Conseguenze semantiche

Tabella dei contenuti

Ragionamento ipotetico deduttivo

Il ragionamento tipico della matematica è il ragionamento ipotetico-deduttivo, rappresentato in logica dalle conseguenze semantiche.

Conseguenze semantiche

Notazione

- Γ, Σ, Δ rappresentano insiemi arbitrari di proposizioni
- $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ rappresentano generiche proposizioni

Quindi per indicare che da un'ipotesi segue una proposizione si adotta la scrittura $\Gamma \models \psi$, che si legge come "Da Γ segue ψ".

Possiamo affermare che la valutazione di un insieme di proposizioni è uguale ad uno se e solamente se la valutazione di tutti i suoi elementi è tale, infatti, dato un insieme Γ ed una valutazione v:

$$[\![\, \Gamma \,]\!]_v = 1 \iff \forall \varphi \in \Gamma, \ [\![\, \varphi \,]\!]_v = 1$$

L'espressione $\Gamma \models \psi$ si dice conseguenza semantica se e solamente se ψ è verificata da ogni valutazione v che verificha anche Γ, per cui scriviamo:

$$\forall v [\![\, \Gamma \,]\!]_v = 1 \implies [\![\, \psi \,]\!]_v = 1 \tag{1}$$

Esempio Vogliamo provare che se α ed $\alpha \to \beta$ sono vere, allora lo è anche β, cioè che $\alpha \to \beta, \alpha \models \beta$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
[\![\, \alpha \to \beta, \alpha \,]\!]_v = 1 &\iff [\![\, \alpha \to \beta \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\iff (\cancel{[\![\, \alpha \,]\!]_v = 0} \text{ or } [\![\, \beta \,]\!]_v = 1) \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1 \\
&\implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \qquad \square
\end{aligned}$$

Esercizio Vogliamo dimostrare che $(\Gamma, \alpha \models \beta) \implies (\Gamma \models \alpha \to \beta)$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\forall v [\![\, \Gamma, \alpha \,]\!]_v = 1 \implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 &\iff ([\![\, \Gamma \,]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\, \alpha \,]\!]_v = 1) \implies [\![\, \beta \,]\!]_v = 1 \\
&\iff ([\![\, \Gamma \,]\!]_v \neq 1 \text{ or } \underline{[\![\, \alpha \,]\!]_v = 0}) \text{ or } \underline{[\![\, \beta \,]\!]_v = 1} \\
&\iff [\![\, \Gamma \,]\!]_v \neq 1 \text{ or } [\![\, \alpha \to \beta \,]\!]_v = 1 \\
&\implies \Gamma \models \alpha \to \beta \qquad \square
\end{aligned}$$

Tautologie notevoli

A livello teorico esistono infinite tautologie, ma tra le più importanti citiamo:

- Leggi di De Morgan: $\begin{cases} \neg(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{cases}$
- Involutività della negazione: $\begin{cases} \neg(\neg\alpha) \longleftrightarrow \alpha \end{cases}$
- Commutatività: $\begin{cases} (\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \\ (\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\psi \vee \varphi) \end{cases}$
- Distributività: $\begin{cases} \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \\ \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \end{cases}$
- Associatività: $\begin{cases} \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \\ \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \end{cases}$

Stringhe ed occorrenze

Dato un insieme di simboli generici Ω, una stringa su questo insieme è una sequenza di finita lunghezza n, della forma:

$$s = c_1 \, c_2 \, \ldots \, c_n \tag{2}$$

dove per ogni indice i appartenente all'intervallo $(1, n)$ il simbolo c_i, si trova in Ω.

Di conseguenza, dato un simbolo $a \in \Omega$ si dice occorrenza della stringa s, ogni coppia (a, i) tale per cui il simbolo di partenza $a = c_i$.

Sostituzione

Siano quindi $\varphi, \psi \in PROP$ e $p \in \varphi$, si scrive $\varphi[\ \psi \ / \ p \ ]$ per indicare che il simbolo p viene rimpiazzato dalla proposizione ψ.

Definizione iterativa

Per applicare la sostituzione in modo iterativo, si scorre una proposizione per individuare tutte le occorrenze e si rimpiazza il valore.

Esempio Data $\varphi = ((p_1 \to (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3)$, vogliamo sostituire p_1 con φ.

Svolgimento:

> Le occorrenze di p_1 sono $(p_1, 3), (p_1, 8)$, sostituendo p_1 con ψ otteniamo: $((\psi \to (p_5 \vee \psi)) \wedge p_3)$.

Definizione ricorsiva

Sia $*$ un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, allora:

1. $\varphi[\ \psi\ /\ p\ ] = \begin{cases} \bot \text{ iff} & \varphi = \bot \\ \varphi \text{ iff} & \varphi \in AT,\ \varphi \neq p \\ \psi \text{ iff} & \varphi \in AT,\ \varphi = p \end{cases}$
2. $(\neg\varphi)[\ \psi\ /\ p\ ] = \neg(\ [\ \psi\ /\ p\ ]\ )$
3. $(\varphi_1 * \varphi_2)[\ \psi\ /\ p\ ] = (\ \varphi_1[\ \psi\ /\ p\ ] * \varphi_2[\ \psi\ /\ p\ ]\ )$

Lemma

Sia $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$, allora dato $\vDash\ \ \psi_1 \longleftrightarrow \psi_2$, vale: $\vDash\ \varphi[\ \psi\ /\ p\ ] \longleftrightarrow \varphi[\ \psi\ /\ p\ ]$

Relazioni di equivalenza

Sia A un insieme e sia $R \subseteq A \times A$, quest'ultima viene chiamata relazione di equivalenza se e solamente:

- È riflessiva: $\forall a \in A, aRa$
- È transitiva: $\forall a, b, c \in a, (aRb, bRc) \implies aRc$
- E simmetrica: $\forall a, b \in A, (aRb, bRa)$

Nota bene

Un esempio di relazione di equivalenza è la similitudine tra triangoli.

Lemma

Si dice che φ è equivalente a ψ se e solamente se $\varphi \longleftrightarrow \psi$ è una tautologia, infatti scriviamo che:

$$\varphi \approx \psi \iff \vDash\ \varphi \longleftrightarrow \psi$$

Con $\approx \subseteq PROP \times PROP$.