

Derivazioni

Tabella dei contenuti

Deduzione	2
Deduzione naturale	2
Derivazione minima	2
Regole di derivazione	2
Eliminazione dell'implicazione	3
Introduzione dell'implicazione	3
Introduzione dell'and	3
Eliminazione dell'and	3
Teoremi	4
Correttezza debole	4
Completezza debole	4
Occorrenze	4

Deduzione

Dedurre significa riuscire a dimostrare qualcosa partendo da un insieme di ipotesi. Infatti *ipotesi* è ciò che **si assume essere vero**, mentre *tesi* è ciò che **si vuole dimostrare** dalle ipotesi.

In simboli scriviamo:

$$\left. \begin{array}{c} \text{Ipotesi} \\ \mathcal{D} \\ \text{Tesi} \end{array} \right\} = \text{Derivazione}$$

La derivazione può anche essere chiamata *deduzione* o *dimostrazione* ed è la formalizzazione del concetto di dimostrazione. Al contrario, la semantica, cioè conseguenze logiche e tautologie rappresentano le dimostrazioni di tipo matematico, ad esempio:

$$\underbrace{\Gamma, \neg\alpha \models \perp}_{\text{Ipotesi}} \implies \underbrace{\Gamma \models \alpha}_{\text{Tesi}}$$

Deduzione naturale

La deduzione naturale è il processo deduttivo che riguarda i connettivi proposizionali $\wedge, \vee, \rightarrow$ e serve per dimostrare tautologie senza utilizzare i principi della semantica.

Per indicare una derivazione di β scriviamo:

$$\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \mathcal{D} \\ \beta \end{array}$$

Dove le proposizioni α_i potrebbero far parte delle ipotesi della derivazione di β , non indica che siano effettivamente presente o che debbano esserlo.

Invece, per indicare *l'insieme delle ipotesi* della derivazione \mathcal{D} scriviamo:

$$\text{hp}(\mathcal{D}) = \{\dots\}$$

Derivazione minima

La derivazione più semplice che si possa creare è α stessa, perché ipotesi e tesi coincidono. In altre parole, significa che $\alpha \implies \alpha$ ed è inconfutabile.

Regole di derivazione

Quando si opera con delle deduzioni naturali esistono delle regole per eliminare od introdurre i vari connettivi logici.

Eliminazione dell'implicazione

L'eliminazione dell'implicazione è una regola binaria che permette di togliere l'implicazione nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta} (\rightarrow E) \right]$$

Introduzione dell'implicazione

L'introduzione dell'implicazione è una regola unaria, che permette di inserire una nuova implicazione nel risultato della derivazione. Dobbiamo supporre che tra le ipotesi della derivazione di β vi sia anche α , per cui possiamo scrivere:

$$\bar{\mathcal{D}} = \left[\frac{\begin{array}{c} [\alpha^1] \\ \mathcal{D} \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta} (\rightarrow I)^1 \right]$$

Perciò si diramano due possibilità:

1. La proposizione α è realmente in $\text{hp}(\mathcal{D})$

Allora possiamo dire che α è stata *scaricata* o *cancellata*, cioè l'abbiamo utilizzata e ora non fa più parte delle ipotesi di $\bar{\mathcal{D}}$.

$$\text{hp}(\bar{\mathcal{D}}) = \text{hp}(\mathcal{D}) \setminus \{\alpha\}$$

2. La proposizione α non fa parte di $\text{hp}(\mathcal{D})$

Allora la formula è stata indebolita:

$$\llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \implies \underbrace{\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_v = 1}_{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1}$$

Introduzione dell'and

L'introduzione dell'and è una regola binaria, che permette di inserire una nuova and nel risultato della derivazione. Si scrive nel modo seguente:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge I) \right]$$

Eliminazione dell'and

L'eliminazione dell'and è una regola unaria che permette di togliere l'and ed uno dei due congiunti nel risultato della derivazione. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{D}_a = \left[\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge E1) \right] \quad \mathcal{D}_b = \left[\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge E2) \right]$$

Teoremi

Possiamo dire di aver dimostrato l'ipotesi α se esiste una sua derivazione \mathcal{D} tale per cui $\text{hp}(\mathcal{D}) = \emptyset$. Dunque possiamo dire che α è un *teorema* e lo indichiamo con:

$$\vdash \alpha$$

Perciò, possiamo dire che $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ è un teorema dal momento che esiste una sua derivazione priva di ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[\begin{array}{c} \frac{\frac{[\alpha^2] \quad [\beta^1]}{\alpha \wedge \beta} (\wedge I)}{\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)} (\rightarrow I)^1 \\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) (\rightarrow I)^2 \end{array} \right]$$

Di conseguenza, è corretto scrivere $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$.

Correttezza debole

Quando φ è dimostrato essere un teorema, allora siamo certi che sempre φ è anche una tautologia. Per cui:

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

Completezza debole

Quando φ è dimostrato essere una tautologia, allora siamo certi che sempre φ è anche un teorema. Per cui:

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

Occorrenze

Data la seguente derivazione come esempio:

$$\mathcal{D} = \left[\begin{array}{c} \frac{[\alpha^1] \quad [\alpha^1]}{\alpha \wedge \alpha} (\wedge I) \\ \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha) (\rightarrow I)^1 \end{array} \right]$$

Nota bene

Possano essere ripetute più occorrenze della stessa ipotesi, a patto che quando si scarica tale ipotesi, tutte le sue occorrenze vengano cancellate.

Esempio Dimostrare che se $\models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ allora esiste una derivazione tale per cui vale $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Svolgimento

$$\begin{aligned}
\llbracket \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \beta \rightarrow \alpha \rrbracket_v = 1 \\
&\iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } (\llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1) \\
&\iff \underline{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0} \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 0 \text{ or } \underline{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 1} \\
&\implies \text{Vero} \quad \square
\end{aligned}$$

Dato che $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ è una tautologia, allora siamo sicuri che è un teorema, perciò esiste una sua derivazione senza ipotesi:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\frac{[\alpha^1]}{\beta \rightarrow \alpha} (\rightarrow I)}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)} (\rightarrow I)^1 \right]$$

Esercizio Dimostrare che $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$.

Svolgimento

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\frac{\frac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\beta} (\wedge E2) \quad \frac{[\alpha \wedge \beta^1]}{\alpha} (\wedge E1)}{\beta \wedge \alpha} (\wedge I)}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)} (\rightarrow I)^1 \right] \quad \square$$