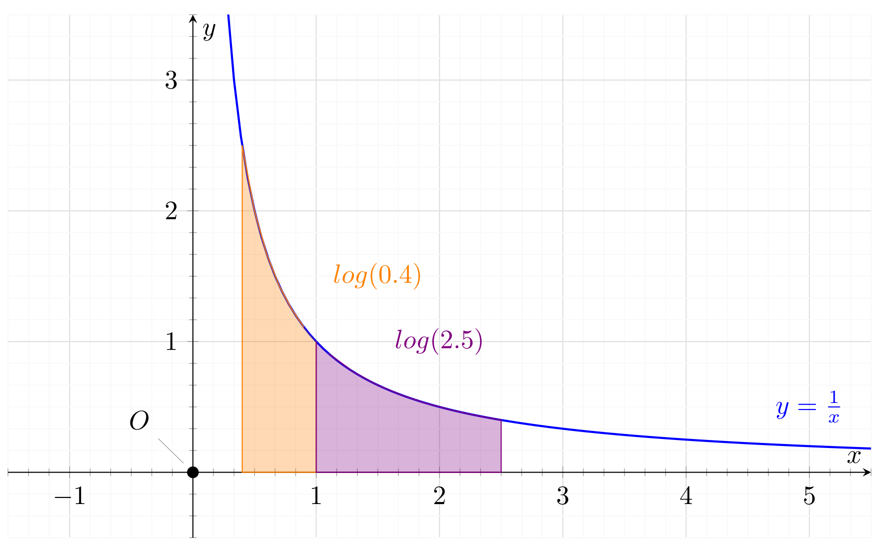
Funzione logaritmo

Definizione

Considerato un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, definiamo la funzione $log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente.

Funzione logaritmo



Dato $p \geq 1$ allora $log(p)$ è definito come l'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1, 1), (1, 0), (p, 0), (p, 1/p)$.

Contrariamente, dato $p \in (0, 1)$, definiamo la funzione come **l'opposto** dell'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1, 1), (1, 0), (p, 0), (p, 1/p)$.

Nota bene

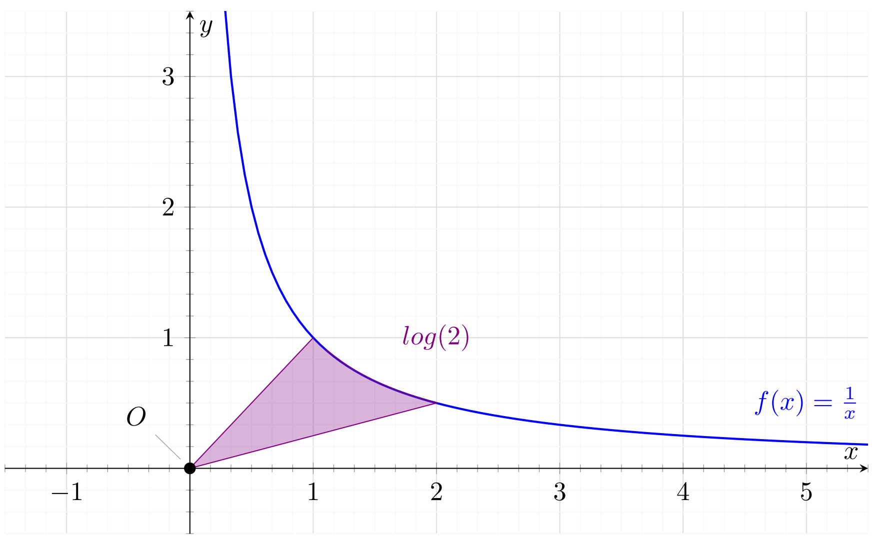
In sintesi:

- $log(p) > 0$ se $p \geq 0$
- $log(p) < 0$ se $0 < p < 1$.

Osservazione

Per ogni $p > 0$, $log(p)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e compresa tra i punti $(1, 1)$, $(0, 0)$ e $(p, \frac{1}{p})$.

Funzione logaritmo



Dimostrazione

Supponiamo $p \geq 1$. Siano A_1, A_2, A_3, A_4 le aree delle quattro regioni in figura. Allora:

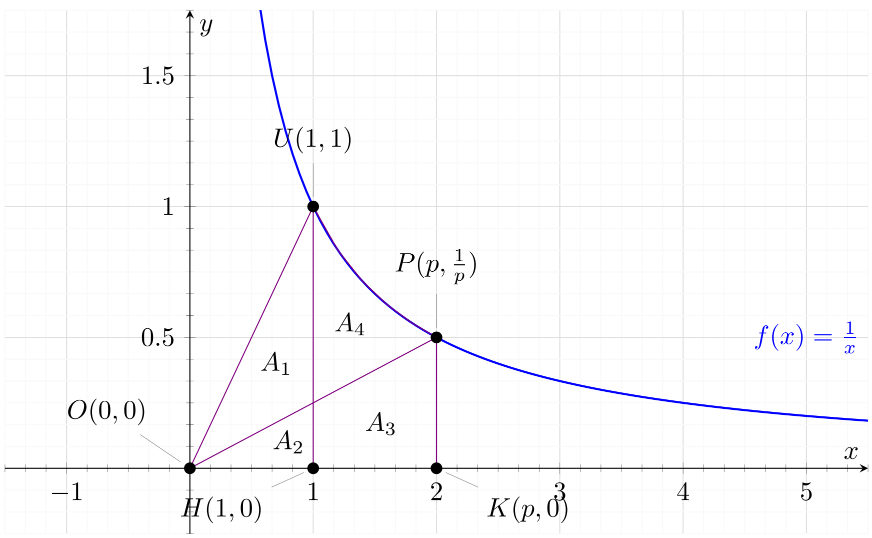
$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{Area del triangolo rettangolo OHU} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mentre:

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 &= \text{Area del triangolo rettangolo OKP} \\ &= \frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque, data l'area della figura HKPU $= A_3 + A_4$:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = A_3 + A_2 &\implies A_1 = A_3 \\ &\implies A_3 + A_4 = A_1 + A_4 \\ &\implies A_1 + A_4 = \text{Area della figura HKPU} \quad \square \end{aligned}$$



y
1.5
$U(1,1)$
1
$P(p, \frac{1}{p})$
A_4
0.5
$f(x) = \frac{1}{x}$
A_1
$O(0,0)$
A_3
A_2
x
-1
1
2
3
4
5
$H(1,0)$
$K(p,0)$