

Numeri reali

- Insieme dei reali
 - Proprietà dei reali
 - * Postulato di Eudosso-Archimede
 - * Proprietà degli *intervalli inscatolati*
 - * Maggioranti e minoranti di un insieme
 - * Insiemi Limitati
 - Esempio
 - * Massimo e minimo di un insieme
 - Esempio
 - * Estremo superiore ed inferiore di un insieme
 - Esempio
 - Teorema di completezza
 - * Esempio
 - Notazione degli intervalli

Insieme dei reali

Supponiamo di aver costruito l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , con le familiari operazioni di addizione e moltiplicazione e la relazione d'ordine \leq . Supponiamo che:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Proprietà dei reali

Supponiamo inoltre che le operazioni $+$, \cdot e la relazione d'ordine \leq soddisfino le usuali proprietà algebriche. Ci concentriamo su due proprietà ulteriori dei numeri reali.

Postulato di Eudosso-Archimede

Per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ t.c. $na > b$, cioè esisterà sempre un numero intero che moltiplicato per a sia maggiore di b .

Proprietà degli *intervalli inscatolati*

La proprietà degli intervalli inscatolati permette di individuare infiniti numeri reali in un intervallo di valori, quindi mostra come i numeri reali non presentano interruzioni tra loro.

Nota bene

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ viene chiamato intervallo chiuso $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Date due successioni di reali:

$$\begin{aligned}a_0 &< a_1 < a_2 < a_3 < \dots \\b_0 &> b_1 > b_2 > b_3 > \dots\end{aligned}$$

Tali per cui $a_j < b_j$ per ogni indice j esiste un numero reale c per cui $c \in [a_j, b_j]$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Per esempio, dato il numero reale $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ possiamo scrivere:

$$\begin{array}{ll}a_0 = 1 & b_0 = 1 \\a_1 = 1,4 & b_1 = 1,5 \\a_2 = 1,41 & b_2 = 1,42 \\a_3 = 1,414 & b_3 = 1,415 \\ \dots & \dots\end{array}$$

Notiamo come $\sqrt{2}$ appartiene a tutti gli intervalli $[a_j, b_j]$. Questo esempio però mostra anche che i numeri razionali \mathbb{Q} non soddisfano la proprietà degli intervalli inscatolati.

La definizione degli intervalli inscatolati può essere riformulata ma necessita di ulteriori elementi.

Maggioranti e minoranti di un insieme

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, si dice che b è un $\begin{cases} \text{maggiorante} \\ \text{minorante} \end{cases}$ di S se $\forall x \in S \begin{cases} b \geq x \\ b \leq x \end{cases}$.

Insiemi Limitati

Si dice che S è limitato $\begin{cases} \text{superiormente} \\ \text{inferiormente} \end{cases}$ se esiste un $\begin{cases} \text{maggiorante} \\ \text{minorante} \end{cases}$ di S .

Esempio L'insieme:

- $[0, 1]$ è limitato sup. ed inf.
- \mathbb{N} è limitato inf. ma non sup.

- \mathbb{Z} non è limitato

Considerando ad esempio l'intervallo $[0, 1]$, tale insieme possiede come maggioranti tutti e soli i reali $x \geq 1$ e come minoranti tutti e soli i reali $x \leq 0$.

Nota bene

Si dice che un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se è limitato sia sup. sia inf.

Massimo e minimo di un insieme

Dati $S \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ si dice che b è $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ di S se:

- $b \in S$
- b è $\begin{cases} \text{maggiorante} \\ \text{minorante} \end{cases}$ di S

Non sempre il massimo ed il minimo di un insieme limitato esistono, ma se esistono sono unici.

Esempio L'insieme:

- $[0, 1]$ è limitato, $\max [0, 1] = 1, \min [0, 1] = 0$
- \mathbb{N} è limitato inf. ma non sup., $\max \mathbb{N}$ non esiste, $\min \mathbb{N} = 0$
- \mathbb{Z} non è limitato, $\max \mathbb{Z}, \min \mathbb{Z}$ non esistono
- $(0, 1)$ è limitato ma $\max (0, 1), \min (0, 1)$ non esistono

Nell'ultimo caso, comunque preso $b \in (0, 1)$ il numero $\frac{b}{2} \in (0, 1)$, $\frac{b}{2} < b$, cioè si possono scegliere numeri sempre più piccoli senza mai trovare il valore minimo, o valori sempre più grandi senza mai trovare il massimo.

Estremo superiore ed inferiore di un insieme

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ **limitato superiormente**, si definisce come *estremo superiore* di S il minimo dei suoi maggioranti.

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ **limitato inferiormente**, si definisce come *estremo inferiore* di S il massimo dei suoi minoranti.

Esempio Dati gli insiemi limitati $S_1 = (0, 1), S_2 = (-1, 1) \cup [2, 3]$ possiamo dire:

- $\sup (0, 1) = 1$
- $\inf (0, 1) = 0$
- $\sup S = 3$

- $\inf S = -1$

Non è detto che $\sup S, \inf S$ siano elementi appartenenti ad S , ma se lo sono allora coincidono rispettivamente con $\max S, \min S$.

Teorema di completezza

Ogni sottoinsieme di \mathbb{R} limitato $\begin{cases} \text{superiormente} \\ \text{inferiormente} \end{cases}$ possiede un estremo $\begin{cases} \text{superiore} \\ \text{inferiore} \end{cases}$

Nota bene

Dato l'insieme $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.
 S quindi è limitato:

- $\sup S = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\inf S = -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Questo dimostra che il teorema di completezza non vale per l'insieme \mathbb{Q} .

Nota bene

D'ora in poi scriveremo $\sup S = +\infty$ se S **non** è limitato superiormente e $\inf S = -\infty$ se S **non** è limitato inferiormente.

Esempio Dati gli insiemi \mathbb{N}, \mathbb{Z} e $S = \{x \in \mathbb{R} : x > \pi\}$:

- $\sup \mathbb{N} = +\infty$
- $\sup \mathbb{Z} = +\infty$
- $\inf \mathbb{Z} = -\infty$
- $\sup \{x \in \mathbb{R} : x > \pi\} = +\infty$

Notazione degli intervalli

Siano dati $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si definiscono vari tipi di intervalli **limitati** di estremi a, b :

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ chiuso limitato
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ aperto limitato

Vengono poi definiti anche gli intervalli **illimitati**:

- $\begin{cases} [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \end{cases}$ chiusi illimitati

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
 $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ } aperti illimitati
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$