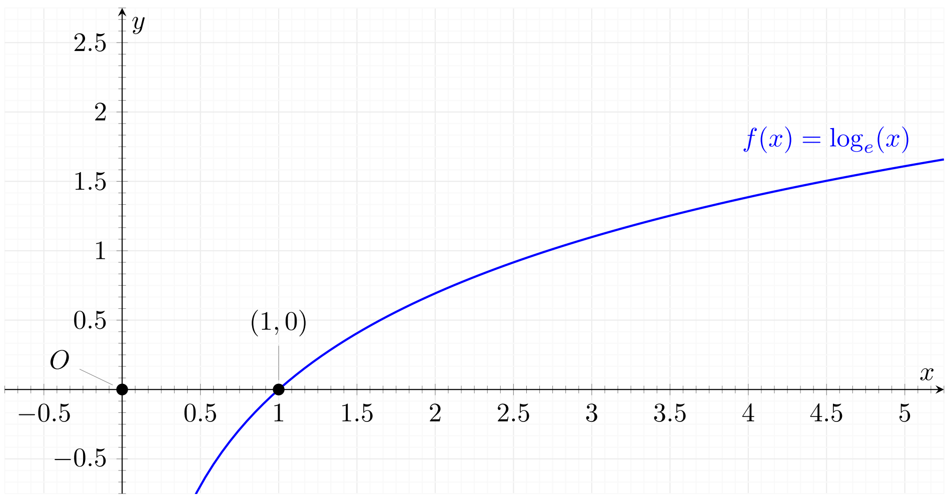
# Funzioni log ed exp

## Tabella dei contenuti

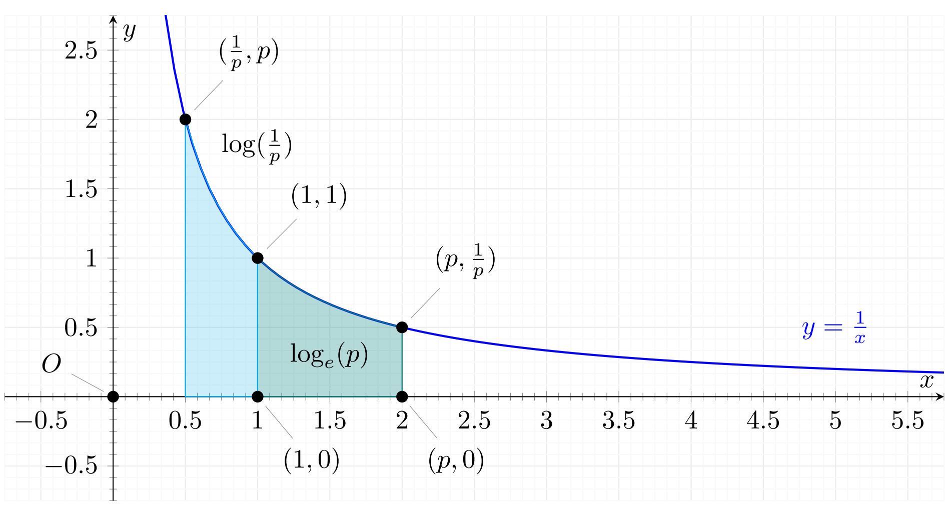
# Logaritmo

Funzione logaritmo




Considerato un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, definiamo la funzione $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

Funzione logaritmo




Dato $p \geq 1$ allora $\log(p)$ è definito come l'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1, 1), (1, 0), (p, 0), (p, \frac{1}{p})$.

Contrariamente, dato $p \in (0, 1)$, definiamo la funzione come **l'opposto** dell'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1, 1), (1, 0), (p, 0), (p, \frac{1}{p})$.

*Nota bene*

In sintesi $\log(p) > 0$ se $p \geq 0$, mentre $\log(p) < 0$ se $0 < p < 1$.

## Osservazione

Per ogni $p > 0$, $\log(p)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e compresa tra i punti $(1, 1)$, $(0, 0)$ e $(p, \frac{1}{p})$.

### Dimostrazione

Supponiamo $p \geq 1$. Siano $A_1, A_2, A_3, A_4$ le aree delle quattro regioni in figura. Allora:

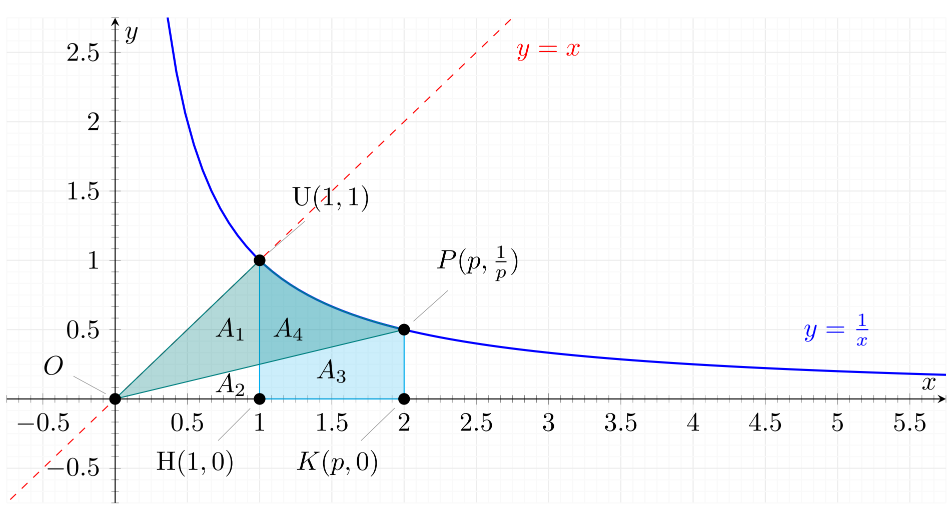
$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{Area di OHU} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_2 + A_3 &= \text{Area di OKP} \\ &= \frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque, data l'area della figura HKPU $= A_3 + A_4$:

$$\begin{aligned} A_1 + \cancel{A_2} = \cancel{A_2} + A_3 &\implies A_1 = A_3 \\ &\implies A_3 + A_4 = A_1 + A_4 \\ &\implies A_1 + A_4 = \text{Area di HKPU} \quad \square \end{aligned}$$

Il grafico risultante è:

Funzione logaritmo



## Proprietà del logaritmo

### Proprietà I

Dal grafico della funzione logaritmo nel punto $(1, 0)$, notiamo che:

$$\log(1) = 0$$

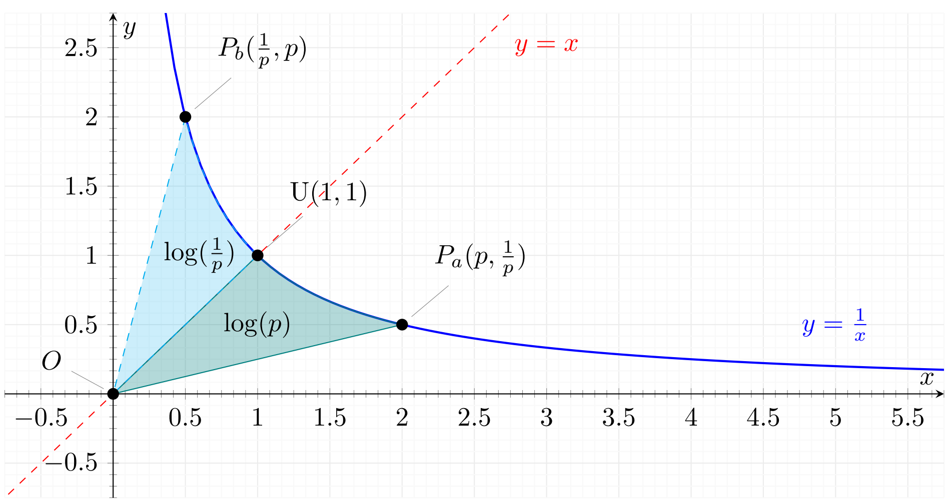
### Proprietà II

Dal grafico sottostante possiamo notare come:

$$\forall p \in (0, +\infty), \;\; \log(\frac{1}{p}) = -\log(p)$$

Infatti:

Funzione logaritmo




### Proprietà III

Possiamo affermare che:

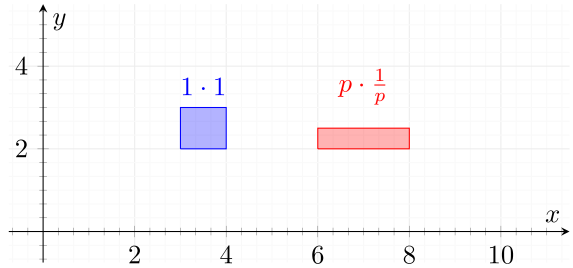
$$\forall p \in (0, +\infty), \forall q \in (0, +\infty), \;\; \log(pq) = \log(p) + \log(q)$$

Grazie al principio di conservazione delle aree.

**Conservazione delle aree** Date $R$ una regione del piano misurabile qualsiasi e la sua immagine $\bar{R}$ mediante $T$, allora le due possiedono la stessa area.

Questo perché la trasformazione $T$ modifica i quadrati di lato unitario in rettangoli di lati $p, \frac{1}{p}$, infatti l'area del quadrato $= 1 \cdot 1 = 1 = p \cdot \frac{1}{p} =$ l'area del rettangolo.

Conservazione delle aree




**Dimostrazione** Dati $p > 1, q > 1$, consideriamo $T$ una trasformazione del piano in sé:

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto (px, \frac{y}{p})$$

Questa trasformazione manda l'iperbole di equazione $xy = 1$ in sé, questo perché se $(x, y)$ appartiene all'iperbole, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$ appartiene all'iperbole perché:

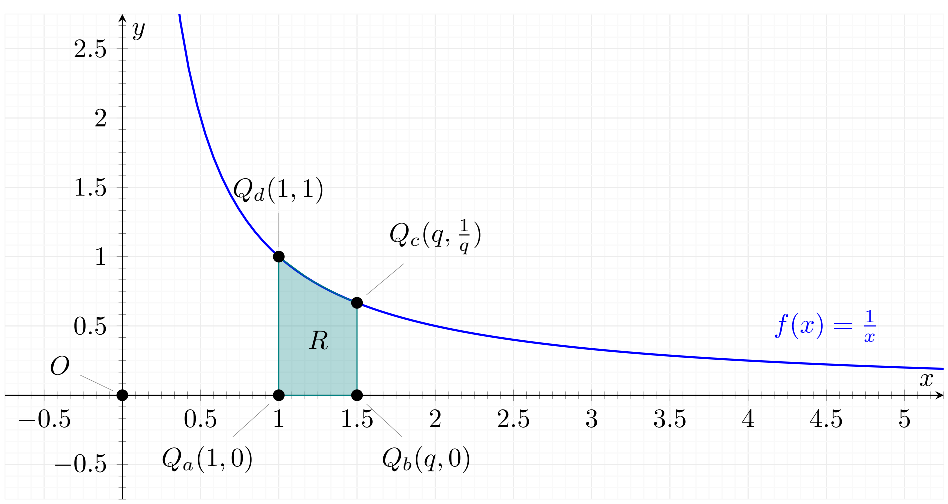
$$\bar{x}\bar{y} = \cancel{p}x \cdot \frac{y}{\cancel{p}} = xy = 1$$

Scegliamo quindi come $R$ l'area compresa tra i punti:

$$Q_a(1, 0), \ \ Q_b(q, 0), \ \ Q_c(q, \frac{1}{q}), \ \ Q_d(1, 1)$$

Il cui grafico risulta come il seguente:

Funzione logaritmo

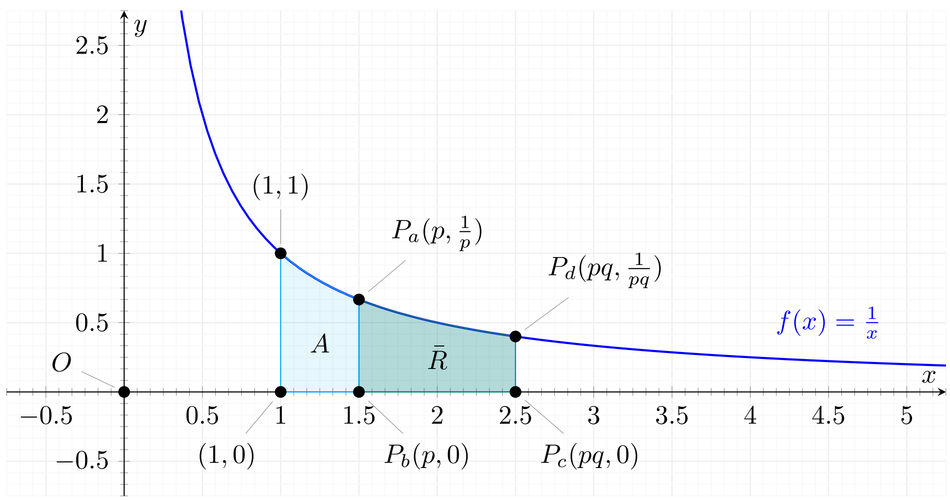


Di conseguenza applicando la trasformazione $T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$, otteniamo come immagine $\bar{R}$ l'area compresa tra i punti:

$$P_a(p, 0), \;\; P_b(pq, 0), \;\; P_c(pq, \frac{1}{pq}), \;\; P_d(p, \frac{1}{p})$$

Perciò otteniamo il grafico:

Funzione logaritmo




Per cui dato che $\log(p)$ è definito come l'area compresa tra $(1, 0)$, $(p, 0)$, $(p, \frac{1}{p})$, $(1, 1)$, cioè $A$, e che $\bar{R}$ ed $R$ sono equivalenti, allora:

$$\begin{aligned} \log(pq) &= \text{Area di } A + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } R \\ &= \log(p) + \log(q) \qquad\qquad \square \end{aligned}$$

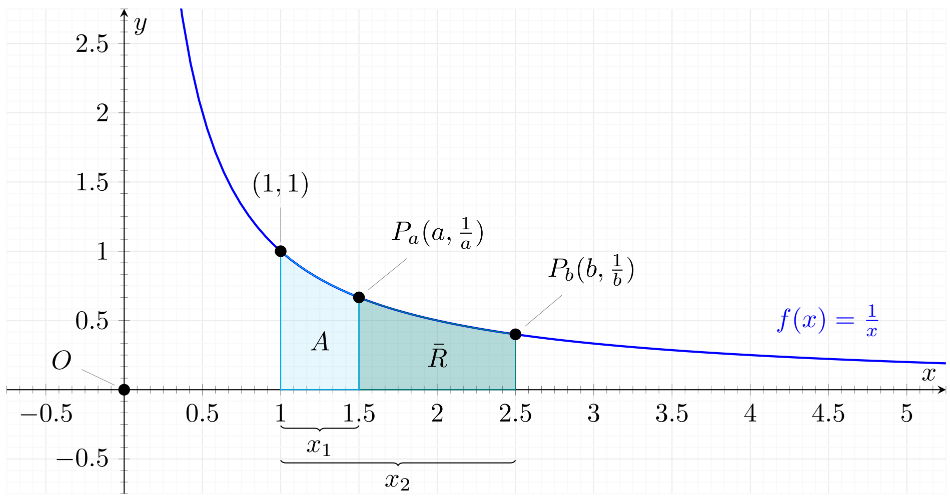
### Proprietà IV

Il logaritmo è una funzione iniettiva e quindi sappiamo che è strettamente monotona in modo crescente, pertanto se $x_1, x_2$ appartengono al dominio e $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$, ed infatti possiamo scrivere:

$$x_1 < x_2 \iff \log(x_1) < \log(x_2)$$

Infatti dal grafico si nota che il logaritmo di $x_1$ è minore di $x_2$:

Funzione logaritmo

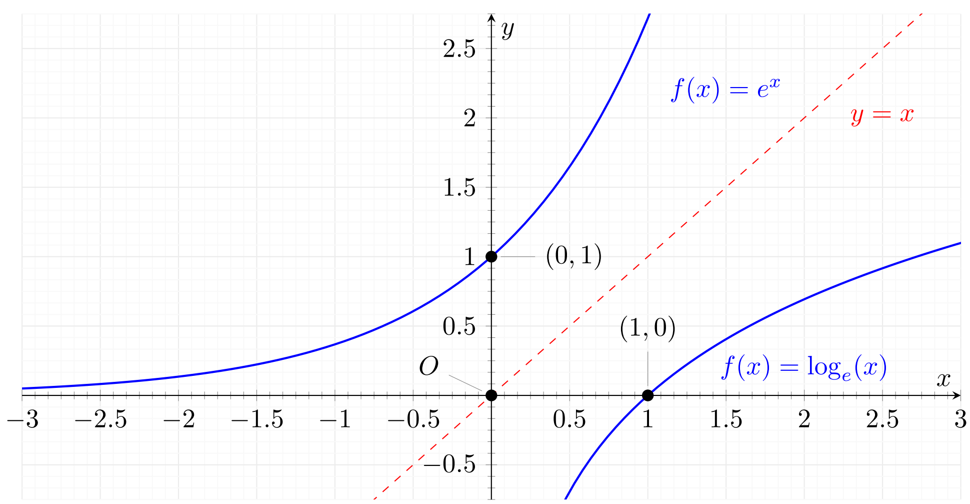



**Proprietà V**

Il logaritmo è anche una funzione suriettiva, grazie alla quale possiamo dire con certezza che il logaritmo è una funzione biettiva.

# Esponenziale

Funzione logaritmo



Definiamo la funzione esponenziale come $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ dato esiste uno ed un solo $x \in (0, +\infty)$ t.c. $\log(x) = y$, per questo possiamo affermare con certezza che la funzione esponenziale è l'inversa del logaritmo.

## Proprietà dell'esponenziale

### Proprietà I

In quanto l'esponenziale è la funzione inversa del logaritmo, applicando prima una e poi l'altra, otteniamo:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \log(\exp t) = t \qquad \forall t > 0,\ \exp(\log t) = t$$

### Proprietà II

La funzione esponenziale è sempre positiva, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp t > 0$$

### Proprietà III

La funzione $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ (cioè con codominio l'asse delle ordinate al di sopra della retta orizzontale $y = 0$) è biettiva e strettamente crescente.

### Proprietà IV

Dal momento che $\log(1) = 0$, possiamo affermare che $\exp(0) = 1$ perché dalla proprietà I sappiamo che:

$$\exp(0) = \exp(\log 1) = 0$$

### Proprietà V

Possiamo affermare che per ogni coppia di numeri reali qualsiasi, l'esponenziale della loro somma è il prodotto delle esponenziali dei due, cioè:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ \exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

**Dimostrazione** Dimostriamo la proprietà utilizzando anche la funzione logaritmo:

$$\begin{aligned}\log(\exp(a) \cdot \exp(b)) &= \log(\exp a) + \log(\exp b)\\ &= a + b\\ &= \log(\exp(a + b))\end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo la funzione logaritmo, una funzione iniettiva, significa che per qualsiasi $p, q$ positivi $\log(p) = \log(q) \iff p = q$, perciò sostituendo $p, q$, otteniamo che $\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a + b)$ $\square$.

**Costruzione di un elevamento a potenza**

Per potenze di base positiva, dato $a \in (0, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$, possiamo definire:

$$a^b \coloneqq \exp(b \log a)$$

Ad esempio $a^3 = \exp(3 \log a)$.

## Numero di Nepero (o Eulero)

Definiamo $e = \exp(1)$ e quindi $\forall b \in \mathbb{R},\ e^b = \exp(b \cdot \log e) = \exp(b)$.

## Esercizi aggiuntivi

**Esercizio** Dato un numero reale $a \in (0, +\infty)$, dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq 1$, $\exp(n \cdot \log a) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. *Svolgimento*

1. Passo base: per $n = 1$ abbiamo,

$$\exp(1 \cdot \log a) = \exp(\log a) = a$$

2. Passo induttivo: per $n + 1$ abbiamo,

$$\begin{aligned} \exp((n+1) \cdot \log a) &= \exp((n \cdot \log a) + (\log a)) \\ &= \exp(n \cdot \log a) \cdot \exp(\log a) \\ &= \exp(n \cdot \log a) \cdot a \\ &=_{hp} \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot a}_{n+1} \qquad \square \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva ($hp$), cioè che l'espressione $\exp(n \cdot \log a) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ sia assunta come vera.