### 全体課題 pre

無限に続くドミノを全て倒すルールを，作成せよ．ただし，使用できるルールは 2 つだけとする．

**例**

ルールを以下のように設定する．

1. 1 枚目のドミノを倒す．
2. すべての「奇数番目」のドミノは，次の「偶数番目」のドミノを倒せるように並べる．

→ このルール設定で，すべてのドミノは【 倒れる / 倒れない 】．
実際，1 枚目と 2 枚目は倒れるが，「2 枚目が倒れたとしても 3 枚目は倒せない」ので，ここでストップ．

**解答**

ルールを以下のように設定する．

1. 

2. 

説明

### 全体課題 (post)

1 数学的帰納法は帰納法と演繹法のいずれであるか，説明せよ．

2 無限に続くドミノを全て倒すルールを **数学的帰納法の構造をもとにして** 作成し．説明せよ．ただし，使用できるルールは 2 つだけとする．

**解答**

1 数学的帰納法は【 帰納法 / 演繹法 】である．なぜならば,,,

帰納法が，いくつかの事実をもとに【 予測を立てる / 結論を導く 】手法であるのに対して，演繹法は，いくつかの事実をもとに【 予測を立てる / 結論を導く 】手法であり，数学的帰納法は，いくつもの事実を【 有限回 / 無限回 】積み重ねる構造になっており，【 予測を立てている / 結論を導き続けている 】ため，数学的帰納法は【 帰納法 / 演繹法 】である．

---

2 ルールを以下のように設定する．

1. 

2. 

説明

♠ エキスパート A 「数学的帰納法」

**目標 A**

数学的帰納法の証明には以下の 2 つのステップがある．自然数 $n$ を含む条件 (A) について，

1) $n=1$ のときに (A) が成り立つ．
2) 全ての自然数 $k$ に対して，「$n=k$ で (A) が成り立つ $\Longrightarrow n=k+1$ で (A) が成り立つ．」

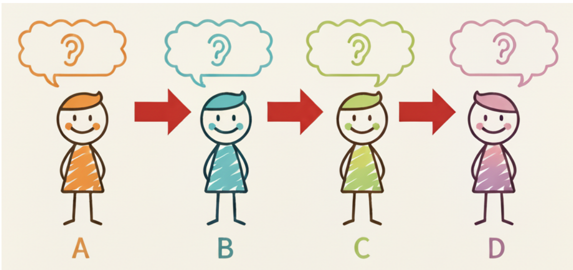
1) と 2) から，全ての自然数 $n$ に対して (A) が成り立つと結論して良い理由を理解し，説明できるようになる．

例

「澁谷先生は国宝を 3 回みたらしい」という噂を，40 人クラス全体に広めることを考える．

(1) まず，誰か一人が噂を流し始める ($n=1$).
(2) 次に，「秘密を聞いた人は，まだ聞いていない別の人に **必ず** 一人にだけ伝える」というルールを徹底します ($n=k$ で成り立つ $\Longrightarrow n=k+1$ で成り立つ).

この 2 つステップがあれば，A さん →B さん → ⋯ と，**途切れることなく** 40 人全員に噂が広まる．




補足

- (1) のステップがなければ噂は始まらない．さらに (2) において「必ず」がなければ，誰か一人の裏切りによってどこかで噂が途切れてしまう．
- この 2 つのステップがあれば，40 人クラスでなくとも，100 人でも 1 億人でも噂を広めることができる．
- このルールは自然数に関する命題でしか扱えない．例えば，「$\frac{1}{2}$ 人目」や「$\pi$ 人目」がいるとすると，実数の連続性から，「$\frac{1}{2}$ の次の数とは?」，「$\pi$ の次の数とは?」となり，議論が進まない．自然数なら 39 の次は 40 のようにできる．

→**1) 最初の一歩と 2) 繋がりの連鎖** の 2 つのステップで，**全員** が噂を知ることができる．

まとめ

数学的帰納法とは，自然数に関する条件に対して，
1) 「最初の一歩 ($n=1$)」と， 2) 「繋がりの連鎖 ($n=k \Rightarrow n=k+1$)」の 2 つのステップで全体を示す証明方法である．

♠ エキスパート B 「演繹の強固さと帰納の脆弱さ」

**目標 B**

「演繹法」と「帰納法」の違いを理解し，「演繹法」の有用性を説明できるようになる．

**演繹法**

推論の一種で，一定の前提から論理規則に基づいて必然的に結論を導き出す方法を演繹法という．通常は普遍的命題 (公理) から個別的命題 (定理) を導く形をとる．(広辞苑)

例

- いくつかの事実「円の面積は (半径 × 半径 ×$\pi$) で求まる．」，「円 A の半径は 3 である」
  から導いた結論「円 A の面積は $9\pi$ である」は 【 正しい / 正しくない 】.
- いくつかの事実「男子の後ろには男子が並んでいる」，「先頭に並んでいるのは男子である」
  から導いた結論「5 番目に並んでいるのは男子である」は 【 正しい / 正しくない 】.

→ 面積公式と半径から求めた面積は 1 つしかないし，先頭が男子で後ろも男子なのだから何番目だろうと並んでいるのは男子である．

**帰納法**

推理および思考の手続きの 1 つで，個々の具体的事象から一般的な命題ないし法則を導き出す方法を帰納法という．特殊から普遍を導き出すこと．(広辞苑)

例

- いくつかの事実「りんご A は赤い」，「りんご B は赤い」，「りんご C は赤い」
  から導いた結論「世の中のすべてのりんごは赤い」は 【 正しい / 正しくない 】.
- いくつかの事実「1 羽目のカラスは黒い」，「2 羽目のカラスは黒い」，「100 羽目のカラスは黒い」
  から導いた結論「地球上のすべてのカラスは黒い」は 【 正しい / 正しくない 】.

→ 青いりんごがあるかもしれないし，101 羽目のカラスは白いかもしれない．

まとめ

演繹法は，いくつかの前提から論理的に結論を導く **証明の手法** であり，
帰納法は，いくつかの事実から推理的に結論を予測する **推測の手段** である．
そのため，数学の証明に利用できるのは【 演繹法 / 帰納法 】

♣ 問題を解こう

**例題 13**

$n$ を自然数とする．数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

**解答**

$n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=1,\quad (\text{右辺})=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$$

より，等式は成り立つ．$\cdots$[1]
$k$ を任意の自然数とし $n=k$ で等式が成り立つと仮定する，すなわち

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

が成り立つと仮定する．
この仮定より，$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2),\\(\text{右辺})&=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

より，等式は成り立つ．$\cdots$[2]
以上 [1],[2] より，すべての自然数 $n$ に対して等式は成り立つ．

**練習 41**

数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
(2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$