# Derivazioni

## Tabella dei contenuti

# Deduzione

Dedurre significa riuscire a dimostrare qualcosa partendo da un insieme di ipotesi. Infatti *ipotesi* è ciò che **si assume essere vero**, mentre *tesi* è ciò che **si vuole dimostrare** dalle ipotesi.

In simboli scriviamo:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Ipotesi}\\ \mathcal{D}\\ \text{Tesi}\end{array}\right\} = \text{Derivazione}$$

La derivazione può anche essere chiamata *deduzione* o *dimostrazione* ed è la formalizzazione del concetto di dimostrazione. Al contrario, la semantica, cioè conseguenze logiche e tautologie rappresentano le dimostrazioni di tipo matematico, ad esempio:

$$\underbrace{\Gamma, \neg\alpha \ \vDash \ \bot}_{\text{Ipotesi}} \implies \underbrace{\Gamma \ \vDash \ \alpha}_{Tesi}$$

## Deduzione naturale

La deduzione naturale è il processo deduttivo che riguarda i connettivi proposizionali $\wedge, \vee, \rightarrow$ e serve per dimostrare tautologie senza utilizzare i principi della semantica.

Per indicare una derivazione di $\beta$ scriviamo:

$$\begin{array}{c}\alpha_1, \dots, \alpha_n\\ \mathcal{D}\\ \beta\end{array}$$

Dove le proposizioni $\alpha_i$ potrebbero far parte delle ipotesi della derivazione di $\beta$, non indica che siano effettivamente presente o che debbano esserlo.

Invece, per indicare *l'insieme delle ipotesi* della derivazione $\mathcal{D}$ scriviamo:

$$\text{hp}(\mathcal{D}) = \{\dots\}$$

### Derivazione minima

La derivazione più semplice che si possa creare è $\alpha$ stessa, perché ipotesi e tesi coincidono. In altre parole, significa che $\alpha \implies \alpha$ ed è inconfutabile.

## Regole di derivazione

Quando si opera con delle deduzioni naturali esistono delle regole per eliminare od introdurre i vari connettivi logici.

**Eliminazione dell'implicazione**

L'eliminazione dell'implicazione è una regola binaria che permette di togliere l'implicazione nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[ \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta} \ (\to E) \right.$$

**Introduzione dell'implicazione**

L'introduzione dell'implicazione è una regola unaria, che permette di inserire una nuova implicazione nel risultato della derivazione. Dobbiamo supporre che tra le ipotesi della derivazione di $\beta$ vi sia anche $\alpha$, per cui possiamo scrivere:

$$\bar{\mathcal{D}} = \left[ \begin{array}{c} [\alpha^1] \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\beta}{\alpha \to \beta} \ (\to I)^1 \end{array} \right.$$

Perciò si diramano due possibilità:

1. La proposizione $\alpha$ è realmente in $\mathrm{hp}(\mathcal{D})$

   Allora possiamo dire che $\alpha$ è stata *scaricata* o *cancellata*, cioè l'abbiamo utilizzata e ora non fa più parte delle ipotesi di $\bar{\mathcal{D}}$.

$$\mathrm{hp}(\bar{\mathcal{D}}) = \mathrm{hp}(\mathcal{D}) \setminus \{\alpha\}$$

2. La proposizione $\alpha$ non fa parte di $\mathrm{hp}(\mathcal{D})$

   Allora la formula è stata indebolita:

$$[\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \implies \underbrace{[\![\, \alpha \to \beta \,]\!]_v = 1}_{[\![\, \alpha \,]\!]_v = 0 \text{ or } \underline{[\![\, \beta \,]\!]_v = 1}}$$

**Introduzione dell'and**

L'introduzione dell'and è una regola binaria, che permette di inserire una nuova and nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[ \frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta} \ (\wedge I) \right.$$

**Eliminazione dell'and**

L'eliminazione dell'and è una regola unaria che permette di togliere l'and ed uno dei due congiunti nel risultato della derivazione. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{D}_a = \left[ \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \ (\wedge E1) \right. \qquad \mathcal{D}_b = \left[ \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \ (\wedge E2) \right.$$

## Teoremi

Possiamo dire di aver dimostrato l'ipotesi $\alpha$ se esiste una sua derivazione $\mathcal{D}$ tale per cui $\text{hp}(\mathcal{D}) = \emptyset$. Dunque possiamo dire che $\alpha$ è un *teorema* e lo indichiamo con:

$$\vdash \alpha$$

Perciò, possiamo dire che $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ è un teorema dal momento che esiste una sua derivazione priva di ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha^2] \qquad [\beta^1]}{\alpha \wedge \beta}\ (\wedge\ I)}{\beta \to (\alpha \wedge \beta)}\ (\to I)^1}{\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))}\ (\to I)^2 \right.$$

Di conseguenza, è corretto scrivere $\vdash \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$.

### Correttezza debole

Quando $\varphi$ è dimostrato essere un teorema, allora siamo certi che sempre $\varphi$ è anche una tautologia. Per cui:

$$\vdash \varphi \implies \vDash \varphi$$

### Completezza debole

Quando $\varphi$ è dimostrato essere una tautologia, allora siamo certi che sempre $\varphi$ è anche un teorema. Per cui:

$$\vDash \varphi \implies \vdash \varphi$$

## Occorrenze

Data la seguente derivazione come esempio:

$$\mathcal{D} = \left[ \dfrac{\dfrac{[\alpha^1] \qquad [\alpha^1]}{\alpha \wedge \alpha}\ (\wedge\ I)}{\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)}\ (\to I)^1 \right.$$

*Nota bene*

> Possono essere ripetute più occorrenze della stessa ipotesi, a patto che quando si scarica tale ipotesi, tutte le sue occorrenze vengano cancellate.

**Esempio** Dimostrare che se $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$ allora esiste una derivazione tale per cui vale $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
[\![ \alpha \to (\beta \to \alpha) ]\!]_v = 1 &\iff [\![ \alpha ]\!]_v = 1 \implies [\![ \beta \to \alpha ]\!]_v = 1 \\
&\iff [\![ \alpha ]\!]_v = 0 \text{ or } ([\![ \beta ]\!]_v = 1 \implies [\![ \alpha ]\!]_v = 1) \\
&\iff \underline{[\![ \alpha ]\!]_v = 0} \text{ or } [\![ \beta ]\!]_v = 0 \text{ or } \underline{[\![ \alpha ]\!]_v = 1} \\
&\implies Vero \qquad \square
\end{aligned}$$

Dato che $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ è una tautologia, allora siamo sicuri che è un teorema, perciò esiste una sua derivazione senza ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[ \dfrac{\dfrac{[\alpha^1]}{\beta \to \alpha}\ (\to I)}{\alpha \to (\beta \to \alpha)}\ (\to I)^1 \right.$$

**Esercizio** Dimostrare che $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$.

Svolgimento:

$$\mathcal{D} = \left[ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\beta}\ (\wedge E2) \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\alpha}\ (\wedge E1)}{\beta \wedge \alpha}\ (\wedge I)}{(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)}\ (\to I)^1 \right. \qquad \square$$