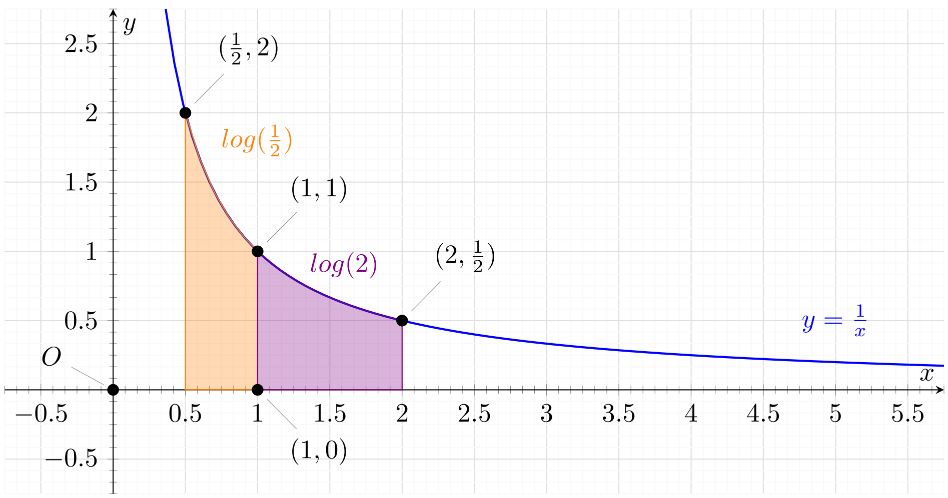
Funzione logaritmo

Tabella dei contenuti

Definizione

Considerato un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, definiamo la funzione $log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente.

Funzione logaritmo



Dato $p \geq 1$ allora $log(p)$ è definito come l'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1,1), (1,0), (p,0), (p, 1/p)$.

Contrariamente, dato $p \in (0,1)$, definiamo la funzione come **l'opposto** dell'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e contenuta nei vertici $(1,1), (1,0), (p,0), (p, 1/p)$.

Nota bene

In sintesi:

- $log(p) > 0$ se $p \geq 0$
- $log(p) < 0$ se $0 < p < 1$.

Osservazione

Per ogni $p > 0$, $log(p)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ e compresa tra i punti $(1,1)$, $(0,0)$ e $(p, \frac{1}{p})$.

Dimostrazione

Supponiamo $p \geq 1$. Siano A_1, A_2, A_3, A_4 le aree delle quattro regioni in figura. Allora:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{Area del triangolo rettangolo OHU} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

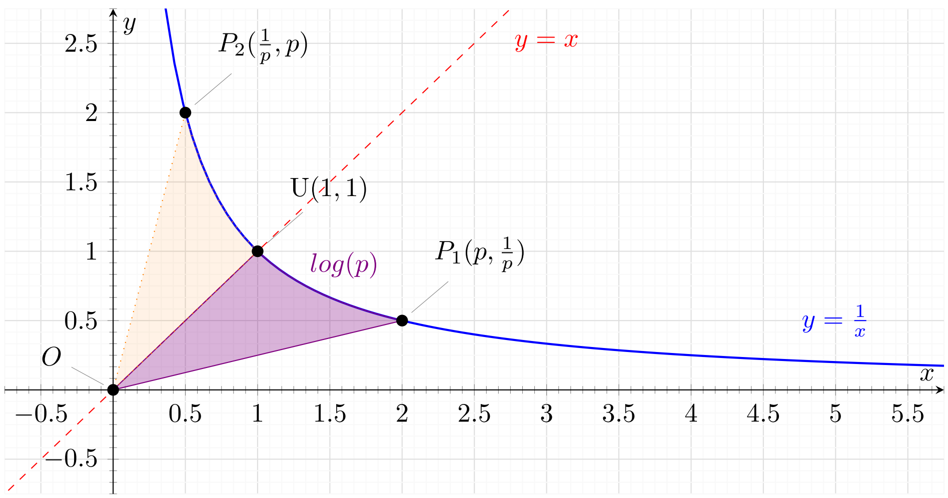
Mentre:

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 &= \text{Area del triangolo rettangolo OKP} \\ &= \frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque, data l'area della figura HKPU $= A_3 + A_4$:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = A_3 + A_2 &\implies A_1 = A_3 \\ &\implies A_3 + A_4 = A_1 + A_4 \\ &\implies A_1 + A_4 = \text{Area della figura HKPU} \quad \square \end{aligned}$$

Funzione logaritmo



Nota bene

> Supponendo di avere $p \in (0, 1)$, l'area della figura UPO è simmetrica rispetto alla bisettrice del quadrante.

Proprietà del logaritmo

Vi sono alcune proprietà fondamentali del logaritmo, cioè:

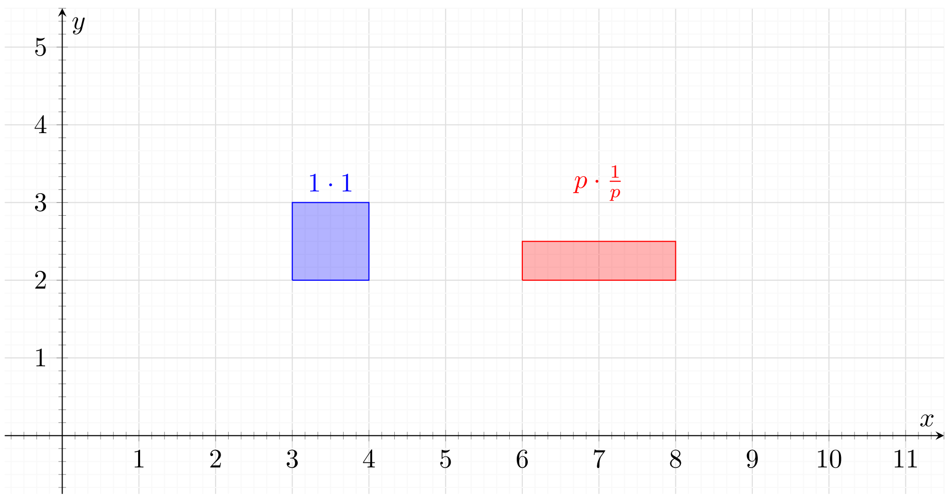
- $log(1) = 0$
- $\forall p \in (0, +\infty), \;\; log(\frac{1}{p}) = -log(p)$
- $\forall p \in (0, +\infty), \forall q \in (0, +\infty), \;\; log(pq) = log(p) + log(q)$

Conservazione delle aree

Date R una regione del piano misurabile qualsiasi e la sua immagine $\bar{R}$ mediante T, allora le due possiedono la stessa area.

Questo perché la trasformazione T modifica i quadrati di lato unitario in rettangoli di lati $p, \frac{1}{p}$, infatti l'area del quadrato $= 1 \cdot 1 = 1 = p \cdot \frac{1}{p} =$ l'area del rettangolo.

Conservazione delle aree



Dimostrazione

Consideriamo diversi casi in base a p e q.

Caso 1: Dati $p > 1, q > 1$, consideriamo T una trasformazione del piano in sé:

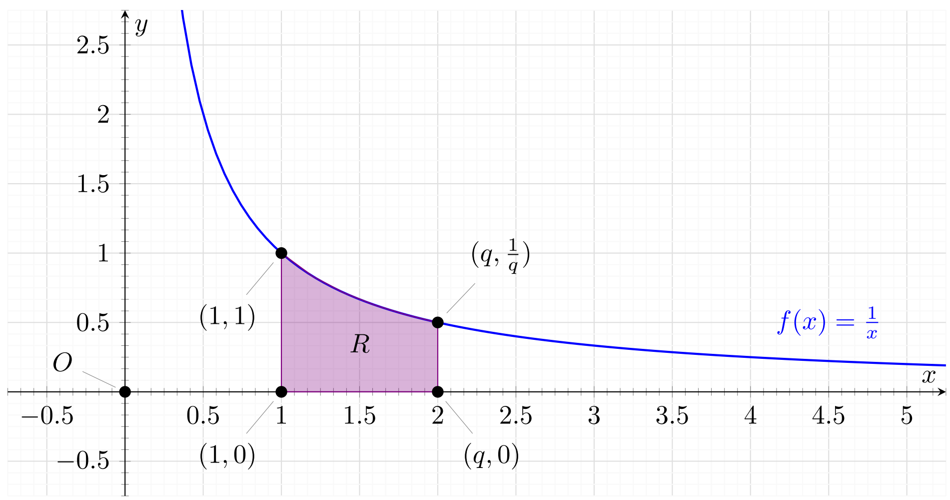
$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (px, \frac{y}{p})$$

Questa trasformazione manda l'iperbole di equazione $xy = 1$ in sé, questo perché se (x, y) appartiene all'iperbole, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$ appartiene all'iperbole perché:

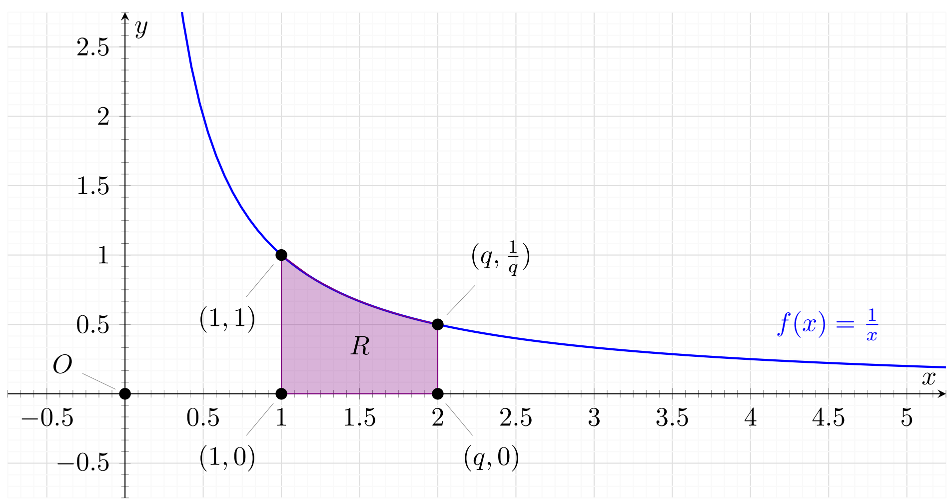
$$\bar{x}\bar{y} = px \cdot \frac{y}{p} = xy = 1$$

Scegliamo quindi come R l'area compresa tra i punti $(1, 0), (q, 0), (q, \frac{1}{q}), (1, 1)$, di conseguenza applicando la trasformazione $T(x, y) = (px, \frac{y}{p})$, otteniamo come sua immagine $\bar{R}$ l'area compresa tra i punti $(p, 0), (pq, 0), (pq, \frac{1}{pq}), (p, \frac{1}{p})$.

Funzione logaritmo



Funzione logaritmo



Per cui:

$$log(pq) = \text{Area di } \bar{R}$$