P.96〜P.9

基本事項

- 求めた標本平均 $\overline{X}$ から母平均 m の真の値がどのような範囲にあるか推測することを____________________ といい,

$$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で表される母平均 m の範囲を，母平均 m に対する________________________という．ただし σ は母標準偏差，n は標本の大きさとする．

- 実際の推定では,
  - 既知の値 $\longrightarrow$ 標本平均 $\overline{X}$，標本の標準偏差 s
  - 未知の値 $\longrightarrow$ 母平均 m，母標準偏差 σ

  である場合が多く，母平均 m のみ未知数である場合は少ない．
- 実は，標本数 n が大きいとき，母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 s を用いてよいことが知られている．(説明は今回はしない．)

♣ 母平均の推定

全体課題 (練習 32)

大量に生産されたある製品の中から，100 個を無作為抽出して長さを測ったところ，平均値 103.4cm，標準偏差 1.5cm であった．この製品の平均の長さ m cm に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

解答

♠ エキスパート A「面積 0.95 となる場所は?」

目標 A

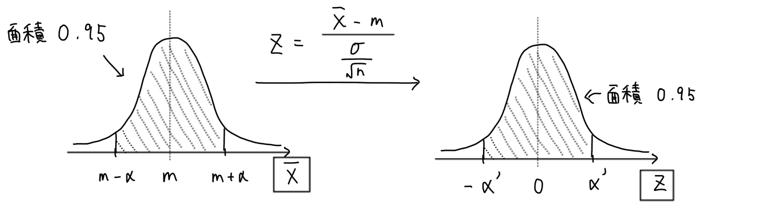
正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う標本平均 $\overline{X}$ について，平均からの誤差に関して $P(|\overline{X}-m| \leqq \alpha) = 0.95$ が成り立つような α を求め，「$1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$」の正体を式変形をたどりながら説明することができる．

課題

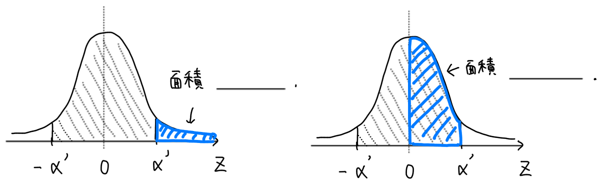
- 考える不等式は

$$|\overline{X}-m| \leqq \alpha \Longleftrightarrow m-\alpha \leqq \overline{X} \leqq m+\alpha$$

  と変形できるから，
- 考える確率は左図の網掛け部分 ↓↓↓(**軸のラベルに注意**).



- $\overline{X} \sim N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ より，$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおくと，$Z \sim N(0,\ 1)$.
- これを用いて，左図の面積の代わりに右図の面積を考える (**軸のラベルに注意**)↑↑↑.
- 内側の面積が 0.95 ということは，右端片側の面積は【 0.05 / 0.025 】で，内側右半分の面積は【 0.45(=0.5-0.05) / 0.475(=0.5-0.025) 】↓↓↓



- したがって，正規分布表を読み取れば，図の α' の値は $\alpha' =$ ＿＿＿＿＿.
- $\overline{X}$ に戻すと，

$$Z = 1.96 \Longleftrightarrow \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1.96$$
$$\Longleftrightarrow \overline{X}-m = 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- したがって求める誤差許容度 α の値は，$\alpha =$ ＿＿＿＿＿＿.
- これより，面積 0.95 となる範囲は

$$|\overline{X}-m| \leqq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- この式を母平均 m について整理すると信頼区間の不等式を得る ↓↓↓.

$$\overline{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

♠ エキスパート B「信頼度 95% の意味」

目標 B

「信頼度 95%」の意味を明確に理解し，「投げ縄」を例に説明することができる．

課題

次の動画を見て大事だと思った箇所をメモせよ．

[メモ]

まとめ

信頼度 95% の信頼区間とは，
【この区間の中に本当の母平均が含まれている確率は 95% / 100 回抽出すればそのうち 95 回は母平均を含んでいる】
ような区間のことである．