

# Funzioni reali

## Tabella dei contenuti

<b>Funzioni reali a variabile reale</b>	<b>2</b>
Iniettività, suriettività e biiettività . . . . .	2
Funzioni monotone . . . . .	4
Funzioni pari e dispari . . . . .	4
Alcune funzioni importanti . . . . .	5

## Funzioni reali a variabile reale

Dati due insiemi  $A, B$ , una funzione  $f : A \rightarrow B$  è una relazione che associa ad ogni elemento del *dominio*  $A$  **uno ed un solo** elemento del *codominio*  $B$ .

Noi ci interessiamo alle funzioni reali di variabile reale, cioè a quelle del tipo  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Nota bene*

Al fine di definire una funzione è essenziale specificarne il dominio.

### Iniettività, suriettività e biiettività

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice:

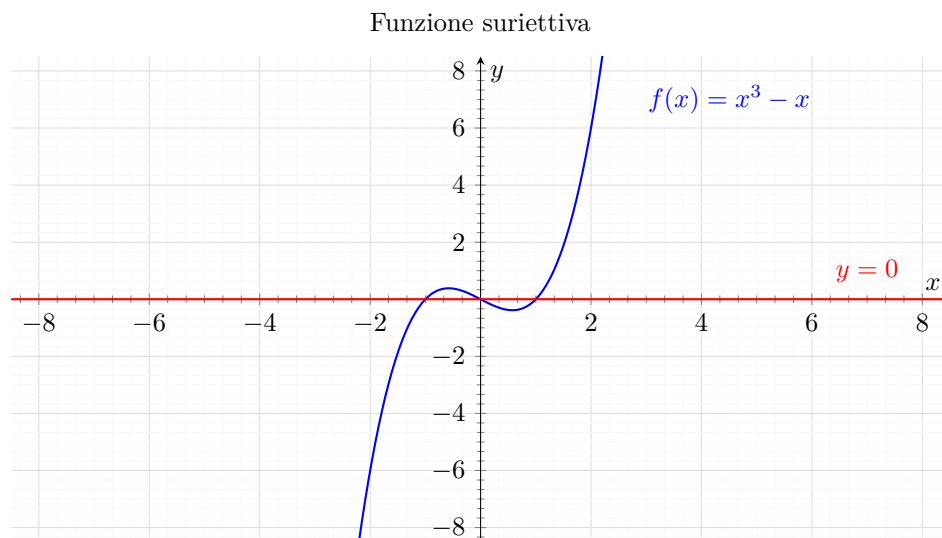
- *Iniettiva* se possiede **al massimo una** soluzione  $x \in A$
- *Suriettiva* se possiede **almeno una** soluzione  $x \in A$
- *Biettiva* o *biunivoca* se possiede **esattamente una** soluzione  $x \in A$ , cioè se è sia *iniettiva* che *suriettiva*.

All'espressione  $f(x) = y$  per ogni  $y \in B$ .

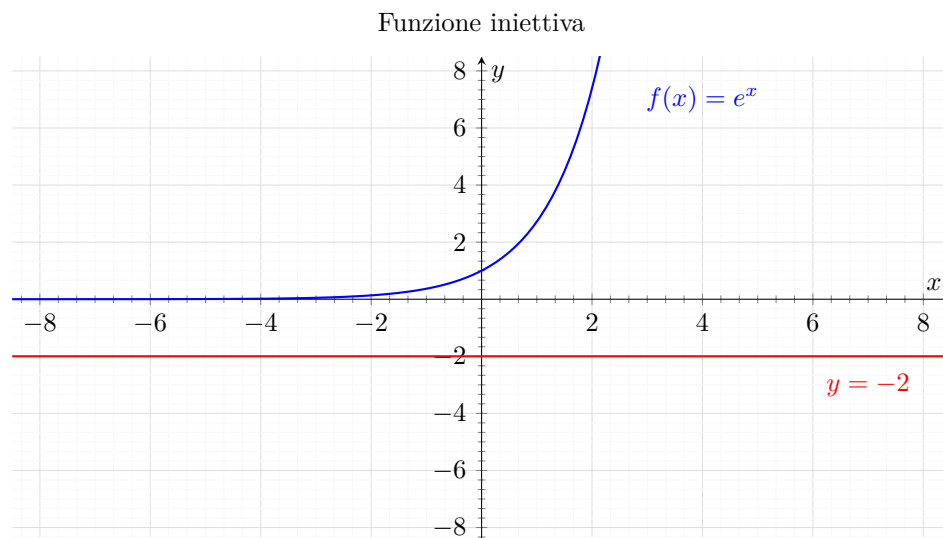
*Nota bene*

Per funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  queste proprietà si possono dedurre dal numero di volte che ogni retta orizzontale interseca il grafico di  $f$ , ad esempio  $f(x) = x$  incontra tutte le rette orizzontali una volta sola.

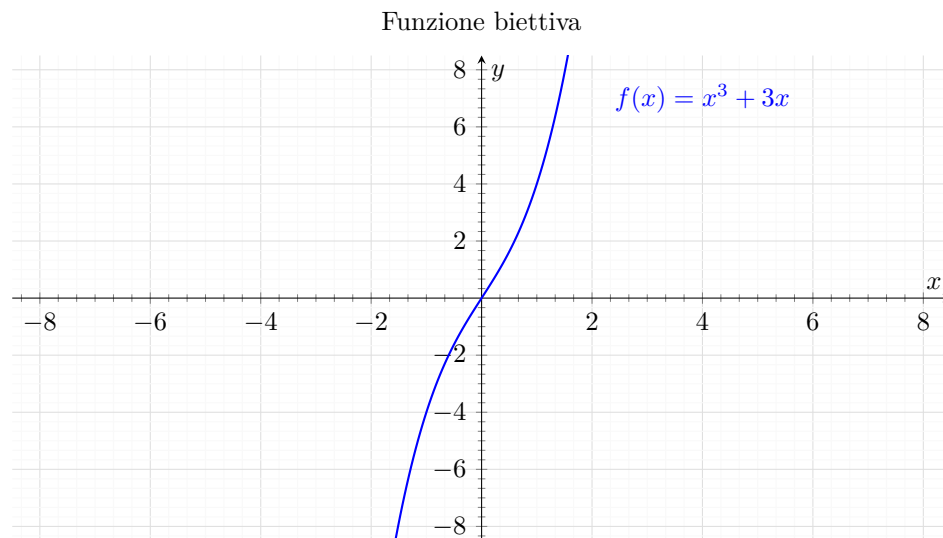
**Esempio** La funzione  $f(x) = x^3 - x$  interseca tutte le rette orizzontali almeno una volta, ma incontra tre volte la retta orizzontale  $y = 0$ .



**Esempio** La funzione  $f(x) = e^x$  interseca alcune rette orizzontali una sola volta ma non interseca alcuna retta orizzontale al di sotto di  $y = 0$ .



**Esempio** La funzione  $f(x) = x^3 + 3x$  interseca tutte le rette orizzontali esattamente una singola volta come  $g(x) = x$ .



*Nota bene*

Ovviamente esistono anche funzioni che non godono di queste proprietà, come ad esempio la funzione  $f(x) := x^2 - 1$

## Funzioni monotone

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

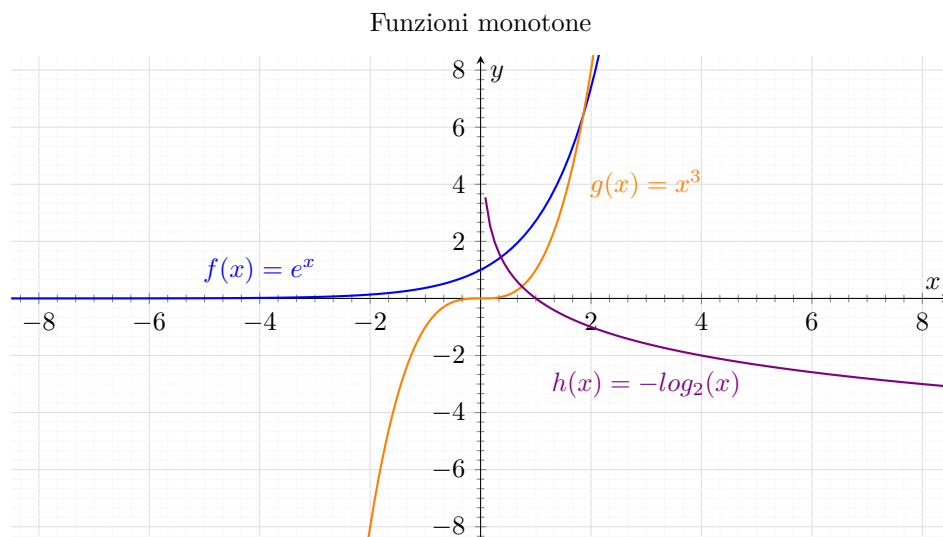
- *Non decrescente* se  $f(x_1) \leq f(x_2)$
- *Strettamente crescente* se  $f(x_1) < f(x_2)$
- *Non crescente* se  $f(x_1) \geq f(x_2)$
- *Strettamente decrescente* se  $f(x_1) > f(x_2)$

Per ogni  $x_1 \in A, x_2 \in A$  con  $x_1 < x_2$ .

*Nota bene*

Le funzioni strettamente monotone sono **sempre** iniettive.

**Esempio** Le funzioni  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^3$  ed  $h(x) = -\log_2(x)$  sono rispettivamente: strettamente crescente, non decrescente e strettamente decrescente.



*Nota bene*

Esistono anche funzioni che non godono di queste proprietà, come ad esempio la funzione  $f(x) := x^2 - x$ .

## Funzioni pari e dispari

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

- *pari* se  $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$
- *dispari* se  $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$ .

E soprattutto se il suo dominio  $A$  è simmetrico rispetto all'origine.

*Nota bene*

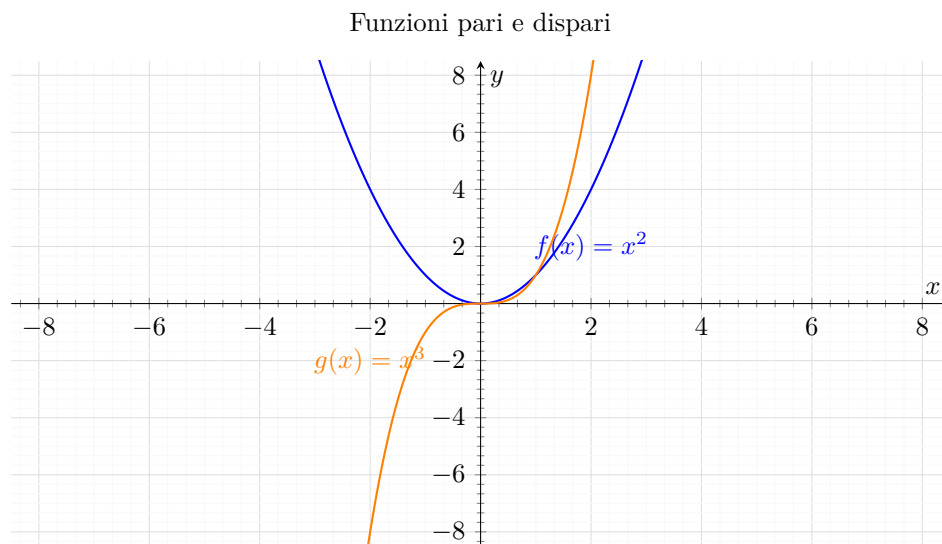
Possiamo dire che quando la funzione è pari, il grafico è simmetrico rispetto all'asse  $y$ , mentre la funzione è dispari quando il grafico è simmetrico all'origine.

Quando  $f$  è un **polinomio**, possiamo affermare che è pari quando l'**esponente di grado più alto** all'interno è pari, al contrario affermiamo che è dispari quando l'esponente di grado più alto è dispari.

*Nota bene*

La funzione coseno è pari, mentre la funzione seno è dispari.

**Esempio** Le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite come  $f(x) := x^2$ ,  $g(x) := (x^3 \ \forall x \in \mathbb{R})$  sono rispettivamente: pari e dispari.



### Alcune funzioni importanti

- Funzioni polinomiali: sono quelle funzioni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  della forma:

$$f(x) := \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  sono numeri reali dati.

- Funzioni razionali: sono quelle funzioni della forma:

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Con  $P, Q$  polinomi e il dominio di  $f$  è  $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ .

- Funzioni trigonometriche ( $\sin, \cos, \tan$ )
- Funzioni esponenziale e logaritmo.