Compte-Rendu Projet récursivité

Kyllian Perret - Renan Burdino

Septembre 2022

1 L'ensemble de Mandelbrot

Qu'est ce que l'ensemble de Mandelbrot ? L'ensemble de Mandelbrot est une fractale découverte par Gastion Julia et nommée d'après Benoît Mandelbrot, mathématicien qui réalisa les premiers rendus graphiques de l'Ensemble.

Celle-ci est définie sur le plan complexe grâce à une suite définie par récurence :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases} \tag{1}$$

avec c un point du plan complexe. Pour chaque point du plan on détermine si la suite est bornée ou non-bornée (quand n tend vers l'infini, la suite diverge t-elle ou reste inclue dans une borne ?). Ceci se vérifie facilement : si le module d'un terme z_n est supérieur à 2, la suite est non-bornée. On attribue à chaque point du plan une couleur : noir si la suite est bornée, sinon la couleur dépend de l'indice auquel le module du terme z_n a dépassé 2.

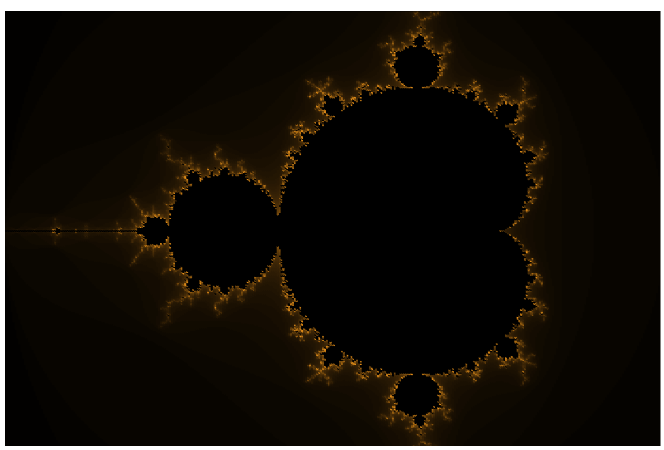


Figure 1: Ensemble rendu par le programme

2 Nombres complexes

La suite z_n utilisée pour réaliser l'Ensemble de Mandelbrot est composée de nombres complexes. Un nombre complexe est de la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et i (unité imaginaire dont le carré vaut -1), a correspondant à la partie réelle et b la partie imaginaire. On peut voir ainsi les nombres complexes (d'un point de vue purement géométrique) :

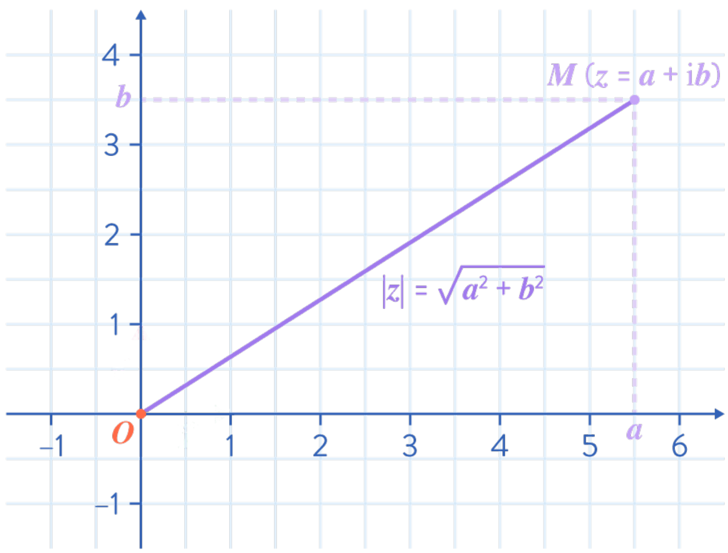


Figure 2: Plan complexe et module

Notons ici la présence du module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, correspondant à la distance entre le point et l'origine du repère, dont nous avons besoin pour le cas d'arrêt numéro 2.

Nous recourons aussi à deux autres opérations sur les complexes :

- l'addition : prenons deux complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, alors

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \tag{2}$$

- la multiplication :

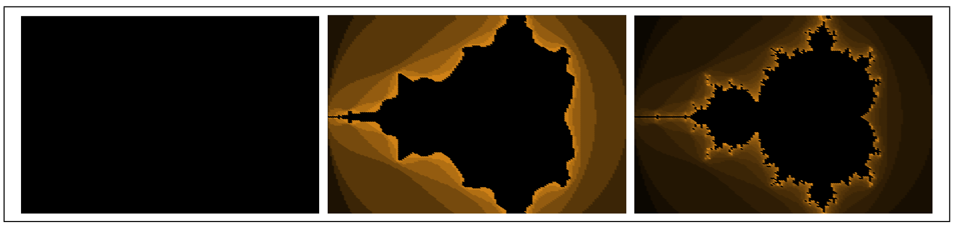
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) \\ &= a_1 \times a_2 + a_1 \times ib_2 + a_2 \times ib_1 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \tag{3}$$

3 Compléments sur la fonction récursive

La récursivité est présente au niveau de la fonction **indiceDivergence**. Cette fonction calcule les termes de la suite de manière récursive et renvoie si elle est bornée ou non (bornée : -1, sinon : indice où la suite à été déterminée comme non-bornée).

Pour effectuer $z_{n+1} = z_n^2 + c$, il faut utiliser les opérations détaillées au dessus.

Voyons le résultat de la fonction **traceMandelbrot** pour différentes valeurs de n (n=0, n=1 et n=20) :



Nous voyons que plus n est grand, plus la forme se précise. Cela est dû à une augmentation de la précision concernant la détermination de la limite de la suite. Si n est trop petit, un point donnant une suite non-bornée pourrait être considérée comme bornée par le programme car trop peu de termes ont été calculés. La précision du dessin dépend donc de la fonction récursive.

Passons brièvement en revue ce que fera la fonction (pour un exemple donné): avec $c = 0.75 + 0.5i$ et $n = 5$

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0.75 + 0.5i \\ z_2 &= 1.0625 + 1.25i \\ z_3 &= 0.31640625 + 3.15625i \end{aligned} \tag{4}$$

$|z_3| > 2$, la fonction renvoie donc 3 à ce moment là, pas besoin de calculer le cinquième terme z_4, la suite est forcément non-bornée.

4 Bilan

4.1 Conclusion

Lors de ce projet, nous avons apprécié effectué les recherches. Le contenu ne manque pas sur le sujet et est très accessible (au niveau de la difficulté). La partie la plus délicate fut le placement du dessin par rapport à la fenêtre. En ce qui concerne la répartition du travail : la spécification des fonctions n'ayant pas été clairement précisée chacun à réalisé une première version "test" des fonctions (avec ses propres choix au niveau algorithmique) et il fallut dans un second temps regrouper les idées et refaire certaines fonctions (ce qui fut une perte de temps qui aurait pu être évitée).

4.2 Sources

Quelques ressources utilisées durant les recherches.

- l'article Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot
- la vidéo de El Jj sur le sujet : https://youtu.be/Y4ICbYtBGzA
- le live de Mickaël Launay : https://youtu.be/dQeIUrLKM9s