情報理工学部　SN コース 3 回
ワイヤレス通信システム
4th Week 磁気ダイポール

2600200443-6
Yamashita Kyohei
山下 恭平

May 28 2022

1　教科書 P19, 式 (2・24) の導出

マクスウェル方程式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{2}$$

また、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は、自由空間において以下のように定義される

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3}$$

式 (1) に式 (3) を代入すると

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \\
&= \nabla \times (-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \\
\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) &= 0
\end{aligned}$$

$\nabla \times \nabla \phi = 0$ であるので,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \phi$$

$$\mathbf{E} = \nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \tag{4}$$

が得られ、$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ と $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ と $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ から, 式 (2) より

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\
\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{E} \\
\nabla \times \{\frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A})\} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{E} \\
\frac{1}{\mu}(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{E} \\
\frac{1}{\mu}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}) &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{E}
\end{aligned}$$

これに式 (4) を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}) &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon(\nabla \phi - j\omega \mathbf{A}) \\
\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mu \nabla \phi + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{A} \\
\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} - j\omega\epsilon\mu\phi) + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J}
\end{aligned}$$

ここでベクトル関数の回転と発散は独自に決められるため、$\nabla \cdot \mathbf{A} - j\omega\epsilon\mu\phi = 0$ を満足するように値を設定し、$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$とすると

$$(\nabla^2 + k^2)A_z = -\mu J_z \tag{5}$$

となる、この式をラプラシアンの球座標表現を用いて展開すると以下の波動方程式が得られる。

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{A_z} + k^2 A_z = 0$$

この波動方程式を満たす基本解のうち、外向波のベクトルポテンシャルは比例定数 C_1 を用いて、以下のように表せる。

$$A_z = C_1\frac{e^{-jkr}}{r}$$

比例定数決定のために、式 (5) の両辺を半径 r_0 の微小体積で積分すると。

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 A_z dV + k^2\int_V A_z dV &= -\mu\int_V J_z dV \\
\int_V \nabla\cdot\nabla A_z dV &= -k^2\int_V A_z dV - \mu\int_V J_z dV
\end{aligned}$$

ガウスの定理より、

$$\begin{aligned}
\oint_S \nabla A_z dS &= -k^2\int_V A_z dV - \mu\int_V J_z dV \\
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\nabla A_z\cdot\hat{\mathbf{r}}r_0^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi &= -k^2\int_V A_z dV - \mu\int_V J_z dV \qquad (6)
\end{aligned}$$

が得られる、ただし $\hat{\mathbf{r}}$ は r 方向の単位ベクトルである。
ここで,

$$\nabla A_z\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\hat{\mathbf{r}} = -(1+jkr)C_1\frac{e^{-jkr}}{r^2}$$

を式 (6) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -(1+jkr_0)C_1\frac{e^{-jkr}}{r_0^2}r_0^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi &= -k^2\int_V A_z dV - \mu\int_V J_z dV \\
(1+jkr_0)C_1 e^{-jkr}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi &= k^2\int_V A_z dV + \mu\int_V J_z dV \\
4\pi(1+jkr_0)C_1 e^{-jkr_0} &= k^2\int_V A_z dV + \mu\int_V J_z dV \qquad (7)
\end{aligned}$$

ここで、体積積分は微小体積によって行われ、また、電流密度の体積積分は Idl に収束するので。
式 (7) は,

$$4\pi C_1 = \mu I dl$$
$$C_1 = \frac{\mu I dl}{4\pi}$$

よって、

$$A_z = \mu I dl \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

この式を,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \\
&= \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \qquad (8)
\end{aligned}$$

に適応する。
まず、z 成分方向だけを持つベクトルポテンシャルを球座標系で表すと、$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ を r 方向およびθ方向の単位ベクトルとし

$$\mathbf{A} = \mu I dl \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

となり、これを式 (8) に代入すると。

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla \times \{\mu I dl \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\} \\
&= \frac{Idl}{4\pi}\{\nabla \times \frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \nabla \times \frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\} \\
&= \frac{Idl}{4\pi}(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}e^{-jkr}\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta) \\
&= \frac{Idl}{4\pi}(\frac{jk}{r}e^{-jkr}\sin\theta + \frac{e^{-jkr}}{r^2}\sin\theta) \\
&= \frac{Idl\sin\theta}{4\pi}(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-jkr}
\end{aligned}$$

よって,

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{Idl\sin\theta}{4\pi}(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-jkr} \qquad (9)$$

電磁界の双対性により、微小磁気ダイポールの電磁界は、微小電気ダイポールの電磁界に対して
$Idl \to j\omega\mu\pi a^2 I, \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \epsilon \to \mu$ と置き換えることで求められるので、式 (9) にこれを適応すると。

$$\mathbf{E}_\phi = -\frac{j\omega\mu I\pi a^2\sin\theta}{4\pi}(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-jkr} \qquad (10)$$