進化型計算特論

問題 2

課題提出日：2021 年 6 月 2 日
所　属　：工学研究科 電気・情報系専攻 電気情報システム工学分野
学籍番号　：2210104020
氏　名　：川口 拓海

(問題 2)平面上に原点Oを中心とする半径 5 と 10 の同心円C_1とC_2があり、Oから距離 2 のところに定点Aがある。動点P_1、P2 がそれぞれC_1、C_2上を一定の速さで反時計回りに回転している。時刻$t=0$でO，A，P_1，P_2がこの順に一直線上に並び、また、P_1の角速度はP_2の 2 倍とする。ΔAP_1P_2の面積の最大値を求めよ。

（解答）動点P_2の角速度をωとおくと、P_1の角速度は2ωと表せる。
ここで、時刻$t=0$のときの 4 点O，A，P_1，P_2が x 軸上にくるように座標軸を設定すると、時刻tのときのそれぞれの座標は、$A(2,0)$，$P_1(5\cos 2\omega t，5\sin 2\omega t)$，$P_2(10\cos\omega t，10\sin\omega t)$と表せる。

$$\Delta AP_1P_2=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AP_1}\times\boldsymbol{AP_2}|$$

$$=\frac{1}{2}|50\sin\omega t\cos 2\omega t-20\sin\omega t-50\sin 2\omega t\cos\omega t+10\sin 2\omega t|$$

$$=\frac{1}{2}|-50\sin\omega t-20\sin\omega t+10\sin 2\omega t|$$

$=5|7\sin\omega t-\sin 2\omega t|$
$f(\omega t)=7\sin\omega t-\sin 2\omega t$ とおく。
$f'(\omega t)=7\cos\omega t-2\cos 2\omega t=4\cos^2\omega t-7\cos\omega t-2=(4\cos\omega t+1)(\cos\omega t-2)$
より、$f'(\omega t)=0\leftrightarrow\sin\omega t=\frac{1}{4}$
これを満たすωtをθ_a，θ_bとおく。
増減表は以下のようになる。

ωt	0	$\cdots$	θ_a	$\cdots$	θ_b	$\cdots$	2π
$f'(\omega t)$		+	0	−	0	+	
$f(\omega t)$			↗		↘		↗

$$f(\theta_a)=7\times\frac{\sqrt{15}}{4}-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{15\sqrt{15}}{8}$$

$$f(\theta_b)=7\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=-\frac{15\sqrt{15}}{8}$$

以上より、ΔAP_1P_2の面積の最大値は

$$5\times\frac{15\sqrt{15}}{8}=\frac{75\sqrt{15}}{8}$$

となる。