Conseguenze semantiche

Ragionamento ipotetico deduttivo

Il ragionamento tipico della matematica è il ragionamento ipotetico-deduttivo, rappresentato in logica dalle conseguenze semantiche.

Conseguenze semantiche

Notazione

- Γ, Σ, Δ rappresentano insiemi arbitrari di proposizioni
- $\alpha, \beta, \phi, \psi$ rappresentano generiche proposizioni

Quindi per indicare che da un'ipotesi segue una proposizione si adotta la scrittura $\Gamma \vDash \psi$, che si legge come "Da Γ segue ψ".

Possiamo affermare che la valutazione di un'insieme di proposizioni è uguale ad uno se e solamente se la valutazione di tutti i suoi elementi è tale, infatti, dato un insieme Γ ed una valutazione v:

$$[\![\, \Gamma \,]\!]_v = 1 \iff \forall \phi \in \Gamma,\ [\![\, \phi \,]\!]_v = 1$$

L'espressione $\Gamma \vDash \psi$ si dice conseguenza semantica se e solamente se ψ è verificata da ogni valutazione v che verificha anche Γ, per cui scriviamo:

$$\forall v \llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1$$

Esempio Vogliamo provare che se α ed $\alpha \to \beta$ sono vere, allora lo è anche β, cioè che $\alpha \to \beta, \alpha \vDash \beta$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\llbracket \alpha \to \beta, \alpha \rrbracket_v = 1 &\iff \llbracket \alpha \to \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\
&\iff (\cancel{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0} \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket_v = 1) \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\
&\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1 \\
&\implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \qquad \square
\end{aligned}$$

Esercizio Vogliamo dimostrare che $(\Gamma, \alpha \vDash \beta) \implies \Gamma \vDash \alpha \to \beta$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\forall v \llbracket \Gamma, \alpha \rrbracket_v = 1 \implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 &\iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v = 1 \text{ and } \llbracket \alpha \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket \beta \rrbracket_v = 1 \\
&\iff (\llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \underline{\llbracket \alpha \rrbracket_v = 0}) \text{ or } \underline{\llbracket \beta \rrbracket_v = 1} \\
&\iff \llbracket \Gamma \rrbracket_v \neq 1 \text{ or } \llbracket \alpha \to \beta \rrbracket_v = 1 \\
&\implies \Gamma \vDash \alpha \to \beta \qquad \square
\end{aligned}$$

Tautologie notevoli

A livello teorico esistono infinite tautologie, ma tra le più importanti citiamo:

- Leggi di De Morgan

$$\neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)$$
$$\neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

- Involutività della negazione

$$\neg(\neg\alpha) \longleftrightarrow \alpha$$

- Commutatività

$$(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\psi \wedge \phi)$$
$$(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\psi \vee \phi)$$

- Distributività

$$\phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$$
$$\phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)$$

- Associatività

$$\phi \wedge (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma$$
$$\phi \vee (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \sigma$$

Stringhe ed occorrenze

Dato un insieme di simboli generici Ω, una stringa su questo insieme è una sequenza di finita lunghezza n, della forma:

$$s = c_1\ c_2\ \dots\ c_n$$

dove per ogni indice i appartenente all'intervallo $(1, n)$ il simbolo c_i, si trova in Ω.

Di conseguenza, dato un simbolo $a \in \Omega$ si dice occorrenza della stringa s, ogni coppia (a, i) tale per cui il simbolo di partenza $a = c_i$.

Sostituzione

Siano quindi $\phi, \psi \in PROP$ e $p \in \phi$, si scrive $\phi[\,\psi/p\,]$ per indicare che il simbolo p viene rimpiazzato dalla proposizione ψ.

Definizione iterativa

Per applicare la sostituzione in modo iterativo, si scorre una proposizione per individuare tutte le occorrenze e si rimpiazza il valore.

Esempio Data $\phi = ((p_1 \to (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3)$, vogliamo sostituire p_1 con ϕ.

Svolgimento:

> Le occorrenze di p_1 sono $(p_1, 3), (p_1, 8)$, sostituendo p_1 con ψ otteniamo: $((\psi \to (p_5 \vee \psi)) \wedge p_3)$.

Definizione ricorsiva

Sia $*$ un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \to\}$, allora:

1. $\phi\,[\,\psi/p\,] \ = \begin{cases} \perp \text{ iff} & \phi = \perp \\ \phi \text{ iff} & \phi \in AT,\ \phi \neq p \\ \psi \text{ iff} & \phi \in AT,\ \phi = p \end{cases}$
2. $(\neg\phi)[\,\psi/p\,] \ = \neg(\ \phi[\,\psi/p\,]\ )$
3. $(\phi_1 * \phi_2)[\,\psi/p\,] = (\ \phi_1[\,\psi/p\,] * \phi_2[\,\psi * p\,]\ )$

Teorema

Sia $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \to \psi_2) \land (\psi_2 \to \psi_1)$, allora dato $\models \psi_1 \longleftrightarrow \psi_2$, vale:

$$\models \phi[\,\psi_1/p\,] \longleftrightarrow \phi[\,\psi_2/p\,]$$

Relazioni di equivalenza

Sia A un insieme e sia $R \subseteq A \times A$, quest'ultima viene chiamata relazione di equivalenza se e solamente:

- È riflessiva: $\forall a \in A, aRa$
- È transitiva: $\forall a, b, c \in a, (aRb, bRc) \implies aRc$
- E simmetrica: $\forall a, b \in A, (aRb, bRa)$

Nota bene

> Un esempio di relazione di equivalenza è la similitudine tra triangoli.

Teorema

Si dice che ϕ è equivalente a ψ se e solamente se $\phi \longleftrightarrow \psi$ è una tautologia, infatti scriviamo che:

$$\phi \approx \psi \iff \models \phi \longleftrightarrow \psi$$

Con $\approx \subseteq PROP \times PROP$.