Experimental study of Elementary Cellular Automata dynamics using the density parameter

密度パラメータを用いた初等セルオートマトンダイナミクスの実験的研究

Classifying cellular automata in order to capture the notion of chaos algorithmically is a challenging problem than can be tackled in many ways. We here give a classification based on the computation of a macroscopic parameter, the d-spectrum, and show how our classifying scheme can be used to separate the chaotic ECA from the non-chaotic ones.

セル・オートマトンを分類してカオスの概念をアルゴリズムで表現することは、様々な方法で取り組めるチャレンジングな問題です。ここでは、巨視的なパラメータであるdスペクトルの計算に基づいた分類を行い、この分類法を用いてカオスECAと非カオスECAをどのように分離できるかを示します。

1 Introduction

1 はじめに

In [Gut89] Howard Gutowitz writes：
“A fundamental problem in theory of cellular automata is classification. A good classification divides cellular automata into groups with meaningfully related properties. In general there are two types of classifications：phenotypic and genotypic. A phenotypic classification divides a population into groups according to their observed behaviour. A genotypic classification divides a population into groups according to the intrinsic structure of the entities in the population.”

[Gut89] の中で、Howard Gutowitz は次のように書いています。「セル・オートマトンの理論における基本的な問題は分類である．良い分類とは、セル・オートマトンを、意味のある関連した特性を持つグループに分けることである。一般に、分類には2つのタイプがあります：表現型分類と遺伝子型分類です。表現型分類では、観察された行動に基づいて集団をグループに分けます。表現型による分類は、観察された行動に基づいて集団をグループに分け、遺伝子型による分類は、集団内の実体の本質的な構造に基づいて集団をグループに分けます」。

In 1984, the first phenotypic classification has been proposed by Wolfram [Wol84] dividing cellular automata (CA) according to their “observed dynamics”. This classification was very important since it motivated numerous researches but was at the same time criticised by many authors on grounds that no formal definitions of the classes were given.

1984年，Wolfram[Wol84]は，セルラー・オートマトン（CA）を「観察されたダイナミクス」に応じて分割する，最初の表現型分類を提案した．この分類は非常に重要で、多くの研究の動機となったが、同時に、クラスの正式な定義が与えられていないという理由で、多くの著者から批判された。

In 1989, Culik and Yu in [CPY89 ˇ] proposed a formal definition of the classes according to some asymptotic behaviour of the cellular automaton and showed the undecidability of the classifying scheme.

1989年、CulikとYuは[CPY89 ˇ]で、セルラーオートマトンの漸近挙動に基づいてクラスの正式な定義を提案し、この分類スキームの決定不可能性を示しました。

The class of CA that has drawn much attention is the class of the 256, 2-state 3-neighbours CA, or so-called Elementary CA (ECA). An interesting axis of investigation was the pplication of topological analysis theory to cellular automata. In 1998, Cattaneo et al. in [CFM99] proposed a genotypic classification of all of the 256 ECA that has the advantage to rely on formal definitions as well as theoretical justifications.

注目されているCAのクラスは、256個の2-state 3-neighbours CA、いわゆるElementary CA (ECA)のクラスです。興味深い研究の軸は、位相解析理論のセルオートマトンへの応用である。1998年、Cattaneoらは[CFM99]において、256個のECAのすべてを遺伝子型的に分類することを提案したが、これは理論的な正当性だけでなく、形式的な定義に頼ることができるという利点がある。

本研究では、簡単に計算できる「巨視的なパラメータ」である密度の統計的な変化の観察に基づいた表現型の分類を提案する。そして、実験的に得られた結果をWolframとCattaneoの分類と比較し、両著者との共通点と相違点を検討する。

2 Classifying ECA dynamics 2.1 Position of the problem

2 ECAダイナミクスの分類 2.1 問題の位置づけ

The finite ECA have an advantage over CA with higher states or dimension : their dynamics can be easily represented using space-time diagrams in which the cell array x(t) is represented by a horizontal sequence of light and dark cells that symbolise the states 0 and 1 and time as the vertical axis.

有限のECAは、状態や次元の高いCAに比べて、そのダイナミクスを時空間ダイアグラムを用いて簡単に表現できるという利点があります。このダイアグラムでは、セル配列x(t)が、状態0と1を象徴する明暗のセルの水平方向の配列で表され、時間が縦軸になります。

Fig. 1 represents 4 examples of space-time diagrams. Intuition leads to consider the first three as very regular and the last one as more irregular, or more “chaotic”.

図1は、時空間図形の4つの例を表しています。直感的には、最初の3つは非常に規則的で、最後の1つはより不規則、つまり「カオス」であると考えられます。

図が入る

Fig. 1. Time goes from bottom to top, space-time diagrams are displayed for the rules 170 , 51 , 232 , 126 (see §2.3 for the rule encoding).

図1. 時間は下から上に向かって進み、時空間図はルール170 , 51 , 232 , 126について表示されている（ルールの符号化については§2.3参照）。

The purpose of our classification is to discriminate the ECA that produce “chaotic looking” space-time diagrams from the others. From a theoretical point of vue, the work of Culik & al. [CPY89 ˇ] showed
that the problem of knowing, for a given CA, whether every (infinite) configuration evolves to a global (unique) fixed point in a finite number of steps, is undecidable. A classifying scheme can thus be shown undecidable even with a classification defined in a very simple an intuitive way.

この分類の目的は、「カオス的な外観」の時空間ダイアグラムを生成するECAを、他のECAと区別することにあります。理論的には、Culik & al. [CPY89 ˇ]の研究により、与えられたCAに対して、すべての（無限の）構成が、有限のステップでグローバルな（ユニークな）固定点に進化するかどうかを知る問題は、決定不可能であることが示されました。このように、分類スキームは、非常にシンプルで直感的な方法で定義された分類であっても、決定不可能であることを示すことができます。

From the work of Mazoyer and Rapaport [MR99], we know that it stills remains undecidable whether every circular (thus finite) configuration of a given one-dimensional CA evolves to the same fixed point. This result is ever more convincing as it shows that a classification in which we demand a given propriety to be verified for all of the configurations can be undecidable even when the classes are defined in very simple and intuitive ways.

MazoyerとRapaport[MR99]の研究から、与えられた一次元CAのすべての円形（つまり有限）の構成が同じ固定点に発展するかどうかは、いまだに決定不可能であることがわかっています。この結果は、すべての構成について検証されるべき所定の妥当性を要求する分類が、クラスが非常に単純で直感的な方法で定義されている場合でも、決定不可能であることを示しているので、ますます説得力があります。

An alternative approach, proposed in [Wol84] is to classify each ECA by looking at its behaviour and judging by eye whether most of the CA behaviour is periodic or chaotic. The goal of this work is to present a classification which tries to algorithmically capture the informal notion of “most of the CA behaviour is periodic or chaotic” in order to have a classifying scheme that is effective and that can be implemented to test the 256 ECA.

[Wol84]で提案された別のアプローチは、各ECAの挙動を見て、CAの挙動のほとんどが周期的かカオス的かを目で判断して分類するというものである。この研究の目的は、効果的でECAをテストするために実装可能な分類スキームを持つために、「CAの動作のほとんどが周期的またはカオス的である」という非公式の概念をアルゴリズムで捉えようとする分類を提示することである。

2.2 The idea behind our classification

2.2 分類の考え方

To characterise formally the qualitative behaviour of a space-time diagram, several macroscopic parameters such as spatial or time entropy, Lyapunov exponent, etc. have been proposed. To our knowledge, none of them have been shown to be fully satisfying in regard to accounting for the “chaotic behaviour” of a CA. As far as the ECA space is concerned, we can say that we found very few tables in which the 256 ECA are exhaustively classified according to the computation of a macroscopic parameter.

時空間ダイアグラムの質的な振る舞いを形式的に特徴づけるために，空間または時間エントロピー，リアプノフ指数などのいくつかの巨視的なパラメータが提案されている。我々の知る限り、これらのパラメータは、CAの「カオス的な振る舞い」を説明する上で、完全に満足できるものではない。ECA空間に関する限り、256のECAを巨視的なパラメータの計算に従って網羅的に分類したテーブルはほとんど見当たらない。

One difficulty for establishing such an exhaustive study might be that the computation of a macroscopic parameter (e.g. entropy) is too slow and thus cannot be performed for a great number of initial conditions and for all the 256 ECA. The density parameter, i.e. the number of 1’s divided by the total number of cells, is an efficiently computed macroscopic parameter. We wondered whether it could be used to characterise the notion of chaos in the evolution of a CA.

このような網羅的な研究を行う上での難点は、巨視的なパラメータ（エントロピーなど）の計算に時間がかかりすぎるため、多くの初期条件や256のECAすべてに対して実行できないことです。密度パラメータ（1の数をセルの総数で割った値）は、効率的に計算できる巨視的パラメータです。私たちは、密度パラメータが、CAの進化におけるカオスの概念を特徴づけるために使用できるのではないかと考えました。

An investigation of the statistical evolution of this parameter lead us to make the following observation:

このパラメータの統計的な変化を調べたところ、次のような結果が得られました。

· In a chaotic-looking ECA, for almost all of the initial conditions, the density parameter evolves with large statistical distributions.
· In a periodic-looking ECA, for almost all of the initial conditions, the evolution of the density
stabilises after a transient time and enters into a cycle of small length, i.e. less or equal to 3.

·カオス的なECAでは、ほとんどすべての初期条件において、密度パラメータは大きな統計分布を伴って進化する。
·周期的に見えるECAでは、ほとんどすべての初期条件において、密度の進化は過渡的な時間の後に安定し、小さな長さ、すなわち3以下のサイクルに入る。

This work is aimed at testing experimentally the validity of this observation and deriving a classification of the ECA from it.

本研究では、この観測結果の妥当性を実験的に検証し、そこからECAの分類を導き出すことを目的としています。

2.3 General definitions

2.3 一般的な定義

The cellular automata we here study are objects which act on a one-dimensional finite lattice of cells, where each cell is assigned a state in A = {0,1}. Let n be the size of the lattice, a configuration is an assignment of states to the cells of the lattice, it is a word in A n , denoted x = $x_0 \cdots x_{n-1}$, with $x_i \in$ A. The set of all possible words of size n, A^n , is the phase space. The configurations are cyclic and all indices have to be considered in Z／nZ. Our finite 1D lattice is then a ring and we have x_{-1} = x_n and x_n = x_0.

セル・オートマトンとは、1次元の有限格子のセルに作用する物体で、各セルにはA = {0,1}の状態が割り当てられています。格子の大きさをnとすると、構成とは格子のセルに状態を割り当てることであり、それはA^nの単語であり、x = x_0 --- x_{n-1} , with x_i∈Aと表される。構成は周期的で、すべてのインデックスはZ／nZで考えなければならない。このとき、有限1次元格子はリングとなり、x_{-1} = x_n、x_n= x_0となります。

An ECA is a function f : $A^3 \rightarrow A$, called the local transition rule, to which we associate the global transition function Ff : $A^n \rightarrow A^n$defined by :

ECAとは、局所遷移規則と呼ばれる関数f : $A^3 \rightarrow$ Aに、大域的な遷移関数F_fを関連付けたものである。$A^n \rightarrow A^n$ で定義される。

$$F_f(x_0 \cdots x_{n-1}) = y_0 \cdots y_{n-1}$$

where

$$yi = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

Following [Wol84] we associate to each ECA f its code :

[Wol84]に従い、各ECA fにそのコードを関連付ける。

$$W(f) = f(0,0,0) \cdot 2^0 + f(0,0,1) \cdot 2^1 + \cdots + f(1,1,0) \cdot 2^6 + f(1,1,1) \cdot 2^7$$

An ECA f having the code R = W(f) is denoted by R and we do not distinguish the rule from its code

R = W(f)というコードを持つECA fをRと表記し、ルールとそのコードを区別しない。

D =< F_R , A^n > is the discrete time dynamical system (DDS) associated to the rule R evolved on a ring of size n. We denote by x(t) = F_R^t(x) the t th iterate of F on x, with x(0) = x and call an orbit the function x(t).

D =< F_R , A^n >は、大きさnのリング上で展開されたルールRに関連する離散時間力学系（DDS）である。x(t) = F_R^t (x)で、x(0)=xとすると、x上のFのt番目のイテレートを示し、軌道を関数x(t)と呼ぶことにする。

Since the phase space is finite, every orbit is ultimately periodic, so:

位相空間は有限なので、すべての軌道は最終的には周期的になります。

$$\exists T \in N - \{0\}, \exists t0 \in N, \forall t > t0, x(t + T) = x(t)$$

2.4 Definition of the d-spectrum

2.4 d-spectrumの定義

The density is the function d : A^n → [0,1] such that d(x) = $\frac{\#1(x)}{n}$ where #1(x) denotes the number of 1 in x and n is the size of the configuration x.

密度とは、d(x) = $\frac{\#1(x)}{n}$の#1(x)がxの1の数を表し、nが構成xの大きさを表すような関数d : A^n → [0,1]である。

For a given DDS D and a given orbit x(t), we denote by H = {x(t)}t∈N the set of reachable configurations in the orbit x(t). The cycle of the orbit is the periodic part of H, defined as the largest subset C in H whose image under the rule F is invariant, i.e., such that F(C) = C. The transient time of the orbit, T(x), is the size of the complement T of C in H.

与えられたDDS Dと与えられた軌道x(t)に対して、軌道x(t)における到達可能な構成の集合をH = {x(t)}t∈Nで表す。軌道の周期はHの周期部分であり、ルールFの下でのイメージが不変であるHの最大の部分集合C、すなわちF(C)=Cとして定義される。軌道の過渡期T(x)は、HにおけるCの補数Tの大きさである。

The shift-invariant macroscopic parameter that we use as the discriminating factor of our classification is called the d-spectrum of x, denoted by τ(x) and defined by:

我々が分類の識別因子として用いるシフト不変の巨視的パラメータは、xのdスペクトルと呼ばれ、τ(x)で示され、次のように定義される。

$$\tau(x) = |\{d(x), x \in C\}|$$

It measures the number of different densities that appear in the cycle of an orbit. This number is clearly bounded by n+1, as :

これは、1つの軌道のサイクルに現れる異なる密度の数を測定するものです。この数は、明らかにn+1で制限されており、:

$$\forall x \in A^n, d(x) \in Fn = \{\frac{k}{n}, k \in [0, n]\}$$

3 Experimental protocol

3 実験プロトコル

We present here the protocol we have used to perform the numerical experiments.

ここでは、私たちが数値実験を行うために使用したプロトコルを紹介します。

3.1 d-spectrum estimation

3.1 dスペクトルの推定

For a given DDS D =< F_R, A^n >, we denote by τ~(x) the numerical estimation of τ(x)

与えられたDDS D =< F_R, A^n >に対して、τ(x)の数値推定値をτ~(x)と表します。

The estimation is performed by letting the dynamical system D evolve during Ttransient time steps and then measure the evolution of the density parameter during Tsampling time steps.
Ttransient and Tsampling are two constants that are chosen as an approximation of the transient time T(x) and the cycle length $|c|$.
This results in the application of the following algorithm :

推定は，力学系DをTtransient時間ステップで進化させ，Tsampling時間ステップで密度パラメータの進化を測定することで行う．TtransientとTsamplingは、過渡時間T(x)とサイクル長cの近似値として選ばれた2つの定数です。
この結果、以下のアルゴリズムを適用することになります。

```
Let h be an array of integers with index in [0..n],
initialise h to 0
initialise τ~(x) to 0
For t ← 1 to Ttransient +Tsampling do
       x ← F(x)
       if t > Ttransient then h(d(x).n)++
For i ← 0 to n do
       if h(i) ≠ 0 then τ~(x)++ .
```

At the end, h is the array containing in place i the number of times density $\frac{i}{n}$ has been observed. The numerical d-spectrum $\tilde{\tau}(x)$ is computed as being the number of non-zero values of the histogram h.

最後に、hは、密度 $\frac{i}{n}$が観測された回数をiの場所に含む配列である。数値的なdスペクトル $\tilde{\tau}(x)$は、ヒストグラムhのゼロでない値の数として計算されます。

3.2 Class estimation

3.2 クラス推定

In this work, we propose to estimate experimentally the number of different densities obtained in the orbits when starting from almost all of the initial conditions. Since the computation of all initial conditions is impossible in practice, we have to start from a limited set $I \subset A^n$ of initial conditions to perform the computation.

本研究では，ほぼすべての初期条件から出発した場合に，軌道上で得られる異なる密度の数を実験的に推定することを提案する．すべての初期条件を計算することは実際には不可能であるため、計算を行うためには限られた初期条件のセット$I \subset A^n$から始めなければならない。

For a DDS D =< F_R, A^n >, we construct the set T_I = {τ~(c_i), c_i ∈ I} composed by all the d-spectra of the members of I. If our conjecture (see §2.2) is correct, then there should exist a constant K_p such that all the values in T_I are smaller than K_p for a periodic-looking rule. Similarly, there should exist a constant K_c such that K_c > K_p and such that all the values in T_I are greater than K_p for a chaotic-looking rule.

DDS D =< F_R, A^n >に対して，Iのメンバーのすべてのdスペクトルで構成される集合 T_I = {τ~(c_i), c_i∈I}を構築する．我々の予想（§2.2参照）が正しければ，周期的に見えるルールでは， T_I のすべての値がK_p より小さくなるような定数K_p が存在するはずである．同様に、K_c > K_p となる定数K_c が存在し、カオス的なルールでは T_I のすべての値がK_p より大きくなるような定数K_cが存在するはずである。

We thus apply the following classifying scheme :

そこで、以下のような分類方法を採用しました。

・R is in class P if T_I ⊂ [1,Kp],
・R is in class C if T_I ⊂ [Kc,∞],
・R is in class H if it is neither in P nor in C.

・T_I ⊂[1,Kp]であればRはクラスP、
・T_I ⊂[Kc,∞]であればRはクラスC、
・PにもCにも属さない場合はRはクラスHとなる。

To test our conjecture, we expect the classifying algorithm to fulfil the following requirements:

我々の推測を検証するために、我々は、分類アルゴリズムが以下の要件を満たすことを期待します。

The results can be obtained in a reasonable computing time.
· The algorithm produces the same results for different runs.
· The cardinal of the class H is small.
· The results are stable for different n provided that n is big enough.

妥当な計算時間で結果を得ることができます。
· アルゴリズムは、異なる実行でも同じ結果が得られます。
· クラスHのカーディナルは小さい。
· nが十分に大きい場合、結果は異なるnに対して安定しています。

So, we have to find a set of initial conditions I, and two constants K_p and K_c, such that the requirements stated above are verified.

そこで、上述の要件が検証されるような初期条件I、2つの定数K_p とK_cを見つけなければなりません。

3.3 How to fix the the constants

3.3 定数の修正方法

3.3.1 The case of n, Ttransient, Tsampling

3.3.1 n、Ttransient、Tsamplingの場合

The ring size n should be chosen as large as possible in order to guarantee that the asymptotic behaviour of the orbits no longer depends on n. The limiting factor in the choice of n is the computing abilities available for the numerical experiments. It has been shown experimentally that the values of the average transient time Ttransient and the average cycle length $|c|$ grow exponentially with D for some chaotic-looking rules [Gut91].

リングサイズnは、軌道の漸近挙動がもはやnに依存しないことを保証するために、可能な限り大きく選択する必要があります。nの選択における制限要因は、数値実験に利用可能な計算能力です。いくつかのカオス的なルールでは，平均過渡時間Ttransientと平均サイクル長$|c|$の値がDに対して指数関数的に成長することが実験的に示されている[Gut91].

We tune the value of Ttransient by ensuring that for all the periodic-looking ECA, for all initial conditions, the computed $\tilde{\tau}()$ is no longer varying for higher values of Ttransient . While doing the experiments, we observed that the value of Tsampling has little influence on the results as long as Tsampling ≥ n, so we simply take Tsampling = n .

Ttransientの値を調整するには、すべての周期的に見えるECAにおいて、すべての初期条件で、計算された $\tilde{\tau}()$がTtransientの値が大きいほど変化しなくなることを確認します。実験中に、Tsampling ≥ nであれば、Tsamplingの値は結果にほとんど影響しないことを確認したので、単純にTsampling = nとしました。

3.3.2 The case of I

3.3.2 Iの場合

Let us recall that the definition of our classification is based on the estimation of the behaviour of a given rule on almost all of the initial conditions. We thus have to a assign a precise meaning to the expression "almost all". Clearly, we cannot take all the phase space A^n as the set of initial conditions I since we know that A^n contains some configurations which behaviour is not dependent on the rule.

我々の分類の定義は、ほぼすべての初期条件における所定のルールの動作の推定に基づいていることを思い出してください。そのため、「ほぼすべて」という表現に正確な意味を持たせなければなりません。明らかに，位相空間A^n のすべてを初期条件 I のセットとすることはできません．なぜなら，A^n には挙動がルールに依存しない構成がいくつか含まれていることがわかっているからです.

However, we cannot exclude too many configurations in A^n without taking the risk that I is not representative of almost all the configurations of A^n . The criteria we take in this paper is to say that a set configurations V_n defined for every n, is representative if $lim_{n\to\infty}\frac{|Vn|}{2n} = 1$; $i.e.$, if the limit set of V_n has a measure 1 with the uniform measure.

しかし，I が A^n のほぼすべての構成を代表していないというリスクを冒さずに，A^n のあまりに多くの構成を除外することはできない．この論文での基準は、すべてのnに対して定義された集合構成V_nが、$lim_{n\to\infty}\frac{|Vn|}{2n} = 1$; $i.e.$ ，V_nの極限集合が一様測度で測度1を持つ場合。

For example, we can notice that whatever the rule and whatever the ring size, we have : $\tau(\bar{0}) \leq 2$, where $\bar{0}$ denotes the configuration in which all cells are in state 0. Thus, for a set of initial conditions I containing the configuration $\bar{0}$, any rule verifies $1 \in T_I$ or $2 \in T_I$ (see §3.2 for the definition of T_I).

例えば、どのようなルールであっても、どのようなリングサイズであっても、$\tau(\bar{0})\leqq 2$であることがわかります。したがって、構成$\bar{0}$を含む初期条件Iに対して、どのルールも$1\in T_I$または$2\in T_I$を検証することになります（T_Iの定義については§3.2参照）。

This implies, according to our definitions of the classes, that no rule would ever be classified in C if its sampling set I contains 0¯. So, we have to exclude the configurations 0¯ and 1¯ from I just as well as other special configurations.

これは、クラスの定義によると、そのサンプリングセットIに0¯が含まれる場合、どのルールもCに分類されないことを意味します。したがって、他の特別な構成と同様に、構成0¯と1¯をIから除外しなければなりません。

In this work, we take the following set as a representative set of initial conditions:

この論文では、初期条件の代表的なセットとして以下のセットを取り上げています。

$$Vn = \{x \in A^n, 11 \subset x \; and \; 00 \subset x\}$$

V_n is the set of configurations in which not all the 1’s or 0’s are isolated. The motivation for using $(V_n)_{n \in N}$ comes from the fact that for some ECA, such as rule 180, any configuration in which all the 1s are isolated (surrounded by 0’s) or all the 0’s are isolated (surrounded by 1’s) have a large d-spectrum indicating a chaotic behaviour, whereas all other configurations have small d-spectrum indicating a periodic behaviour.

V_nは、すべての1または0が孤立していない構成の集合である。$(V_n)_{n \in N}$を使用する動機は、ルール180などのECAでは、すべての1が孤立している（0で囲まれている）、またはすべての0が孤立している（1で囲まれている）構成は、カオス的な振る舞いを示す大きなdスペクトルを持ち、他のすべての構成は周期的な振る舞いを示す小さなdスペクトルを持つという事実から来ています。

A more detailed description of such “strange” behaviours can be found in [CM98].

このような "奇妙な "動作のより詳細な説明は[CM98]にあります。

The most natural way of constructing I is to select configurations randomly with a uniform sampling in A^n and discard the configurations which are not in V_n . This would be correct and satisfying according to our criteria but we can notice that the greatest part of the selected configurations would have density close to 1／2. In order to have different densities represented, we take a set of densities D = {d1,d2,··· ,dk} and build I as follows:

Iを構築する最も自然な方法は、 A^n で一様なサンプリングで無作為に構成を選択し、V_nにない構成を破棄することです。これは、私たちの基準では正しく、満足のいくものですが、選択された構成の大部分は、1／2に近い密度を持っていることに気づくでしょう。異なる密度を表現するために、密度のセットD = {d1,d2,--- ,dk}を用いて、以下のようにIを構築します。

$$I = \bigcup_{d \in D} I_{Ns}(d)$$

where INs (d) denotes a subset of V_n, constructed with Ns initial configurations of density d, that is words resulting from the concatenation of letters that have probability d to be 1 and probability 1-d to be 0.

ここで、I_{Ns}(d) は、密度dのNs個の初期設定で構成されたV_nの部分集合を示しています。つまり、確率dが1、確率1-dが0の文字を連結してできた単語です。

3.3.3 The case of Kp, Kc

3.3.3 Kp, Kcの場合

In order to guarantee that P and C are disjoint, we require that $K_c > K_p$. Recall that we have conjectured that $K_p = 3$ would be suitable and that we want the class H to have a cardinal as small as possible.

PとCが分離していることを保証するためには、K_c＞K_pであることが必要です。K_p=3が適当であると予想したこと、また、クラスHのカーディナルをできるだけ小さくしたいと考えたことを思い出してください。

3.4 Results

3.4 結果

For n = 50, it appears empirically that Ttransient = 200 was suitable in order to have the stability of the results. For the results here provided, we take n = 100 and Ttransient = 1000.

n = 50の場合、経験的にTtransient = 200が結果の安定性を保つために適していると思われる。今回の結果では、n＝100、Ttransient＝1000としています。

Concerning the initial condition sampling, we always take 150 initial conditions for each ECA, with D = {0.3,0.4,0.5,0.6,0.7} and Ns = 30.

初期条件のサンプリングについては，各ECAについて常に150個の初期条件をとり，D = {0.3,0.4,0.5,0.6,0.7}，Ns = 30とした。

Because we conjectured that non-chaotic ECA would produce d-spectra less or equal to 3, we take K_p = 3 for all n. To detect the chaotic rules, we observe that taking K_c = 4 for n = 50 and K_c = 7 for n = 100 provides a classification which fulfils the criteria of §3.2.

カオスではないECAではdスペクトルが3以下になると推測したので、すべてのnに対してK_p=3としました。カオスなルールを検出するために、n=50に対してK_c=4、n=100に対してK_c=7とすると、§3.2の基準を満たす分類が得られることがわかりました。

Using this numerical values, it appears that the output of the algorithm is stable when we run it several times. However, some particular rules (e.g rule 9) are sometimes classified as H instead of P. This indicates that not all orbits enter into a cycle after 1000 steps and that Ttransient should be chosen bigger in order to guarantee the stability of the results.

この数値を用いると、アルゴリズムを何度か実行しても、出力は安定しているように見えます。しかし、いくつかの特定のルール（例：ルール9）は、PではなくHに分類されることがあります。これは、すべての軌道が1000ステップ後にサイクルに入るわけではないことを示しており、結果の安定性を保証するためには、Ttransientをより大きく選択する必要があります。

Unfortunately, we here reach the limit of our computing abilities as the number of elementary steps (application of the rule) is given by : n_{op} = 256 ·Ns ·(Ttransient +Tsampling)· n = 256 · 150 · 1200 · 100~ 10^{10} .

残念ながら、ここでは計算能力の限界に達しており、初歩的なステップ（ルールの適用）の数は次のように与えられる： n_{op} = 256 ・Ns ・(Ttransient +Tsampling)・n = 256 ・ 150 ・ 1200 ・ 100~10^{10} 。

The numerical results are shown in the table at the end of the article. ECA are given with rule number R, the smallest interval T that contains T_I and the class. We find out that 204 ECA are P, 30 ECA are C and 22 ECA are H.

数値結果は記事の最後にある表に示されています。ECAはルール番号R、T_Iを含む最小区間T、クラスで与えられる。その結果，204個のECAがP，30個のECAがC，22個のECAがHであることがわかった.

This results confirms that K_p = 3 and K_p = 7 is a suitable choice : t allows to fully discriminate 204+30 ECA as P or C, letting the 22 ECA in H with an undetermined behaviour. Thus, a natural clusterisation of the ECA space seems to emerge.

この結果は、K_p=3とK_p=7が適切な選択であることを裏付けています。この選択により、204+30個のECAをPまたはCとして完全に識別することができ、22個のECAは動作が未決定のままHとなります。このようにして、ECA空間の自然なクラスター化が行われているようです。

3.5 Symmetries of the ECA space

3.5 ECA空間の対称性

One means of verification of the consistence of the table is the use of symmetries. Indeed, for any ECA defined by local transition function f , we can associate the following ECA:

表の整合性を検証する手段の一つとして、対称性を利用する方法がある。実際、局所的な遷移関数fで定義されるECAには、次のようなECAを関連付けることができる。

$1. f^0$, the reflected rule of f defined by :
$1. f^0$, は、次のように定義されたfの反射規則です。

$$\forall(x_{-1}, x_0, x_1) \in A^3, f^0(x_{-1}, x_0, x_1) = f(x_1, x_0, x_{-1}).$$

$2. f^*$, :the conjugate rule of f defined by :
$2. f^*$,で定義されたfの共役規則。

$$\forall(x_{-1}, x_0, x_1) \in A^3, f^*(x_{-1}, x_0, x_1) = [f(x^*_{-1}, x^*_0, x^*_1)]^*$$

where ∗ denotes the operation of changing 0’s into 1’s and 1’s into 0’s.

ここで、∗は、0を1に、1を0に変える操作を表します。

$3. f^{0*}$, the reflected conjugate rule of f defined by :
$3. f^{0*}$,で定義されるfの反射共役規則。

$$\forall(x_{-1}, x_0, x_1) \in A^3, f^{0*}(x_{-1}, x_0, x_1) = [f(x^*_1, x^*_0, x^*_{-1})]^*.$$

As f , f^* , f^0 andf^{0*} are obtained using symmetries (they are isometrically conjugate), we expect that the classifying scheme attributes the same class to each of this rule. This requirement appears to be verified experimentally with our classifying scheme.

f , f^* , f^0, f^{0*} は対称性を利用して得られているので（等角共役）、分類法はこのルールのそれぞれに同じクラスを割り当てることを期待しています。この要件は、我々の分類法で実験的に検証されているようです。

4 Analysis of the results

4 結果の分析

We here compare the numerical results to two different classifications.

ここでは、数値結果を2つの異なる分類と比較します。

4.1 Comparison with Cattaneo’s et al. classification

4.1 Cattaneoらの分類との比較

In [CFM99] Cattaneo et al. provide a table in which the 256 ECA are classified according to the properties of their transition table. This genotypic classification is based on topology and uses three main classes c_1, c_2, c_3 formally defined for an infinite one-dimensional lattice.

[CFM99]において、Cattaneoらは256のECAをその遷移表の特性に応じて分類した表を提供している。この遺伝子型の分類はトポロジーに基づいており、無限一次元格子に対して正式に定義された3つの主要クラスc_1、c_2、c_3を使用しています。

The three main classes are subdivided into smaller classes using some particular proprieties of the local rule. Some of the defined sub-classes explicitly group rules that have the same asymptotic behaviour whereas some other sub-classes cannot allow qualitative predictions to be made.

この3つの主要なクラスは、ローカルルールのいくつかの特殊な性質を用いて、より小さなクラスに細分化されます。定義されたサブクラスの中には、同じ漸近挙動を持つルールを明示的にグループ化しているものもありますが、他のサブクラスでは定性的な予測ができないものもあります。

For example, if we look at a sub-class which is characterised by “Periodic-1 attractor containing reachable $\underline{0}$”, we expect all the orbits to reach the $\underline{0}$ configuration and to have a d-spectrum of 1. Indeed, we find that all rules of this subclass are P in our classification (rules 72, 104, 200, 232, 4, 36, 132, 164).

例えば、「リーチ可能な0¯を含む周期的1アトラクター」という特徴を持つサブクラスに注目すると、すべての軌道が0¯構成に到達し、dスペクトルが1になると予想されます。実際、このサブクラスのすべてのルールが、我々の分類ではPであることがわかりました（ルール72、104、200、232、4、36、132、164）。

Some other classes provided in Cattaneo’s et al. classification are not regrouping ECA that have a homogeneous behaviour. The most interesting case of non homogeneity appears for the rules 18, 22, 26, 82, 94, 122, 126, 146, 182, 218 which are classified in the same sub-class denoted “sub 90”. Using our classification, we find that:

Cattaneoらの分類で提供されている他のクラスの中には、同質の動作をするECAを再グループ化していないものがあります。最も興味深い非同質性のケースは、"sub 90 "と呼ばれる同じサブクラスに分類されたルール18、22、26、82、94、122、126、146、182、218に見られる。私たちの分類を使用すると、次のようになります。

· rules 26, 82, 94 are H,
· rules 18, 22, 122, 126, 146, 182 are C,
· rule 218 is P.

· ルール26、82、94はH、
· ルール18、22、122、126、146、182はC、
· ルール218はP。

Indeed, one can verify experimentally that rule 218 seems to always converge (quickly) to a fixed point. On the other hand rules 18, 22, 122, 126, 146, 182 do exhibit a chaotic-looking behaviour.

実際、ルール218が常に（素早く）固定点に収束しているように見えることを実験的に確認することができます。一方、ルール18、22、122、126、146、182は、カオス的な挙動を示します。

Rule 26 and 82, which are isometrically conjugate, have a behaviour that cannot be clearly identified as periodic or chaotic: the space-time diagrams it produces are reminiscent of the shift (rule 170 see fig. 1) but shows some kind of "complexity" (see fig. 2). The rule 94 appears as an exception as it has a very stable signature having $T_I \subset [1,6]$ and could be classified in P with $K_p = 6$.

ルール26と82は、アイソメトリーに共役していますが、周期的なのかカオスなのかはっきりしない挙動をしています。このルールが生成する時空図は、シフト（ルール170、図1参照）を連想させますが、ある種の「複雑さ」を示しています（図2参照）。ルール94は例外的に、$T_I \subset [1,6]$という非常に安定したシグネチャを持ち、K_p=6のPに分類される可能性がある。

It thus appears that the predictions given by topological analysis are verified experimentally and that the numerical results we provide might be useful to allow a finer analysis of the classes for which no theoretical prediction can be made.

このように、トポロジー解析による予測は実験的に検証されており、我々が提供する数値結果は、理論的な予測ができないクラスのより詳細な分析を可能にするために有用であると思われます。

Fig. 2. Some space-time diagrams obtained with the rules 26, 41, 54, 73, 94, 110, 154 which represent the 7 symmetric-equivalent (see §3.5) hybrid rules.

図2. 26, 41, 54, 73, 94, 110, 154のルールを用いて得られたいくつかの時空図。これらのルールは7つの対称-等価(§3.5参照)ハイブリッドルールを表している。

図が入る

4.2 Comparison with Wolfram’s phenotypic classification

4.2 Wolframの表現型分類との比較

The classification proposed by Wolfram in [Wol84] divides the CA space into 4 classes：

Wolframが[Wol84]で提案した分類では、CA空間を4つのクラスに分けている。

Class W1 evolution of the CA leads to homogeneous stable configuration
Class W2 evolution of the CA leads to a set of separated simple or periodic structures
Class W3 evolution of the CA leads to a chaotic pattern
Class W4 evolution leads to complex localised structures sometimes long-lived

クラスW1 CAの進化は、均質で安定した構成になる。
クラスW2 CAの進化は、分離された単純または周期的な構造のセットにつながる。
クラスW3 CAの進化は、カオス的なパターンにつながる。
クラスW4 進化は、複雑な局所的構造をもたらし、時には長く続く。

Concerning class W4, which is the class of the most “complex” ECA, the fuzziness of the definition does not allow to classify an ECA as W4 without making a somehow arbitrary choice.

最も「複雑」なECAのクラスであるW4クラスについては、定義の曖昧さのため、何らかの恣意的な選択をしなければECAをW4に分類することはできない。

It has been conjectured that class W4 is constituted out of the ECA that are capable of universal computation, that is, that are able to calculate the result of any function defined algorithmically. So far, only rule 110 (and its isometrically conjugated rules 137,124,193) was clearly identified having this ability (see [Wol02]).

W4クラスは、万能計算が可能なECA、つまりアルゴリズムで定義された任意の関数の結果を計算できるECAで構成されていると推測されています。これまでのところ、ルール110（およびそのアイソメトリーに共役したルール137,124,193）のみがこの能力を持つことが明確に確認されています（[Wol02]参照）。

Rule54 is also another good candidate for having the computation universal ability but so far no evidence was given. As there is no “official” Wolfram classification, each author is allowed to make his own and we compared our results to the Wolfram classification given in [CFM99].

ルール54も計算万能能力を持つ有力な候補ですが、これまでのところ証拠はなく ていない。公式」のWolfram分類はないので、各著者が独自に分類することが許されている。結果を[CFM99]で示されたWolfram分類と比較した。

We observe that that any ECA that we classify P is classified W1 or W2, and that any ECA that we classify C is classified W3. For the ECA that we classify H, we find out that some of them, e.g rule 94, are W2 whereas some others, e.g rule 26, are W3.This agreement confirms the (途中で本文切れとる)

Pに分類したECAは、W1またはW2に分類され、Cに分類したECAはW3に分類されることがわかります。Hに分類したECAについては、ルール94のようにW2に分類されるものもあれば、ルール26のようにW3に分類されるものもあることがわかりました。この一致は...

It is worth noticing that rule 54 and rule 110 are both in class H. Recall that our class H is defined as the class of ECA that have a set of d-spectrum that is neither all inside [1,Kp] nor inside [Kc,∞].

クラスHは、dスペクトルの集合が[1,Kp]の内部にも[Kc,∞]の内部にも入らないECAのクラスとして定義されています。

Thus, an ECA which is H has the ability to produce small d-spectrum, like non-chaotic ECA, as well as large dspectrum, like chaotic ECA. These particular ECA exhibit a behaviour that we can qualify to be “hybrid”. Their characterisation using the d-spectrum might confirm the idea that rules which exhibit a “complex” behaviour are situated in a transition zone in rule space, between chaotic ECA and ordered ECA [LPL90].

したがって、HクラスのECAは、非カオスECAのように小さなdスペクトルを生成する能力と、カオスECAのように大きなdスペクトルを生成する能力を持っています。これらのECAは、″ハイブリッド″と呼ぶにふさわしい挙動を示しています。dスペクトルを用いたこれらの特徴付けは、「複雑な」挙動を示すルールは、カオスECAと秩序ECAの間にあるルール空間の遷移領域に位置するという考えを裏付けるかもしれない[LPL90]。

5 Conclusion and perspectives

5 結論と今後の展望

We proposed to use an efficiently computable macroscopic parameter, the d-spectrum, to classify the 256 rules of the ECA space. The most important features of the classifying scheme might be its coherence with other classifications and its ability to find “complex” rules of the ECA space (rules 54 and 110).

私たちは、効率的に計算可能な巨視的パラメータであるdスペクトルを用いて、ECA空間の256のルールを分類することを提案しました。この分類法の最も重要な特徴は、他の分類法との一貫性と、ECA空間の「複雑な」規則（規則54と110）を見つけることができることです。

Because we have worked on finite lattices, the classificiation operates on couples rule／lattice and might depend on the size of the lattice. In order to prove the membership of a rule for any ring size, it might be worth to formalise the classification and to obtain theoretic results.

今回は有限の格子を対象としているため、分類はルール／格子のカップルで行われ、格子のサイズに依存する可能性があります。任意のリングサイズでルールのメンバーシップを証明するためには、分類を公式化し、理論的な結果を得ることが価値があるかもしれません。

The characterisation of chaos we proposed for the ECA can be generalised to cellular automata with higher number of states and higher dimensions and even to objects which are not cellular automata such as boolean networks. One may wonder how the constants Tsampling and Ttransient vary for such objects and whether a clusterisation of the space can still be exhibited.

ECAで提案したカオスの特徴は、状態数が多く、次元が高いセル・オートマトンや、ブーリアンネットワークなどのセル・オートマトンではないものにも一般化できます。このような対象では、定数TsamplingとTtransientがどのように変化するのか、また、空間のクラスター化が見られるのか疑問に思うかもしれません。

Another axis of investigation is to use this macroscopic parameter to characterise other concepts related to cellular automata, such as the “robustness” of a cellular automaton, that is its ability to keep its behaviour constant when submitted to little perturbation of its topology or synchronicity.

また、この巨視的なパラメータを使って、セルラー・オートマトンに関連する他の概念を特徴づけることも考えられます。例えば、セルラー・オートマトンの「ロバスト性」、つまり、トポロジーや同期性に少しの乱れがあっても、その挙動を一定に保つことができるかどうか、などです。

Tab. 1: Experimental results for: $X = 100$, $N_s = 30$, $D = \{0.30, \cdots, 0.70\}$, $T_{transient} = 1000$, $T_{sampling} = 100$, $K_p = 3$, $K_c = 7$

R	T	P	H	C	R	T	P	H	C	R	T	P	H	C	R	T	P	H	C
0	[1,1]	X			1	[1,2]	X			2	[1,1]	X			3	[1,2]	X		
4	[1,1]	X			5	[2,2]	X			6	[1,2]	X			7	[1,2]	X		
8	[1,1]	X			9	[1,3]	X			10	[1,1]	X			11	[1,2]	X		
12	[1,1]	X			13	[1,1]	X			14	[1,2]	X			15	[1,2]	X		
16	[1,1]	X			17	[1,2]	X			18	[7,15]			X	19	[2,2]	X		
20	[1,2]	X			21	[1,2]	X			22	[12,35]			X	23	[1,2]	X		
24	[1,1]	X			25	[1,3]	X			26	[4,17]		X		27	[1,2]	X		
28	[1,2]	X			29	[1,2]	X			30	[18,28]			X	31	[2,2]	X		
32	[1,1]	X			33	[1,2]	X			34	[1,1]	X			35	[1,2]	X		
36	[1,1]	X			37	[1,2]	X			38	[1,2]	X			39	[1,2]	X		
40	[1,1]	X			41	[2,11]		X		42	[1,1]	X			43	[1,2]	X		
44	[1,1]	X			45	[18,29]			X	46	[1,1]	X			47	[1,2]	X		
48	[1,1]	X			49	[1,2]	X			50	[1,2]	X			51	[1,2]	X		
52	[1,2]	X			53	[1,2]	X			54	[2,51]		X		55	[1,2]	X		
56	[1,1]	X			57	[1,1]	X			58	[1,2]	X			59	[2,2]	X		
60	[9,16]			X	61	[1,3]	X			62	[1,3]	X			63	[1,2]	X		

R	T	P	H	C	R	T	P	H	C	R	T	P	H	C	R	T	P	H	C
64	[1,1]	X			65	[1,3]	X			66	[1,1]	X			67	[1,3]	X		
68	[1,1]	X			69	[1,1]	X			70	[1,2]	X			71	[1,2]	X		
72	[1,1]	X			73	[2,30]		X		74	[1,1]	X			75	[17,27]			X
76	[1,1]	X			77	[1,1]	X			78	[1,1]	X			79	[1,1]	X		
80	[1,1]	X			81	[1,2]	X			82	[3,17]		X		83	[1,2]	X		
84	[1,2]	X			85	[1,2]	X			86	[18,27]			X	87	[1,2]	X		
88	[1,1]	X			89	[17,28]			X	90	[10,18]			X	91	[1,2]	X		
92	[1,1]	X			93	[1,1]	X			94	[1,6]		X		95	[1,2]	X		
96	[1,1]	X			97	[2,4]		X		98	[1,1]	X			99	[1,1]	X		
100	[1,1]	X			101	[16,26]			X	102	[11,17]			X	103	[1,3]	X		
104	[1,1]	X			105	[10,17]			X	106	[16,31]			X	107	[2,4]		X	
108	[1,2]	X			109	[3,29]		X		110	[2,19]		X		111	[1,3]	X		
112	[1,1]	X			113	[1,2]	X			114	[1,2]	X			115	[1,2]	X		
116	[1,1]	X			117	[1,2]	X			118	[1,3]	X			119	[1,2]	X		
120	[17,29]			X	121	[3,4]		X		122	[7,28]			X	123	[1,2]	X		
124	[2,19]		X		125	[1,3]	X			126	[7,28]			X	127	[1,2]	X		
128	[1,1]	X			129	[7,30]			X	130	[1,1]	X			131	[1,3]	X		
132	[1,1]	X			133	[1,6]		X		134	[1,2]	X			135	[17,28]			X
136	[1,1]	X			137	[2,18]		X		138	[1,1]	X			139	[1,1]	X		
140	[1,1]	X			141	[1,1]	X			142	[1,2]	X			143	[1,2]	X		
144	[1,1]	X			145	[1,3]	X			146	[7,14]			X	147	[2,51]		X	
148	[1,2]	X			149	[18,30]			X	150	[9,15]			X	151	[22,35]			X
152	[1,1]	X			153	[10,18]			X	154	[3,19]		X		155	[1,2]	X		
156	[1,2]	X			157	[1,2]	X			158	[1,2]	X			159	[1,2]	X		
160	[1,1]	X			161	[7,28]			X	162	[1,1]	X			163	[1,2]	X		
164	[1,1]	X			165	[9,18]			X	166	[2,22]		X		167	[4,19]		X	
168	[1,1]	X			169	[16,29]			X	170	[1,1]	X			171	[1,1]	X		
172	[1,1]	X			173	[1,1]	X			174	[1,1]	X			175	[1,1]	X		
176	[1,1]	X			177	[1,2]	X			178	[1,2]	X			179	[1,2]	X		
180	[2,17]		X		181	[3,14]		X		182	[7,15]			X	183	[7,15]			X
184	[1,1]	X			185	[1,1]	X			186	[1,1]	X			187	[1,1]	X		
188	[1,1]	X			189	[1,1]	X			190	[1,1]	X			191	[1,1]	X		
192	[1,1]	X			193	[2,21]		X		194	[1,1]	X			195	[10,18]			X
196	[1,1]	X			197	[1,1]	X			198	[1,2]	X			199	[1,2]	X		
200	[1,1]	X			201	[1,2]	X			202	[1,1]	X			203	[1,1]	X		
204	[1,1]	X			205	[1,1]	X			206	[1,1]	X			207	[1,1]	X		
208	[1,1]	X			209	[1,1]	X			210	[2,15]		X		211	[1,2]	X		
212	[1,2]	X			213	[1,2]	X			214	[1,2]	X			215	[1,2]	X		
216	[1,1]	X			217	[1,1]	X			218	[1,1]	X			219	[1,1]	X		
220	[1,1]	X			221	[1,1]	X			222	[1,1]	X			223	[1,1]	X		
224	[1,1]	X			225	[16,29]			X	226	[1,1]	X			227	[1,1]	X		
228	[1,1]	X			229	[1,1]	X			230	[1,1]	X			231	[1,1]	X		
232	[1,1]	X			233	[1,1]	X			234	[1,1]	X			235	[1,1]	X		
236	[1,1]	X			237	[1,1]	X			238	[1,1]	X			239	[1,1]	X		
240	[1,1]	X			241	[1,1]	X			242	[1,1]	X			243	[1,1]	X		
244	[1,1]	X			245	[1,1]	X			246	[1,1]	X			247	[1,1]	X		
248	[1,1]	X			249	[1,1]	X			250	[1,1]	X			251	[1,1]	X		
252	[1,1]	X			253	[1,1]	X			254	[1,1]	X			255	[1,1]	X		