Semantica e tautologie

Tabella dei contenuti

Valutazione

Una proposizione può assumere solamente due valori: vero o falso, l'azione di determinare il valore di una proposizione viene chiamata *valutazione*. Una valutazione è del tipo:

$$\mathcal{V} : PROP \to \{0, 1\}$$

e **deve** assumere come valori:

1. $\mathcal{V}(\bot) = 0$
2. $\mathcal{V}(\phi \wedge \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 1$ and $\mathcal{V}(\psi) = 1$
3. $\mathcal{V}(\phi \vee \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 1$ or $\mathcal{V}(\psi) = 1$
4. $\mathcal{V}(\phi) = 1 \iff \mathcal{V}(\neg\phi) = 0$
5. $\mathcal{V}(\phi \to \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 0$ or $\mathcal{V}(\psi) = 1$

Valutazione atomica

Una funzione v è detta valutazione atomica se $v : AT \to \{0, 1\}$ e se $v(\bot) = 0$.

Data una valutazione atomica v, esiste ed è unica una valutazione $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$ tale che $[\![\phi]\!]_v = v(\phi)$ per $\phi \in AT$.

Nota bene

> Il valore di una proposizione è univocamente identificato dal valore dei suoi atomi.

Infatti:

$$[\![\alpha \vee \beta]\!]_v = 1 \iff [\![\alpha]\!]_v = 1 \text{ or } [\![\beta]\!]_v = 1$$

Lemma

Sia ϕ una proposizione e sia $\phi^{at} = \{p \mid p \in AT,\ p \in Sub(\phi)\}$, siano v_1 e v_2 due valutazioni atomiche tali che $\forall p \in \phi^{at} v_1(p) = v_2(p)$, allora possiamo affermare che: $[\![\phi]\!]_{v_1} = [\![\phi]\!]_{v_2}$.

Tautologia

La proposizione α viene chiamata *tautologia* se e solamente se $\forall v [\![\alpha]\!]_v = 1$, per cui scriviamo:

$$\models \alpha \iff \forall v [\![\alpha]\!]_v = 1 \tag{1}$$

Esempio Vogliamo dimostrare che $\models \alpha \to \alpha$, e cioè che $\forall v [\![\alpha \to \alpha]\!]_v = 1$, quindi:

$$\begin{aligned} \forall v [\![\alpha \to \alpha]\!]_v = 1 &\iff [\![\alpha]\!]_v = 0 \text{ or } [\![\alpha]\!] = 1 \\ &\implies T \qquad \square \end{aligned}$$

Esercizio Vogliamo dimostrare che $\models \alpha \to (\beta \to \alpha)$, quindi:

$$\begin{aligned}
\forall v \llbracket\, \alpha \to (\beta \to \alpha) \,\rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket\, \alpha \,\rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket\, \beta \to \alpha \,\rrbracket = 1 \\
&\iff \underline{\llbracket\, \alpha \,\rrbracket_v = 0} \text{ or } \llbracket\, \beta \,\rrbracket_v = 0 \text{ or } \underline{\llbracket\, \alpha \,\rrbracket_v = 1} \\
&\implies T \qquad \square
\end{aligned}$$

Contromodello

Per dimostrare che una proposizione **non** è una tautologia occorre ricercare un'istanza di ϕ e una valutazione tali per cui:

$$\exists v, \llbracket\, \phi \,\rrbracket_v = 0$$

Esempio Data la proposizione $p_0 \to (p_0 \land p_1)$, devono esistere delle istanze di p_0, p_1 e una valutazione v tale per cui $\llbracket\, p_0 \to (p_0 \land p_1) \,\rrbracket_v = 0$.

Ipotizzando $\llbracket\, p_0 \,\rrbracket_v = 1, \llbracket\, p_1 \,\rrbracket_v = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\llbracket\, p_0 \to (p_0 \land p_1) \,\rrbracket_v = 0 &\iff \llbracket\, p_0 \,\rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket\, p_0 \land p_1 \,\rrbracket_v = 0 \\
&\iff \llbracket\, p_0 \,\rrbracket_v = 1 \text{ and } (\cancel{\llbracket\, p_0 \,\rrbracket_v = 0} \text{ or } \llbracket\, p_1 \,\rrbracket_v = 0) \\
&\iff \llbracket\, p_0 \,\rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket\, p_1 \,\rrbracket_v = 0) \\
&\implies T \qquad \square
\end{aligned}$$

In altre parole, esiste una valutazione v che grazie al valore che assume sugli atomi, fa risultare l'intera proposizione zero.

Tavola di verità

Un altro modo per esprimere questo concetto è la tavola di verità:

Tabella 1: tavola di verità.

p_0	p_1	$p_0 \land p_1$	$p_0 \to p_0 \land p_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Nota bene

> Le dimensioni di una tavola di verità aumentano al crescere del rango della proposizione che si sta esaminando, quindi in presenza di una proposizione troppo complessa, si dice che il problema è *intrattabile*.

La proposizione α è detta soddisfacibile quando:

$$\exists v [\![\alpha]\!]_v = 1 \tag{2}$$

Quindi α non è una tautologia, ma è vera per almeno una valutazione.

Nota bene

> Gli unici algoritmi noti per determinare se una proposizione è soddisfacibile sono esponenziali al numero dei simboli.