

Proposition d'un modèle  
de mesure du risque de crédit pour Solvabilité II  
tenant compte des dépendances  
dans les transitions des notations des titres

Mémoire de Alexandre Kozlov

Centre des Études Actuarielles

2012

## Résumé

Les portefeuilles des compagnies d'assurance-vie contiennent en proportion significative des obligations et autres produits financiers exposés au risque de crédit. La modélisation la plus juste de ce risque crédit est indispensable à la maîtrise du risque généré par le portefeuille d'actif de l'assureur. D'autant plus que la réforme prudentielle Solvabilité II à venir demandera une juste mesure de ce risque dans le cadre de la mise en application de l'article 45 de la directive (ORSA), sans parler des sociétés qui opteront pour la réalisation du modèle interne.

Néanmoins, cette modélisation s'avère complexe et les méthodes utilisées ne sont pas toujours adaptées à la réalité du risque. Dans ce document, nous allons présenter les principaux modèles existants pour le risque de crédit. Après avoir mis en avant les avantages et les limites de chacun des modèles présentés, nous proposerons une amélioration d'un modèle existant (modèle d'intensité JLT+) en prenant en compte les corrélations dans les transitions de notations des titres dans le portefeuille, et en améliorant la modélisation du spread fondamental.

Nous commençons dans la partie 1 par poser les définitions du risque de crédit, objet du présent document. Dans cette même partie, le second paragraphe présentera la mesure du besoin en capital pour le risque de crédit selon Solvabilité II.

Attention : ce modèle proposé cible le calcul du SCR crédit sans considération de la capacité d'absorption du passif. La prise en compte cette capacité d'absorption nécessite la réalisation des simulations secondaires.

En même temps, il s'agit d'une description des principes généraux de modélisation. Pour simplifier l'exposé nous allons utiliser, parfois implicitement, plusieurs hypothèses – par exemple, tous les titres du portefeuille sont considérés cotés et notés – qui n'auront pas d'impact sur le développement du modèle, mais dont la prise en compte sera obligatoire pendant l'implémentation du modèle pour un portefeuille réel.

Dans la partie 2 nous ferons une revue des grandes familles de modèles existants, en mettant en avant leurs avantages et limites, et notamment leur praticabilité.

La famille des modèles qui sera décrite avec plus d'attention est celle des modèles réduits, ou modèles d'intensité. Ces modèles sont assez fiables et ne nécessitent pas un paramétrage très lourd. Ensuite, la famille des modèles structurels sera abordée.

Notons également l'existence de modèle dit « actuariel » dont la mise en

place est assez complexe malgré la simplicité apparente – effectivement, la bonne modélisation selon l’approche actuarielle nécessite une modélisation approfondie des taux (taux sans risque, taux risqué ou spread correspondant au risque).

La famille des modèles réglementaires est également présentée dans ce document. Ces modèles doivent généralement à la fois concilier un aspect pratique dans la réalisation des calculs, et s’avérer suffisamment prudents pour ne pas sous-estimer le risque. Ils peuvent notamment être utilisés dans les cas où le risque de crédit est négligeable, et la mise en place d’une vraie modélisation ne serait pas proportionnelle au risque.

Dans la partie 3 nous allons étudier la difficulté de prendre en compte dans le modèle d’intensité la corrélation entre les changements de notations des différents titres. En effet, il s’agit d’un point complexe, qui impacte fortement les résultats obtenus par le modèle. Plusieurs études ont démontré l’existence de cette corrélation, mais le choix du modèle permettant son application aussi bien que les problématiques de calibrage restent un sujet ouvert à ce jour.

Au §3.1.1 nous commençons par l’étude de l’information à notre disposition afin d’estimer la corrélation. Nous avons choisi d’opter pour l’exploitation de la matrice des écarts-types fournie par une agence de notation (nous allons travailler avec les données de Standard & Poor’s) pour modéliser les dépendances des transitions des notations de titres. Ce choix est motivé par la constance de méthodologie mise en œuvre par Standard & Poor’s et portant sur les périodes suffisamment longs, mais également par l’existence d’un outil statistique simple permettant de déduire la corrélation intra-classe de ces écarts-types. En plus, les études de Standard & Poor’s couvrent plusieurs univers d’investissement, notamment la zone euro, ce qui facilite le calibrage et l’utilisation du modèle proposé.

Nous allons étudier dans §§3.1.2–3.1.4 les différentes structures mathématiques qui permettent de simuler des écarts-types de probabilités cohérents avec ceux observés dans la réalité. La structure que nous allons retenir consiste à modéliser le processus de migration de chaque titre comme une variable aléatoire catégorielle, ayant pour valeurs la notation à 1 an, et dont les probabilités d’occurrence sont issues de la matrice de migration. En ajustant les corrélations entre les processus de migration de chaque titre, nous pourrions restituer des écarts-types cohérents avec ceux de Standard & Poor’s.

La corrélation entre les processus de migration des titres ayant la même notation initiale est qualifiée de corrélation « intra-classe ». A celle-ci s’ajoute la corrélation « inter-classes » – entre les titres de classes de notation dif-

férentes. La matrice de migration des notations ne nous donne aucun indice nous permettant d'estimer cette corrélation. Dans le §3.1.5 nous allons présenter le modèle de Barrie+Hibbert d'estimation de la corrélation inter-classe. En même temps sera présenté la méthode d'introduction de la corrélation inter-classe dans notre modèle, qui consiste à garder les titres des différentes classes corrélés entre eux indirectement, par une corrélation commune avec une variable tiers – un indicateur de marché.

Les questions liées au calibrage seront traitées dans le §3.2. Le problème posé par le calibrage des corrélations dans le modèle d'intensité réside dans le fait que la solution exacte n'existe que dans le cas où la notation d'un titre admet une seule possibilité de migration : par exemple, les titres ayant deux états possibles – « défaut » et « pas défaut ». Lorsque le modèle prévoit plus de deux états possibles, la solution exacte n'existe plus et il nous faut chercher une approximation. Nous allons utiliser la méthode de minimisation de distance entre la variable cible (les écarts-types observés par Standard & Poor's) et la variable issue de notre modèle. Notons que la variable cible, comme la variable issue de notre modèle, appartiennent à un espace multidimensionnel comptant autant de dimensions que de classes de notations modélisées. Dans notre cas, il s'agira de 8 classes notations, il nous faut donc définir une mesure de la distance dans un espace à 8 dimensions.

Cette distance peut être mesurée de plusieurs manières, nous considérons trois définitions :

- la distance mesurée dans un espace cartésien où l'échelle de chaque dimension est proportionnelle à la probabilité de migration correspondante (on accorde plus d'importance à la bonne approximation des écarts-types correspondant aux migrations les plus probables) ;
- la même définition déformée pour donner plus de poids aux dégradations de notation ;
- la distance mesurée en tenant compte du signe de l'écart entre la variable cible et la variable du modèle dans chaque dimension – les écarts négatifs (les sous-estimations des écarts-types des probabilités de migration) ont plus d'impact sur la distance que les écarts positifs (les surestimations).

La minimisation de la distance mesurée selon chacune de ces trois méthodes conduit aux trois calibrages différents qui seront étudiés avant de faire un choix définitif (la première mesure décrite sera retenue).

Le §3.3 traite de la validation du modèle. Premièrement, nous allons confronter les sorties du modèle aux résultats analytiques – évidemment cela n'est possible que pour les cas extrêmement simples, quand la corrélation

est nulle ou totale. Le résultat du cas général est validé en comparant les probabilités de migration et leurs écarts-types simulés avec ceux issus des observations.

La composante « risque de dégradation de notation / défaut » n'est qu'une partie du risque de crédit, il est judicieux et tout aussi important de s'intéresser à l'autre composante – celle du spread fondamental (ou l'aversion au risque de crédit). La partie 4 est consacré à cette partie de modélisation du risque de crédit.

Dans §4.2 nous testons un modèle basé sur les lois de Pareto généralisées ou lois « GPD ».

La modélisation du  $\pi$  par les lois GPD correspond bien à la dynamique observée pendant les 8 dernières années, mais suppose l'auto-indépendance<sup>1</sup> de la variable modélisée. Dans le cadre de l'application de ce modèle dans l'assurance vie un tel raisonnement est tout à fait valable, voire encouragé. Il consiste en effet à obtenir le risque intrinsèque qui porte sur un horizon plus long. Les calculs pluriannuels de VaR à un an obtenus à partir de telle approche vont se compenser avant la liquidation des engagements contractés, en conséquence le risque ne sera pas sous-estimé. Cependant, dans le cadre Solvabilité II le législateur a prévu la valorisation de l'actif et du passif selon le principe de juste valeur économique. Celui-ci envisage aujourd'hui de lisser cette valorisation par l'introduction d'élément amortisseur directement dans la valorisation. En conséquence il n'est pas nécessaire d'introduire un ajustement quelconque de SCR crédit pour lier au cycle de marché. Cette question sera abordé avec plus de détails dans §4.4.

La partie 5 conclut notre recherche de méthode de modélisation du risque de crédit. Nous y énumérons les avantages et inconvénients de la méthode proposée, et dressons des pistes d'améliorations possibles de la méthode.

Mots-clés : risque de crédit, corrélation de migration des notations, spread fondamental, GPD.

---

1. Sous l'auto-dépendance ou auto-indépendance on entend la dépendance ou l'indépendance de la variable par rapport à sa réalisation précédente (l'auto-dépendance de l'ordre 1), ou sa réalisation distante de quelques points d'observation (l'auto-dépendance de l'ordre supérieur).

## Abstract

A typical French life-insurer's portfolio is composed mostly of bonds. By definition, bonds are exposed to credit risk, that's why credit modeling is essential to risk estimation for a life-insurer. However, credit modeling remains intricate. And, as we'll see in this document, existing methods not always produce appropriate modeling. We will start with a short overview of existing credit models and their shortcomings. Then we'll propose an enhancement for one of these models introducing a correlation between different bonds in the portfolio and improved fundamental spread's modeling.

In Chapter 1 we provide definition of credit risk which we will use throughout this paper. The second half of this chapter is devoted to the Solvency Capital Requirement introduced by the Solvency II directive, and especially to the credit component of this capital requirement.

Chapter 2 presents review of existing credit models. We assess their advantages and drawbacks, and specifically focus on their feasibility.

We review four families of credit models : intensity models, structural models, actuarial models and regulatory models.

Structural models try to find out and simulate the reason of bond's default or rating change. While intensity models use an abstract mathematical structures to describe rating migration process, without any link to migration reason. Both these families are rather reliable, even if intensity models do not have so many configuration parameters as structural models do.

Actuarial models are very difficult to use despite its apparent simplicity. These models are based on discounting of future payments, so they depend on rate models (base risk-free rate, risky discounting rate, etc.) Using a simple rate model one can easily create a credit model without control for a real credit risk.

The last credit model family concerns models proposed by various regulatory or control organizations, such as Basel Committee on Banking Supervision or European Insurance and Occupational Pension Authority. These models are easy to implement, but they do not estimate credit risk correctly.

In chapter 3 we discuss intensity models. One of the problems we encounter when implementing this kind of models is accounting for correlation between different bonds. Indeed, different bond rating migration processes are correlated in real life. One can see that this correlation changes risk exposure dramatically. But there is still no reliable method to estimate this correlation.

At §3.1.1 we explore what kind of information could allow us to estimate correlation between rating migration processes. The most easily available information for this task is contained in rating migration matrices provided by rating agencies. For instance, Standard & Poor's produce a rating migration probability matrix by calculating an average value of different one-year probabilities. A matrix of these probabilities' volatilities is also supplied by Standard and Poor's. Generally this information is used to evaluate precision of estimated probability. But we demonstrate that this volatility also contains information about correlation of bonds' rating migration.

In §§3.1.2–3.1.4 we study various mathematical structures allowing us to approximate the volatilities consistent with Standard & Poor's observations. The structure we propose is composed of correlated categorical variables for each bond. These variables represent bonds ratings in one year. We show that it is possible to adjust correlations between these variables to obtain probability volatility similar to that of Standard and Poor's matrices.

Then we introduce a correlation structure to use for a whole portfolio. Two types of correlation are introduced : intra-class correlation for each pair of bonds with the same rating, and inter-class correlation for pairs of bonds with different ratings. Rating migration matrix allows us to estimate correlation of the first kind. The second type of correlation is impossible to estimate using the same matrix, so in §3.1.5 we present an indirect inter-class correlation method that correlates different bonds using their correlation to a common factor (market variable).

Calibration is the subject of the §3.2. The problem of intensity model calibration lies in a fact that multiple parameters must be matched with only one degree of freedom. Indeed, for each rating class we have multiple migration probabilities (one for each destination rating class), equipped with its variance. And we need to find a correlation factor for this rating class matching all these variances. There is no general solution for this problem, so we replace an exact match by minimization of distance between our model's results and real world observations.

This distance is defined in multidimensional space ; we test 3 different ways to define it :

- the distance in a Cartesian space, with the scale of each dimension proportional to the associated migration probability (we attribute more weight to match the most probable migration's volatility) ;
- the same definition with more weight for downgrades ;
- the distance taking into account the sign of variance misjudging. We

give more weight to underestimation of volatility, and less to overestimation.

Three calibrations resulting from three distances described are different but very close to each other. Credit risk estimation is almost the same with these three calibrations.

At §3.3 we try to validate our model. Firstl we compare our model's results to a closed-form solution where possible (for example, perfectly independent or perfectly synchronized bonds). Then we compare volatility matrices generated by our model to Standard & Poor's matrices to ensure that our calibration was successful.

Given that rating migration does not explain entire credit risk, it is wise to simulate another credit risk factor – fundamental spread, corresponding to market's risk aversion. In Chapter 4 we study different ways to estimate fundamental spread's influence on credit risk.

We proceed with §4.2, where fundamental spread (pi-factor) will be modelised by the Generalized Pareto Distribution. We retain this model for our paper.

Chapter 5 concludes our paper. There we enumerate all advantages and drawbacks of our model, and outline some possible ways to improve it.

Keywords : credit risk, correlation between rating migration, fundamental spread, GPD.



## Remerciements

Tout d’abord je tiens à remercier Mohamed Majri, responsable du département modélisation et actuariat financier de la SMABTP, pour toute la patience et la pédagogie avec lesquelles il a accompagné le travail du présent mémoire. Je le remercie également pour m’avoir guidé dans l’apprentissage de ce métier, et pour l’exemple qu’il me donne au quotidien de ce qu’est le travail d’actuaire. Merci Mohamed, c’est un vrai plaisir de travailler avec toi.

J’aimerais adresser mes remerciements particuliers aux personnes qui ont organisé une journée de découverte de l’actuariat au sein de notre entreprise – Sophie Prouvost et Philippe Marie-Jeanne. Cette journée m’a d’abord permis de découvrir le métier d’actuaire. Je les remercie encore d’avantage de m’avoir laissé une chance d’intégrer leur équipe sans aucune expérience, capitalisant uniquement sur ma motivation pour devenir actuaire.

Je souhaiterais exprimer également ma reconnaissance envers Nabil Khouri de m’avoir accompagné pendant ma période de transition vers l’actuariat.

Je remercie également mes collègues Jérémy Allali et Thomas Haegel pour la relecture du document. Leurs précieuses remarques m’ont permis d’améliorer sa lisibilité, même si on est toujours loin de l’idéal.

Pour la relecture de la version anglaise du document j’adresse mes remerciements à mes amis Boris Kozintsev et Andrey Lvovsky.

Le plus grand remerciement j’envoie à ma femme Nu-Ki, sans qui tout ça ne serait pas possible...

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préambule</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revue des modèles existants</b>	<b>6</b>
2.1	Modèles de valorisation des instruments de crédit . . . . .	6
2.2	Modèles de mesure de risque de crédit . . . . .	11
2.3	Modèles réglementaires . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Problématique de la corrélation dans les modèles d'intensité</b>	<b>17</b>
3.1	Modèle pour la corrélation des migrations . . . . .	17
3.2	Calibrage . . . . .	36
3.3	Validation . . . . .	44
3.4	Résultats . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Modélisation de la variation du spread fondamental</b>	<b>51</b>
4.1	Données des indices de crédit . . . . .	51
4.2	Modélisation par la loi mélange GPD . . . . .	54
4.3	Résultats . . . . .	62
4.4	Prise en compte de la cyclicité . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Conclusion et pistes d'améliorations</b>	<b>64</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>

# 1 Préambule

Dans §1.1 nous allons préciser la définition du risque de crédit que nous retenons pour le reste du document. Ceci est une étape importante, vu le nombre de définitions existantes à ce jour. En même temps nous allons définir la modélisation du crédit, et quels sont les critères d'une bonne modélisation.

Dans §1.2 nous allons présenter le risque de crédit dans Solvabilité II.

## 1.1 Définition du risque de crédit

Avant de commencer, il faut bien s'accorder sur les définitions. Nous allons comprendre sous le « risque du crédit » le risque de toute perte financière d'un investisseur liée à l'état de solvabilité de son emprunteur.

Souvent on trouve la définition simplifiée du risque de crédit qui ne traite que l'un des événements liés à la solvabilité de l'emprunteur, à savoir son défaut de paiement. Effectivement, dans ce cas l'investisseur perd, tout ou au moins une partie de son investissement. Mais le défaut n'est pas le seul événement qui peut impacter la valeur de l'investissement – une éventuelle dégradation de la notation du crédit fait également baisser son prix de marché.

La définition simplifiée peut être défendue par les arguments de la politique de gestion financière de type « buy and hold » – si l'investisseur décide de tenir le titre du crédit jusqu'à son échéance, les variations du prix de ce titre n'ont aucun impact sur ses résultats, c'est uniquement du défaut qu'il convient de tenir compte. Dans ce document nous n'allons pas tenir compte de cette argumentation, et le risque de dégradation de la notation sera également pris en compte.

Une autre possibilité pour un investisseur de perdre une partie de son investissement crédit est le changement de l'aversion prédominante sur le marché au risque de crédit. Plus cette aversion est grande, moins cher est la valorisation des titres de crédit toute chose égale par ailleurs. En reprenant la terminologie de l'EIOPA, nous allons appeler cette partie du risque – « risque de spread fondamental » ou risque de l'écart de spread fondamental<sup>2</sup>.

---

2. Voir par exemple HBS.8.17 des spécifications de QIS du fin 2012 : *The matching adjustment is an adjustment to the basic risk-free interest rate used to value such predictable liabilities, whereby the market value of the liability mirrors the market changes evident in the asset values which are not related to default or downgrade costs. It is equal to the spread over the risk-free rate on admissible backing assets, less an estimate of the costs of default and downgrade (the fundamental spread).*

Modéliser le crédit ne consiste pas uniquement à répondre à la question de la valorisation d'un instrument de crédit. C'est ainsi – et surtout – répondre à la question d'évaluation du risque associé à cet instrument.

En plus – et nous allons voir ça dans §2.2 – la réponse à la question de valorisation pour un titre peut être facilement généralisée pour la valorisation du portefeuille composé de plusieurs titres. Mais la question d'évaluation du risque de crédit d'un portefeuille est nettement plus complexe que l'estimation du risque de crédit des titres composant le portefeuille. C'est à ce problème que le présent document est consacré.

## 1.2 Le risque du crédit dans Solvency II

Avec la future réforme Solvabilité II les sociétés d'assurance seront amenées à estimer leur besoin de fonds propres selon une approche fondée sur les risques pris par l'assureur :

Les États [...] exigent que les entreprises d'assurance et de réassurance détiennent des fonds propres éligibles couvrant le capital de solvabilité requis.<sup>3</sup>

L'article 101 précise le calibrage des calculs à mener :

Le capital de solvabilité requis est calibré de manière à garantir que tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance [...] est exposée soient pris en considération. Il doit couvrir le portefeuille en cours, ainsi que le nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. [...]

Le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.<sup>4</sup>

Toujours dans l'article 100 on trouve le choix laissé par la directive-cadre aux sociétés d'assurance :

Le capital de solvabilité requis est calculé soit à l'aide de la formule standard [...], soit à l'aide d'un modèle interne[...].<sup>5</sup>

Sans rentrer dans les détails de calcul du risque de crédit proposé par la formule standard (la méthode sera analysée dans le chapitre consacré aux

---

3. Article 100 de la directive-cadre Solvabilité II

4. Article 101 de la directive-cadre Solvabilité II

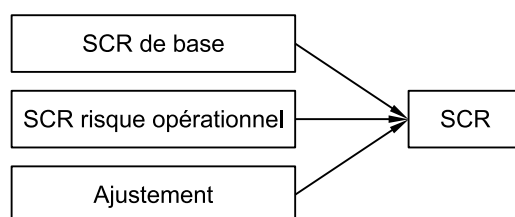
5. Article 100 de la directive-cadre Solvabilité II

différentes approches dans le calcul du risque de crédit), étudions un peu la place de ce risque dans la structure proposée par la formule standard. Ceci nous intéresse non pas seulement pour la formule standard elle-même, mais aussi parce que nous allons étudier les méthodes d'estimation du risque dans le cadre du modèle interne qui reprend tout de la formule standard sauf les calculs de certains de ces modules. En adoptant cette hypothèse nous ne pourrions certainement pas prendre en compte les modèles dites intégraux, qui proposent des solutions complètes pour un bloc plus grand que le risque du crédit tout seul. Mais pour le moment cette simplification nous paraît acceptable.

Alors, le calcul de la formule standard est décrit dans le même document<sup>6</sup>, on peut le présenter sous la forme simplifiée (qui se concentre sur la partie du crédit) comme suit :

Le capital de solvabilité requis calculé selon la formule standard est la somme des éléments suivants :

- Le capital de solvabilité requis de base ;
- L'exigence de capital pour risque opérationnel ;
- L'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés.



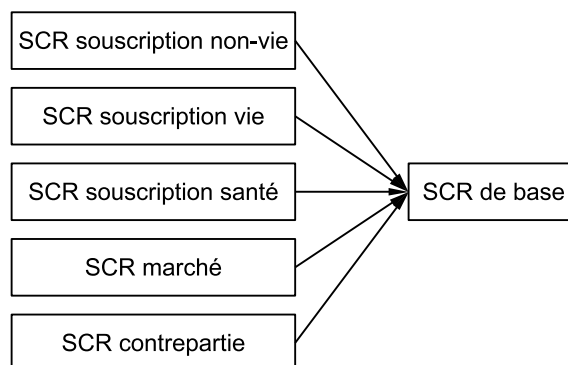
Le capital de solvabilité requis de base se compose de modules de risque individuels suivants<sup>7</sup> :

- Le risque de souscription en non-vie ;
- Le risque de souscription en vie ;
- Le risque de souscription en santé ;
- Le risque de marché ;
- Le risque de contrepartie.

---

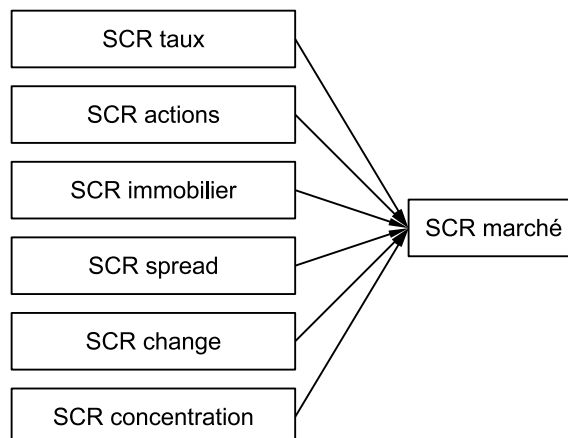
6. Articles 103–105 de la directive-cadre Solvabilité II

7. On laisse pour l'instant de côté la question d'agrégation de ces risques.



C'est le risque de marché qui va nous intéresser dans ce document. Ce module reflète le risque lié au niveau ou à la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers ayant un impact sur la valeur des actifs et des passifs de l'entreprise concernée. Il est calculé comme résultant de la combinaison des exigences de capital applicables aux sous-modules suivants, dont au moins :

- Le risque de taux d'intérêt ;
- Le risque sur actions ;
- Le risque sur actifs immobiliers ;
- Le risque lié à la marge (spread) ;
- Le risque de change ;
- Le risque de concentrations du risque de marche.



On voit que la formule standard prévoit un sous-module de calculs de risque de crédit (on verra les détails de ce module dans §2.3.1).

De nombreuses entreprises souhaitent raffiner le calcul de cette partie de leur risque afin de pouvoir mieux le piloter. Cela reste possible grâce au modèle interne, qui prévoit la création de modélisation de risque (par exemple de risque de crédit) propre à chaque entreprise. Regardons les modèles qui sont à la disposition des entreprises souhaitant de mettre en place leur propre modélisation du risque de crédit.

En même temps, gardons dans l'esprit l'ORSA – même si la calibration des indicateurs de risque est laissée à chaque assureur, même si le cadre de calculs n'est pas si strictement défini, l'approche générale reste la même, et ce qui va suivre ne s'appliquera pas uniquement aux modèles internes de Solvabilité II, mais également aux calculs d'ORSA.

## 2 Revue des modèles existants

Cette partie est consacrée à une brève revue des modèles de crédit existants actuellement sur le marché. Le but n'est pas de fournir une liste exhaustive des modèles, mais de décrire les représentants caractéristiques de chaque famille des modèles de crédit. Cette description nous servira de base pour formuler ensuite les avantages et les inconvénients de chaque famille des modèles, en vue d'une modélisation du risque de crédit d'une compagnie d'assurance-vie.

Nous allons d'abord voir dans §2.1 les modèles de valorisation de crédit, ensuite, au §2.2, comment ces modèles intègrent l'estimation du risque des titres et surtout des portefeuilles de crédit.

Enfin, §2.3 nous fera un bref aperçu des modèles dits « réglementaires » qui sont proposés par les différents législateurs bancaires ou ceux du secteur d'assurance. Nous essayerons de définir les conditions dans lesquelles ces modèles – très simplistes – peuvent être utilisés.

### 2.1 Modèles de valorisation des instruments de crédit

Jusqu'à la fin des années 1990s, la modélisation du crédit était dans un état qu'on peut qualifier d'embryonnaire. Malgré les travaux initiés par Merton (1974), pour lesquels il a été récompensé en 1997 par le prix Nobel de l'économie, la modélisation du crédit dans la finance a longtemps resté très qualitative.

Ce sont les crises et les vagues des défauts des années 1990s qui ont provoqués un regain d'intérêt à la modélisation du crédit, et toute une série de nouvelles méthodes est apparue.

En même temps les exigences réglementaires ont été renforcées, ce qui a forcé les entreprises de s'intéresser au risque du crédit.

De façon schématique on peut classer les méthodes de modélisation du crédit de manière suivante :

- Modèles actuariels – l'actualisation des flux futurs pour valoriser les titres de crédit ;
- Modèles structurels – modélisation des éléments structurels de l'entreprise afin de détecter une source de défaut ;
- Modèles d'intensité – modélisation du défaut comme un processus stochastique sans se préoccuper de ses raisons.

Cette classification n'est pas la seule classification possible. En plus, cer-



tains modèles ne rentrent pas dans cette classification<sup>8</sup>. Mais elle présente un intérêt certain d'être simple, tout en regroupant les modèles basés sur les principes similaires.

### 2.1.1 Modèles actuariels

Les modèles actuariels sont fondés sur l'idée actuarielle classique de valoriser les titres en actualisant leur flux futurs<sup>9</sup>. Si un titre donne droit aux flux  $\{F_i\}$  tombant aux dates  $\{t_i\}$ , alors la valeur de ce titre à la date 0 serait :

$$V = \sum_i F_i e^{-\int_0^{t_i} r(\tau) d\tau} \quad (1)$$

Avec  $r(t)$  – la courbe des taux d'actualisation des flux.

Pour pouvoir appliquer un modèle de ce type nous devons nous interroger : quelle est la bonne courbe des taux d'actualisation ?

Souvent la réponse est « la courbe des taux sans risque<sup>10</sup>  $\rho(t)$  avec un supplément linéaire<sup>11</sup>  $\lambda(t)$ , traduisant le niveau du risque du titre en question » :

$$r(t) = \rho(t) + \lambda(t)$$

Parfois cette même réponse est présentée différemment sous une forme de réduction des flux futurs (plus les flux sont incertains, de plus ils sont réduits) avec une actualisation à la courbe des taux sans risque :

$$V = \sum_i \tilde{F}_i e^{-\int_0^{t_i} \rho(\tau) d\tau}$$

On fait comme si on échangerait le flux risqué  $F_t$  contre un flux « équivalent certain »  $\tilde{F}_t$  moindre, mais sans risque.

Sachant que le flux équivalent certain peut être défini comme suit :

$$\tilde{F}_{t_i} = F_{t_i} e^{-\int_0^{t_i} \lambda(\tau) d\tau} = F_{t_i} e^{-\int_0^{t_i} (r(\tau) - \rho(\tau)) d\tau}$$

On voit bien l'équivalence de la valorisation faite par ces deux méthodes.

---

8. On peut citer ici le modèle de la formule standard de Solvabilité II.

9. Voir par exemple Portait, Poncet (2009) pour son introduction.

10. On laisse la très intéressante question de choix des taux « sans risque » en dehors du périmètre de ce document.

11. Souvent référé comme « spread » ou « intensité du défaut ».

Le cadre général des modèles actuariels doit ensuite être enrichi par la modélisation de la dynamique des taux sans risque, et des spreads.

Les modèles actuariels sont souvent choisis comme la solution « par défaut » pour la gestion du risque de crédit dans une société d'assurance, car leur mise en place reste assez intuitive pour un actuaire. En plus ils ont un grand avantage d'être facilement compréhensibles. Ce sont des modèles de ce genre qui étaient prédominants dans la gestion du risque de crédit avant l'arrivée de Solvency II. Et même aujourd'hui encore ils sont présents dans une grande partie du marché de l'assurance française.

Néanmoins, les modèles de base – notamment ceux à spread constant – ne permettent pas du tout faire une estimation du risque de crédit lié à la dégradation de la notation pendant la durée de projection. Et la prise en compte de cette partie du risque par des modèles sophistiqués<sup>12</sup> fait rapidement perdre l'attrait de facilité de cette famille des modèles.

### 2.1.2 Modèles structurels

Les modèles structurels sont basés sur l'approche de Merton (1974) selon laquelle l'entreprise est mise en défaut si sa valeur boursière baisse jusqu'au niveau connu d'avance<sup>13</sup>. Effectivement, on peut dire que les actionnaires d'une société ont toujours une option de cesser le paiement des dettes de leur société, ce qui rend la question de valorisation du crédit quasiment équivalente au problème de la valorisation des options.

Illustrons cette approche par le modèle de Merton qui modélise la probabilité du défaut d'une entreprise décrite d'une manière très simpliste :

- il n'y a aucun flux (ni entrant, ni sortant) pendant la période d'étude ;
- le taux d'intérêt sans risque  $\rho$  est constant pendant cette période ;
- le bilan de l'entreprise ne contient que :
  - la valeur totale de l'entreprise  $V$ , régie par un processus de diffusion classique de volatilité  $\sigma$  :

$$\frac{dV}{V} = \rho dt + \sigma dW_t$$

- la valeur totale des actions de l'entreprise  $S$  ;
- la dette  $D$ , constituée d'un titre zéro-coupon de l'échéance  $T$ .

Dans ce cas simple à tout moment  $0 \leq t \leq T$  nous avons :

---

12. Notamment les modèles de projection de spread dynamique.

13. Pour simplifier l'exposé, on peut assimiler ce niveau au niveau de ces dettes.

$$V_t = S_t + D_t$$

Sous ces conditions la modélisation du défaut d'entreprise coïncide avec la modélisation d'une option à barrière. Cette modélisation a été formalisée par Black et Cox (1976). En utilisant directement leur résultat, on peut exprimer la probabilité risque-neutre de défaut comme :

$$\mathbb{P}(\tau < T) = \mathcal{N} \left( - \frac{\ln \frac{V}{D} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \quad (2)$$

La première critique de ce modèle est assez évidente et consiste à remarquer l'extrême simplification de la description de l'entreprise et du processus de défaut en général. Il n'est alors pas étonnant qu'une multitude des méthodes est apparue pour répondre à cette critique, en ajoutant de plus en plus de réalisme à cette représentation de l'entreprise.

Une autre remarque nous fait dire que les variables utilisées dans les calculs ne sont pas toujours observables (c'est  $S$  et sa volatilité qui sont plus souvent observables directement sur le marché, et pas  $V$ ). Idem, des développements du modèle de Merton ont démontré la possibilité de faire dans certaines conditions un lien entre les caractéristiques de ces variables.

La critique la plus violente de cette famille vient de la continuité des processus régissant les principales variables étudiées. Cette continuité devient particulièrement gênante à l'approche de l'échéance du titre, quand la probabilité du défaut – proportionnelle à la durée restante – tend vers zéro, quel que soit le niveau du risque réel d'entreprise. Cette particularité des modèles structurels fait certains analystes<sup>14</sup> dire que ces modèles ne sont pas à utiliser dans les buts professionnels.

### 2.1.3 Modèles d'intensité

Dans cette famille sont regroupés les modèles basés sur l'analyse du processus stochastique menant à défaut du titre, qui ne se préoccupent pas de l'explication de ces causes. Les modèles de cette famille se focalisent sur les probabilités du défaut, notamment via l'analyse des notations des titres et des matrices de passage des notations. Le plus souvent cette la modélisation se fait par les chaînes de Markov avec un état d'absorption.

---

14. Cf. Portait (2009), p. 976.

On peut illustrer cette famille par le modèle Jarrow-Lando-Turnbull qui part des probabilités empiriques de migration des notations  $q_{m,n}$  – la probabilité qu’un titre de la classe de notation  $m$  au début de la période d’observation finit la période dans la classe de notation  $n$ . La période d’observation généralement choisie est d’un an.

Afin de pouvoir utiliser pleinement ces probabilités, on accepte les hypothèses suivantes :

- Les probabilités de migration sont stationnaires dans le temps ;
- Le processus de migration de notation est un processus de Markov, i.e. son déroulement ne dépend que de son état actuel. Autrement dit, la future notation d’un titre ne dépend pas de l’historique de ce titre, mais uniquement de sa notation actuelle ;
- L’état de défaut est absorbant. Autrement dit, une fois en défaut, le titre ne peut plus revenir dans un autre état quelconque.

La probabilité de migration dans l’univers risque-neutre est :

$$\tilde{q}_{m,n}(t) = \begin{cases} \pi(t)q_{m,n} & m \neq n \\ 1 - \pi(t)(1 - q_{m,m}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

Avec  $\pi(t)$  – facteur d’ajustement de prime de risque qui reflète l’aversion du marché au risque de crédit<sup>15</sup>.

On voit que dans l’univers risque-neutre les probabilités de migration peuvent varier dans le temps grâce au coefficient  $\pi$  dépendant du temps.

La dynamique de ce coefficient est modélisée par un processus de type Cox–Ingersoll–Ross, qui décrit un processus avec une moyenne à long-terme  $\mu$ , une force de retour vers cette moyenne  $\alpha$  et un bruit gaussien  $dZ$  :

$$d\pi = \alpha(\mu - \pi)dt + \sigma\sqrt{\pi}dZ \quad (4)$$

Les modèles d’intensité sont des produits presque purement mathématiques qui ne nécessitent pas d’études approfondies des caractéristiques fondamentales des titres et des entreprises sous-jacents. Presque toute l’information nécessaire à la modélisation et l’estimation du risque peut être résumée par les caractéristiques facilement observables du titre comme sa notation<sup>16</sup>, ou son exposition dans le portefeuille.

---

15. Nous exposons ici le modèle JLT+ tel qu’il est utilisé par le générateur des scénarios économiques ESG de Barrie+Hibbert. Il existe d’autres implémentations du modèle, notamment avec des facteurs différents par notation de départ, voir par case de la matrice de migration (classe de notation de départ  $\times$  classe de notation dans un an).

16. On peut dire que l’analyse des caractéristiques fondamentales des titres est « déléguée » à l’agence de notation qui le résume sous forme de la notation.

Malgré cette simplicité, ces méthodes permettent de faire des estimations assez correctes, au moins en ce qui concerne la valorisation des titres.

## 2.2 Modèles de mesure de risque de crédit

Le risque du crédit est généralement estimé sous la forme de Credit-VaR – la quantité de perte maximum possible pendant un horizon fixé et avec une probabilité (appelée parfois « niveau de confiance ») fixée. Nous allons travailler également avec cette mesure du risque.

Il est facile à voir que, contrairement à la question de valorisation des titres de crédit, l'estimation du risque ne peut pas être résolue titre par titre avec une agrégation simple à la fin. Effectivement, si on considère un portefeuille constitué de deux titres avec le Credit-VaR d'horizon et du niveau de confiance quelconque, il est en général impossible d'en déduire le Credit-VaR du portefeuille, car il nous manque l'information cruciale qui est le comportement joint des titres. Si leurs valeurs évoluent toujours dans le même sens, Credit-VaR du portefeuille peut être la somme des Credit-VaR des titres, par contre si elles bougent toujours dans les sens opposés, le Credit-VaR serait bien inférieur à cette somme, voir s'annulerait complètement.

Cette remarque n'est pas purement théorique, car plusieurs études ont démontré l'existence d'une telle corrélation<sup>17</sup>. D'autant plus que l'existence des corrélations est assez intuitive : un défaut de fournisseur fragilise la solvabilité d'une société, la situation est pareille avec un défaut de créancier. Même les entreprises sans lien direct dans leurs métiers peuvent être corrélées s'ils dépendent des mêmes processus macroéconomiques ou politiques : la hausse des prix du pétrole, par exemple, fragilise toutes les compagnies aériennes, de même que les attentats du septembre 2001 l'ont fait.

Regardons comment l'existence de cette corrélation peut être intégrée dans les modèles du crédit.

### 2.2.1 Approche structurelle

Les modèles structurels essayent de répondre à la question de corrélation en décrivant la structure de dépendance des rentabilités des différents titres en fonction des facteurs de leurs modèles (on parle alors de la « corrélation latente » par rapport à la « corrélation » simple des défauts ou des migrations). Il est possible de déduire la structure de corrélation des défauts à

---

17. Voir Schönbucher (2003), 290–291 pour les résultats d'une étude sur les entreprises américaines.

partir de la structure de la corrélation latente et du modèle de dépendance des variables structurelles des facteurs économiques.

Illustrons cette approche par la méthode CreditMetrics.

Ses auteurs (voir Gupton, Finger, Bhatia (1997)) ont constaté la nécessité de prendre en compte la corrélation des migrations des notations. En revanche il leur a été impossible de mettre en œuvre un mécanisme fiable de calcul des corrélations pour chaque paire des titres. Pour y remédier ils introduisent dans le modèle un certain nombre d'indices par secteurs économique et géographiques et calculent des corrélations entre chaque paire des indices caractéristiques du marché.

Chaque entreprise ensuite est analysée afin de déterminer le pourcentage de ces affaires concerné par des secteurs économiques et géographiques présents dans le modèle. La corrélation entre deux titres des entreprises se déduit à la fois de cette représentation et de la corrélation des indices.

### 2.2.2 Approche réduite

La plus simple implémentation des modèles d'intensité est sans doute celle de Lucas (1995) qui propose d'étudier les variables Bernoulli, chaque variable étant indicatrice de défaut d'une société :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'entreprise } i \text{ fait défaut} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour ces variables il introduit le coefficient de corrélation :

$$\text{corr}(X_i, X_j) = \frac{\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\mathbb{E}[X_i] (1 - \mathbb{E}[X_i])} \sqrt{\mathbb{E}[X_j] (1 - \mathbb{E}[X_j])}} = \rho_{i,j}$$

Révolutionnaire à l'époque, l'article de Lucas a proposé une procédure de calibrage des corrélations par tranches de notation en utilisant les données historiques des défauts observés.

Cette technique a été approfondie par Nagpal et Bahar (2001) qui ont introduit les corrélations par secteur d'activité et zone géographique, toujours en se basant sur les observations des défauts sur une longue échelle temporelle.

Ensuite, la corrélation de migration a été introduite (voir Foulcher, Gouriéroux et Tiomo (2006) pour l'exemple de définition et technique du calibrage, toujours d'après des observations historiques), mais d'une manière

très similaire à celle de la corrélation du défaut :

$$X_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si l'entreprise } i \text{ passe à la notation } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{corr}(X_i^k, X_j^l) = \frac{\mathbb{E}[X_i^k X_j^l] - \mathbb{E}[X_i^k] \mathbb{E}[X_j^l]}{\sqrt{\mathbb{E}[X_i^k] (1 - \mathbb{E}[X_i^k])} \sqrt{\mathbb{E}[X_j^l] (1 - \mathbb{E}[X_j^l])}} = \rho_{i,j}^{k,l}$$

### 2.2.3 Approche mixte

Malgré le principe des modèles d'intensité de ne rien chercher à expliquer, mais créer juste un appareil mathématique adapté aux observations, il existe des modèles qui introduisent une corrélation expliquée.

Une approche de Davis et Lo (1999) suppose, par exemple, que les intensités (du défaut, ou en général des passages) ont un caractère contagieux (ce qui est conforme à l'observation – les spreads augmentent après un défaut d'un grand émetteur). Dans leur modèle chaque défaut provoque une augmentation instantanée des intensités du défaut, qui retombe ensuite à son niveau normale d'une manière ou d'une autre (exponentielle dans l'article initiale de Davis et Lo).

La difficulté du calibrage et de la définition de la chronologie des événements pose par contre un sérieux frein à la mise en place des modèles pareils.

## 2.3 Modèles réglementaires

Nous avons passé en revue les modèles académiques qui sont à la recherche des instruments mathématiques décrivant au mieux la réalité du monde financier, et des modèles des praticiens du marché qui cherchent à répondre à la même question en partant du point de vue plus pragmatique. Le législateur, quand à lui, cherche tout d'abord à imposer la prudence aux sociétés contrôlées.

Les modèles proposés sont généralement très simples à mettre en œuvre, ils ont pour le but de couvrir d'une manière prudente le plus large spectre des cas de figure. Ces modèles ne peuvent pas être considérés comme des vrais modèles du crédit. Leur utilisation peut être justifiée par une règle de proportionnalité, quand le portefeuille ne présente pas un risque de crédit tel qu'une étude et mise en place d'un modèle proprement dit soit nécessaire.

### 2.3.1 Formule standard de Solvabilité II

Solvabilité I était centrée sur l'estimation du risque de passif, c'est Solvabilité II qui a introduit la notion du risque de crédit dans la législation d'assurance. La directive-cadre de Solvabilité II ne donne que le cadre général, nécessaire à la définition de tous les calculs. La formule exacte et son calibrage font objet de plusieurs tests à commencer par les différents QIS. La dernière version à ce jour est celle de LTGA (CEIOPS, janvier 2013).

La question de la valorisation ne se pose pas pour ce modèle, puisqu'il présente une formule fermée pour le risque de crédit en fonction de la notation du titre et de sa valeur de marché au moment de calcul (l'information observable au moment du calcul).

La version du LTGA du janvier 2013 présente la modélisation du risque de crédit<sup>18</sup> comme suit :

$$SCR_{credit} = \sum_i MV_i \times F^{up}(n_i, d_i) \quad (5)$$

Où pour chaque titre crédit  $i$  dans le portefeuille :

- $MV_i$  est son exposition au risque de crédit ;
- $n_i$  est la notation du titre ;
- $d_i$  est la duration du titre ;
- $F^{up}(n_i, d_i)$  – la valeur d'augmentation du spread en fonction de ses notation et duration.

Pour ne pas alourdir la lecture, citons la fonction  $F^{up}(n_i, d_i)$  uniquement pour les titres de duration inférieure à 5 ans, en utilisant les noms des classes de notation selon la nomenclature de Standard & Poor's :

Notation	$F^{up}$
AAA	$0.9\% \times d_i$
AA	$1.1\% \times d_i$
A	$1.4\% \times d_i$
BBB	$2.5\% \times d_i$
BB	$4.5\% \times d_i$
B	$7.5\% \times d_i$
CCC	$7.5\% \times d_i$
Sans notation	$3.0\% \times d_i$

18. SCR.5.71. On ne présente ici que la partie « centrale » du module, qui traite des obligations classiques dans le cadre du calcul simplifié.



Pour les autres tranches de durations (la formule en prévoit 5 au total) la formule semblable est fournie.

L'avantage de ce modèle est son extrême simplicité. L'inconvénient en découle directement – le modèle unique ne tient pas compte des particularités du portefeuille. Il est donc préférable de rendre la modélisation plus détaillée si possible.

### 2.3.2 Modèles Bâle I et Bâle II

Il est intéressant de regarder comment la question du risque de crédit est gérée dans une autre branche de l'économie concernée par ce risque – dans les banques.

Sans rentrer dans les détails du calcul, on peut dire que les deux dispositifs introduisent des exigences des fonds propres, en se basant sur des estimations de risque, dont le risque du crédit.

Dans Bâle I le modèle d'estimation du risque reste très simpliste – le risque du crédit d'un titre n'est que son encours pondéré par un coefficient dépendant de sa classe de risque. Trois classes de risque sont ainsi définies, avec les coefficients de pondération suivants :

Classe	Pondération
Titres des gouvernements des pays du G10	0%
Titres des émetteurs privés du G10	20%
Les autres titres	100%

Les accords de Bâle II (à partir de 2004) redéfinissent les calculs d'exigences des fonds propres et, plus important encore, les règles de calcul des risques. En ce qui concerne le risque du crédit, le législateur laisse 3 possibilités :

1. Méthode standard – approche forfaitaire avec les coefficients semblables à ceux du Bâle I, mais la segmentation est nettement plus fine. Par exemple, pour les titres des états et des banques centrales, la grille suivante est proposée en fonction de notation du titre :

Notation	Pondération
de AAA à AA-	0%
de A+ à A-	20%
de BBB+ à BBB-	50%
de BB+ à B-	100%
inférieure à B-	150%
pas de notation	100%

D'autres grilles sont définies pour d'autres types des titres.

2. Méthode de base « notation internes » – la société calcule ses propres notations et les probabilités de défaut, pour appliquer ensuite les règles de calcul fournies par le législateur (notamment sont données les règles pour calculer le taux de recouvrement, l'exposition et le coefficient de corrélation pour chaque ligne du portefeuille) ;
3. Méthode avancée « notation internes » – le calcul d'exposition et du taux de recouvrement sont laissés à la charge de la société.

### 3 Problématique de la corrélation dans les modèles d'intensité

Nous avons vu que un des choix des plus naturels pour la modélisation du risque de crédit par une société d'assurance consiste en création d'un modèle interne avec la modélisation du crédit par un des modèles d'intensité.

Parmi les modèles cités, les modèles structurels dès le présent vont être rejetés dans le cadre d'approche de calcul du SCR crédit ou d'une métrique de risque équivalente répondant aux exigences d'ORSA. Avec un besoin de modélisation pluriannuelle la question de projection du calibrage se pose. Sachant que le calibrage de modèles structurels se base sur l'analyse des caractéristiques fondamentales des titres, il est difficile à imaginer leur projection automatique dans le temps.

Les modèles réglementaires s'avèrent trop limités, notamment pour un portefeuille d'actif géré à partir d'une analyse fondamentale des valeurs y composant.

C'est pour cela que le choix d'un modèle d'intensité nous paraît assez naturel dans ce contexte. Nous allons prendre le modèle JLT+ (voir §2.1.3 pour sa description) comme point de départ pour tout ce qui va suivre.

Le problème est alors dans l'implémentation de la corrélation des migrations des différents titres. Nous avons vu dans §2.2 les différentes approches d'introduction des corrélations, mais en général ils se basent sur les observations de l'historique des migrations des notation de chaque titre, au mieux – comme dans le cas du modèle CreditMetrics – par l'observation de l'historique d'un grand nombre des indices génériques et après l'analyse de dépendance de chaque titre du portefeuille de ces indices.

Pour des raisons pratiques ces méthodes sont difficilement applicables, une solution de secours est alors dans le choix de prudence qui consiste à majorer la corrélation des migrations à 100% (approche Barrie+Hibbert), ce qui est acceptable légalement, mais très cher en terme du résultat obtenu.

#### 3.1 Modèle pour la corrélation des migrations

Comme point de départ nous avons choisi le modèle prudent de Barrie+Hibbert qui consiste à surestimer la corrélation entre les différents titres du portefeuille. Effectivement, plus la corrélation des titres est élevée, plus élevé sera le Credit-VaR du portefeuille qui les regroupe. Le maximum est atteint avec une corrélation de 100%, auquel cas le Credit-VaR du portefeuille

est une somme simple des Credit-VaR des titres, car aucune mutualisation n'est possible.

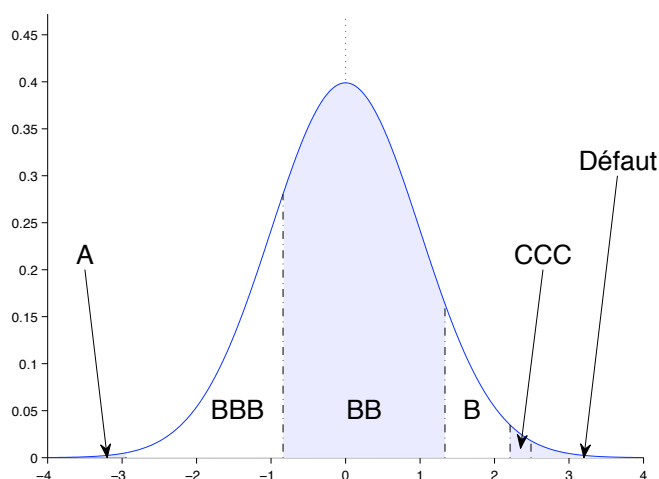
Nous allons distinguer deux types de corrélation :

- Corrélation intra-classe – corrélation entre deux titres de la même classe de notation ;
- Corrélation inter-classes – corrélation entre deux titres des deux classes de notation différentes.

Comme pour le risque de crédit, il existe une panoplie des définitions de ce que c'est que la corrélation des titres de crédit – la corrélation des valeurs de marché, la corrélation des spreads, la corrélation des rentabilités, etc. Afin d'éviter des ambiguïtés nous commençons par définition de la mesure de corrélation qui sera utilisée dans ce document.

**Modélisation des migrations par des variables catégorielles** Avant de donner notre définition, présentons brièvement les mathématiques qu'on va utiliser pour la modélisation des notations des titres – cette partie sera développée avec plus de détails dans §3.1.4 consacré au développement mathématique de notre modèle, mais il est nécessaire d'avoir un aperçu dès maintenant pour la définition de la corrélation dont il est question ici.

La migration de notation d'un titre quelconque est caractérisée par les probabilités de migration. Une des façons de modéliser cette migration est de prendre un nombre aléatoire qui suit la loi normale et l'interpréter selon les probabilités de migration d'une manière présentée intuitivement sur le graphique suivant (l'exemple pour un titre de la notation BB au départ) :



Cette opération sera appelée « réduction de la variable normale à la variable catégorielle », et sera définie avec plus de formalisme dans §3.1.4.

Pour éviter les ambiguïtés la variable normale non réduite sera appelée « variable normale sous-jacente du processus de la migration », et la variable réduite – « variable catégorielle du processus de migration ».

**Modélisation de la corrélation intra-classe** Il est facile de voir que l'indépendance des variables aléatoires normales entraîne l'indépendance des migrations. Et vice versa – une corrélation de ces variables mène à une corrélation des migrations<sup>19</sup>. C'est avec la corrélation de ces variables normales sous-jacentes que nous allons travailler.

**Modélisation de la corrélation inter-classes** Nous allons utiliser le principe développé dans le modèle de Barrie+Hibbert – la corrélation inter-classes est induite dans ce modèle d'une manière indirecte par la corrélation des variables normales sous-jacentes des processus de migration des titres avec une variable normale dite « du marché ».

### 3.1.1 Le problème de l'écart-type

Même si la question du calibrage sera étudiée plus loin dans le document, le raisonnement pragmatique nous incite à ne développer que les modèles qu'il soit possible à calibrer. C'est pour cela que nous allons d'abord poser ici dans les grandes lignes le problème de calibrage, ensuite nous allons chercher le modèle mathématique répondant à ces critères. La définition du modèle nous permettra de revenir à la question du calibrage (cf. §3.2.3) avec plus de rigueur.

Il est assez évident que les différents niveaux de corrélations des processus de migration aboutissent aux différentes distributions des probabilités de migrations observées<sup>20</sup>. Ces distributions se différencient, parmi autres choses, par les écarts-types différents.

En même temps, la matrice de probabilité de migration est habituellement assortie d'une matrice des écarts-types de ces probabilités<sup>21</sup>. Il est possible d'interpréter ces écarts-types comme une indice de la distribution des probabilités.

---

19. Pas forcément la même corrélation, la relation de ces deux mesures de corrélation sera développée dans §3.1.4.

20. Voir §3.3 pour le développement de cette idée.

21. Nous allons donner une description détaillée du processus de construction de ces matrices dans §3.2.1.

Alors, le problème se pose comme suit : quelle structure mathématique décrit-elle le processus de migration des notations de telle manière que ces résultats sont compatibles avec la matrice de migration des notations observée (la partie des probabilités et la partie des écarts-types) ?

Nous allons commencer par l'étude du cas simple, qui ne tient compte que du processus de défaut des titres de la même classe de notation.

Le retour au cas général du processus de migration de notation sera effectué à partir du §3.1.4.

La généralisation tenant compte de plusieurs classes de notation de départ se fera immédiatement après, au §3.1.5.

**Les variables indicatrices** Posons la variable indicatrice  $I_k$  du défaut d'un titre  $k$  :

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si titre } k \text{ fait défaut au bout d'un an} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sachant que la moyenne et l'écart-type de cette variable nous sont donnés par la matrice des probabilités et la matrice des écarts-types de la probabilité de migration respectivement, quelle structure mathématique nous permettrait de les retrouver ?

Soit la variable  $I_k$  est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de la probabilité de succès  $\tilde{p}$  :

$$I_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(\tilde{p})$$

Il est important de noter qu'on parle ici de la loi de Bernoulli au sens large. La probabilité de passage peut être une constante, auquel cas on retrouve la loi de Bernoulli classique. Mais nous allons également travailler avec la probabilité de passage qui serait une variable aléatoire suivant sa propre loi, ce qui sort du périmètre de la loi de Bernoulli classique proprement dite, même si l'esprit reste le même.

Nous allons étudier plusieurs cas, à chaque fois on tentera de répondre à la question : avec la loi des variables  $I_k$  choisie, est-il probable d'observer les caractéristiques citées plus haut ?

Il y a sûrement plusieurs lois qui répondent positivement à cette question, il faudra les étudier ensuite sous l'angle pragmatique, en retenant les modèles qui non seulement répondent d'une manière purement mathématique et formelle à nos exigences, mais en plus correspondent profondément à notre vision de la réalité.

### 3.1.2 Variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli classique

Dans ce cas  $\tilde{p}$  est une constante.

Le fait qu'en plus les variables  $I_k$  sont indépendantes nous permet d'étudier directement la loi de leur somme – le nombre de titres qui font défaut :

$$S = \sum_{k=1}^K I_k$$

Le nombre  $S$  suit dans ce cas la loi binomiale<sup>22</sup> :

$$S \rightsquigarrow \mathcal{B}(K, \tilde{p})$$

Nous souhaitons établir la cohérence des résultats avec les matrices de migration, ce qui veut dire que nous cherchons à maximiser la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}[S = K \times p]$$

Le maximum de cette probabilité est observée si :

$$\tilde{p} = p$$

Le résultat est assez attendu : la probabilité de défaut des variables indépendantes doit être égale à la probabilité de défaut de la matrice de transition, pour que les modélisations faites avec ces variables reproduisent les plus souvent possible cette matrice.

Par contre il est impossible de retrouver la matrice des variances, car avec l'augmentation de la taille d'échantillon la volatilité tend vers zéro, ce qui n'est pas conforme avec les résultats observés :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\mathbb{V}\left[\frac{1}{K}S\right]} = \sqrt{\frac{1}{K}\tilde{p}(1-\tilde{p})} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \quad (6)$$

Ceci n'est pas étonnant non plus – comme nous avons déjà évoqué, plusieurs études ont démontrées la nécessité d'introduire une corrélation pour mieux reproduire le comportement des titres.

Ce résultat néanmoins nous servira pour la validation du modèle dans le §3.3.

---

22. Pour simplifier la lecture, mais aussi pour souligner un lien très étroit entre la loi binomiale et la loi de Bernoulli (la dernière n'est qu'un cas particulier de la première), nous allons garder la même notation pour ces deux lois :

$$\mathcal{B}(1, p) \equiv \mathcal{B}(p)$$

### 3.1.3 Variables indépendantes, non identiquement distribuées

Néanmoins, tentons notre chance encore une fois avec les variables indépendantes, mais qui suivent les lois différentes – est-ce que cette configuration nous permet de retrouver les écarts-types des probabilités de passage semblables à ceux observés ?

Alors,  $\tilde{p}$  suit une loi quelconque.

Dans ce cas la somme des variables indicatrices suit la loi Poisson binomiale à  $K$  paramètres  $\{\tilde{p}_k\}$ ,  $k \in \llbracket 1..K \rrbracket$  :

$$S \rightsquigarrow \mathcal{PB}(\{\tilde{p}_k\})$$

Où  $\tilde{p}_k$  sont des observations de cette loi inconnue.

La loi Poisson binomiale est une généralisation de la loi binomiale classique, avec les 2 premiers moments suivants :

$$\mathbb{E}[\mathcal{PB}(\{\tilde{p}_k\})] = \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k$$

$$\mathbb{V}[\mathcal{PB}(\{\tilde{p}_k\})] = \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k(1 - \tilde{p}_k)$$

Supposons, pour commencer, que la variable aléatoire  $\tilde{p}$  suit la loi normale aux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  :

$$\tilde{p} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

On retrouve les coefficients de la matrice de migration si :

$$p = \mathbb{E}\left[\frac{1}{K}S\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{K}\sum_k p_k\right] = \bar{p}_k = \mu$$

La moyenne de la probabilité de migration de nos titres doit correspondre à la probabilité observée.

Et pour la variance :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\mathbb{V}\left[\frac{1}{K}S\right]} = \sqrt{\frac{1}{K^2}\mathbb{E}\left[\sum_k p_k(1 - p_k)\right]} \quad (7)$$

En utilisant les propriétés de la loi normale, notamment le fait que la somme des carrés des variables suivant la loi normale suit la loi de  $\chi^2$ , on



arrive à :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_k p_k (1 - p_k) \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_k p_k \right] - \mathbb{E} \left[ \sum_k p_k^2 \right] = K\mu - K(\sigma^2 + \mu^2)$$

Comme dans le cas précédent, nous n'avons toujours pas de possibilité de retrouver les matrices de migration, car la volatilité tend toujours vers zéro avec l'augmentation de l'échantillon :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{K^2} \mathbb{E} \left[ \sum_k p_k (1 - p_k) \right]} = \sqrt{\frac{K\mu - K(\sigma^2 + \mu^2)}{K^2}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \quad (8)$$

Ceci est vrai pour la distribution normale des  $\tilde{p}$ . Pour arriver à la volatilité modélisée conforme à celle observée, il faut que la loi de  $I_k$  possède une volatilité croissante en proportion du carré du nombre de titres dans l'échantillon. De telles lois existent, mais elles sont trop exotiques pour qu'on puisse les considérer comme des candidats réels pour la modélisation du comportement des vrais titres.

### 3.1.4 Variables dépendantes, distribuées identiquement

Essayons maintenant d'abandonner l'hypothèse d'indépendance des variables, tout en gardant celle de loi unique. L'avantage de cette approche est qu'en réalité on observe bien des corrélations dans le comportement des différents titres.

Supposons qu'il y ait une corrélation linéaire entre chaque deux variables  $I_k$ , et que le coefficient de corrélation soit le même quelle que soit la couple des variables aléatoires :

$$\text{corr}(I_{k_1}, I_{k_2}) = \rho, \forall k_1 \neq k_2$$

Il est difficile d'obtenir une formule fermée de la loi gérant la somme des variables indicatrice, sauf si la corrélation est nulle (le cas déjà étudié) ou totale.

**Cas de corrélation totale** Dans ce cas, la somme des variables indicatrices suit la loi Bernoulli multiplié par un coefficient  $K$  :

$$S \rightsquigarrow K \times \mathcal{B}(\tilde{p})$$

Effectivement, avec la corrélation totale, seulement deux cas sont possibles : soit tous les titres font défaut avant la fin de l'année – dans ce cas,

qui a la probabilité de survenance  $\tilde{p}$ ,  $S = K$  ; soit aucun de ces titres ne fait de défaut – alors  $S = 0$ .

En retombant dans le cas de la loi de Bernoulli on retrouve la même limitation qui nous interdit de retrouver la volatilité de la matrice de transition, on doit donc passer au cas plus général avec  $\rho < 100\%$ .

Néanmoins, même si ce résultat est négatif, il nous servira pour la validation du modèle dans le §3.3.

Comme c'était déjà évoqué, il est impossible d'obtenir une formule fermée de la loi de distribution pour les corrélations autres que 100%, et même l'estimation analytique de sa moyenne et son écart-type s'avère complexe. Mais on peut utiliser les simulations stochastiques pour cette tâche. Pour cela il nous faut d'abord résoudre le problème de génération des variables  $I_k$  corrélées selon la matrice de corrélation donnée. Cette tâche est un peu compliquée, on va la réaliser en deux étapes :

- modélisation des variables normales corrélées ;
- réduction des variables normales aux variables caractéristiques.

**Modélisation des variables normales corrélées** Il existe des méthodes de génération des variables corrélées selon une matrice de corrélation donnée, si ces variables suivent la loi normale.

Effectivement, si  $\vec{Z}$  est un vecteur des  $K$  variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi normale standard, et  $L$  est une matrice carrée quelconque de la taille  $K \times K$ , alors  $\vec{X} = L\vec{Z}$  est un vecteur de  $K$  variables aléatoires qui suivent toujours la loi normale, mais dépendantes, et dont la matrice de corrélation sera

$$\Sigma = LL^T \quad (9)$$

Cette propriété peut être exploitée dans l'autre sens : sachant la matrice de corrélation  $\Sigma$ , avec la décomposition de Cholesky on peut calculer la matrice  $L$  nécessaire pour transformer le vecteur  $\vec{Z}$  des variables indépendantes au vecteur  $\vec{X}$  des variables corrélées selon la matrice  $\Sigma$ .

Cette méthode ne s'applique qu'aux variables normales, mais on peut la modifier pour obtenir le résultat qu'on cherche par une réduction de la variable normale. Comme nous verrons par la suite, cette réduction change la corrélation. Mais le changement se fait par une fonction facile à manipuler, parfaitement inversible. Ce qui permet de déterminer la corrélation des variables normales initiales en fonction de la corrélation souhaitée des variables finales.

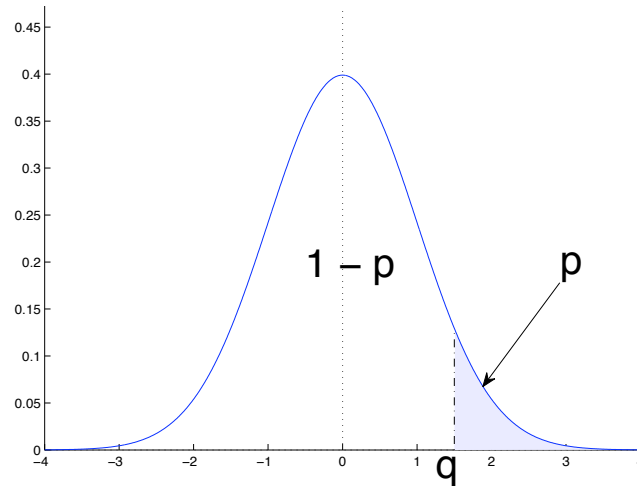
Étudions d'abord le cas de la réduction binaire, avant de s'attaquer au cas plus général.

**Réduction des variables normales aux variables binaires** Soit  $\vec{Z}$  est un vecteur des variables aléatoires qui suit la loi multinormale  $\mathcal{N}(0, \Lambda)$ . En choisissant  $q$  de la manière suivante :

$$\mathbb{P}[z > q] = p$$

On peut construire par la méthode de réduction binaire le vecteur  $\vec{X}$  suivant la loi multibinaire :

$$x_k = \begin{cases} 0 & z_k < q \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$



Cette réduction dichotomique des variables affecte les moments de la distribution, mais son effet peut être calculé (voir Block, Fang (1988) pour

le cas plus général) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2} &= \frac{\mathbb{E}[(x_1 - \mathbb{E}[x_1])(x_2 - \mathbb{E}[x_2])]}{\sqrt{\mathbb{E}[(x_1 - \mathbb{E}[x_1])^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(x_2 - \mathbb{E}[x_2])^2]}} = \\
&= \frac{\mathbb{E}[(x_1 - p)(x_2 - p)]}{\sqrt{\mathbb{E}[(x_1 - p)^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(x_2 - p)^2]}} = \\
&= \frac{\mathbb{E}[x_1 x_2] - p\mathbb{E}[x_1] - p\mathbb{E}[x_2] + p^2}{\sqrt{\mathbb{E}[x_1^2] - 2p\mathbb{E}[x_1] + p^2} \sqrt{\mathbb{E}[x_2^2] - 2p\mathbb{E}[x_2] + p^2}} = \\
&= \frac{\mathbb{E}[x_1 x_2] - p^2}{\sqrt{\mathbb{E}[x_1^2] - p^2} \sqrt{\mathbb{E}[x_2^2] - p^2}}
\end{aligned}$$

En reprenant la définition des variables  $x_i$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_1 x_2] &= \mathbb{P}[(x_1 = 1) \& (x_2 = 1)] = \mathbb{P}[(z_1 \geq q) \& (z_2 \geq q)] = \\
&= 1 - \left( \mathbb{P}[z_1 < q] + \mathbb{P}[z_2 < q] - \mathbb{P}[(z_1 < q) \& (z_2 < q)] \right) = \\
&= 1 - \left( (1 - p) + (1 - p) - \Phi_2(q, q, \lambda_{1,2}) \right) = \Phi_2(q, q, \lambda_{1,2}) + 2p - 1
\end{aligned}$$

Où  $\Phi_2(x, y, \lambda)$  – la fonction de distribution cumulée de la loi binormale centrée et réduite (dans le sens de la variance de chaque élément).

De même manière :

$$\mathbb{E}[x_1^2] = \mathbb{E}[x_2^2] = \Phi_2(q, q, 1) + 2p - 1 = \Phi(q) + 2p - 1 = 1 - p + 2p - 1 = p$$

Où  $\Phi(x)$  – la fonction de distribution cumulée de la loi normale centrée et réduite.

Donc, le résultat final :

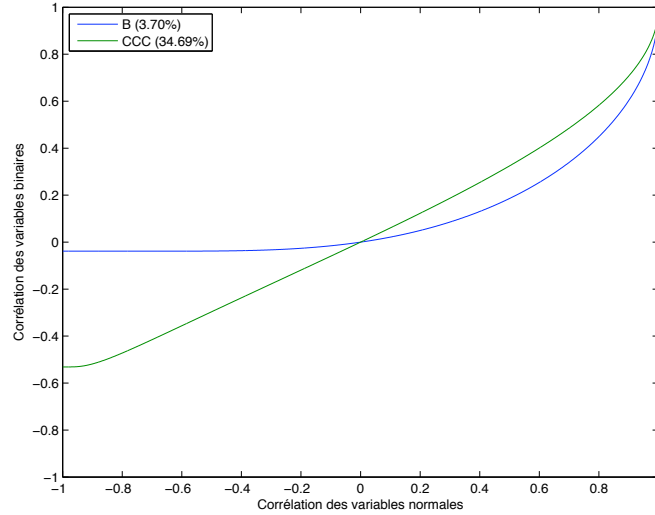
$$\sigma_{1,2} = \frac{\mathbb{E}[x_1 x_2] - p^2}{\sqrt{\mathbb{E}[x_1^2] - p^2} \sqrt{\mathbb{E}[x_2^2] - p^2}} = \frac{\Phi_2(q, q, \lambda_{1,2}) - (1 - p)^2}{p(1 - p)} = f_p(\lambda_{1,2}) \quad (11)$$

Notre tâche est inverse – à partir des caractéristiques voulues de la loi Bernoulli définir les paramètres de la loi normale telle qu'en réduisant les variables de cette loi on retrouve les caractéristiques de la loi Bernoulli. Il suffit donc juste d'inverser l'équation :

$$\lambda_{1,2} = f_p^{-1}(\sigma_{1,2})$$

Le renversement de cette équation est impossible sous forme analytique, mais on peut vérifier que la fonction  $f(\lambda)$  est toujours croissante, et qu'on peut l'inverser au moins numériquement d'une manière unique :

$$\forall \sigma \in [0, 1] \exists ! \lambda : f(\lambda) = \sigma$$



Dans le graphique ci-dessus on peut voir deux fonctions qui correspondent à la probabilité de défaut de deux classes de notation.

On voit que toute corrélation positive peut être atteinte, mais ce n'est pas vrai pour les corrélations négatives. Heureusement, nous ne nous intéressons qu'aux corrélations positives, car les mêmes études qui ont démontré l'existence d'une corrélation des migrations (par exemple, les études citées par Schönbucher (2003)), ont démontré le caractère positif de cette corrélation.

**Généralisation aux variables catégorielles** La méthode de génération des variables binaires fonctionne très bien et couvre nos besoins dans le cas de simulation des variables de type « défaut – pas défaut ». Par contre, dès que nous nous intéressons à la modélisation des migrations des notations, le modèle devient vite insuffisant.

Effectivement, pour modéliser le processus de défaut d'un titre il nous suffit de générer son « chemin » qui ne contient qu'une variable binaire « défaut – pas défaut ». Il est possible, comme font Gagliardini et Gouriéroux (2005), de représenter le chemin complet d'un titre dans l'espace des notations sous forme de  $K$  variables binaires de type  $I_k^{m_k \rightarrow n}$  (la variable indicatrice du passage du titre  $k$  de la notation  $m_k$  à  $n$ ), mais ces variables n'étant

pas indépendantes (pour un titre donné, leur somme est toujours égale à 1), il faudra gérer cette dépendance.

Une autre option est de passer des variables binaires aux variables pouvant prendre  $N$  valeurs possibles selon  $N$  probabilités définies séparément – nous allons appeler ces variables *catégorielles*<sup>23</sup>.

Dans notre cas, nous avons une espace de  $N$  notations :

$$\begin{aligned} x &\in \llbracket 1 \dots N \rrbracket \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}[x = 1] = p_1 \\ \mathbb{P}[x = 2] = p_2 \\ \dots \\ \mathbb{P}[x = N] = p_N \end{array} \right. \\ \sum_{n=1}^N p_n &= 1 \end{aligned}$$

Cette approche est rarement utilisée dans le domaine de modélisation des notations, mais on la retrouve dans d'autres domaines de la recherche, telle la modélisation du système des neurones (voir Macke et al. (2008) pour un exemple), puisque la méthode n'a pas de particularité financière, il s'agit d'une construction mathématique générique.

La logique de génération de ces variables reste exactement la même que pour les variables binaires. Nous étudions un groupe des titres de la même classe de notation. Considérons la variable multi-normale  $Z$  dont la dimension  $K$  corresponde à la taille de notre groupe des titres :

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{N}_K(0, \Lambda)$$

Étant donné les probabilités de passage  $p_n$ , on calcule les quantités  $q_n$  telles que :

$$\Phi(q_n) = \sum_{m=1}^n p_m$$

---

23. La traduction directe de l'anglais *categorical distribution*. Il faut bien distinguer cette distribution de la *distribution discrète* – n'importe quelle distribution sur un support discret, par opposition à une distribution continue. Elle est aussi différente de la *distribution multinomiale* – qui est une généralisation de la distribution catégorielle comme la distribution binomiale en est pour la distribution de Bernoulli. On peut dire que la distribution catégorielle est une distribution multinomiale avec une seule épreuve.

Notons que par construction  $q_N = \infty$ . Pour faciliter la lecture de ce qui va suivre, nous allons introduire également  $q_0 = -\infty$ .

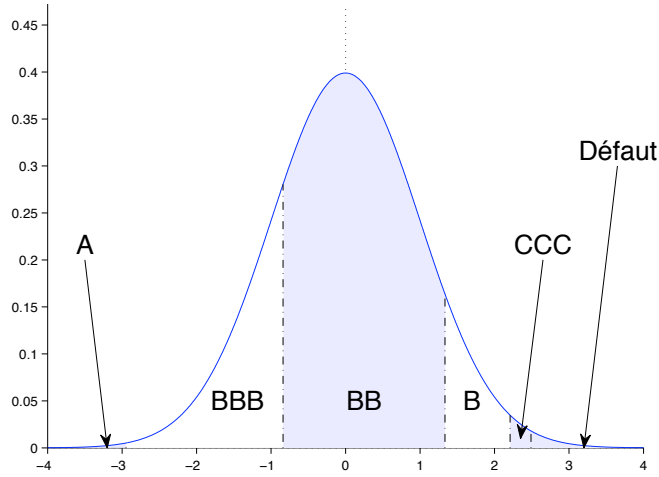
Remarquons une propriété très utile pour la suite :

$$p_n = \Phi(q_n) - \Phi(q_{n-1})$$

La construction des variables de chemin sera :

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } q_0 < \Phi(z_k) \leq q_1 \\ 2 & \text{si } q_1 < \Phi(z_k) \leq q_2 \\ \dots & \dots \\ N & \text{si } q_{N-1} < \Phi(z_k) \leq q_N \end{cases} \quad (12)$$

On peut représenter cette construction graphiquement (avec les probabilités de migration d'un titre noté *BBB*) :



De même manière que pour les variables binaires, nous allons calculer la fonction de la corrélation  $\sigma$  des variables catégorielles obtenue par rapport à la corrélation  $\lambda$  des variables normales de départ.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\mathbb{E}[(x_1 - \mathbb{E}[x_1])(x_2 - \mathbb{E}[x_2])]}{\sqrt{\mathbb{E}[(x_1 - \mathbb{E}[x_1])^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(x_2 - \mathbb{E}[x_2])^2]}}$$

Sachant que  $x_1$  et  $x_2$  suivent la même loi :

$$\mathbb{E}[x_1] = \mathbb{E}[x_2]$$

$$\mathbb{E}[x_1^2] = \mathbb{E}[x_2^2]$$

Alors :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\mathbb{E}[x_1 x_2] - \mathbb{E}[x_1]^2}{\mathbb{E}[x_1^2] - \mathbb{E}[x_1]^2}$$

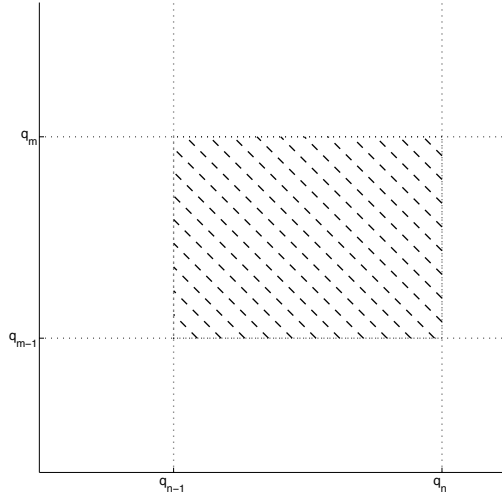
Les espérances simples se calculent facilement :

$$\mathbb{E}[x_k] = \sum_n n \times p_n = \sum_n n(\Phi(q_n) - \Phi(q_{n-1}))$$

$$\mathbb{E}[x_k^2] = \sum_n n^2 \times p_n = \sum_n n^2(\Phi(q_n) - \Phi(q_{n-1}))$$

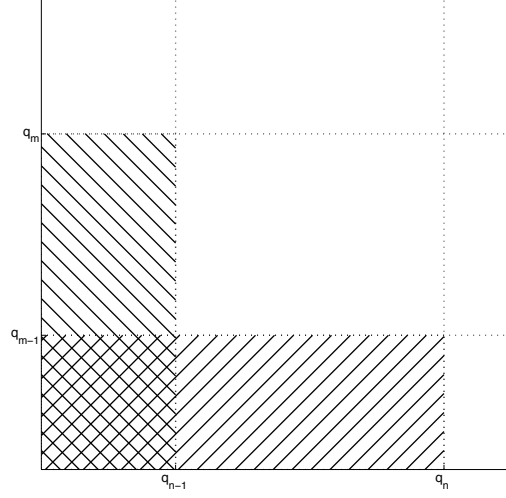
Pour l'espérance jointe nous allons revenir aux probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_1 x_2] &= \sum_n \sum_m n \times m \times \mathbb{P}[(x_1 = n) \& (x_2 = m)] = \\ &\quad \sum_n \sum_m n \times m \times \mathbb{P}[(q_{n-1} < z_1 \leq q_n) \& (q_{m-1} < z_2 \leq q_m)] \end{aligned}$$



La zone des probabilités qui nous intéressent peut facilement être représentée comme une combinaison linéaire des zones illimitées qui correspondent à la fonction cumulée de la densité de probabilité :





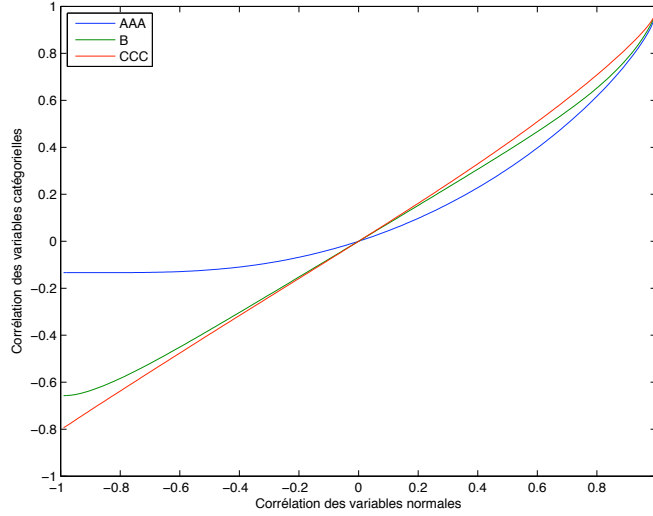
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[(q_{n-1} < z_1 \leq q_n) \& (q_{m-1} < z_2 \leq q_m)] = \\
& \mathbb{P}[(z_1 \leq q_n) \& (z_2 \leq q_m)] - \mathbb{P}[(z_1 \leq q_{n-1}) \& (z_2 \leq q_m)] - \\
& \mathbb{P}[(z_1 \leq q_n) \& (z_2 \leq q_{m-1})] + \mathbb{P}[(z_1 \leq q_{n-1}) \& (z_2 \leq q_{m-1})] = \\
& \Phi_2(q_n, q_m, \lambda_{1,2}) - \Phi_2(q_{n-1}, q_m, \lambda_{1,2}) - \\
& \Phi_2(q_n, q_{m-1}, \lambda_{1,2}) + \Phi_2(q_{n-1}, q_{m-1}, \lambda_{1,2}) \equiv \Psi(n, m, \lambda_{1,2})
\end{aligned}$$

Nous avons toutes les composantes pour assembler la fonction :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sum_n \sum_m n \times m \times \Psi(n, m, \lambda_{1,2}) - \left( \sum_n n \times p_n \right)^2}{\left( \sum_n n^2 \times p_n \right) - \left( \sum_n n \times p_n \right)^2} = f_{\{p\}}(\lambda_{1,2}) \quad (13)$$

La fonction  $f$  est toujours monotone, ce qui nous permet de constituer la fonction inverse, afin de calculer la corrélation des variables normales nécessaire pour obtenir la corrélation voulue des variables du chemin.

$$\lambda_{1,2} = f_{\{p\}}^{-1}(\sigma_{1,2})$$



Alors, avec cette généralisation nous sommes capables de produire les scénarios des chemins complets des titres dans l'espace des notations, et ça quelle que soit la structure de corrélation de variables  $x_k$  désirée, pourvue qu'elle soit positive. A partir de ces scénarios nous allons produire les matrices de transition « empiriques » qu'on va confronter avec les matrices de Standard & Poor's afin de trouver le niveau de la corrélation le plus crédible de point de vue de l'information disponible dans les matrices fournies.

### 3.1.5 Introduction de la corrélation inter-classes

Comme nous avons déjà évoqué dans §3.1, la corrélation inter-classes sera introduite indirectement, via la corrélation commune des processus de migration de notation des titres<sup>24</sup> avec une variable aléatoire commune, qu'on peut considérer comme une « variable du marché ».

Il y a plusieurs façons d'introduire cette corrélation.

**Introduction analytique de la corrélation inter-classes** La première façon d'introduire la corrélation inter-classes consiste à l'appliquer analytiquement. Soit  $X$  et  $Z$  – deux variables normales centrées réduites indépendantes :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), X \perp Z$$

---

24. Encore une fois nous parlons ici de la corrélation de la variable normale sous-jacente.

Alors, en posant la variable  $Y$  comme suit :

$$Y = rZ + \sqrt{1 - r^2}X$$

On crée la variable corrélée avec  $Z$  :

$$\sigma_{YZ} = \mathbb{E}[Y \times Z] = r$$

L'utilisation de cette technique n'est pas directe dans notre cas, car elle change la corrélation intra-classe existante. Effectivement, soit deux variables normales sous-jacentes  $X_1$  et  $X_2$  correspondant aux deux titres de la même classe de notation. Ces deux variables sont corrélées entre elles avec un coefficient de corrélation  $\rho$  et indépendantes par rapport à la variable  $Z$  – variable « marché » :

$$\sigma_{1,2} = \mathbb{E}[X_1 \times X_2] = \rho$$

$$X_1 \perp Z, X_2 \perp Z$$

Introduisons les variables  $Y_1$  et  $Y_2$  de la même manière :

$$Y_1 = rZ + \sqrt{1 - r^2}X_1$$

$$Y_2 = rZ + \sqrt{1 - r^2}X_2$$

Par le même raisonnement on voit que les deux nouvelles variables sont corrélées avec le marché au niveau souhaité :

$$\sigma_{Y_1 Z} = \mathbb{E}[Y_1 \times Z] = r$$

$$\sigma_{Y_2 Z} = \mathbb{E}[Y_2 \times Z] = r$$

Mais la corrélation entre les deux nouvelles variables sera modifiée :

$$\rho' \equiv \sigma_{Y_1 Y_2} = \mathbb{E}[Y_1 \times Y_2] = r^2 + (1 - r^2)\rho = f(\rho, r) \quad (14)$$

Première conséquence de cette déformation est qu'il faut en tenir compte dans la construction des variables catégorielles décrite plus haut. Effectivement, c'est la corrélation finale  $\rho'$  qui définit l'écart-type, il faut donc inverser la fonction afin de trouver la corrélation intra-classe nécessaire avant l'introduction de la corrélation inter-classes :

$$\rho = f^{-1}(\rho', r)$$

Deuxième conséquence est plus importante, car la déformation des corrélations introduit une valeur plancher de la corrélation égale à  $r^2$ . Au-dessous

de cette valeur la corrélation finale est impossible. Or, comme nous allons voir pendant le calibrage (cf. §3.2.3), la corrélation répondant aux écarts-types observés par Standard & Poor's se trouve souvent au-dessous de ce seuil.

C'est principalement pour cette raison que nous allons introduire la corrélation d'une manière différente.

**Introduction combinatoire de la corrélation inter-classes** Soit  $n + 1$  variables aléatoires  $X_1 \dots X_n, Z$ , avec  $m$  réalisations de chaque variable. Représentons cette information sous forme d'une matrice :

Variable	$X_1$	$X_2$	$\dots$	$X_n$	$Z$
Observation 1	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$\dots$	$x_{n,1}$	$z_1$
Observation 2	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{n,2}$	$z_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Observation $i$	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$\dots$	$x_{n,i}$	$z_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Observation $m$	$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$\dots$	$x_{n,m}$	$z_m$

Si dans cette représentation nous changeons l'ordre des lignes, ceci revient à juste changer la numérotation des observations, une opération sans impact sur la corrélation empirique des variables. Par contre, nous pouvons changer l'ordre juste des observations des variables  $X$ , en gardant l'ordre des observations du  $Z$  intacte :

Variable	$X_1$	$X_2$	$\dots$	$X_n$	$Z$
Observation $j_1$ pour $X$ , 1 pour $Z$	$x_{1,j_1}$	$x_{2,j_1}$	$\dots$	$x_{n,j_1}$	$z_1$
Observation $j_2$ pour $X$ , 2 pour $Z$	$x_{1,j_2}$	$x_{2,j_2}$	$\dots$	$x_{n,j_2}$	$z_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Observation $j_i$ pour $X$ , $i$ pour $Z$	$x_{1,j_i}$	$x_{2,j_i}$	$\dots$	$x_{n,j_i}$	$z_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Observation $j_m$ pour $X$ , $m$ pour $Z$	$x_{1,j_m}$	$x_{2,j_m}$	$\dots$	$x_{n,j_m}$	$z_m$

Cette opération ne change toujours pas la corrélation empirique entre les variables  $X$ . Par contre elle peut changer la corrélation empirique entre n'importe quelle variable  $X$  et  $Z$ . En reprenant notre configuration, il est désormais possible d'introduire la corrélation entre les variables  $X$  (les variables correspondant aux titres de la même classe de notation, avec une corrélation intra-classe prédéfinie) et la variable  $Z$  (variable « marché »),

introduire donc la corrélation inter-classes, sans pour autant modifier la corrélation intra-classe existante.

Il faut juste généraliser le procédé en tenant compte de plusieurs classes de notation. Chaque classe de notation doit être traitée indépendamment des autres. Sachant que la variable  $Z$  ne change pas d'ordre des observations, les modifications au sein d'une classe de notation n'influent pas la matrice des observations globale. Nous pouvons donc introduire la corrélation entre chaque classe de notation et la variable « marché » indépendamment. En procédant comme ceci, nous garderons la corrélation intra-classe existante dans chaque classe de notation, et introduisons une corrélation entre les différentes classes de notation – indirectement, par le biais de la corrélation avec la variable « marché ».

Évidemment, la corrélation ainsi obtenue ne peut pas être gérée titre par titre, variable par variable. Nous manipulons des blocs des variables correspondant à une classe de notation, et c'est la corrélation moyenne que nous introduisons entre chaque classe de notation et la variable « marché ». Ceci n'est pas gênant, car tout le raisonnement (à partir de la construction et jusqu'au calibrage) s'effectue en termes des moyennes par classe de notation.

Nous pouvons mesurer cette corrélation moyenne par la moyenne des corrélations de chaque variable  $X$  avec la variable  $Z$  (approche dit « moyenne des corrélations »). Ou par la corrélation de la moyenne des variables  $X$  avec la variable  $Z$  (approche dit « corrélation de la moyenne »). C'est la deuxième approche que nous avons choisie pour notre étude.

Alors, la tâche est de trouver la permutation des lignes des observations de  $X$  telle que la corrélation moyenne des  $X$  (la corrélation de la moyenne des  $X - \bar{X}$ ) avec la variable  $Z$  soit plus proche de la corrélation désirée. Pour cela nous avons utilisé la technique suivante :

- Nous générons une variable  $T$  indépendante des variables  $X$  et  $Z$  :

$$T \perp X_i, T \perp Z$$

- Ensuite (par une procédé de Cholesky) nous créons une variable  $T'$ , toujours indépendante des variables  $X$ , mais ayant une corrélation  $r$  avec  $Z$  – c'est le niveau de corrélation que nous cherchons à obtenir entre  $\bar{X}$  et  $Z$  ;
- Nous mettons les observations des  $X$  dans l'ordre de  $T'$  – à la plus petite valeur de  $T'$  nous mettons en correspondance les observations avec la plus petite valeur de  $\bar{X}$ , etc.
- Sans démonstration formelle, nous arrivons au niveau de corrélation moyenne – et, ce qui est encore plus important, des corrélations titres

par titre – très proches de celui souhaité.

Nous avons tous les éléments pour la construction des scénarios de migrations des notations de chaque titre du portefeuille (les « chemins » de notation). Ces scénarios incluent les corrélations inter-classes et intra-classe telles qu'on les a définies. Les corrélations peuvent être fixées à n'importe quel niveau, c'est le moment de se focaliser sur la question du calibrage – quelle est le bon niveau des corrélations ?

## 3.2 Calibrage

Pendant le calibrage nous allons chercher à paramétrer le modèle de telle manière qu'elle reproduise le plus fidèlement nos observations de la réalité. Dans le §3.2.1 nous allons décrire quelle sont ces observations, et comment nous les interprétons pour pouvoir les comparer avec la sortie de notre modèle.

Dans §3.2.2 nous allons commencer par la partie la plus simple du calibrage – le choix des seuils de discrétisation des variables catégorielles.

Ensuite, au §3.2.3 nous allons expliquer notre approche du calibrage des corrélations – cette question n'a pas d'une seule réponse possible, nous devons alors ne pas seulement justifier notre choix du calibrage, mais également étudier la question de la sensibilité du résultat final au choix du calibrage.

Et finalement, dans §3.2.4 le calibrage de la corrélation inter-classes sera évoquée.

### 3.2.1 Problématique des données

Les observations qui peuvent nous donner l'indice sur la corrélation des migrations des notations des titres se trouvent dans la matrice de transition des notations. Décrivons d'abord de quoi cette matrice est constituée et comment elle est construite.

**Définition de la matrice de migration** La matrice annuelle de transition de notation peut être définie comme :

$$T = \{p^{m \rightarrow n}\}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Où  $p^{m \rightarrow n}$  – la probabilité de passage d'un titre quelconque ayant la notation  $m$  au début de l'année, à la notation  $n$  vers la fin de l'année, et  $\mathbb{N}$  –

l'ensemble des notations<sup>25</sup>.

Le caractère absorbant de la dernière notation (défaut) se traduit par :

$$\begin{cases} p_{D,D} = 1 \\ p_{D,n} = 0, \forall n \neq D \end{cases}$$

Cette définition est facilement généralisable pour d'autres horizons (3 ans, 5 ans, etc.).

La matrice peut être fournie avec l'écart-type  $\sigma^{m \rightarrow n}$  de chaque probabilité donnée, afin de pouvoir estimer l'imprécision de la probabilité moyenne.

**Méthodologie de Standard and Poor's** Les matrices de transition que nous allons utiliser proviennent des études de Standard and Poor's et sont parfaitement conformes à la définition donnée au paragraphe précédent.

La méthodologie de S&P consiste à constituer d'abord des matrices empiriques pour chaque année d'observation. Pour cela on définit à chaque début d'année un échantillon des titres observés en enregistrant leurs notations  $m_k$ . A la fin de l'année cet échantillon est de nouveau observé, et les notations constatées  $n_k$  sont mises en couples avec des notations de départ  $(m_k, n_k)$ .

A partir de ces observations on construit la matrice empirique annuelle pour une année  $i$  :

$$p_i^{m \rightarrow n} = \frac{N_i^{m \rightarrow n}}{N_i^m}$$

Avec  $N_i^m$  – nombre des titres dans l'échantillon ayant la notation  $m$  au début de l'année  $i$ , et  $N_i^{m \rightarrow n}$  – nombre de titres dans l'échantillon qui ont changé leur notation de  $m$  à  $n$  pendant l'année  $i$ .

En observant les matrices annuelles, on peut construire une matrice moyenne pour toute ou une partie de la période d'observation. Dans le cas de la matrice S&P Europe c'est la moyenne des probabilités pondérées par le nombre de titres observés à chaque année qui est utilisée<sup>26</sup> :

$$p^{m \rightarrow n} = \frac{\sum_i p_i^{m \rightarrow n} N_i^m}{\sum_i N_i^m}$$

---

25. Dans notre cas, les classes de notation Standard & Poor's ont été utilisées :

$$\mathbb{N} = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$$

26. Voir « 2010 Annual European Corporate Default Study And Rating Transitions » de S&P pour les détails de leur méthode.

La volatilité empirique de  $p^{m \rightarrow n}$  est calculée de même manière à partir des observations  $p_i^{m \rightarrow n}$  et leurs poids  $N_i^m$ .

Le fait que la moyenne utilisée est pondérée par le nombre de titres observés (et pas par le montant d’emprunt, par exemple) nous permettra d’exploiter ces probabilités pour modéliser le nombre de titres ayant un changement de notation pendant la période.

Effectivement, cette propriété est très intéressante pour la suite. Supposons qu’au lieu d’observer les différents échantillons des titres pendant plusieurs années (comme c’est le cas dans l’étude de S&P), on observe le même échantillon pendant un an, mais avec plusieurs scénarios économiques possibles. On peut supposer l’invariance de la matrice de transition dans le temps – en utilisant la moyenne des probabilités de passages empiriques des différentes années d’observation S&P fait la même hypothèse.

Dans ce cas il est raisonnable de supposer qu’en modélisant le comportement des titres d’une manière conforme à la réalité, nous arriverons à reproduire la matrice conforme à la matrice de transition de S&P<sup>27</sup>. Et vice-versa – pour modéliser ensuite le comportement des titres réels décrits par la matrice de S&P nous pourrions utiliser cette modélisation.

Précisons dès le départ : nous allons supposer que la volatilité des observations de S&P n’est due qu’à la volatilité naturelle des variables. Effectivement, on peut avoir une partie de cette volatilité expliquée par l’incertitude dans les observations, surtout avec les échantillons de la petite taille. Mais la volonté de S&P était de ne commencer ces études en Europe qu’une fois les échantillons ont atteints la taille nécessaire.

**Les hypothèses implicites de la matrice de transition** Le fait d’utiliser la matrice de migration entraîne automatiquement l’acceptation de certaines hypothèses admises pendant sa construction. Il vaut mieux de les lister explicitement avant de continuer.

1. Le fait de regrouper les titres selon leur classe de notation suppose qu’on peut étudier le processus de changement de notation d’un titre n’ayant que la notation de départ comme information. Autrement dit, toute l’information nécessaire pour modéliser la notation future d’un titre est contenue dans sa notation de départ, et aucun autre critère n’intervient dans la modélisation.

---

27. La seule différence de méthode reste le remplacement de la dimension temporelle par la dimension « imaginaire » des simulations, on peut faire l’impasse de cette simplification.



On peut introduire pour chaque titre  $k$  des variables indicatrices suivantes :

$$I_k^{m \rightarrow n} = \begin{cases} 1 & \text{si la nouvelle notation est } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le principe formulé ci-dessus se résume par le fait qu'en moyenne on trouve dans la variable indicatrice la probabilité inscrite dans la matrice de passage (qui ne dépend que de la notation, et est indépendante du titre) :

$$\frac{1}{K_i^m} \sum_k I_k^{m \rightarrow n} \equiv \frac{1}{K_i^m} S^{m \rightarrow n} \xrightarrow{K_i^m \rightarrow \infty} p^{m \rightarrow n}$$

2. La matrice de transition ne donne aucune information sur le comportement du titre à l'intérieur de la période décrite. Nous sommes obligés de supposer que toutes les transitions de notations pendant la période décrite se passent au même moment (par exemple, à la fin de l'année d'observation ou, plus tard, de projection).
3. La matrice des probabilités des migrations ne donne aucun indice sur le comportement joint des titres. Par contre la matrice des écarts-types des observations peut nous donner quelques indications à ce sujet.
4. Le fait de faire une moyenne des matrices empiriques annuelles utilise l'hypothèse de sa stationnarité dans le temps. Cet aspect doit être traité avec une certaine vigilance, pour ne pas utiliser deux fois l'effet de modération des effets de cycle que cette moyenne apporte. Nous allons traiter l'aspect de cyclicité avec plus d'attention dans le §4.4.

**Les portefeuilles de calibrage** Le choix du portefeuille de calibrage est également un point important. Nous avons travaillé avec deux portefeuilles :

1. portefeuille étalon – portefeuille fictif qui est composé de 100 titres dans chaque classe de notation. La taille du portefeuille a été choisie pour que le calibrage avec les données issue du matrice de migration Standard & Poor's soit le plus juste possible (voir la description détaillée de processus du calibrage dans §3.2.3) ;
2. portefeuille assureur – portefeuille fictif mais réaliste, dont la composition ressemble à la structure d'un vrai portefeuille d'assureur-vie : la notation moyenne  $A$ , la duration moyenne de 7 ans, la dispersion de ces valeurs autour de leurs moyennes est également caractéristique pour les portefeuilles des assureurs-vie<sup>28</sup>.

---

28. Un vrai portefeuille – un des portefeuilles gérés par SMABTP – a été utilisé pour

Le premier portefeuille a été utilisé uniquement pour le calibrage du processus de migration des notations, mais ce sont les titres du deuxième portefeuille qui ont été projetés pour les applications numériques.

### 3.2.2 Calibrage des seuils de discrétisation

**Rappel des définitions** Commençons par un rappel de quelques notations.

La variable indicatrice de migration d'un titre  $k$  ayant la notation  $m_k$  à la notation  $n$  :

$$I_k^{m_k \rightarrow n} \equiv \mathbb{I}_{x_k=n}$$

Attention à l'ambiguïté de la terminologie : nous appelons comme « théoriques » les observations du monde réel, i.e. les variables cibles auxquelles nous essayerons d'approcher les variables « empiriques », qui proviennent à leur tour de notre modèle.

La probabilité théorique de migration peut donc être considérée comme l'espérance de la variable indicatrice :

$$p^{m \rightarrow n} = \mathbb{E}[I_k^{m_k \rightarrow n}]$$

L'écart-type théorique – la racine carrée de la variance de la variable indicatrice :

$$\sigma^{m \rightarrow n} = \sqrt{\mathbb{V}[I_k^{m_k \rightarrow n}]}$$

La probabilité empirique et l'écart-type empirique seront notés par les tildes :  $\tilde{p}^{m \rightarrow n}$  et  $\tilde{\sigma}^{m \rightarrow n}$ .

**Calibrage des seuils de discrétisation** Le calibrage des seuils de discrétisation des variables catégorielles est facile, car par construction nous avons choisi ces seuils liés aux probabilités de migration des notations :

$$q_{m,n} = \Phi^{-1} \left( \sum_{\mu=1}^n p^{m \rightarrow \mu} \right), m, n \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket$$

Avec notamment  $q_{m,0} = -\infty$  et  $q_{m,N} = \infty, \forall m$ .

---

cette partie des calculs. Pour les raisons de confidentialité la composition du portefeuille ne sera pas révélé dans ce document. Toutes les caractéristiques monétaires du portefeuille – sa valeur, le montant du risque, etc. – seront données en pourcentage de la valeur du portefeuille au moment de début de modélisation.

### 3.2.3 Calibrage des corrélations intra-classe

Le passage des variables binaires aux variables catégorielles n'est pas anodin. Avec les variables binaires nous étions sûrs de pouvoir retrouver les écarts-types empiriques – avec un seul degré de liberté par classe de notation<sup>29</sup> nous avons démontré qu'il est possible de retrouver le seul écart-type du modèle. Après avoir effectué le passage aux variables caractéristiques nous avons gardé un degré de liberté par classe de notation, mais la structure des écarts-types à retrouver est devenue plus complexe – il y a maintenant autant d'écarts-types par classe de notation que des classes de notation.

Néanmoins, il nous paraît logique de garder cette structure simple de corrélation, malgré le calibrage plus complexe qu'elle entraîne : avec un seul coefficient  $\rho_m$  il nous faut reproduire  $N$  valeurs des écarts-types de la matrice.

En règle générale ce problème n'a pas de solution, mais la structure des valeurs de la matrice de Standard & Poor's est telle qu'elle permet une solution relativement proche, ce qui nous réconforte dans la pensée que notre modèle n'est pas si éloigné de la réalité.

La solution « proche » se trouve par la méthode très similaire de la méthode de moindres carrés – nous allons chercher  $\rho_m$  qui minimise la « distance » entre les écarts-types de notre modèle (les écarts-types « empiriques ») et ceux de la matrice Standard & Poor's (les écarts-types « théoriques »).

**Comment définir une distance ?** La distance peut être définie de plusieurs façons différentes, nous avons testé les distances suivantes :

- La distance pondérée par le poids :

$$D = \sum_n p^{m \rightarrow n} (\sigma^{m \rightarrow n} - \tilde{\sigma}^{m \rightarrow n})^2$$

Cette approche est assez intuitif – on pondère la distance par le poids de chaque passage, en essayant de reproduire plus fidèlement les valeurs obtenues avec plus de crédibilité.

- La distance donnant plus de poids aux dégradations de la notation :

$$D = \sum_n c^{m \rightarrow n} p^{m \rightarrow n} (\sigma^{m \rightarrow n} - \tilde{\sigma}^{m \rightarrow n})^2$$

Avec  $c^{m \rightarrow n}$  croissant avec  $n$  (nous avons testé la version de  $c$  linéaire).

---

29. Le degré de liberté qui consiste à fixer la corrélation des variables normales sous-jacentes.

Cette approche essaye de reproduire plus fidèlement les valeurs qui nous sont plus importantes, à savoir les écarts-types des dégradations de la notation et du défaut.

- La distance donnant plus de poids à la sous-estimation de la variance :

$$D = \sum_n v^{m \rightarrow n} p^{m \rightarrow n} (\sigma^{m \rightarrow n} - \tilde{\sigma}^{m \rightarrow n})^2$$

Avec  $v^{m \rightarrow n}$  plus grand quand  $\sigma^{m \rightarrow n} > \tilde{\sigma}^{m \rightarrow n}$  (nous avons testé la version avec  $v = 1$  si l'écart-type empirique est plus grand que l'écart-type théorique, et  $v = 10$  dans l'autre cas).

Cette approche essaye de former la matrice des écarts-types prudente, sans une sous-estimation de la variance.

TABLE 1 – Probabilités de migration (S&P, Europe, moyenne 1996–2011)

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	84,14%	9,47%	0,66%	5,51%	0,00%	0,00%	0,22%	0,00%
AA	0,27%	84,46%	10,73%	4,54%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
A	0,02%	2,36%	86,36%	10,92%	0,27%	0,02%	0,00%	0,05%
BBB	0,00%	0,12%	4,62%	90,73%	3,69%	0,57%	0,15%	0,12%
BB	0,00%	0,00%	0,16%	19,88%	70,85%	7,75%	0,72%	0,64%
B	0,00%	0,00%	0,10%	18,62%	7,61%	65,07%	4,90%	3,70%
CCC	0,00%	0,00%	0,00%	22,45%	0,00%	16,33%	26,53%	34,69%

TABLE 2 – Les écarts-types de migration (S&P)

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	5,87%	5,87%	1,71%	6,33%	0,00%	0,00%	1,25%	0,00%
AA	0,44%	6,33%	5,76%	2,79%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
A	0,05%	1,35%	3,78%	4,85%	0,38%	0,08%	0,00%	0,11%
BBB	0,00%	0,23%	2,28%	7,52%	2,74%	0,61%	0,36%	0,28%
BB	0,00%	0,00%	2,27%	8,91%	6,97%	4,19%	1,22%	1,17%
B	0,00%	0,00%	0,43%	8,22%	5,02%	7,41%	3,47%	5,19%
CCC	0,00%	0,00%	0,00%	26,61%	0,00%	13,87%	19,68%	24,30%

**Résultats des calibrages** Les trois définitions de la distance donnent trois résultats du calibrage visibles dans la table 3.

Malgré les différences dans la définition, les corrélations ainsi obtenues sont assez proches.

TABLE 3 – Corrélations avec les différents calibrages

Notation	Corrélation		
	D1	D2	D3
AAA	6,00%	7,00%	20,00%
AA	7,50%	8,00%	14,00%
A	6,50%	6,50%	7,00%
BBB	32,00%	32,00%	33,00%
BB	11,00%	14,50%	16,00%
B	12,00%	12,50%	21,00%
CCC/C	61,00%	60,00%	80,00%

TABLE 4 – Les écarts-types avec la distance proportionnelle à la probabilité

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
<b>AAA</b>	5,92%	2,93%	0,35%	2,72%	0,00%	0,00%	0,24%	0,00%
<b>AA</b>	0,29%	6,52%	3,99%	2,86%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>A</b>	0,05%	1,57%	4,00%	4,90%	0,28%	0,05%	0,00%	0,09%
<b>BBB</b>	0,00%	0,43%	6,22%	7,59%	5,19%	1,27%	0,45%	0,53%
<b>BB</b>	0,00%	0,00%	0,27%	9,85%	5,82%	4,55%	0,67%	0,72%
<b>B</b>	0,00%	0,00%	0,20%	9,43%	2,14%	7,11%	2,68%	2,98%
<b>CCC</b>	0,00%	0,00%	0,00%	26,26%	0,00%	9,99%	12,88%	30,32%

TABLE 5 – Les écarts-types avec plus d'importance à la dégradation

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
<b>AAA</b>	6,50%	3,20%	0,36%	2,98%	0,00%	0,00%	0,27%	0,00%
<b>AA</b>	0,30%	6,70%	4,12%	2,90%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>A</b>	0,05%	1,52%	3,86%	4,73%	0,26%	0,05%	0,00%	0,09%
<b>BBB</b>	0,00%	0,48%	6,67%	7,82%	5,05%	1,32%	0,45%	0,56%
<b>BB</b>	0,00%	0,00%	0,28%	10,10%	6,04%	4,89%	0,70%	0,73%
<b>B</b>	0,00%	0,00%	0,19%	9,54%	2,24%	7,18%	2,88%	3,36%
<b>CCC</b>	0,00%	0,00%	0,00%	25,28%	0,00%	10,12%	12,71%	31,03%

TABLE 6 – Les écarts-types avec plus d'importance à la sous-estimation

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
<b>AAA</b>	11,43%	5,39%	0,54%	5,44%	0,00%	0,00%	0,47%	0,00%
<b>AA</b>	0,49%	8,92%	5,44%	3,90%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>A</b>	0,05%	1,59%	4,23%	5,04%	0,29%	0,05%	0,00%	0,11%
<b>BBB</b>	0,00%	0,45%	6,59%	7,79%	5,25%	1,25%	0,44%	0,48%
<b>BB</b>	0,00%	0,00%	0,31%	11,48%	7,20%	5,58%	0,86%	1,01%
<b>B</b>	0,00%	0,00%	0,22%	12,59%	2,85%	10,04%	3,66%	4,11%
<b>CCC</b>	0,00%	0,00%	0,00%	31,42%	0,00%	14,84%	19,83%	35,54%

L'écart de la troisième méthode s'explique par les écarts-types théoriques anormalement hauts dans certains cellules du matrice de transition qui ont des probabilités de migration relativement faibles – par exemple, les cellules  $AAA \rightarrow AA$  et  $AAA \rightarrow A$  ont les écarts-types identiques avec la probabilité de migration 9 fois plus grande dans le premier cas. En cherchant à dépasser tous les écarts-types dont ceux-là, le module de calibrage atteint les niveaux de corrélation assez élevés, en faisant les écarts-types empiriques dépasser de beaucoup les écarts-types théoriques dans la majorité des cas.

### 3.2.4 Calibrage des corrélations inter-classes

N'ayant pas d'indice de corrélation inter-classes en lecture directe dans la matrice de migration, nous avons décidé d'utiliser le calibrage de Barrie+Hibbert : le coefficient de corrélation entre les processus de migration des notations et la variable « marché » est de 35%.

## 3.3 Validation

La validation de notre modèle est effectuée dans deux sens : premièrement, nous nous assurons que le modèle fonctionne correctement dans les cas extrêmes pour lesquels les résultats analytiques peuvent être obtenus.

**Validation avec les processus indépendants** Le résultat négatif obtenu dans le §3.1.2 – l'expression analytique de l'écart-type des probabilités de migration au cas de l'indépendance totale des processus de migration des notations identiques – peut être utilisé pour la validation de notre modèle. Puisqu'il s'agit de la validation du calibrage, nous avons utilisé le portefeuille « étalon » – portefeuille qui est constitué de 100 titres dans chaque classe de notation.

TABLE 7 – Les écarts-types avec des processus de migration indépendants

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	3,67%	2,93%	0,81%	2,29%	0,00%	0,00%	0,47%	0,00%
AA	0,52%	3,63%	3,10%	2,09%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
A	0,14%	1,51%	3,43%	3,11%	0,52%	0,14%	0,00%	0,22%
BBB	0,00%	0,35%	2,11%	2,91%	1,88%	0,75%	0,39%	0,36%
BB	0,00%	0,00%	0,40%	3,98%	4,52%	2,68%	0,84%	0,79%
B	0,00%	0,00%	0,32%	3,87%	2,66%	4,75%	2,16%	1,89%
CCC	0,00%	0,00%	0,00%	4,17%	0,00%	3,68%	4,43%	4,74%

Dans la table 7 sont présentés les écarts-types empiriques qui reproduisent très bien le résultat analytique obtenu pour les processus indépendants :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\mathbb{V} \left[ \frac{1}{K} S \right]} = \sqrt{\frac{1}{K} \tilde{p}(1 - \tilde{p})}$$

En même temps nous avons confronté les scénarios générés par notre modèle aux scénarios générés par le logiciel ESG de Barrie+Hibbert, cette fois c'est le portefeuille « assureur » qui a été utilisé.

Même si l'outil ESG ne permet pas de modéliser la migration des notations d'un portefeuille titre par titre, il permet d'introduire les obligations « caractéristiques » et générer ensuite les scénarios de migration de leurs notations. Sachant que les scénarios ainsi générés sont indépendants entre eux, nous pouvons interpréter  $M \times N$  scénarios indépendants pour un titre « caractéristiques » comme  $M$  scénarios indépendants de  $N$  titres également indépendants.

Notons au passage la faible fiabilité de ce test – nous avons dû baisser considérablement le nombre de scénarios finaux générés par ESG, car la méthode proposée nous oblige de générer  $N$  fois plus de scénarios unitaires pour obtenir le même nombre de scénarios finaux. En même temps, nous avons dû désactiver l'utilisation des variables antithétiques permettant la génération des scénarios qui certes accélèrent la convergence de la méthode Monte-Carlo, mais qui présentent une dépendance, et donc ne peuvent pas être utilisés dans le cadre décrit. Tout cela nous oblige soit à augmenter considérablement le nombre des scénarios, soit à accepter une marge d'erreur supérieure. C'est la deuxième option qui a été choisie, vu qu'il ne s'agit que des tests de validation.

TABLE 8 – SCR crédit (base 100), scénarios indépendants

Migration des notations	Avec		Sans		Sans	
Corrélation inter-classes	Avec		Sans		Sans	
Dynamique $\pi$	Avec	Sans	Avec	Sans	Avec	Sans
Scénarios ESG	3,48	0,49	3,46	0,48	3,25	
Nos scénarios	3,36	0,50	3,36	0,50		

Le tableau ci-dessus affiche les SCR résultant de la migration de notation, mais aussi les SCR de l'effet conjoint de la migration de notation et du changement du spread fondamental. La question de modélisation de ce spread sera abordée en détails dans la partie 4. Notons seulement que les résultats

« avec dynamique  $\pi$  » de cette partie ont été obtenue avec la dynamique de  $\pi$  modélisée par l'ESG de B&H, i.e. la dynamique CIR.

Les écarts entre les résultats obtenus avec les scénarios ESG et nos scénarios sont dans la marge d'erreur Monte-Carlo <sup>30</sup>, qui est plus large dans cet exercice que d'habitude, car pour pouvoir comparer les résultats nous avons dû désactiver l'utilisation des variables antithétiques, ce qui réduit fortement la convergence.

**Validation avec les processus synchrones** La génération des processus parfaitement synchronisés pose un petit problème purement technique – l'outil de calcul que nous avons choisi pour les applications numériques <sup>31</sup> s'avère incapable d'effectuer la factorisation de Cholesky des matrices positives semi-définies. Ce problème est courant, car l'algorithme classique de décomposition de Cholesky n'est applicable qu'aux matrices positives définies, pour les matrices positives semi-définies l'existence d'une telle décomposition est démontrée, mais la démonstration ne donne pas d'algorithme de calcul explicite.

Nous avons contourné cette limitation par une solution très pragmatique en laissant le niveau de corrélation très proche mais pas égale à 100% <sup>32</sup>, la proximité a été choisi de telle manière que l'écart de 100% n'affecte les scénarios générés que dans les cas statistiquement négligeables.

TABLE 9 – Les écarts-types avec des processus de migration synchrones

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
<b>AAA</b>	36,43%	29,16%	8,33%	22,72%	0,00%	0,00%	4,69%	0,00%
<b>AA</b>	5,36%	36,08%	30,82%	20,66%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>A</b>	1,26%	15,32%	34,34%	31,08%	5,67%	1,26%	0,00%	2,57%
<b>BBB</b>	0,00%	3,71%	20,85%	28,98%	19,03%	7,40%	3,87%	3,13%
<b>BB</b>	0,00%	0,00%	4,07%	40,03%	45,47%	26,53%	8,64%	7,87%
<b>B</b>	0,00%	0,00%	3,19%	38,84%	26,50%	47,63%	21,37%	19,03%
<b>CCC</b>	0,00%	0,00%	0,00%	41,63%	0,00%	37,10%	44,30%	47,50%

Dans la table 9 on peut voir les écarts-types empiriques, ils reproduisent

30. On parle ici de flue du résultat qui est dû au nombre de scénarios utilisés pour les calculs – plus ce nombre est important, moins d'écart présentent les résultats des calculs stochastiques. Nous avons opté pour les calculs au 50 000 scénarios – le nombre qui représente à notre avis un bon compromis entre le temps de calcul et l'imprécision du résultat.

31. Nous avons utilisé MatLab R2012a.

32. La valeur de  $1 - 10^{-15}$  a été utilisé au lieu de 1.



très bien le résultat analytique obtenu pour les processus parfaitement synchronisés :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\mathbb{V} \left[ K^2 \frac{1}{K} S \right]} = \sqrt{K\tilde{p}(1 - \tilde{p})}$$

Nous avons encore une fois confronté les scénarios générés par notre modèle aux scénarios générés par le logiciel ESG de Barrie+Hibbert pour le portefeuille « assureur » – cette fois-ci la génération des scénarios équivalentes par l’outil ESG est nettement plus facile, car il suffit d’appliquer les résultats de migration de l’obligation caractéristique aux tous les titres de la même classe de notation, ce qui représente bien la parfaite synchronisation des titres.

Les résultats de SCR calculé avec les deux jeux de scénarios sont assez proches :

TABLE 10 – SCR crédit (base 100), scénarios synchrones

Corrélation inter-classes Dynamique $\pi$	Avec migration des notations					
	Avec		Sans		Sans	
	Avec	Sans	Avec	Sans	Avec	Sans
Scénarios ESG	4,20	2,92	3,99	2,43		
Nos scénarios	4,04	2,87	4,01	2,47		3,25

Ici nous observons le même comportement des écarts qu’avec les scénarios indépendants – toujours dans la marge d’erreur, souvent dans le sens d’une légère sous-estimation du risque.

### 3.4 Résultats

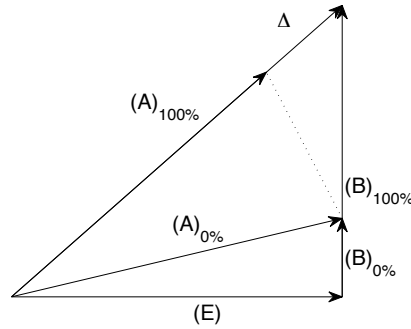
Avant d’analyser les résultats obtenus avec les différents calibrages, analysons les résultats de deux « calibrages » extrêmes – indépendance totale et synchronisation totale des processus de migration des notations des titres.

**Limite théorique de SCR** Sachant que la corrélation intra-classe étudiée est forcément comprise entre 0% et 100%, et que la corrélation plus forte entraîne le SCR plus important, nous pouvons estimer les limites théoriques de la composante du SCR due à la migration des notations. La valeur du SCR migration sera toujours comprise entre 0.50 et 2.87<sup>33</sup>, soit la marge de 2.37.

33. Les valeurs du SCR migration avec une corrélation inter-classes mais sans changement de  $\pi$ , voir le 3.3 pour plus de détails.

L'écart du SCR est important, mais le fait de prendre en compte la variation de  $\pi$  l'atténue significativement. Effectivement, nous partons de l'hypothèse d'indépendance des deux effets – effet de migration des titres et effet de changement de  $\pi$ . Dans ce cas, sachant que SCR est une mesure quadratique, le SCR de deux effets indépendants est la racine carrée de la somme des carrés de chaque SCR.

L'introduction de la deuxième composante peut être illustrée graphiquement :



Le vecteur  $B$  correspond dans le graphique au SCR migration, on voit à droite les deux valeurs correspondants aux deux cas extrêmes de corrélation intra-classe. Le vecteur  $E$  symbolise le SCR fondamental, i.e. le SCR dû au changement du facteur  $\pi$ , calculé sans tenir compte des changements éventuels des notations. Et le vecteur  $A$  correspond au SCR total de ces deux effets.

Dans l'hypothèse d'indépendance des deux effets le vecteur  $E$  est orthogonal aux vecteurs  $B$ , et nous avons une règle de la somme quadratique :

$$A^2 = B^2 + E^2$$

On peut voir que l'écart entre les vecteurs  $A$  des deux scénarios extrêmes s'est rétréci. Pour faciliter la lecture nous avons dessiné un vecteur de la taille  $A_{0\%}$  parallèle au vecteur  $A_{100\%}$ . C'est la différence entre ces deux vecteurs – qui est notée  $\Delta$  sur le graphique – qui définit toutes les valeurs possibles de SCR total dans notre modèle.

En reprenant les chiffres de la validation, le SCR total sera compris entre 3.36 et 4.04. La marge se rétrécit à 0.68.

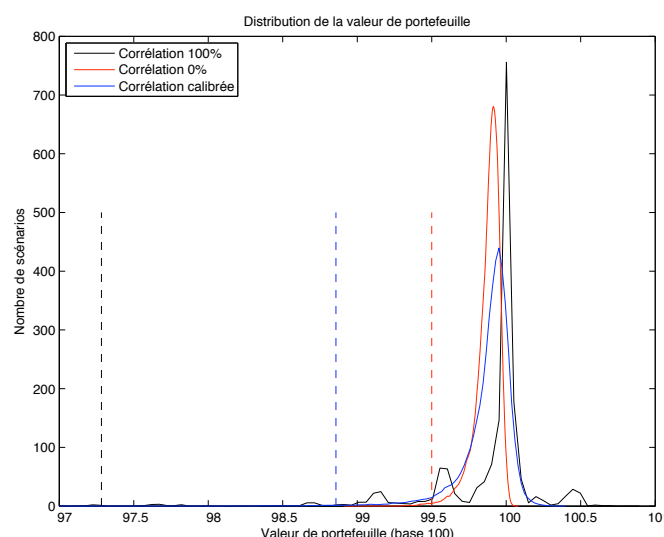
Notons que les résultats sont presque conformes à la règle quadratique décrite plus haut. Ceci n'est pas étonnant, puisque la construction des scénarios utilisés pour l'estimation des SCR supposait l'indépendance des migrations des notations de la fluctuation du spread fondamental.

**Les résultats des 3 calibrages** Nous présentons les résultats des 3 calibrages testés pendant notre étude dans le tableau 11.

TABLE 11 – SCR crédit (base 100), 3 calibrages

Corrélation inter-classes Dynamique $\pi$	Avec		Sans	
	Avec	Sans	Avec	Sans
Distance pondérée par probabilité	3,39	1,10	3,39	1,07
...avec plus d'importance à la dégradation	3,39	1,10	3,39	1,07
...avec plus d'importance à la sous-estimation	3,40	1,14	3,39	1,10

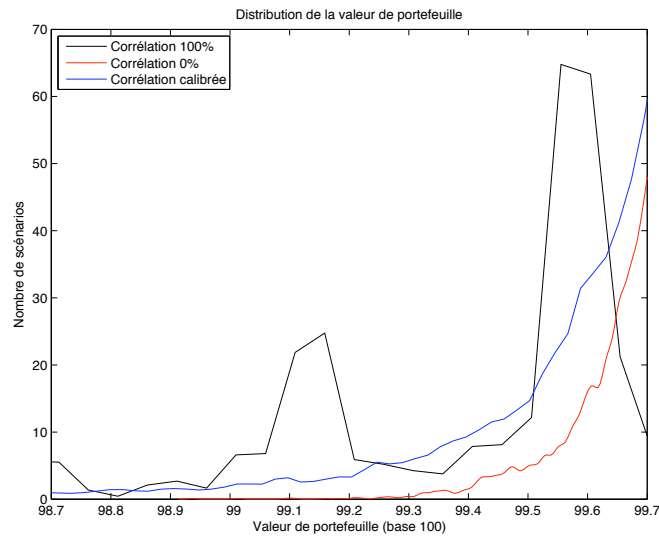
Les résultats de tous les calibrages testés sont assez similaires. Même le troisième calibrage qui, par construction, possède la corrélation la plus élevée, et donc est censé donner le SCR plus importants, ne se détache pas des autres.



Sur le graphique sont présentées les distributions de la valeur boursière du portefeuille en fonction de la corrélation supposée entre ses titres. En pointillé sont affichés les valeurs correspondants au niveau de SCR dans chaque situation.

Malgré le fait que la forme de distribution et la valeur la plus probable restent sensiblement les mêmes dans tous les cas présentés, l'élargissement de la distribution mène à un changement fort du niveau du SCR.

En agrandissant la queue de distribution on peut mieux voir son élargissement avec l'augmentation de la corrélation :



Notons que les pics observés sur la distribution correspondante aux migrations synchrones correspondent bien aux migrations massives des notations des titres. Sans processus  $\pi$  on aurait des valeurs exactes pour ces scénarios qui font changer leur valeur tous les titres de la même classe de notation.

Maintenant, vu son importance dans le résultat final, il est intéressant de se poser la question sur la pertinence de notre modélisation du spread fondamental.

## 4 Modélisation de la variation du spread fondamental

Nous avons amélioré la procédure de modélisation des migrations des notations des différents titres, ce qui nous permet à présent d'estimer le risque de crédit correspondant. Mais, comme nous avons vu dans §1.1, le risque de crédit d'un investisseur ne réside pas uniquement dans une éventuelle dégradation de la notation de ses titres, mais également dans la possibilité d'une évolution de l'aversion du marché au risque de crédit influençant la valeur des titres de crédit toute chose égale par ailleurs – on se réfère au « risque de spread fondamental » dans ce cas.

Dans le modèle JLT, le facteur  $\pi$  reflète l'état du spread fondamental du marché. Le modèle de base ne prévoit pas de dynamique particulière pour ce facteur<sup>34</sup>, mais il existe des extensions à ce modèle intégrant cette dynamique. Par exemple, JLT+ (voir le §2.1.3 pour son introduction) qui attribue la dynamique CIR au facteur  $\pi$  du modèle JLT<sup>35</sup>.

Après avoir défini les données de référence que nous utiliserons pour la validation du modèle et du calibrage (§4.1), nous allons proposer et tester une modélisation différente du facteur  $\pi$  – par une modélisation de sa « rentabilité » logarithmique via des lois GPD (§4.2).

### 4.1 Données des indices de crédit

Sachant que notre but est de modéliser le facteur  $\pi$  du modèle JLT, et que la valeur du facteur  $\pi$  peut dépendre du portefeuille décrit par le modèle, il faut tout d'abord constituer les données de référence (les valeurs de  $\pi$  « historiques » – la définition sera donnée dans le paragraphe suivante) correspondantes au portefeuille en question auxquelles nous pourrions confronter les différentes méthodes de modélisation de  $\pi$ .

C'est le portefeuille « assureur »<sup>36</sup> qui est utilisé pour le calibrage du modèle de  $\pi$ . Pour la construction des données de références les indices de la société Merrill Lynch seront utilisés, commençons par leur description.

---

34. Le modèle initialement introduit par Jarrow, Lando et Turnbull (1997) était censé répondre aux problématiques de valorisation des titres, le facteur  $\pi$  pouvait alors être considéré comme une constante, à estimer à chaque moment où la valorisation est nécessaire.

35. Voir Morrison (2007) pour la définition plus formelle du JLT+.

36. Voir §3.2.1 pour la définition des portefeuilles utilisés pour le calibrage.

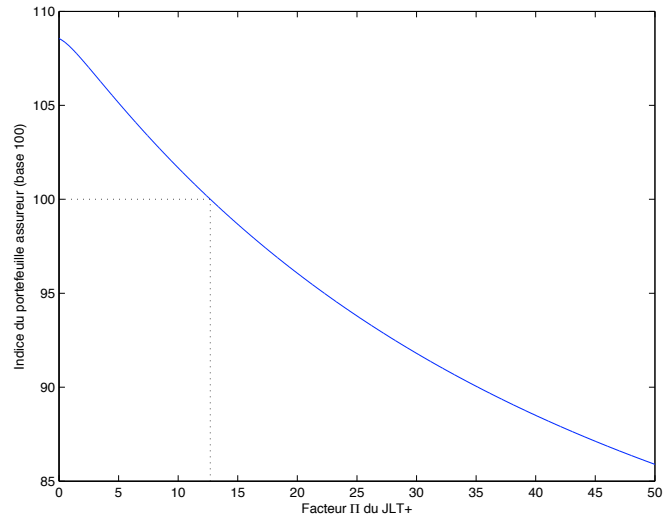
**Indices Merrill Lynch** Les indices de Merrill Lynch sont construits de telle manière qu'ils reflètent l'évolution de l'aversion du marché au risque de crédit.

Pour chaque indice Merrill Lynch compose un échantillon des titres des caractéristiques semblables, notamment la notation et la maturité. Chaque jour la composition de l'indice est revue – les titres ayant changé de notation sortent de l'indice, d'autres titres peuvent y entrer.

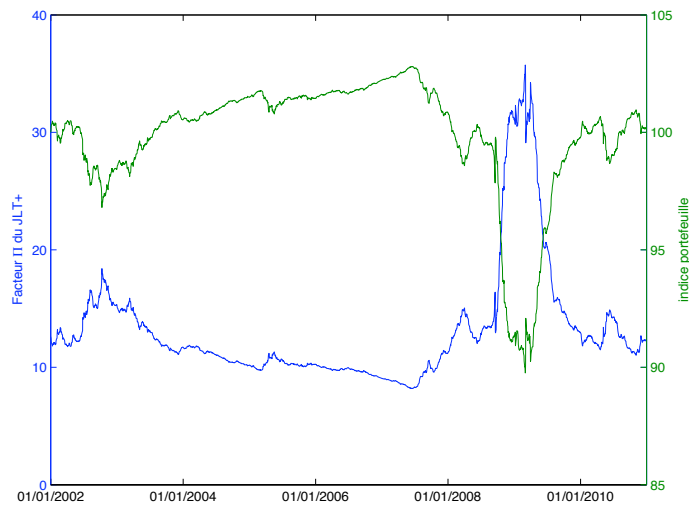
On voit que par construction la composante du risque de dégradation de notation / défaut est sortie de l'indice. De fait, l'évolution de l'indice dépend principalement de l'aversion du marché au risque de crédit, i.e. du risque de spread fondamental.

**Composition des données de référence** Nous allons construire les données de référence en plusieurs étapes :

1. Nous scindons la composition du portefeuille par groupes de titres de notations et de maturités proches (comme le fait avec les titres étudiés Merrill Lynch avant de constituer ces indices) ;
2. A chaque groupe on met en correspondance un indice Merrill Lynch de la notation et maturité proches des valeurs représentatives du groupe ;
3. Connaissant les poids de chaque groupe dans le portefeuille, on peut reconstituer l'indice correspondant à notre portefeuille pour tout l'historique fourni par Merrill Lynch. On précise qu'il s'agit d'une composition d'indice rétroactif, avec un vrai portefeuille ceci correspondrait à l'étude aux positions constantes ;
4. Grâce au modèle de valorisation, nous pouvons étudier la fonction de la valeur de notre portefeuille du facteur  $\pi$  :



5. En appliquant l'inverse de cette fonction monotone à l'historique de l'indice de notre portefeuille, nous obtenons l'historique du facteur  $\pi$  :



La première analyse de l'historique de  $\pi$  nous montre qu'il a un comportement qui n'est pas du tout indépendant – calme pendant des périodes assez longues, le facteur connaît des hausses et des baisses très importantes pendant d'autres périodes.

De plus, le processus de  $\pi$  a une volatilité qui évolue avec le temps. Ceci explique probablement le choix fait par B&H de modéliser ce processus avec le modèle CIR. Pour notre part, nous avons choisi de modéliser le facteur  $\pi$

par une loi mélange des lois GPD.

## 4.2 Modélisation par la loi mélange GPD

Après l'échec du calibrage du processus CIR, nous allons essayer d'autres façon de modéliser la dynamique de  $\pi$ . Un des choix naturels est de la modéliser en utilisant la loi généralisé de Pareto (GPD).

Tout d'abord, nous allons expliquer le choix de cette loi (§4.2.1). Ensuite, nous allons poser les bases de la modélisation par l'introduction de la loi mélange (§4.2).

La question du calibrage de la loi GPD est abordée en deux temps : d'abord on cherche le seuil optimal à partir duquel les valeurs seront modélisées par cette loi (§4.2.3). Une fois le seuil défini, on va chercher les paramètres de la distribution en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance (§4.2.4).

Après avoir effectué le calibrage, nous allons définir la méthode de modélisation du  $\pi$  (§4.2.6). Les résultats obtenus avec les scénarios où le  $\pi$  est géré par la loi mélange seront présentés dans §4.3.

### 4.2.1 Modélisation des valeurs extrêmes

Le théorème de Packlands–Balkema–de Haan<sup>37</sup> stipule que pour une large classe des distributions de variable aléatoire, la distribution conditionnelle au-delà d'un certain seuil peut être bien modélisée par une loi généralisé de Pareto.

Rappelons les définitions. Soit une variable aléatoire  $X$  i.i.d. est gérée par une loi de distribution inconnue  $F$ . Pour un seuil  $\theta$  donné on appelle la fonction de distribution conditionnelle  $F_u$  :

$$F_\theta(y) = P[X - \theta \leq y | X > \theta] = \frac{F(\theta + y) - F(\theta)}{1 - F(\theta)}$$

Alors, pour une large classe de  $F$  nous avons une convergence de loi<sup>38</sup> :

$$F_\theta(y) \rightarrow \mathcal{GPD}_\theta[\xi, \sigma](y), \theta \rightarrow \infty$$

---

37. Parfois appelé « le deuxième théorème de la théorie des valeurs extrêmes ».

38. La définition du périmètre d'application du théorème reste complètement hors périmètre de notre document, nous nous contentons d'une tentative du calibrage en s'assurant que l'hypothèse de la loi sous-jacente n'est pas complètement déconnectée de la réalité. Voir par exemple Embrechts (1997) pour la précision sur le périmètre d'applicabilité de théorème, aussi bien que sa démonstration.



La fonction de distribution de la loi GPD est définie sur un support non-négatif comme suit :

$$\mathcal{GPD}_\theta[\xi, \sigma](y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}} & \xi = 0 \end{cases} \quad (15)$$

C'est une loi de deux paramètres : paramètre d'échelle  $\sigma$  et paramètre du forme  $\xi$ . Sachant que cette loi couvre toutes les valeurs non-négatives, notre utilisation pour toutes les valeurs dépassant un certain seuil introduit de facto le troisième paramètre – paramètre du seuil  $\theta$ .

Autrement dit, en revenant à la variable initiale  $x$  :

$$\mathcal{GPD}_\theta[\xi, \sigma](x - \theta) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\theta)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}} & \xi = 0 \end{cases}$$

Dans la théorie des valeurs extrêmes on distingue 3 champs d'attractivité selon la valeur du paramètre  $\xi$  de la loi GPD :

- $\xi = 0$  – le champ d'attractivité de type I (ou type Gumbel) ;
- $\xi > 0$  – le champ d'attractivité de type II (ou type Fréchet) ;
- $\xi < 0$  – le champ d'attractivité de type III (ou type Weibull inverse) ;

#### 4.2.2 Modélisation du $\pi$ par une loi mélange des GPD

Premièrement, on change le cible de modélisation : au lieu de modéliser  $\pi$  directement (comme nous avons fait avec le processus CIR) nous allons essayer de modéliser sa rentabilité logarithmique  $r_i$  :

$$r_i = \ln \frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$$

Cette variable sera modélisée par une loi mélange des différentes lois GPD – une loi pour les valeurs extrêmes négatives, une autre – pour les valeurs extrêmes positives.

Nous cherchons alors à définir les 2 seuils  $\theta^-$  et  $\theta^+$  tels que :

$$\begin{cases} (-r_i - \theta^-) \rightsquigarrow \mathcal{GPD}_{\theta^-}[\xi^-, \sigma^-](-r_i - \theta^-) & \text{si } r_i < -\theta^- \\ (r_i - \theta^+) \rightsquigarrow \mathcal{GPD}_{\theta^+}[\xi^+, \sigma^+](r_i - \theta^+) & \text{si } r_i > \theta^+ \end{cases}$$

Autrement dit, nous allons modéliser les valeurs extrêmes de notre variable par deux lois GPD indépendantes. La modélisation de la partie centrale

ne pose aucun problème, car elle peut être parfaitement modélisée par une loi normale proche, voire – et c’était notre choix – par l’utilisation des données historiques (on va se référer à la « loi empirique » dans ce cas).

Pour faciliter la lecture, appelons  $\mathcal{LM}$  la loi mélange constituée des trois morceaux – deux lois GPD pour les extrêmes et une loi empirique au centre.

$$r_i \rightsquigarrow \mathcal{LM}$$

### 4.2.3 Estimation des seuils

L’estimation du seuil optimal est un compromis entre le niveau très haut qui nous fait ne considérer que les valeurs extrêmes, et le niveau bas qui nous permet d’avoir plus de points pour l’estimation des paramètres et, surtout, donne plus d’utilité à cette loi pendant la projection.

Même s’il existe des méthodes facilitant le choix du seuil (voir Hill (75) pour un exemple), ils ne remplacent jamais un jugement d’experte. Nous avons testé l’approche de Hill, mais malheureusement il préfère souvent le niveau trop bas, au détriment la finesse de la modélisation des valeurs vraiment extrêmes.

Nous verrons une illustration de la difficulté d’estimation automatique du seuil dans §4.2.5.

### 4.2.4 Estimation des paramètres $\xi$ et $\sigma$ de la loi GPD

C’est la méthode de maximum de vraisemblance qui est utilisée.

La fonction à maximiser est :

$$L(\xi, \sigma, R) = -K \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^K \ln \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} r_i\right)$$

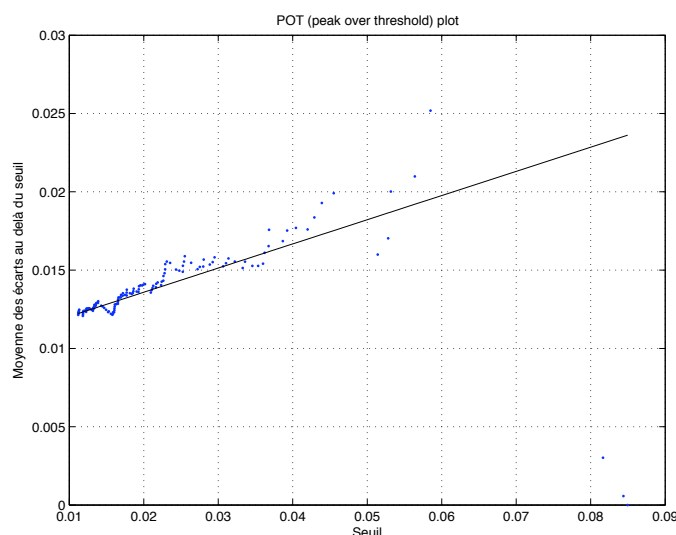
La solution analytique n’existe pas, par contre la solution numérique existe et est robuste.

### 4.2.5 Résultats du calibrage GPD

Commençons par une illustration de la difficulté de sélection automatique des seuils par l’exemple obtenu avec notre portefeuille « assureur ».

Pour contrôler la qualité de modélisation des valeurs extrêmes, on utilise souvent le graphique montrant la valeur moyenne de dépassement du seuil pour chaque seuil possible (« POT plot » ou « Peak Over threshold plot »).

En bleu dans le graphique sont présentés les points du POT plot (la moyenne de dépassement du seuil pour chaque seuil), en noir – leurs approximation par la loi GPD, dans ce cas concret la loi GPD a été calibré avec un seuil choisi par la méthode automatique issue de la méthode de Hill.

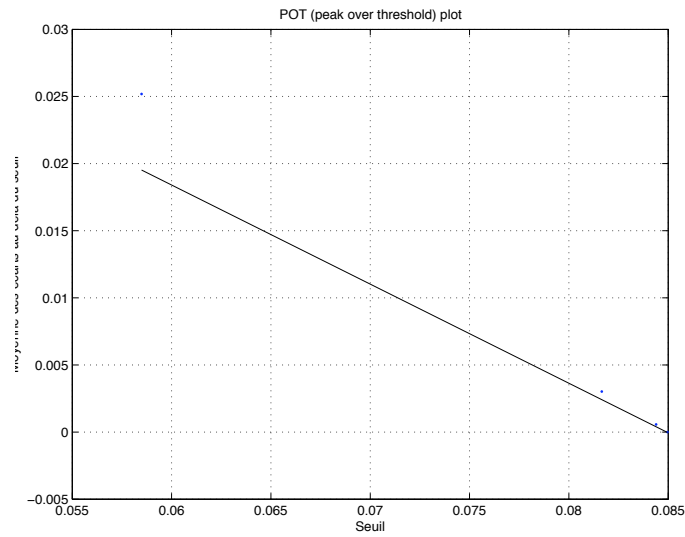


On voit que la majorité des points sont bien modélisée par la loi GPD, on se trompe probablement du champ d'attractivité. Effectivement, les 3 champs d'attractivité cités plus haut correspondant chacun à son type de la droite du graphique POT :

- $\xi = 0$  – le champ d'attractivité Gumbel correspond à la ligne noire horizontale ;
- $\xi > 0$  – le champ d'attractivité Fréchet correspond à la ligne noire croissante de droite à gauche ;
- $\xi < 0$  – le champ d'attractivité Weibull inverse correspond à la ligne noire décroissante de droite à gauche ;

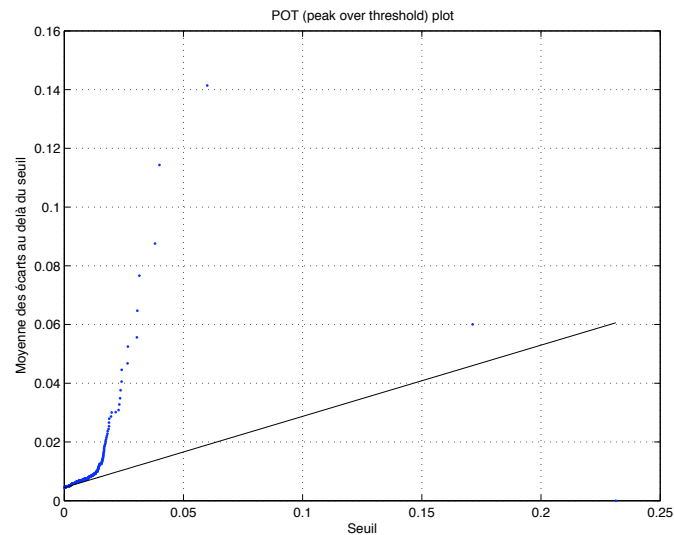
Selon le calibrage obtenu on est clairement dans le champ Fréchet.

Mais si on s'intéresse maintenant aux 3 points en bas à droite dans le graphique (et nous avons tout intérêt de s'y intéresser, car ce sont ces points « atypiques » qui représentent les valeurs extrêmes de la distribution observée), c'est-à-dire qu'on fixe le seuil manuellement au niveau de 5.8% on voit que la distribution change du champ d'attractivité, et on se retrouve avec la loi de Weibull inverse :

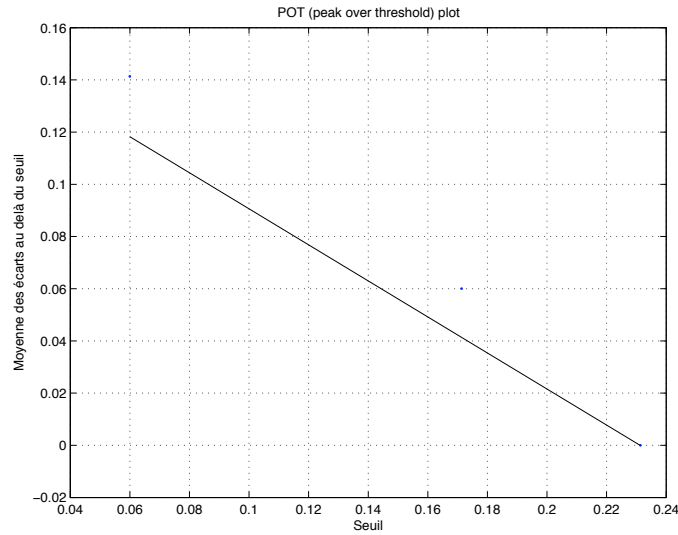


Le fait de se concentrer sur les valeurs extrêmes en laissant de côté la majorité des points plus centraux ne pose aucun problème, car le centre de distribution peut être facilement modélisé autrement – par une loi appropriée (loi normale fonctionne très bien avec nos échantillons), voire avec une loi « empirique » (c’est le choix qui a été retenu pour ce document).

La situation est la même pour la partie inférieure de la loi mélange. Avec un seuil « Hill » nous sommes toujours dans le champ Fréchet :



Et on bascule dans le champ de Weibull inverse dès la sélection du seuil de 5.8% (le fait de tomber sur la même valeur absolue du seuil est une coïncidence) :

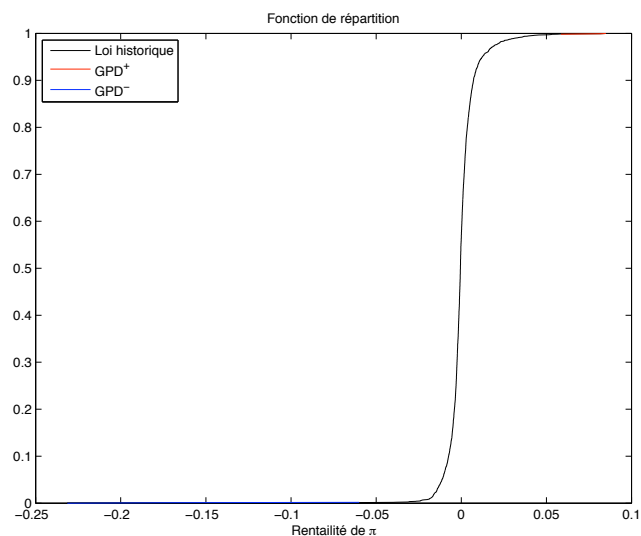


Le paramétrage suivant est obtenu :

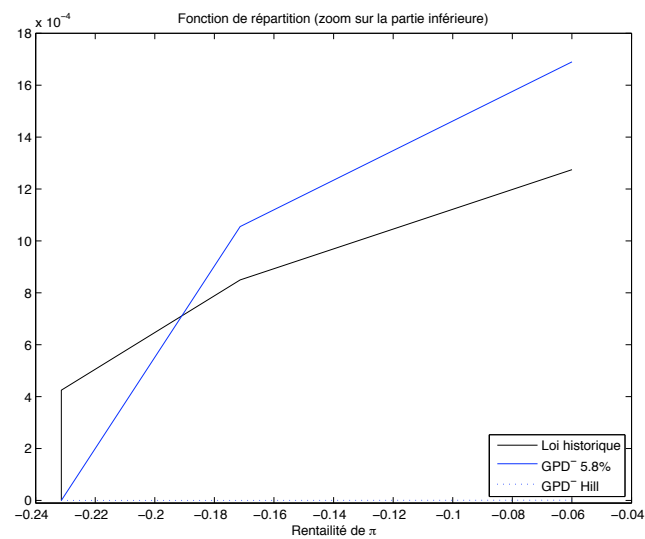
$$\begin{cases} \theta^- = 0.058 \\ \xi^- = -2.23 \\ \sigma^- = 0.387 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta^+ = 0.058 \\ \xi^+ = -2.82 \\ \sigma^+ = 0.076 \end{cases}$$

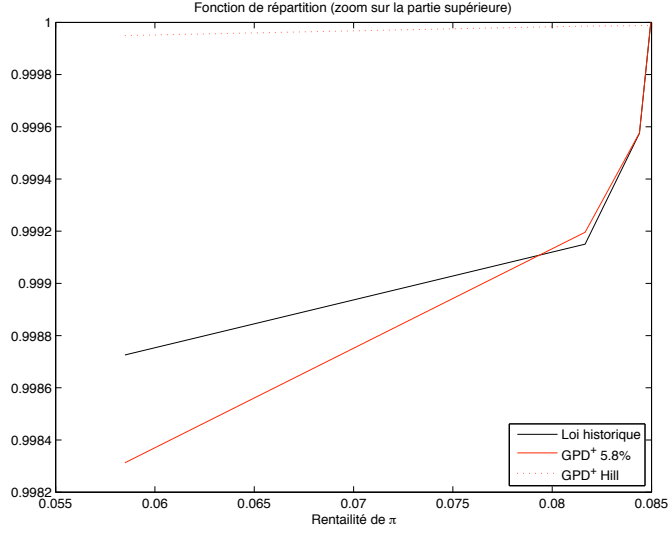
Pour vérifier le calibrage final, nous utilisons encore une fois la méthode graphique :



Sachant que c'est la modélisation des parties extrêmes de la distribution qui nous intéresse le plus, faisons le zoom sur ces parties :



Sur les mêmes graphiques on peut voir également les fonctions de répartition des loi GPD calibrées avec les seuils choisis automatiquement. On voit bien que ce calibrage sous-estime fortement les valeurs extrêmes, qui sont assez bien captées par le calibrage « manuel ».



#### 4.2.6 Modélisation du $\pi$

Étant satisfait du calibrage, nous pouvons procéder à la simulation. À partir du  $\pi_0$  – la valeur du facteur  $\pi$  observée à la date de début des simulations – nous pouvons obtenir  $\pi_1^{(j)}$  pour un scénario stochastique  $j$  avec des tirages au sort consécutifs de la rentabilité qui suit la loi mélange :

$$\pi_1^{(j)} = \pi_0 \times e^{R^{(j)}}$$

$$R^{(j)} = \sum_{n=1}^{260} r_n^{(j)}$$

$$r_n^{(j)} \rightsquigarrow \mathcal{LM}$$

Plusieurs tirages sont nécessaires suite au changement d'échelle temporelle entre la loi calibrée avec les données journalières et des simulations annuelles souhaitées. Sachant que les données utilisées pendant le calibrage contiennent en moyenne 260 points journaliers par an (nous n'avons que des observations pendant les jours ouvrés), il nous faut 260 tirages pour un scénario annuel.

Une fois les scénarios de  $\pi_1$  constitués, on valorise le portefeuille dans chacun de ces scénarios pour trouver la distribution des valeurs du portefeuille et, comme conséquence, le quantile correspondant à la probabilité de Credit-VaR recherché.

### 4.3 Résultats

Les résultats de la modélisation  $\pi$  avec les lois GPD sont présentés dans la table suivante. Pour faciliter la lecture et comparaison des méthodes (modélisation du  $\pi$  par la loi mélange v.s. la modélisation standard de Barrie+Hibbert), les résultats des Tables 8 et 11 sont repris :

TABLE 12 – SCR crédit (base 100),  $\pi$  suivant la loi mélange GPD

	Dynamique $\pi$	B&H	GPD
Sans migration de notation		3,25	3,44
Distance pondérée par probabilité		3,39	3,59
Distance avec plus d'importance à la dégradation		3,39	3,59
Distance avec plus d'importance à la sous-estimation		3,40	3,58

### 4.4 Prise en compte de la cyclicité

Il ne faut pas perdre de vue la question de cyclicité – en calibrant le processus JLT sur une période assez longue, on obtient un calibrage qui ne tient pas compte de notre position actuelle dans le cycle du marché, que ce soit pour le calibrage de  $\pi$  ou le calibrage des corrélations des processus de migration des notations. Rappel : les écarts-types, qui sont le point de départ du calcul de corrélation intra-classe, sont estimés à partir de l'historique assez longue, en supposant la stationnarité des probabilités de migration dans le temps.

Une critique qui peut être faite pour ce type de calibrage *real-world* est la non-prise en compte de l'information actuelle susceptible de modifier le résultat. En réalité, une partie de ces éléments sont prise en compte pour la composante de risque de défaut dans la mise à jour des hypothèses des taux de recouvrement, qui doivent être établis par une expertise suite à un travail approfondi d'une analyse de risque individuel de chaque société en tenant compte de l'environnement économique actuel.

Pour la composante du spread fondamental, et dans le cadre d'une gestion assurancielle de type *buy and hold*, l'exploitation d'élément historique suffit dès lors que celui-ci ne sous-estime pas les éventuelles ruptures observées récemment.

Le cadre de la gestion spécifique à l'assurance-vie (gestion de long-terme avec la liquidation lente des engagements) permet la mutualisation d'une telle approche, qui serait déconseillée pour l'activité de trading, par exemple.

Le législateur a par ailleurs décidé d'opter pour la mise en place d'outil



permettant de traiter la volatilité de la valeur des fonds propres de base calculés selon le principe de juste valeur économique. En conséquence et pour éviter le double comptage des effets amortisseurs il est nécessaire d'opter pour une mesure des SCR crédit ne tenant pas compte de l'effet cycle, qui doit être plus ou moins neutralisé par les ajustements prévus dans la valorisation de fonds propres de base.

## 5 Conclusion et pistes d'améliorations

La technique de modélisation du crédit développée dans ce document est constituée de deux parties : la partie de modélisation des processus de migration de notation des titres, et celle de modélisation du spread fondamental.

Chacune de ces parties propose une amélioration du modèle de départ.

La modélisation des processus de migration de notation des titres tient compte des migrations corrélées et donne les résultats conformes aux observations de Standard & Poor's. Même de point de vue naïve, il est clair que modéliser les migrations des titres comme parfaitement synchrones est une méthode trop prudente et peu réaliste.

La modélisation du spread fondamental par une loi issue des lois Pareto est également plus réaliste que modélisation basée sur la loi normale. Effectivement, les observations nous montrent la présence des changements assez brutales du spread fondamentale – une chose impossible (très peu probable) avec une loi normale.

Par contre, l'hypothèse d'indépendance de ces deux facteurs de risque semble être trop optimiste. En effet, elle n'a aucun fondement théorique. En plus, l'introduction d'une corrélation entre ces deux facteurs de risque peut changer radicalement les résultats<sup>39</sup>.

Il semble donc très pertinent de continuer la recherche dans ce sens. En commençant par la recherche des indicateurs nous permettant de dire si cette corrélation existe réellement. Et si oui, bâtir un système de calibrage de la corrélation. Une fois la corrélation définie, elle peut être facilement introduite dans le modèle.

Un autre point qui mériterait l'amélioration concerne le calibrage et l'application de la corrélation inter-classes. Actuellement le calibrage de Barrie+Hibbert est utilisé, car dans nos données il n'y a pas d'information nous permettant de la calibrer proprement.

Un accès aux données plus détaillées (information titre par titre des statistiques de Standard & Poor's ou équivalent) permettrait peut-être d'améliorer le calibrage.

La gestion des titres non-notés attire également notre attention. Dans notre étude nous avons considéré un portefeuille crédit avec tous les titres ayant une notation. Dans la pratique la gestion des titres non-notés pose un problème qui est souvent résolu en les assimilant arbitrairement à une classe de notation quelconque.

---

39. Pas forcément en dégradant le SCR.

Une amélioration peut être apportée soit en introduisant un système de notation interne (même si approximatif) pour ces titres.

## 6 Bibliographie

- Henry Block, Zhaoben Fang, 1988, « A multivariate extension of Hoeffding's lemma », *The Annals of Probability*, volume 16, No. 4, 1803–1820.
- Mark Davis, Violet Lo, 1999, « Infectious defaults ».
- Sandra Foulcher, Christian Gouriéroux, André Tiomo, 2006, « La corrélation de migration : méthode d'estimation et application aux historiques de notation des entreprises françaises », *Annales d'économie et de statistique*, No. 82, 71–101.
- Patrick Gagliardini, Christian Gouriéroux, 2005, « Migration Correlation : Definition and Efficient Estimation », *Journal of Banking & Finance*, volume 29, issue 4 (April 2005), 865–894.
- Robert Jarrow, Fan Yu, 2001, « Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Securities », *The Journal of Finance*, volume 56, No. 5, 1765–1799.
- Douglas Lucas, 1995, « Default correlation and credit analysis », *Journal of Fixed Income*, March 1995, 76–87.
- Jakob H. Macke et al., 2009, « Generating Spike Trains with Specified Correlation Coefficients », *Neural computation* 21, 397–423.
- Roland Portait, Patrice Poncet, 2009, « Finance de marché, Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques », 2<sup>ème</sup> édition, *Dalloz*.
- Philipp J. Schönbucher, 2003, « Credit derivatives pricing models », *Wiley Finance*.
- « Directive-cadre Solvabilité II » – Directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice, *Journal officiel de l'Union européenne*, 17/12/2009.
- « Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment (Part I) », *EIOPA-DOC-13/061*, 28 January 2013.
- « Draft Technical Specifications QIS of EIOPA's Advice on the Review of the IORP Directive », *EIOPA BOS 12/085*, 2 October 2012.

**Autres sources mentionnées dans le document :**

- « Convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres » – Comité de Bâle sur le contrôle bancaire, *Banque des Règlements Internationaux*, 2004.
- Fischer Black, John Cox, 1976, « Valuing corporate securities : some effects of bond indenture provisions », *Journal of Finance*, volume 31, issue 2, 351–367.
- John Cox, Jonathan Ingersoll, Stephen Ross, 1985, « A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica*, volume 53, issue 2 (March 1985), 385–408.
- Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, 1997, « Modelling Extremal Events : for Insurance and Finance », *Springer*, Berlin.
- Greg Gupton, Christopher Finger, Mickey Bhatia, 1997, CreditMetrics – Technical Document.
- Nrucc M. Hill, 1975, « A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution », *The Annals of Statistics*, volume 3, n° 5, 1163–1174.
- Jonathan R. M. Hosking, James R. Wallis, 1987, « Parameter and quantile estimation for the Generalized Pareto distribution », *Technometrics*, volume 29, issue 3, 339–349.
- Robert Jarrow, David Lando, Stuart Turnbull, 1997, « A Markov model for the term structure of credit risk spreads », *The Review of Financial Studies*, volume 10, No. 2, 481–523.
- Nick Jessop, 2008, « Cox Ingersoll Ross Process. Stochastic Volatility and Credit Premium », *Barrie+Hibbert*.
- Robert Merton, 1974, « On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates », *Journal of Finance* 29, 449–470.
- Steven Morisson, 2007, « A General Rating-based Credit Spread Model. Part 1 : Technical Specification », *Barrie+Hibbert*.