

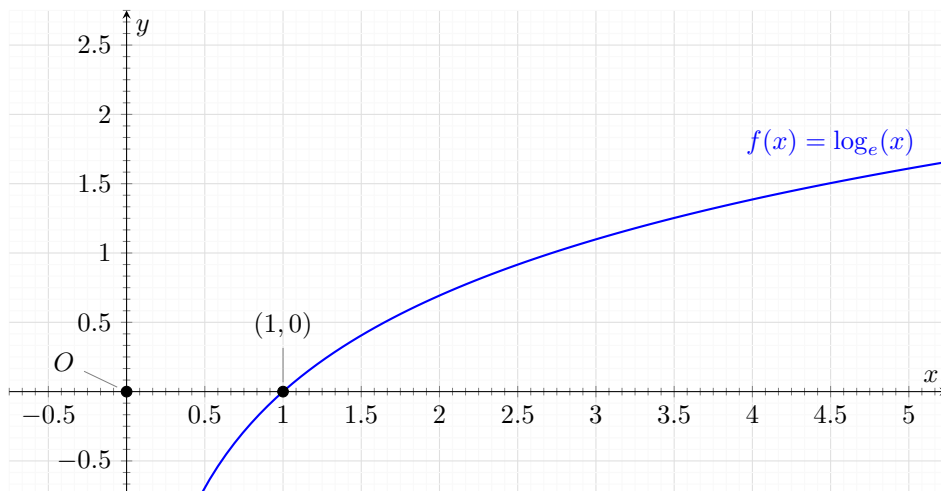
# Funzioni log ed exp

## Tabella dei contenuti

<b>Logaritmo</b>	<b>2</b>
Osservazione . . . . .	3
Dimostrazione . . . . .	3
Proprietà del logaritmo . . . . .	4
Proprietà I . . . . .	4
Proprietà II . . . . .	4
Proprietà III . . . . .	4
Proprietà IV . . . . .	6
Proprietà V . . . . .	7
<b>Esponenziale</b>	<b>7</b>
Proprietà dell'esponenziale . . . . .	8
Proprietà I . . . . .	8
Proprietà II . . . . .	8
Proprietà III . . . . .	8
Proprietà IV . . . . .	8
Proprietà V . . . . .	8
Costruzione di un elevamento a potenza . . . . .	9
Numero di Nepero (o Eulero) . . . . .	9
<b>Esercizi aggiuntivi</b>	<b>10</b>

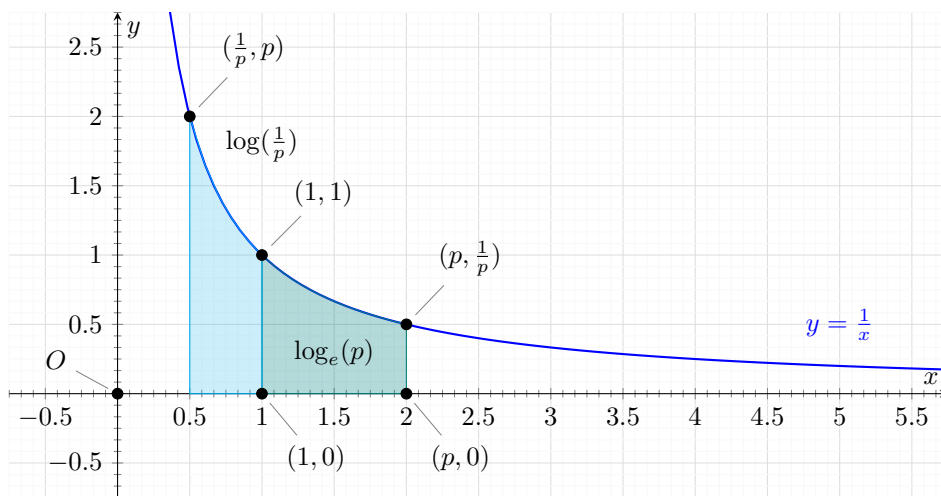
# Logaritmo

Funzione logaritmo



Considerato un ramo di iperbole equilatera di equazione  $y = \frac{1}{x}$  per  $x > 0$ , definiamo la funzione  $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nel modo seguente:

Funzione logaritmo



Dato  $p \geq 1$  allora  $\log(p)$  è definito come l'area sottesa dalla funzione  $y = \frac{1}{x}$  e contenuta nei vertici  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(p, 0)$ ,  $(p, \frac{1}{p})$ .

Contrariamente, dato  $p \in (0, 1)$ , definiamo la funzione come **l'opposto** dell'area sottesa dalla funzione  $y = \frac{1}{x}$  e contenuta nei vertici  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(p, 0)$ ,  $(p, \frac{1}{p})$ .

*Nota bene*

In sintesi  $\log(p) > 0$  se  $p \geq 1$ , mentre  $\log(p) < 0$  se  $0 < p < 1$ .

## Osservazione

Per ogni  $p > 0$ ,  $\log(p)$  è uguale all'area sottesa dalla funzione  $y = \frac{1}{x}$  e compresa tra i punti  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  e  $(p, \frac{1}{p})$ .

## Dimostrazione

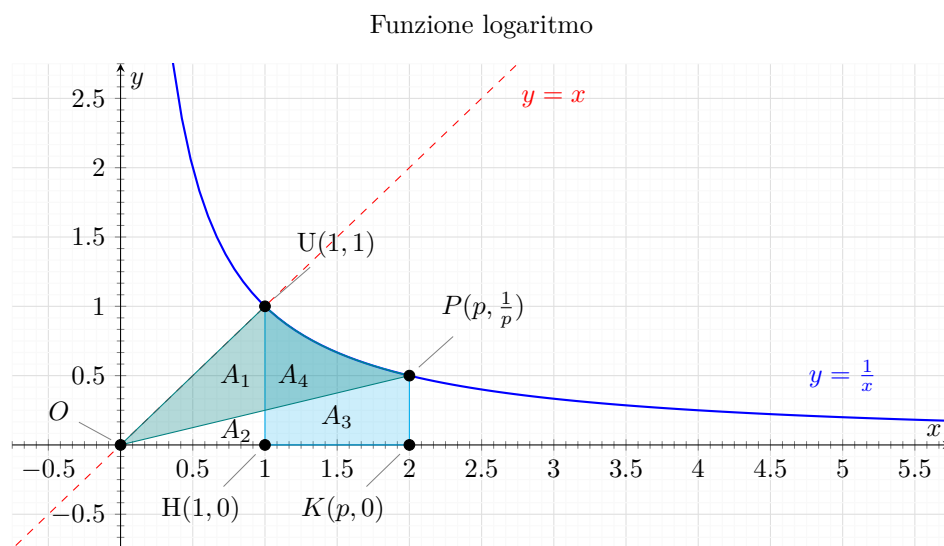
Supponiamo  $p \geq 1$ . Siano  $A_1, A_2, A_3, A_4$  le aree delle quattro regioni in figura. Allora:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{Area di OHU} & A_2 + A_3 &= \text{Area di OKP} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} & &= \frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque, data l'area della figura  $HKPU = A_3 + A_4$ :

$$\begin{aligned} A_1 + \cancel{A_2} &= \cancel{A_2} + A_3 \implies A_1 = A_3 \\ &\implies A_3 + A_4 = A_1 + A_4 \\ &\implies A_1 + A_4 = \text{Area di HKPU} \quad \square \end{aligned}$$

Il grafico risultante è:



## Proprietà del logaritmo

### Proprietà I

Dal grafico della funzione logaritmo nel punto  $(1, 0)$ , notiamo che:

$$\log(1) = 0$$

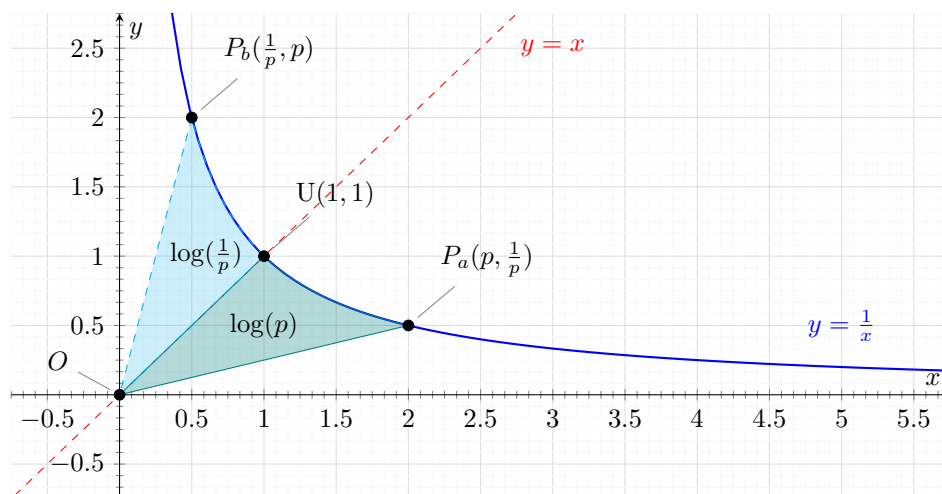
### Proprietà II

Dal grafico sottostante possiamo notare come:

$$\forall p \in (0, +\infty), \quad \log\left(\frac{1}{p}\right) = -\log(p)$$

Infatti:

Funzione logaritmo



### Proprietà III

Possiamo affermare che:

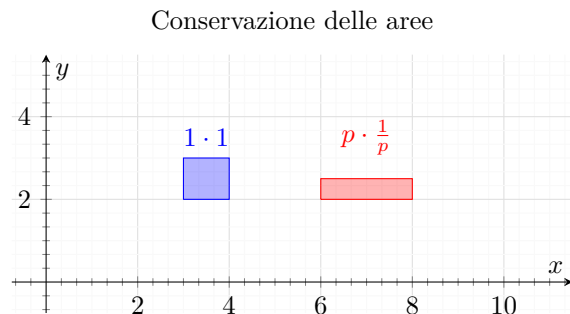
$$\forall p \in (0, +\infty), \forall q \in (0, +\infty), \quad \log(pq) = \log(p) + \log(q)$$

Grazie al principio di conservazione delle aree.

**Conservazione delle aree** Date  $R$  una regione del piano misurabile qualsiasi e la sua immagine  $\bar{R}$  mediante  $T$ , allora le due possiedono la stessa area.

Questo perché la trasformazione  $T$  modifica i quadrati di lato unitario in rettangoli di lati  $p, \frac{1}{p}$ , infatti l'area del quadrato  $= 1 \cdot 1 = 1 = p \cdot \frac{1}{p}$  = l'area del

rettangolo.



**Dimostrazione** Dati  $p > 1, q > 1$ , consideriamo  $T$  una trasformazione del piano in sé:

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (px, \frac{y}{p})$$

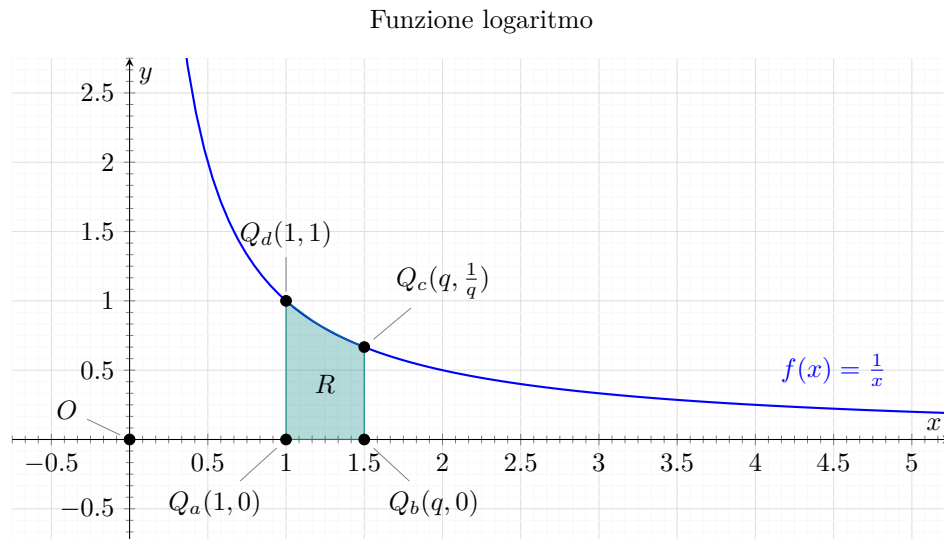
Questa trasformazione manda l'iperbole di equazione  $xy = 1$  in sé, questo perché se  $(x, y)$  appartiene all'iperbole, allora anche  $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$  appartiene all'iperbole perché:

$$\bar{x}\bar{y} = px \cdot \frac{y}{p} = xy = 1$$

Scegliamo quindi come  $R$  l'area compresa tra i punti:

$$Q_a(1, 0), \quad Q_b(q, 0), \quad Q_c(q, \frac{1}{q}), \quad Q_d(1, 1)$$

Il cui grafico risulta come il seguente:

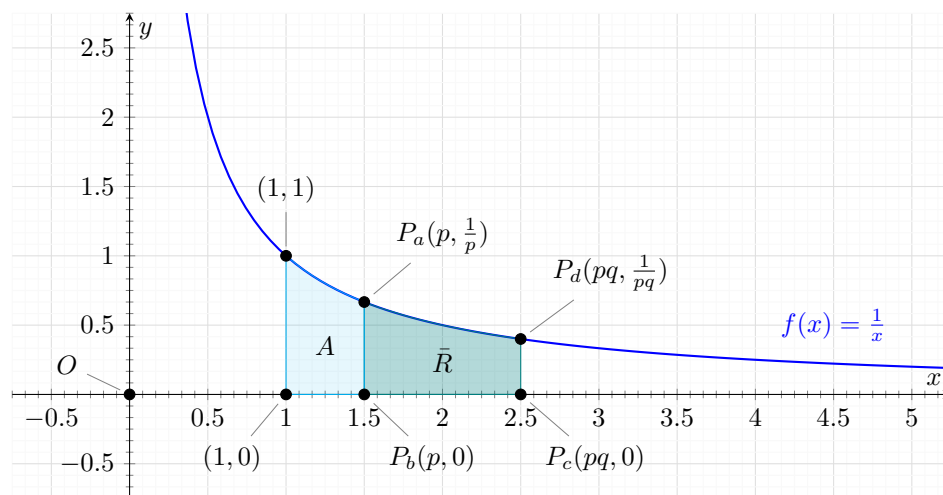


Di conseguenza applicando la trasformazione  $T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$ , otteniamo come immagine  $\bar{R}$  l'area compresa tra i punti:

$$P_a(p, 0), P_b(pq, 0), P_c(pq, \frac{1}{pq}), P_d(p, \frac{1}{p})$$

Perciò otteniamo il grafico:

Funzione logaritmo



Per cui dato che  $\log(p)$  è definito come l'area compresa tra  $(1, 0)$ ,  $(p, 0)$ ,  $(p, \frac{1}{p})$ ,  $(1, 1)$ , cioè  $A$ , e che  $\bar{R}$  ed  $R$  sono equivalenti, allora:

$$\begin{aligned} \log(pq) &= \text{Area di } A + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } \bar{R} \\ &= \log(p) + \text{Area di } R \\ &= \log(p) + \log(q) \quad \square \end{aligned}$$

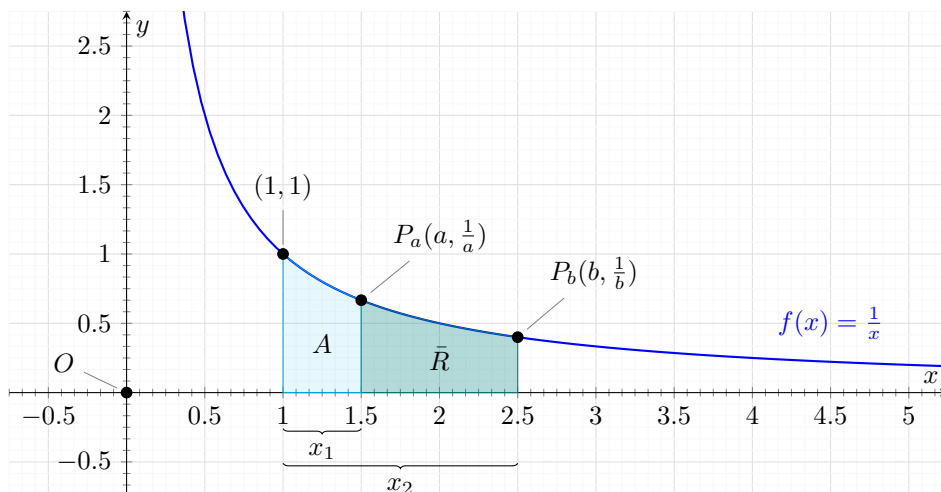
#### Proprietà IV

Il logaritmo è una funzione iniettiva e quindi sappiamo che è strettamente monotona in modo crescente, pertanto se  $x_1, x_2$  appartengono al dominio e  $x_1 < x_2$ , allora  $f(x_1) < f(x_2)$ , ed infatti possiamo scrivere:

$$x_1 < x_2 \iff \log(x_1) < \log(x_2)$$

Infatti dal grafico si nota che il logaritmo di  $x_1$  è minore di  $x_2$ :

Funzione logaritmo

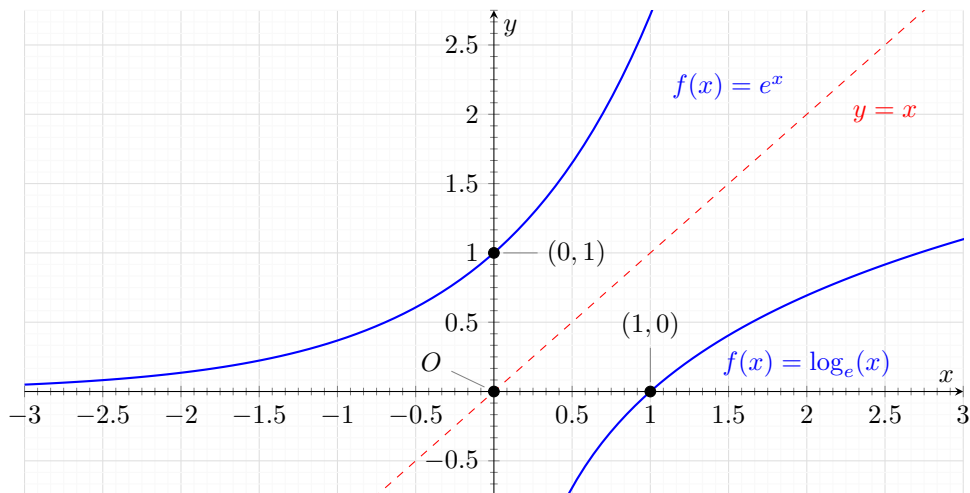


### Proprietà V

Il logaritmo è anche una funzione suriettiva, grazie alla quale possiamo dire con certezza che il logaritmo è una funzione biettiva.

## Esponenziale

Funzione logaritmo



Definiamo la funzione esponenziale come  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$  dato esiste uno ed un solo  $x \in (0, +\infty)$  t.c.  $\log(x) = y$ , per questo possiamo affermare con certezza che la funzione esponenziale è l'inversa del logaritmo.

## Proprietà dell'esponenziale

### Proprietà I

In quanto l'esponenziale è la funzione inversa del logaritmo, applicando prima una e poi l'altra, otteniamo:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \log(\exp t) = t \quad \forall t > 0, \exp(\log t) = t$$

### Proprietà II

La funzione esponenziale è sempre positiva, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp t > 0$$

### Proprietà III

La funzione  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  (cioè con codominio l'asse delle ordinate al di sopra della retta orizzontale  $y = 0$ ) è biettiva e strettamente crescente.

### Proprietà IV

Dal momento che  $\log(1) = 0$ , possiamo affermare che  $\exp(0) = 1$  perché dalla proprietà I sappiamo che:

$$\exp(0) = \exp(\log 1) = 1$$

### Proprietà V

Possiamo affermare che per ogni coppia di numeri reali qualsiasi, l'esponenziale della loro somma è il prodotto delle esponenziali dei due, cioè:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

**Dimostrazione** Dimostriamo la proprietà utilizzando anche la funzione logaritmo:

$$\begin{aligned} \log(\exp(a) \cdot \exp(b)) &= \log(\exp a) + \log(\exp b) \\ &= a + b \\ &= \log(\exp(a + b)) \end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo la funzione logaritmo, una funzione iniettiva, significa che per qualsiasi  $p, q$  positivi  $\log(p) = \log(q) \iff p = q$ , perciò sostituendo  $p, q$ , otteniamo che  $\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a + b)$   $\square$ .



### **Costruzione di un elevamento a potenza**

Per potenze di base positiva, dato  $a \in (0, +\infty)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , possiamo definire:

$$a^b := \exp(b \log a)$$

Ad esempio  $a^3 = \exp(3 \log a)$ .

### **Numero di Nepero (o Eulero)**

Definiamo  $e = \exp(1)$  e quindi  $\forall b \in \mathbb{R}$ ,  $e^b = \exp(b \cdot \log e) = \exp(b)$ .

## Esercizi aggiuntivi

**Esercizio** Dato un numero reale  $a \in (0, +\infty)$ , dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$  t.c.  $n \geq 1$ ,  $\exp(n \cdot \log a) = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ . Svolgimento:

1. Passo base: per  $n = 1$  abbiamo,

$$\exp(1 \cdot \log a) = \exp(\log a) = a$$

2. Passo induttivo: per  $n + 1$  abbiamo,

$$\begin{aligned}\exp((n + 1) \cdot \log a) &= \exp((n \cdot \log a) + (\log a)) \\ &= \exp(n \cdot \log a) \cdot \exp(\log a) \\ &= \exp(n \cdot \log a) \cdot a\end{aligned}$$

$$=_{hp} \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n \cdot a}_{n+1} \quad \square$$

Dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva (*hp*), cioè che l'espressione  $\exp(n \cdot \log a) = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$  sia assunta come vera.