

水以下コン (チーム戦) 解説

運営メンバーのなまえ

2024/03/30

X: $f(f(f(f(f(x))))))$

Writer: Kyo_s_s

X: $f(f(f(f(f(x))))))$

整数 K ($1 \leq K \leq 10^{18}$) と x についての関数 $f(x)$ が与えられる． 最初 $x = 1$ として，次の操作を K 回繰り返す：

- x を $f(x)$ で更新する

最終的な $x \bmod 998$ は？

X: $f(f(f(f(f(x))))))$

整数 K ($1 \leq K \leq 10^{18}$) と x についての関数 $f(x)$ が与えられる． 最初 $x = 1$ として，次の操作を K 回繰り返す：

- x を $f(x)$ で更新する

最終的な $x \bmod 998$ は？

構文解析をがんばる必要がある ... ？

→ めちゃめちゃな式は与えられないため，そんなに頑張らなくてよい．

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点1 解法

- $K = 1$, $f(x)$ に $*$, \wedge は含まれない.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点1 解法

- $K = 1$, $f(x)$ に $*$, $^$ は含まれない.

$f(x)$ は, x もしくは 1 以上 10^9 未満の整数 の和で表されているので,

step 1. $f(x)$ を $+$ で分割する

step 2. 分割したそれぞれの文字列を数値に変換する (x なら 1)

step 3. すべて足し合わせる

を実装すれば OK.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点 2 解法

- $K \leq 10^4$, $f(x)$ に \wedge は含まれない.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点 2 解法

- $K \leq 10^4$, $f(x)$ に \wedge は含まれない.

部分点 1 解法で, 「数値 / x と演算子 $+$ のみからなる数式」を計算した.

→ 改造すると, 「数値 / x と 演算子 $*$ のみからなる数式」を計算できる.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点 2 解法

- $K \leq 10^4$, $f(x)$ に \wedge は含まれない.

部分点 1 解法で, 「数値 / x と演算子 $+$ のみからなる数式」を計算した.

→ 改造すると, 「数値 / x と 演算子 $*$ のみからなる数式」を計算できる.

step 1. $f(x)$ を $+$ で分割する

step 2. 分割したそれぞれの文字列は「数値 / x と 演算子 $*$ のみからなる数式」なので, それぞれを計算する

step 3. すべて足し合わせる

そのままだとオーバーフローするため, 和 / 積の計算時に $\text{mod } 998$ を取れば OK.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点 3 解法

- $K \leq 10^4$

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 部分点 3 解法

- $K \leq 10^4$

「数値 / x と 演算子 $*$, $^$ のみからなる数式」を計算できれば OK. これは,

step 1. $f(x)$ を $*$ で分割する

step 2. 分割したそれぞれの文字列は「数値 / x もしくは, 演算子 $^$ のみからなる数式」なので,

- $^$ を含む: (数値 or x) $^$ (数値) の形になっているので計算する
- $^$ を含まない: そのまま数値に変換する

step 3. すべて掛け合わせる

とすれば実装できる. 愚直に K 回シミュレーションすれば OK.

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 満点解法

X: f(f(f(f(f(x)))))) 満点解法

関数 $f(x)$ の形から, x を更新するときに $x \bmod 998$ で更新してもよい. つまり, 関数 f は,

$$f : \mathbb{Z}/998\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/998\mathbb{Z}$$

とみなせる. \rightarrow ダブリングできる!

X: $f(f(f(f(f(x))))))$ 満点解法

関数 $f(x)$ の形から, x を更新するときに $x \bmod 998$ で更新してもよい. つまり, 関数 f は,

$$f : \mathbb{Z}/998\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/998\mathbb{Z}$$

とみなせる. \rightarrow ダブリングできる!

前処理として $x = 0, 1, \dots, 997$ に対する $f(x)$ を計算しておくことにより, $x = 0, 1, \dots, 997$ に対する $f(f(x))$ の値が計算でき, さらにこの値を用いて x に対する $f(f(f(f(x))))$ の値が計算でき, ...

これを繰り返し, 必要な部分を適用することで K 回操作した後の値を求めることができる!

X: $f(f(f(f(x))))$ 余談

- 原案では 引き算 - と 括弧 () も含まれていたのですが、さすがにやりすぎということで無くしました。
 - 括弧が入ってくるとちゃんと再帰的な処理をする必要があります。
- ^ もなくていいじゃん、と言われていたのですが、^ が無いと Python の eval を使うことで構文解析をサボれてしまうのでやむなく入れました。
 - 部分点 2 までは eval をやるだけで通せます。
 - 部分点 3 も、`re.sub(r'(x|\d+)\^\d+', r'pow(\1,\2,998)', S)` と置換することで、構文解析パートは eval で済ませることができます (ダブリングはする必要があります)。

X: X-word Database

Writer: Kyo_s_s

X: X-word Database

整数 X ($4 \leq X \leq 10^5$) と文字列 S ($1 \leq |S| \leq X$) が与えられる.

以下の条件を満たす文字列を **よい文字列** と呼ぶ:

- 文字列の長さが X 以下
- 辞書順で S 以下
- 連続部分列に cyan を含む

よい文字列は何個ある？

X: X-word Database

整数 X ($4 \leq X \leq 10^5$) と文字列 S ($1 \leq |S| \leq X$) が与えられる.

以下の条件を満たす文字列を **よい文字列** と呼ぶ:

- 文字列の長さが X 以下
- 辞書順で S 以下
- 連続部分列に cyan を含む

よい文字列は何個ある？

$X = 5$, $S = \text{cyan}$ のとき, 条件を満たす文字列は,

acyan, bcyan, ccyan, cyan, cyana, cyanb, cyanc

の 7 個.

X: X-word Database 部分点 1 解法

- $X \leq 8$

X: X-word Database 部分点 1 解法

- $X \leq 8$

cyan を含む長さ 8 以下の文字列を全て試せば OK.

たとえば長さが 8 で cyan を含む文字列は,

****cyan, ***cyan*, **cyan**, *cyan***, cyan****

のどれかの形なので, * に入るアルファベットを全て試してそれぞれがよい文字列かどうかを判定すればよい!

X: X-word Database 部分点 1 解法

- $X \leq 8$

cyan を含む長さ 8 以下の文字列を全て試せば OK.

たとえば長さが 8 で cyan を含む文字列は,

****cyan, ***cyan*, **cyan**, *cyan***, cyan****

のどれかの形なので, * に入るアルファベットを全て試してそれぞれがよい文字列かどうかを判定すればよい!

このままだと $X = 8$ で cyancyan を 2 回数えてしまうのでそこだけ注意.

X: X-word Database 部分点 2 解法

- $X \leq 10^3$, S はすべて z で長さが X の文字列

X: X-word Database 部分点 2 解法

- $X \leq 10^3$, S はすべて z で長さが X の文字列

長さが X 以下で cyan を含むような文字列はすべてよい文字列になる.

X: X-word Database 部分点 2 解法

- $X \leq 10^3$, S はすべて z で長さが X の文字列

長さが X 以下で cyan を含むような文字列はすべてよい文字列になる.

長さが K で cyan を含む文字列の個数は, 包除原理を使うと,

$$\sum_{i=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 26^{K-4i} \cdot {}_{i+1}H_{K-4i}$$

で求められる (ここで, ${}_nH_k$ は重複組合せ).

X: X-word Database 部分点 2 解法

- $X \leq 10^3$, S はすべて z で長さが X の文字列

長さが X 以下で cyan を含むような文字列はすべてよい文字列になる。
長さが K で cyan を含む文字列の個数は、包除原理を使うと、

$$\sum_{i=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 26^{K-4i} \cdot {}_{i+1}H_{K-4i}$$

で求められる (ここで, ${}_nH_k$ は重複組合せ). よって, 答えは,

$$\sum_{K=4}^X \sum_{i=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 26^{K-4i} \cdot {}_{i+1}H_{K-4i}$$

X: X-word Database 満点解法

X: X-word Database 満点解法

桁 DP で解ける！

$\text{dp}[i][\textit{smaller}][j] := X$ の上から i 番目まで見て、

$\textit{smaller} = 0$: X と同じ / 1 : X より小さく、

cyan の j 文字目までを末尾に含む / すでに cyan を含む
文字列の個数

X: X-word Database 満点解法

桁 DP で解ける！

$\text{dp}[i][\text{smaller}][j] := X$ の上から i 番目まで見て,
 $\text{smaller} = 0$: X と同じ / 1 : X より小さく,
cyan の j 文字目までを末尾に含む / すでに cyan を含む
文字列の個数

上から DP をしていくことで, X 字以下の文字列の個数も求められている.

$$\sum_{i=0}^X (\text{dp}[i][0][\text{cyan を含む}] + \text{dp}[i][1][\text{cyan を含む}])$$

が答え.

X 問題

X 問題