

情報理工学部 SN コース 3 回
第二回レポート (固有値, 固有ベクトル)

2600200443-6
Yamashita Kyohei
山下 恭平

Oct 23 2022

問題

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

の時以下の問いに答えよ

問 1 対称行列 A の固有値 α, β を求めよ

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \\ (\lambda+3)(\lambda-2) &= 0 \\ \lambda &= 2, -3 \end{aligned}$$

よって

$$\alpha, \beta = 2, -3$$

問 2 固有値に対応する, 大きさ 1 のベクトルを求めよ

$\lambda = \alpha = 2$ の時, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$x_1 = 2x_2$$

となるので, 大きさ 1 の固有ベクトルは

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\lambda = \beta = -3$ の時, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

となるので, 大きさ 1 の固有ベクトルは

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \quad (2)$$

問 3 固有ベクトルが直行していることを示せ

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= 0\end{aligned}$$

よって直行

問 4 大きさ 1 の固有ベクトル正規直交行列を P とする.

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となることを示せ

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

この時

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ PP^{-1}APP^{-1} &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ A &= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{-3\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{6\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (\text{左辺})\end{aligned}\tag{3}$$

題意は示された