Annexes Chapitre 3

Prévisions de court terme : Méthodes de lissage exponentiel

Olivier DARNÉ

Dérivation de la formule du LES : On cherche la constante telle que

$$\min_a \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a)^2 \equiv \min_a S$$

En prenant la dérivée de S par rapport à a, et en l'annulant

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - \widehat{a}_T) = 0$$

On obtient

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} = \widehat{a}_T \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j = \widehat{a}_T \left(\frac{1-\beta^T}{1-\beta} \right)$$

La solution du problème de minisation permet d'obtenir le **prédicteur du LES** :

$$\widehat{a}_T = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^T} \right) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}$$

Formule adaptative : On peut réécrire autrement la formule de calcul de la prévision $\widehat{X}_T(h)$ en $\widehat{X}_{T-1}(h)$ et en multipliant de chaque côté par β

$$\beta\widehat{X}_{T-1}(h) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-2}\beta^{j+1}X_{T-j+1} = (1-\beta)\sum_{j=1}^{T-1}\beta^{j}X_{T-j}$$

d'où l'erreur de prévision

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T(h) - \beta\widehat{X}_{T-1}(h) &= (1-\beta)\left[\sum_{j=0}^{T-1}\beta^{j}X_{T-j} - \sum_{j=1}^{T-1}\beta^{j}X_{T-j}\right] \\ &= (1-\beta)X_T\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T(h) &= \beta\widehat{X}_{T-1}(h) + (1-\beta)X_T \\ &= \beta\widehat{X}_{T-1}(h) + (1-\beta)X_T + \left[\widehat{X}_{T-1}(h) - \widehat{X}_{T-1}(h)\right]\end{aligned}$$

On obtient alors la **formule de mise à jour** ou **formule adaptative**

$$\widehat{X}_T(h) = \widehat{X}_{T-1}(h) + (1-\beta)\left(X_T - \widehat{X}_{T-1}(h)\right)$$

Cette formule permet de calculer directement (à partir de la prévision $\widehat{X}_{T-1}$ à la date $T-1$) une nouvelle prévision $\widehat{X}_T$ lorsqu'une nouvelle observation X_T est effectuée.

Cette équation permet donc de mettre à jour les prévisions à l'horizon h à partir de la dernière prévision de manière extrêmement simple

L'initialisation de la récurrence (car X_1 connu et $\widehat{X}_1$ inconnu) est généralement faite de 2 manières :

- soit $\widehat{X}_1 = X_1$
- soit $\widehat{X}_1 = (1/T)\sum_{t=1}^{T} X_t$

Le lissage exponentiel double (LED)

Le lissage exponentiel double (LED) généralise l'idée du LES au cas où la série peut être ajustée par une droite au voisinage de T

$$X_t = a + b(t - T)$$

On cherche dans ce cas une prévision à l'horizon h, $\widehat{X}_T(h)$ de la forme :

$$\widehat{X}_T(h) = \widehat{a}_T + \widehat{b}_T h$$

où le couple $(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T)$ minimise la fonction

$$\min_{a,b} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left[X_{T-j} - (a + bj)\right]^2 \equiv \min_{a,b} Q$$

La solution de ce problème s'obtient en annulant les dérivées partielles de la fonction précédente par rapport à a et b.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a} &= -2\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j\left(X_{T-j}-(a+bj)\right)=0\\
\frac{\partial Q}{\partial b} &= 2\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j\left(X_{T-j}-(a+bj)\right)=0
\end{aligned}$$

- En notant la série lissée, appelée LES de la série initiale

$$S_1(t)=(1-\beta)\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j X_{t-j}$$

- et la série doublement lissée, appelée LES de la série lissée

$$\begin{aligned}
S_2(t) &= (1-\beta)\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j S_1(t-j)\\
&= (1-\beta)^2\sum_{j=0}^{t-1}(j\beta^j X_{t-j})+(1-\beta)S_1(t)
\end{aligned}$$

La solution du problème de minisation permet d'obtenir les prédicteurs du LED :

$$\begin{aligned}\widehat{a}_T &= 2S_1(T) - S_2(T)\\ \widehat{b}_T &= \frac{1-\beta}{\beta}(S_1(T) - S_2(T))\end{aligned}$$

Prévision

La **prévision** de la série à l'horizon h, $\widehat{X}_T(h)$, fournie par le **LED** est donnée par

$$\widehat{X}_T(h) = \widehat{a}_T + \widehat{b}_T h$$

où β est la **coefficient de lissage**, et le couple $(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T)$ est donné par

$$\begin{aligned}\widehat{a}_T &= 2S_1(T) - S_2(T)\\ \widehat{b}_T &= \frac{1-\beta}{\beta}(S_1(T) - S_2(T))\end{aligned}$$

Formule adaptative : On peut réécrire les séries lissées :

$$
\begin{aligned}
S_1(T) &= \beta S_1(T-1) + (1-\beta) X_T \\
\\
S_2(T) &= \beta S_2(T-1) + (1-\beta) S_1(T) \\
&= \beta S_2(T-1) + (1-\beta)\left[\beta S_1(T-1) + (1-\beta) X_T\right] \\
&= \beta S_2(T-1) + \beta(1-\beta) S_1(T-1) + (1-\beta)^2 X_T
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}_T &= 2S_1(T) - S_2(T) \\
&= (1-\beta)^2 X_T + \beta^2 \left[\widehat{a}_T(T-1) + \widehat{b}_T(T-1)\right] \\
&= (1-\beta)^2 X_T + \beta^2 \widehat{X}_{T-1}(1) \\
&= \widehat{a}_T(T-1) + \widehat{b}_T(T-1) + (1-\beta)^2 \left[X_T - \widehat{X}_{T-1}(1)\right] \\
&= \widehat{X}_{T-1}(1) + (1-\beta)^2 \left[X_T - \widehat{X}_{T-1}(1)\right] \\
\\
\widehat{b}_T &= \widehat{b}_T(T-1) + (1-\beta)^2 \left[X_T - \widehat{X}_{T-1}(1)\right]
\end{aligned}
$$

Les formules de mise à jour s'obtiennent à partir de ces expressions :

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_T &= \widehat{a}_{T-1} + \widehat{b}_{T-1} + (1-\beta)^2 \left(X_T - \widehat{X}_{T-1}(1) \right) \\
\widehat{b}_T &= \widehat{b}_{T-1} + (1-\beta)^2 \left[X_T - \widehat{X}_{T-1}(1) \right]
\end{aligned}$$

L'initialisation de la récurrence est généralement obtenue par :

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_2 &= X_2 - X_1 \\
\widehat{b}_2 &= X_2
\end{aligned}$$

La méthode de Holt et Winters (non saisonnière)

La formule de mise à jour pour le LED peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_T &= (1-\beta)^2 X_T + \beta^2 \left(\widehat{X}_{T-1}(1) + \widehat{X}_{T-1}(2)\right) \\
&= (1-\beta)^2 X_T + \beta^2 \left(\widehat{a}_T(T-1) + \widehat{b}_T(T-1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_T &= \frac{1-\beta}{2}\left(X_T(1) - \widehat{X}_{T-1}(1)\right) + \left(\frac{1+\beta}{2}\right)\widehat{b}_{T-1} \\
&= \widehat{b}_T(T-1) + \frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2}\left[\widehat{a}_T(T) + \widehat{a}_T(T-1) + \widehat{b}_T(T-1)\right]
\end{aligned}$$

Holt et Winters ont alors proposé une version de ces formules de mise à jour où les pondérations ne dépendent pas que d'un seul paramètre (β) mais de 2 paramètres (α, γ)

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}_T &= (1-\alpha)X_T + \alpha\left(\widehat{X}_{T-1}(1) + \widehat{X}_{T-1}(2)\right) \\
&= (1-\alpha)X_T + \alpha\left(\widehat{a}(T-1) + \widehat{b}(T-1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{b}_T &= (1-\gamma)\left(X_T(1) - \widehat{X}_{T-1}(1)\right) + \gamma\widehat{b}_{T-1} \\
&= (1-\gamma)\left(\widehat{a}(T) + \widehat{a}(T-1)\right) + \gamma\widehat{b}(T-1) \\
&= \widehat{b}(T-1) + (1-\gamma)\left(\widehat{a}(T) - \widehat{a}(T-1) - \widehat{b}(T-1)\right)
\end{aligned}
$$

où $0 < \alpha < 1$ et $0 < \gamma < 1$.

La méthode de Holt et Winters saisonnière

La méthode saisonnière additive

La prévision à l'horizon h est donnée par

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_T(h) &= \widehat{a}_T h + \widehat{b}_T + \widehat{S}_{T+h-P} & \text{si } 1 \leq h \leq P \\
\widehat{X}_T(h) &= \widehat{a}_T h + \widehat{b}_T + \widehat{S}_{T+h-2P} & \text{si } P+1 \leq h \leq 2P \\
&= \dots
\end{aligned}$$

La méthode saisonnière multiplicative

La prévision à l'horizon h est donnée par

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_T(h) &= (\widehat{a}_T h + \widehat{b}_T)\widehat{S}_{T+h-P} & \text{si } 1 \leq h \leq P \\
\widehat{X}_T(h) &= (\widehat{a}_T h + \widehat{b}_T)\widehat{S}_{T+h-2P} & \text{si } P+1 \leq h \leq 2P \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Les méthodes de lissage sous R

La méthode de lissage Holt & Winter est disponible sous R.

Les fonctions sont HoltWinters pour le lissage et predict pour la prévision.

```
y <- read.table("c:\\R\\data\\demandcvs.txt")
yy <- ts(data = y, start=c(1996,01),frequency=12)
m = HoltWinters(yy)                          # lissage
show(m)                                      # affichage des paramètres utilisés et estimés
summary(m)                                   #  description de m
plot(m)                                      # représentation graphique observée et lissée
plot(m$fitted[,1])                           # représentation de l'ajustement de la série


p = predict(m, 50, prediction.interval = TRUE)   # prévision
plot(m, p)
```

```
# lissage exponentiel simple :
xlisse <- HoltWinters(x,alpha=a,beta=FALSE,gamma=FALSE),

# un lissage exponentiel double paramètre 1 - a' :
xlisse <- HoltWinters(x,alpha=a, beta=ß, gamma=FALSE)
# avec a = 1 - (a')^2 , ß = (1-a')/(1+a')

# un lissage de Holt-Winters sans composante saisonnière :
xlisse <- HoltWinters(x,alpha=a,beta=ß,gamma=FALSE)

# un lissage Holt-Winters additif :
xlisse <- HoltWinters(x,alpha=a,beta=ß,gamma=?,seasonal="add")

# un lissage Holt-Winters multiplicatif :
xlisse <- HoltWinters(x,alpha=a,beta=ß,gamma=?,seasonal="mul")
```