Numeri reali

Insieme dei reali

Supponiamo di aver costruito l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, con le familiari operazioni di addizione e moltiplicazione e la relazione d'ordine $\leq$. Supponiamo che:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Proprietà dei reali

Supponiamo inoltre che le operazioni $+, \cdot$ e la relazione d'ordine $\leq$ soddisfino le usuali proprietà algebriche. Ci concentriamo su due proprietà ulteriori dei numeri reali.

Postulato di Eudosso-Archimede

Per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ t.c. $na > b$, cioè esisterà sempre un numero intero che moltiplicato per a sia maggiore di b.

Proprietà degli *intervalli inscatolati*

La proprietà degli intervalli inscatolati permette di individuare infiniti numeri reali in un intervallo di valori, quindi mostra come i numeri reali non presentano interruzioni tra loro.

Nota bene

> Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ viene chiamato intervallo chiuso $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Date due successioni di reali:

$$
\begin{aligned}
&a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots \\
&b_0 > b_1 > b_2 > b_3 > \dots
\end{aligned}
$$

Tali per cui $a_j < b_j$ per ogni indice j esiste un numero reale c per cui $c \in [a_j, b_j],\ \forall j \in \mathbb{N}$. Per esempio, dato il numero reale $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ possiamo scrivere:

$$
\begin{array}{cc}
a_0 = 1 & b_0 = 1 \\
a_1 = 1,4 & b_1 = 1,5 \\
a_2 = 1,41 & b_2 = 1,42 \\
a_3 = 1,414 & b_3 = 1,415 \\
\dots & \dots
\end{array}
$$

Notiamo come $\sqrt{2}$ appartiene a tutti gli intervalli $[a_j, b_j]$. Questo esempio però mostra anche che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfano la proprietà degli intervalli inscatolati.

La definizione degli intervalli inscatolati può essere riformulata ma necessita di ulteriori elementi.

Maggioranti e minoranti di un insieme

Sia $S \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, si dice che b è un $\begin{cases}\text{maggiorante} \\ \text{minorante}\end{cases}$ di S se $\forall x \in S \begin{cases} b \geq x \\ b \leq x \end{cases}$.

Insiemi Limitati

Si dice che S è limitato $\begin{cases}\text{superiormente} \\ \text{inferiormente}\end{cases}$ se esiste un $\begin{cases}\text{maggiorante} \\ \text{minorante}\end{cases}$ di S.

Esempio L'insieme:

- $[0, 1]$ è limitato sup. ed inf.
- $\mathbb{N}$ è limitato inf. ma non sup.
- $\mathbb{Z}$ non è limitato

Considerando ad esempio l'intervallo $[0, 1]$, tale insieme possiede come maggioranti tutti e soli i reali $x \geq 1$ e come minoranti tutti e soli i reali $x \leq 0$.

Nota bene

Si dice che un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se è limitato sia sup. sia inf.

Massimo e minimo di un insieme

Dati $S \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$m si dice che b è $\begin{cases}\text{massimo} \\ \text{minimo}\end{cases}$ di S se:

- $b \in S$
- b è $\begin{cases}\text{maggiorante} \\ \text{minorante}\end{cases}$ di S

Non sempre il massimo ed il minimo di un insieme limitato esistono, ma se esistono sono unici.

Esempio L'insieme:

- $[0,1]$ è limitato, $\max[0,1] = 1, \min[0,1] = 0$
- $\mathbb{N}$ è limitato inf. ma non sup., $\max \mathbb{N}$ non esiste, $\min \mathbb{N} = 0$
- $\mathbb{Z}$ non è limitato, $\max \mathbb{Z}, \min \mathbb{Z}$ non esistono
- $(0,1)$ è limitato ma $\max(0,1), \min(0,1)$ non esistono

Nell'ultimo caso, comunque preso $b \in (0,1)$ il numero $\frac{b}{2} \in (0,1),\ \frac{b}{2} < b$, cioè si possono scegliere numeri sempre più piccoli senza mai trovare il valore minimo, o valori sempre più grandi senza mai trovare il massimo.

Estremo superiore ed inferiore di un insieme

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ **limitato superiormente**, si definisce come *estremo superiore* di S il minimo dei suoi maggioranti.

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ **limitato inferiormente**, si definisce come *estremo inferiore* di S il massimo dei suoi minoranti.

Esempio Dati gli insiemi limitati $S_1 = (0,1), S_2 = (-1,1) \cup [2,3]$ possiamo dire:

- $\sup(0,1) = 1$
- $\inf(0,1) = 0$
- $\sup S = 3$
- $\inf S = -1$

Non è detto che $\sup S, \inf S$ siano elementi appartenenti ad S, ma se lo sono allora coincidono rispettivamente con $\max S, \min S$.

Teorema di completezza

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato $\begin{cases}\text{superiormente}\\ \text{inferiormente}\end{cases}$ possiede un estremo $\begin{cases}\text{superiore}\\ \text{inferiore}\end{cases}$

Nota bene

Dato l'insieme $S = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} :\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$. S quindi è limitato:

- $\sup S = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\inf S = -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Questo dimostra che il teorema di completezza non vale per l'insieme $\mathbb{Q}$.

Nota bene

D'ora in poi scriveremo $\sup S = +\infty$ se S **non** è limitato superiormente e $\inf S = -\infty$ se S **non** è limitato inferiormente.

Esempio Dati gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $S = \{x \in \mathbb{R} : \ x > \pi\}$:

- $\sup \mathbb{N} = +\infty$
- $\sup \mathbb{Z} = +\infty$
- $\inf \mathbb{Z} = -\infty$
- $\sup \{x \in \mathbb{R} : \ x > \pi\} = +\infty$

Notazione degli intervalli

Siano dati $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si definiscono vari tipi di intervalli **limitati** di estremi a, b:

- $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ chiuso limitato
- $[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$
- $(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$
- $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ aperto limitato

Vengono poi definiti anche gli intervalli **illimitati**:

- $\left.\begin{array}{l} [a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \\ (-\infty, a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\} \end{array}\right\}$ chiusi illimitati
- $\left.\begin{array}{l} (a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \\ (-\infty, a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\} \end{array}\right\}$ aperti illimitati
- $(-\infty, +\infty) \coloneqq \mathbb{R}$