

# Dimostrazioni e ricorsione

## Tabella dei contenuti

<b>Proprietà</b>	<b>2</b>
Funzioni ricorsive e non . . . . .	2
Insiemi di proposizioni . . . . .	3
Principio di induzione su <i>PROP</i> . . . . .	3
Dimostrazione . . . . .	3
Funzioni notevoli . . . . .	4
Insieme delle sottoproposizioni . . . . .	4
Rango di una proposizione . . . . .	4
Teorema di ricorsione primitiva . . . . .	5

## Proprietà

Sia  $A$  un insieme e  $P$  un suo sottoinsieme: l'elemento  $a \in A$  soddisfa la proprietà  $P$  se e solamente se  $a \in P$ . In altre parole una proprietà è l'insieme degli elementi che rispettano una determinata condizione.

Per esempio, una proprietà su  $\mathbb{N}$  potrebbe essere:  $P = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$  dove  $P \subseteq \mathbb{N}$ , infatti:

- $1 \in P$  infatti  $P(1)$  vale
- $0 \notin P$  perciò  $P(0)$  non vale.

Per dimostrare una proprietà su tutte le proposizioni, necessitiamo di una definizione dell'insieme che le contiene.

## Funzioni ricorsive e non

Siano  $A, B$  due insiemi e  $f \subseteq A \times B$ ,  $f$  viene chiamata funzione se e solamente se per ogni elemento del dominio  $A$ , esiste ed è unico un elemento del codominio  $B$ , tale che la coppia  $(a, b)$  appartenga ad  $f$ , cioè:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in f \quad (1)$$

Per cui si scrive:

- $f(a) = b$  quando  $(a, b) \in f$
- $f : A \rightarrow B$  quando  $f \subseteq A \times B$

*Nota bene*

Una funzione è definita in modo ricorsivo se è definita dal valore sui propri elementi.

Per esempio una funzione ricorsiva può essere quella che ad ogni proposizione, assegna il numero delle sue parentesi, definita come:

$$\pi : PROP \rightarrow \mathbb{N}$$

I valori che assume sono:

- $\pi(\alpha) = 0$  per  $\alpha \in AT$
- $\pi(\neg\alpha) = 2 + \pi(\alpha)$
- $\left. \begin{array}{l} \pi(\alpha \wedge \beta) \\ \pi(\alpha \vee \beta) \\ \pi(\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} = 2 + \pi(\alpha) + \pi(\beta)$

## Insiemi di proposizioni

Viene chiamato *PROP* il più piccolo insieme  $X$  di stringhe, tale che:

1.  $\perp \in PROP$
2.  $p \in PROP$  per  $p$  simbolo proposizionale
3. Se  $\alpha, \beta \in PROP$  allora: 
$$\begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \\ (\alpha \vee \beta) \\ (\neg \alpha) \\ (\alpha \rightarrow \beta) \end{cases} \in PROP$$

Viene invece chiamato *AT* l'insieme delle proposizioni atomiche, cioè quelle che non possono essere semplificate ulteriormente. Per questo possiamo affermare che  $AT \subset PROP$ .

### Principio di induzione su *PROP*

Per poter determinare se una proprietà vale per tutte le proposizioni, si utilizza il seguente principio di induzione sull'insieme *PROP*. Siano  $P \subseteq PROP$  e  $\alpha, \beta$  due proposizioni qualsiasi, possiamo affermare che  $\forall \varphi \in PROP$  vale  $P(\varphi)$  se e solamente se:

1. Vale  $P(\alpha)$  per  $\alpha \in AT$
2. Ipotizzando valga  $P(\alpha)$ , allora vale anche  $P(\neg \alpha)$
3. Ipotizzando valgano  $P(\alpha), P(\beta)$ , allora valgono anche 
$$\begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \\ (\alpha \vee \beta) \\ (\alpha \rightarrow \beta) \end{cases}$$

*Nota bene*

Se la proprietà  $P \subseteq PROP$  vale **per ogni** elemento di *PROP*, allora significa che  $P$  è *PROP* stesso.

### Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che ogni proposizione, possiede un numero pari di parentesi, in altre parole  $\forall \alpha \in PROP, P(\alpha) \iff \pi(\alpha)$  è pari.

Utilizzando il principio di induzione, applicato all'insieme *PROP*:

1.  $P(\alpha)$  vale per  $\alpha \in AT$ ?

$$\alpha \in AT \implies \pi(\alpha) = 0$$

2. Ipotizzando che valga  $P(\alpha)$ , allora vale anche  $P(\neg \alpha)$ ?

$$\pi(\neg \alpha) = 2 + \pi(\alpha) = 2$$

3. Ipotizzando che valgano  $P(\alpha), P(\beta)$ , allora valgono anche  $P(\alpha \wedge \beta), P(\alpha \vee \beta)$  e  $P(\alpha \rightarrow \beta)$ ?

$$\left. \begin{array}{l} P(\alpha \wedge \beta) \\ P(\alpha \vee \beta) \\ P(\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} = 2 + \pi(\alpha) + \pi(\beta) = 2$$

Conclusione:  $\forall \varphi \in PROP, \pi(\varphi)$  è pari quindi  $\forall \varphi \in PROP, P(\varphi)$  è verificata.

## Funzioni notevoli

Alcune funzioni sono indispensabili per poter definire determinati concetti.

### Insieme delle sottoproposizioni

La funzione ricorsiva Sub associa ad ogni proposizione, l'insieme delle proposizioni che la compongono, cioè  $Sub : PROP \rightarrow 2^{PROP}$ . I valori che assume Sub sono:

- $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$  per  $\varphi \in AT$
- $Sub(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Sub(\varphi)$
- $\left. \begin{array}{l} Sub(\alpha \wedge \beta) \\ Sub(\alpha \vee \beta) \\ Sub(\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} = \{\varphi * \psi\} \cup Sub(\varphi) \cup Sub(\psi)$

dove  $*$  è un connettivo tra  $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ .

*Nota bene*

L'insieme  $2^A$  si chiama *Insieme potenza* o *delle parti* di  $A$ .

### Rango di una proposizione

La funzione ricorsiva r associa ad ogni proposizione il proprio rango o complessità, cioè  $r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ . I valori che assume sono:

- $r(\varphi) = 0$  per  $\varphi \in AT$
- $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$
- $\left. \begin{array}{l} r(\alpha \wedge \beta) \\ r(\alpha \vee \beta) \\ r(\alpha \rightarrow \beta) \end{array} \right\} = 1 + \max(r(\varphi), r(\psi))$

### Teorema di ricorsione primitiva

Siano  $A \subseteq PROP$  un insieme e  $*$  un connettivo tra  $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ . Supponendo di avere delle funzioni come le seguenti:

$$\begin{aligned} H_{at} &: AT \rightarrow A \\ H_{\neg} &: A \rightarrow A \\ H_{*} &: A \times A \rightarrow A \end{aligned} \tag{2}$$

Esiste ed è unica una funzione  $F : PROP \rightarrow A$  tale che:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= H_{at}(\varphi) \text{ per } \varphi \in AT \\ F(\neg\varphi) &= H_{\neg}( F(\varphi) ) \\ F(\varphi * \psi) &= H_{*}( F(\varphi), F(\psi) ) \end{aligned} \tag{3}$$