

Semantica e tautologie

- Valutazione
 - Valutazione atomica - Nota bene
 - * Lemma
 - Tautologia
 - * Esempio
 - * Esercizio
 - * Contromodello
 - Esempio
 - * Tavola di verità - Nota bene - Nota bene

Valutazione

Una proposizione può assumere solamente due valori: vero o falso, l'azione di determinare il valore di una proposizione viene chiamata *valutazione*. Una valutazione è del tipo:

$$\mathcal{V} : PROP \rightarrow \{0, 1\}$$

e **deve** assumere come valori:

1. $\mathcal{V}(\perp) = 0$
2. $\mathcal{V}(\phi \wedge \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 1 \text{ and } \mathcal{V}(\psi) = 1$
3. $\mathcal{V}(\phi \vee \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 1 \text{ or } \mathcal{V}(\psi) = 1$
4. $\mathcal{V}(\phi) = 1 \iff \mathcal{V}(\neg\phi) = 0$
5. $\mathcal{V}(\phi \rightarrow \psi) = 1 \iff \mathcal{V}(\phi) = 0 \text{ or } \mathcal{V}(\psi) = 1$

Valutazione atomica

Una funzione v è detta valutazione atomica se $v : AT \rightarrow \{0, 1\}$ e se $v(\perp) = 0$.

Data una valutazione atomica v , esiste ed è unica una valutazione $\llbracket \cdot \rrbracket_v : PROP \rightarrow \{0, 1\}$ tale che $\llbracket \phi \rrbracket_v = v(\phi)$ per $\phi \in AT$.

Nota bene

Il valore di una proposizione è univocamente identificato dal valore dei suoi atomi.

Infatti:

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_v = 1 \iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1$$

Lemma

Sia ϕ una proposizione e sia $\phi^{at} = \{p \mid p \in AT, p \in Sub(\phi)\}$, siano v_1 e v_2 due valutazioni atomiche tali che $\forall p \in \phi^{at} v_1(p) = v_2(p)$, allora possiamo affermare che: $\llbracket \phi \rrbracket_{v_1} = \llbracket \phi \rrbracket_{v_2}$.

Tautologia

La proposizione α viene chiamata *tautologia* se e solamente se $\forall v \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1$, per cui scriviamo:

$$\models \alpha \iff \forall v \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \quad (1)$$

Esempio Vogliamo dimostrare che $\models \alpha \rightarrow \alpha$, e cioè che $\forall v \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket_v = 1$, quindi:

$$\begin{aligned} \forall v \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies T \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio Vogliamo dimostrare che $\models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, quindi:

$$\begin{aligned} \forall v \llbracket \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \beta \rightarrow \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\iff \llbracket \alpha \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\ &\implies T \quad \square \end{aligned}$$

Contromodello

Per dimostrare che una proposizione **non** è una tautologia occorre ricercare un'istanza di ϕ e una valutazione tali per cui:

$$\exists v, \llbracket \phi \rrbracket_v = 0$$

Esempio Data la proposizione $p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1)$, devono esistere delle istanze di p_0, p_1 e una valutazione v tale per cui $\llbracket p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1) \rrbracket_v = 0$.

Ipotizzando $\llbracket p_0 \rrbracket_v = 1, \llbracket p_1 \rrbracket_v = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \llbracket p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1) \rrbracket_v = 0 &\iff \llbracket p_0 \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket p_0 \wedge p_1 \rrbracket_v = 0 \\ &\iff \llbracket p_0 \rrbracket_v = 1 \text{ and } (\llbracket p_0 \rrbracket_v = 0 \text{ or } \llbracket p_1 \rrbracket_v = 0) \\ &\iff \llbracket p_0 \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket p_1 \rrbracket_v = 0 \\ &\implies T \quad \square \end{aligned}$$

In altre parole, esiste una valutazione v che grazie al valore che assume sugli atomi, fa risultare l'intera proposizione zero.

Tavola di verità

Un altro modo per esprimere questo concetto è la tavola di verità:

Table 1: tavola di verità.

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$p_0 \rightarrow (p_0 \wedge p_1)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Nota bene

Le dimensioni di una tavola di verità aumentano al crescere del rango della proposizione che si sta esaminando, quindi in presenza di una proposizione troppo complessa, si dice che il problema è *intrattabile*.

La proposizione α è detta soddisfacibile quando:

$$\exists v \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \quad (2)$$

Quindi α non è una tautologia, ma è vera per almeno una valutazione.

Nota bene

Gli unici algoritmi noti per determinare se una proposizione è soddisfacibile sono esponenziali al numero dei simboli.