizio Dimostrare che $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$.

Svolgimento:

$$\mathcal{D} = \left[\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\beta}\ (\wedge E2) \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\alpha}\ (\wedge E1)}{\beta \wedge \alpha}\ (\wedge I)}{(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)}\ (\to I)^1 \right. \qquad \square$$