Introduzione

Quantificatori

I quantificatori sono:

- $\forall$: “per ogni”, quantificatore universale
- $\exists$: “esiste”, quantificatore esistenziale

Esempio Scriviamo la frase

> Ogni numero intero n, se è maggiore di 5 allora è maggiore di 2

come:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n > 5 \implies n > 2$$

Esempio Scriviamo la frase

> Esiste un numero intero maggiore di 5

come:

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n > 5$$

Nota bene

> Con il quantificatore $\exists$ intendiamo “*Esiste almeno un elemento*”. Se invece vogliamo specificare che ne esiste esattamente uno diciamo “*Esiste ed è unico*” utilizzando il simbolo $\exists!$, infatti:
>
> $$\exists! n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 2n = 6$$

Negazioni di un enunciato con quantificatori

Nota bene

> Una proposizione contronominale è la proposizione con ipotesi e tesi negate e scambiate rispetto all’originale.

Considerando l’enunciato $\forall x \in A$, $P(x)$, la sua negazione è:

$$\exists x \in A \text{ t.c. } \text{non } P(x)$$

In altre parole, se esiste almeno un elemento $x \in A$ per cui **non** vale la proprietà P, allora significa che tale proprietà non vale per tutti gli elementi.

Similmente considerando l'enunciato $\exists x \in A \text{ t.c. } P(x)$, la sua negazione è:

$$\forall x \in A, \text{ non } P(x)$$

Induzione matematica

È un particolare tipo di ragionamento deduttivo[1] da non confondere con l'implicazione *empirica*.

Esempio Vogliamo calcolare la somma dei numeri interi positivi minori o uguali a cento.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S &= 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 \\ &= 101 \cdot 100 \end{aligned} \tag{1}$$

Da cui $S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$, quindi azzardiamo una congettura:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali (interi non negativi o per alcuni escluso lo zero), $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, inoltre:

$$\sum_{k=0}^{n} k \coloneqq 0 + 1 + 2 + \cdots + n$$

Dimostriamo la congettura 1 per **induzione**:

- Passo base: l'espressione 1 è soddisfatta quando $n = 0$ perché

$$\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0 \cdot 1}{2}$$

- Passo induttivo: se $n \in \mathbb{N}$ soddisfa l'espressione 1 altrettanto vale anche per $n + 1$

[1] L'induzione matematica è un assioma dell'aritmetica dei numeri naturali. (Giuseppe Peano, 1889)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0+1+\cdots+n+(n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= (n+1)(\frac{n}{2}+1) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Più in generale per dimostrare un enunciato del tipo $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ occorre dimostrare:

- Il passo base, $P(0)$
- Il passo induttivo, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \longrightarrow P(n+1)$

Esempio Vogliamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Passo base: per $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

- Passo induttivo: se $n \in \mathbb{N}$ soddisfa la formula, allora

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1) \\
&= (n+1) \cdot \frac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad \square
\end{aligned}
$$

La formula è la stessa, scritta rimpiazzando n con $n+1$, quindi la formula è dimostrata.

Esempio Vogliamo dimostrare che $\forall k \in \mathbb{N}$ t.c. $k \geq 1,\ 2^k > k$

- Passo base: $2^1 = 2 > 1$
- Passo induttivo: se $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ soddisfa $2^k > k$, allora

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k > k+1$$

Dunque $2^{k+1} > k+1$ $\square$

Esempio Diseguaglianza di Bernoulli.

Dato un numero reale $x \geq -1$ vogliamo dimostrare

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (1+x)^k \geq 1 + kx$$

- Passo base: per $k = 0$, $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x$
- Passo induttivo: se $k \in \mathbb{N}$ soddisfa la diseguaglianza, allora

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x \quad \square\end{aligned}$$