Dimostrazioni e ricorsione

Proprietà

Sia A un insieme e P un suo sottoinsieme: l'elemento $a \in A$ soddisfa la proprietà P se e solamente se $a \in P$. In altre parole una proprietà è l'insieme degli elementi che rispettano una determinata condizione.

Per esempio, una proprietà su $\mathbb{N}$ potrebbe essere: $P = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ dove $P \subseteq \mathbb{N}$, infatti:

- $P(1)$ vale perché $1 \in P$
- $P(0)$ non vale perché $0 \notin P$

Per dimostrare una proprietà su tutte le proposizioni, necessitiamo di una definizione dell'insieme che le contiene.

Funzioni ricorsive e non

Siano A, B due insiemi e $f \subseteq A \times B$, f viene chiamata funzione se e solamente se per ogni elemento del dominio A, esiste ed è unico un elemento del codominio B, tale che la coppia (a, b) appartenga ad f, cioè:

$$\forall a \in A,\ \exists!\, b \in B,\ (a, b) \in f \tag{1}$$

Per cui si scrive:

- $f(a) = b$ quando $(a, b) \in f$
- $f : A \to B$ quando $f \subseteq A \times B$

Nota bene

> Una funzione è definita in modo ricorsivo se è definita dal valore sui propri elementi.

Per esempio una funzione ricorsiva può essere quella che ad ogni proposizione, assegna il numero delle sue parentesi, definita come

$$\pi : PROP \to \mathbb{N}$$

I valori che assume sono:

- $\pi(\alpha) = 0$ per $\alpha \in AT$
- $\pi(\neg\alpha) = 2 + \pi(\alpha)$
- $\left.\begin{array}{l}\pi(\alpha \wedge \beta)\\ \pi(\alpha \vee \beta)\\ \pi(\alpha \to \beta)\end{array}\right\} = 2 + \pi(\alpha) + \pi(\beta)$

Insiemi di proposizioni

Viene chiamato $PROP$ il più piccolo insieme X di stringhe, tale che:

1. $\perp \in PROP$
2. $p \in PROP$ per p simbolo proposizionale
3. Se $\alpha, \beta \in PROP$ allora: $\begin{cases}(\alpha \wedge \beta)\\ (\alpha \vee \beta)\\ (\neg\alpha)\\ (\alpha \to \beta)\end{cases} \in PROP$

Viene invece chiamato AT l'insieme delle proposizioni atomiche, cioè quelle che non possono essere semplificate ulteriormente. Per questo possiamo affermare che $AT \subset PROP$.

Principio di induzione su $PROP$

Per poter determinare se una proprietà vale per tutte le proposizioni, si utilizza il seguente principio di induzione sull'insieme $PROP$. Siano $P \subseteq PROP$ e α, β due proposizioni qualsiasi, possiamo affermare che $\forall\phi \in PROP$ vale $P(\phi)$ se e solamente se:

1. Vale $P(\alpha)$ per $\alpha \in AT$
2. Ipotizzando valga $P(\alpha)$, allora vale anche $P(\neg\alpha)$

3. Ipotizzando valgano $P(\alpha), P(\beta)$, allora valgono anche $\begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \\ (\alpha \vee \beta) \\ (\alpha \rightarrow \beta) \end{cases}$

Nota bene

> Se la proprietà $P \subseteq PROP$ vale ***per ogni*** elemento di $PROP$, allora significa che P è $PROP$ stesso.

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che ogni proposizione, possiede un numero pari di parentesi, in altre parole $\forall \alpha \in PROP$, $P(\alpha) \iff \pi(\alpha)$ è pari.

Utilizzando il principio di induzione, applicato all'insieme $PROP$:

1. $P(\alpha)$ vale per $\alpha \in AT$?
$$\alpha \in AT \implies \pi(\alpha) = 0$$
2. Ipotizzando che valga $P(\alpha)$, allora vale anche $P(\neg\alpha)$?
$$\pi(\neg\alpha) = 2 + \pi(\alpha) = 2$$
3. Ipotizzando che valgano $P(\alpha), P(\beta)$, allora valgono anche $P(\alpha\wedge\beta)$, $P(\alpha\vee\beta)$ e $P(\alpha \rightarrow \beta)$?
$$\left.\begin{matrix} P(\alpha \wedge \beta) \\ P(\alpha \vee \beta) \\ P(\alpha \rightarrow \beta) \end{matrix}\right\} = 2 + \pi(\alpha) + \pi(\beta) = 2$$

Conclusione: $\forall \phi \in PROP$, $\pi(\phi)$ è pari quindi $\forall \phi \in PROP$, $P(\phi)$ è verificata.

Funzioni notevoli

Insieme delle sottoproposizioni

La funzione ricorsiva Sub associa ad ogni proposizione, l'insieme delle proposizioni che la compongono, cioè $Sub : PROP \rightarrow 2^{PROP}$. I valori che assume Sub sono:

- $Sub(\phi) = \{\phi\}$ per $\phi \in AT$
- $Sub(\neg\phi) = \{(\neg\phi)\} \cup Sub(\phi)$
- $\left.\begin{matrix} Sub(\alpha \wedge \beta) \\ Sub(\alpha \vee \beta) \\ Sub(\alpha \rightarrow \beta) \end{matrix}\right\} = \{\phi * \psi\} \cup Sub(\phi) \cup Sub(\psi)$

dove $*$ è un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Nota bene

> L'insieme 2^A si chiama *Insieme potenza* o *delle parti* di A.

Rango di una proposizione

La funzione ricorsiva r associa ad ogni proposizione il proprio rango o complessità, cioè $r : PROP \to \mathbb{N}$. I valori che assume sono:

- $r(\phi) = 0$ per $\phi \in AT$
- $r(\neg\phi) = 1 + r(\phi)$
- $\left.\begin{array}{l} r(\alpha \wedge \beta) \\ r(\alpha \vee \beta) \\ r(\alpha \to \beta) \end{array}\right\} = 1 + \max(r(\phi), r(\psi))$

Teorema di ricorsione primitiva

Siano $A \subseteq PROP$ un insieme e $*$ un connettivo tra $\{\wedge, \vee, \to\}$. Supponendo di avere delle funzioni come le seguenti:

$$\begin{aligned} &H_{at} : AT \to A \\ &H_{\neg} : A \to A \\ &H_{*} : A \times A \to A \end{aligned} \tag{2}$$

Esiste ed è unica una funzione $F : PROP \to A$ tale che:

$$\begin{aligned} &F(\phi) = H_{at}(\phi) \text{ per } \phi \in AT \\ &F(\neg\phi) = H_{\neg}(\ F(\phi)\ ) \\ &F(\phi * \psi) = H_{*}(\ F(\phi), F(\psi)\ ) \end{aligned} \tag{3}$$