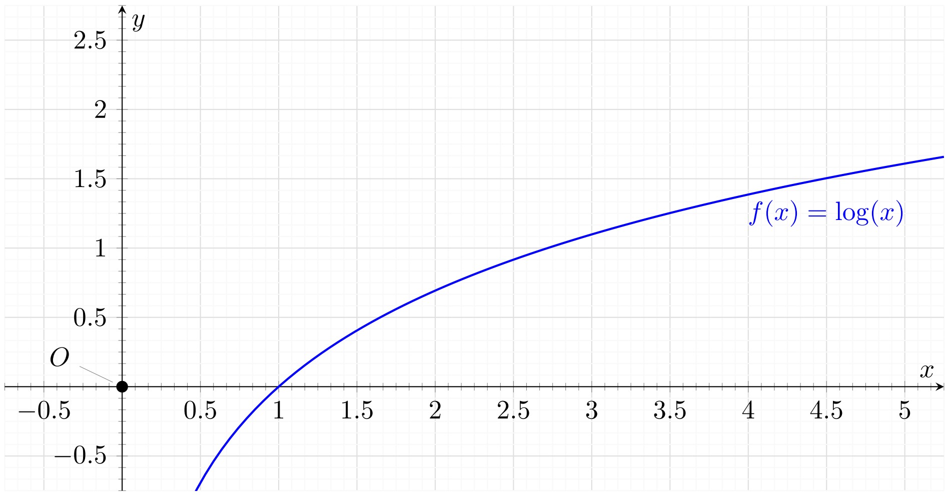
Funzione logaritmo

Tabella dei contenuti

Grafico

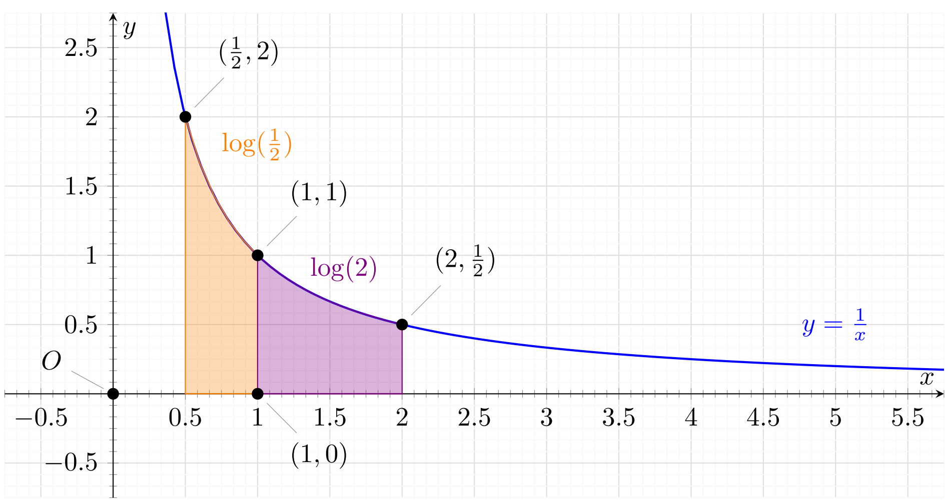
Funzione logaritmo



Definizione

Considerato un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, definiamo la funzione $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

Funzione logaritmo



Dato $p \geq 1$ allora $\log(p)$ è definito come l'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1,1), (1,0), (p,0), (p,1/p)$.

Contrariamente, dato $p \in (0,1)$, definiamo la funzione come **l'opposto** dell'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1,1), (1,0), (p,0), (p,1/p)$.

Nota bene

> In sintesi $\log(p) > 0$ se $p \geq 0$, mentre $\log(p) < 0$ se $0 < p < 1$.

Osservazione

Per ogni $p > 0$, $\log(p)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e compresa tra i punti $(1,1)$, $(0,0)$ e $(p, \frac{1}{p})$.

Dimostrazione

Supponiamo $p \geq 1$. Siano A_1, A_2, A_3, A_4 le aree delle quattro regioni in figura. Allora:

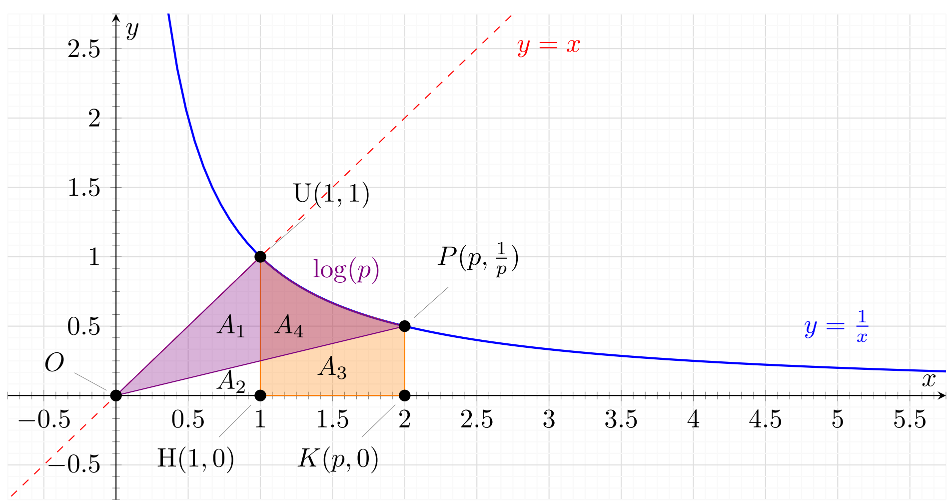
$$A_1 + A_2 = \text{Area di OHU} \qquad A_2 + A_3 = \text{Area di OKP}$$
$$= \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \qquad\qquad = \frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2} = \frac{1}{2}$$

Dunque, data l'area della figura HKPU $= A_3 + A_4$:

$$\begin{aligned} A_1 + \cancel{A_2} = \cancel{A_2} + A_3 &\implies A_1 = A_3 \\ &\implies A_3 + A_4 = A_1 + A_4 \\ &\implies A_1 + A_4 = \text{Area di HKPU} \quad \square \end{aligned}$$

Il grafico risultante è:

Funzione logaritmo



Proprietà del logaritmo

Vi sono alcune proprietà fondamentali del logaritmo, cioè:

Proprietà 0

La prima proprietà del logaritmo, si nota osservando il grafico della funzione nel punto $(1, 0)$, cioè che:

$$\log(1) = 0$$

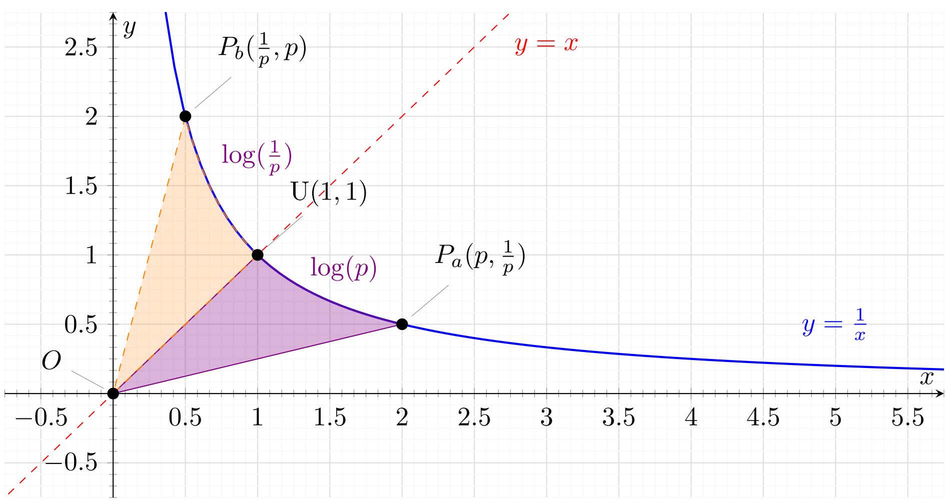
Proprietà 1

La seconda proprietà del logaritmo è:

$$\forall p \in (0, +\infty), \;\; \log(\frac{1}{p}) = -\log(p)$$

Espressa graficamente risulta più comprensibile:

Funzione logaritmo



Proprietà 2

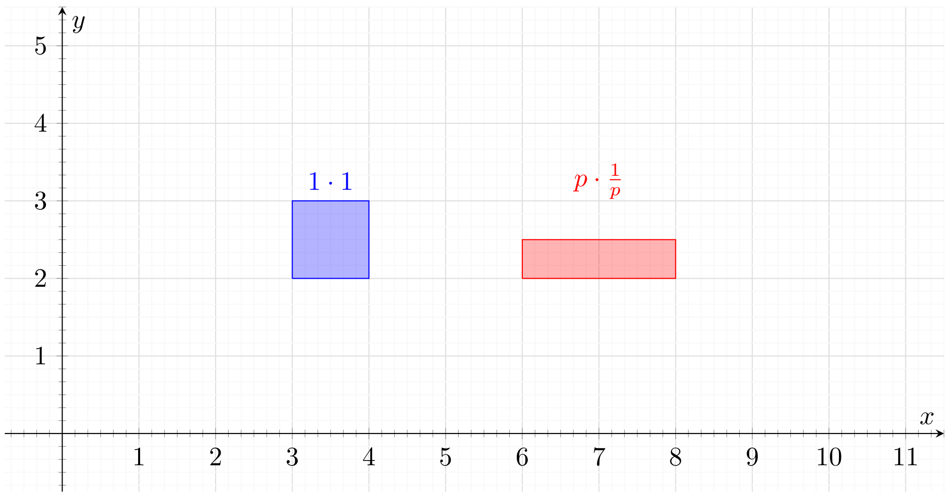
La terza proprietà del logaritmo è:

$$\forall p \in (0, +\infty), \forall q \in (0, +\infty), \;\; \log(pq) = \log(p) + \log(q)$$

Conservazione delle aree Date R una regione del piano misurabile qualsiasi e la sua immagine $\bar{R}$ mediante T, allora le due possiedono la stessa area.

Questo perché la trasformazione T modifica i quadrati di lato unitario in rettangoli di lati $p, \frac{1}{p}$, infatti l'area del quadrato $= 1 \cdot 1 = 1 = p \cdot \frac{1}{p} =$ l'area del rettangolo.

Conservazione delle aree



Dimostrazione

Dati $p > 1, q > 1$, consideriamo T una trasformazione del piano in sé:

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto (px, \frac{y}{p})$$

Questa trasformazione manda l'iperbole di equazione $xy = 1$ in sé, questo perché se (x, y) appartiene all'iperbole, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$ appartiene all'iperbole perché:

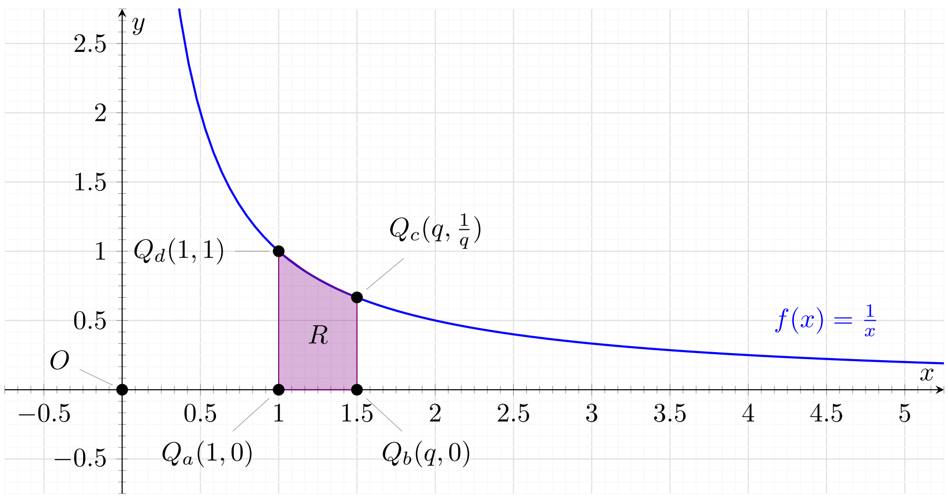
$$\bar{x}\bar{y} = \cancel{p}x \cdot \frac{y}{\cancel{p}} = xy = 1$$

Scegliamo quindi come R l'area compresa tra i punti:

$$Q_a(1, 0), \ \ Q_b(q, 0), \ \ Q_c(q, \frac{1}{q}), \ \ Q_d(1, 1)$$

Il cui grafico risulta come il seguente:

Funzione logaritmo

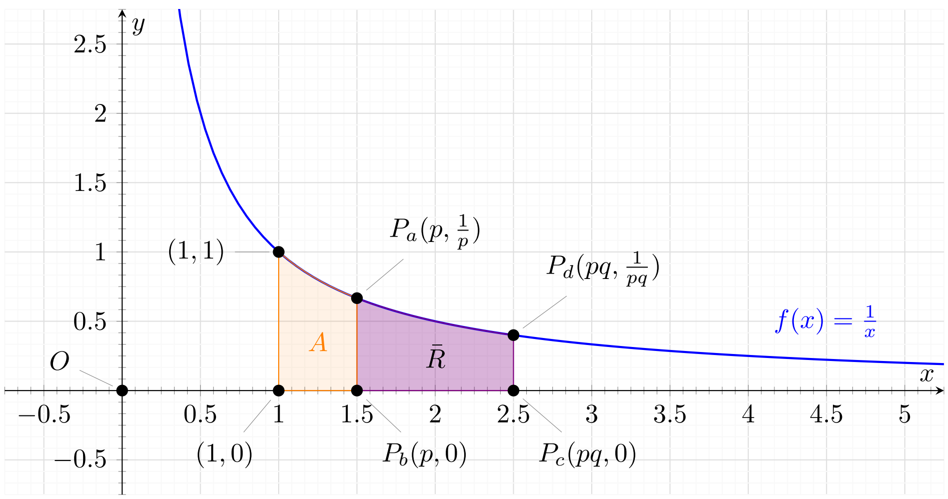


Di conseguenza applicando la trasformazione $T(x,y) = (px, \frac{y}{p})$, otteniamo come immagine $\bar{R}$ l'area compresa tra i punti:

$$P_a(p,0), \quad P_b(pq,0), \quad P_c(pq, \frac{1}{pq}), \quad P_d(p, \frac{1}{p})$$

Perciò otteniamo il grafico:

Funzione logaritmo



Per cui dato che $\log(p)$ è definito come l'area compresa tra $(1,0)$, $(p,0)$, $(p,\frac{1}{p})$, $(1,1)$, cioè A, e che $\bar{R}$ ed R sono equivalenti, allora:

$$\begin{aligned}\log(pq) &= \text{Area di } A + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } R \\ &= \log(p) + \log(q) \qquad \square\end{aligned}$$

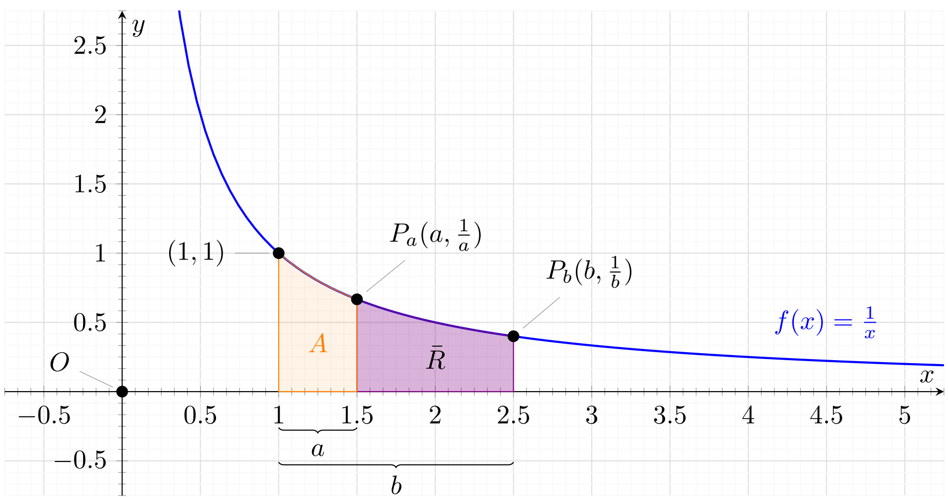
Proprietà 3

La quarta proprietà del logaritmo è di essere una funzione iniettiva, pertanto possiamo scrivere:

$$a < b \iff \log(a) < \log(b)$$

Infatti dal grafico si nota che il logaritmo di a è minore di b:

Funzione logaritmo



Proprietà 4

La quinta proprietà del logaritmo è il fatto di essere anche una funzione suriettiva, grazie alla quale possiamo dire con certezza che il logaritmo è una funzione biettiva.