水以下コンテスト 解説

運営メンバーのなまえ

2024/03/30

X: Unions

Writer: yasunori

X: Unions

$N\ (2 \le N \le 10^5)$ 個の国と，複数の国による同盟が $M\ (1 \le M \le 10^5)$ 個あり，

i 個目の同盟には C_i 個の国 $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,C_i}$ の国が所属している．
（ここで，C_i は $\sum_{i=0}^{M} C_i \le 10^5$ を満たす．）

同じ同盟に所属している国同士は直接行き来でき，同盟 i に属している国同士は D_i 分で移動できる．同じ同盟に属していない国同士は直接行き来できない．

国 $2, 3, \ldots, N$ について，国 1 から移動するのにかかる時間の最小値を求めよ．

X: Unions

N 個の国と，複数の国で構成される同盟が M 個ある．i 個目の同盟には C_i 個の国 $A_{i,1}, A_{i,2}, ..., A_{i,C_i}$ の国が所属している．

同じ同盟に所属している国同士は直接行き来でき，同盟 i に属している国同士は D_i 分で移動できる．同じ同盟に属していない国同士は直接行き来できない．

国 $2, 3, ..., N$ について，国 1 から移動するのにかかる時間の最小値を求めよ．

- $2 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq M \leq 10^5$
- $\sum_{i=1}^{M} C_i \leq 10^5$

X: Unions　部分点 1 解法

- $C_i = 2 \ (1 \leq i \leq M)$

X: Unions　部分点 1 解法

- $C_i = 2\ (1 \leq i \leq M)$

すべての同盟がちょうど 2 個の国からなるため，同盟 i は「$A_{i,1}$ と $A_{i,2}$ は移動に D_i 分かかる道でつながっている」と言い換えることができる.

X: Unions　部分点 1 解法

- $C_i = 2 \ (1 \le i \le M)$

すべての同盟がちょうど 2 個の国からなるため，同盟 i は「$A_{i,1}$ と $A_{i,2}$ は移動に D_i 分かかる道でつながっている」と言い換えることができる.

つまり，国 1 から国 $2, 3, ..., N$ への最短距離を求める問題に帰着できる.

$\rightarrow$ このグラフは頂点の数が N，辺の数が M であるため，ダイクストラ法で解ける！

国 1 を始点として，ダイクストラ法を使って各国への最短距離を求めることで，部分点 1 に正解できる.

X: Unions　部分点 2 解法

- $\sum_{i=1}^{M} C_i \leq 10^3$

X: Unions　部分点 2 解法

- $\sum_{i=1}^{M} C_i \leq 10^3$

同じ同盟に属する国同士は「D_i 分かかる道でつながっている」と言い換えることができる.

X: Unions　部分点 2 解法

- $\sum_{i=1}^{M} C_i \leq 10^3$

同じ同盟に属する国同士は「D_i 分かかる道でつながっている」と言い換えることができる．

$\sum_{i=1}^{M} C_i \leq 10^3$ の制約から，同じ同盟に属する国同士のペアすべてに D_i の重みを持つ辺を張っても十分間に合う．実際，辺数を $|E|$ とすると，

$$|E| = \sum_{i=1}^{M} \frac{C_i(C_i - 1)}{2} < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} C_i^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{M} C_i \right)^2 \leq 5 \times 10^5$$

となる．

部分点 1 と同様にダイクストラ法を用いれば，部分点 2 に正解できる．

X: Unions　満点解法

X: Unions　満点解法

部分点 2 の方法だと，張る辺の本数が多すぎて間に合わない．

超頂点を導入することで間に合う！

X: Unions 満点解法

部分点 2 の方法だと，張る辺の本数が多すぎて間に合わない．

超頂点を導入することで間に合う！

各国 $1, 2, ..., N$ と，同盟 $1, 2, ..., M$ を頂点とするグラフを考える．

$i = 1, 2, ..., M,\ j = 1, 2, ..., C_i$ について，

- 国 $A_{i,j}$ から 同盟 i に，重み D_i の辺を張る
- 同盟 i から 国 $A_{i,j}$ に，重み 0 の辺を張る

とすると，同じ同盟に属する国同士は同盟の頂点を経由することで D_i 分のコストで移動できる．

このグラフの辺数は $2 \times \sum_{i=1}^{M} C_i$ であるため，このグラフ上でダイクストラ法をすればよい．