P.62〜 P.66

基本事項

- 2 つの確率変数 $X,\ Y$ について，$X$ が $x$ という値をとり，かつ，$Y$ が $y$ という値を取る確率を $P(X=x,\ \ Y=y)$ と書き

$$(X,\ Y)\ \to\ P(X=x,\ \ Y=y)$$

の対応関係を $X,\ Y$ の________________という．

例

大小 2 つの歪みのないさいころの出る目を $X,\ Y$ とし，目の和 $X+Y$ の確率分布を考える．

- $X,\ Y$ の確率分布はそれぞれ，

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | | | | | | | 1 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | | | | | | | 1 |

- $X+Y$ のとりうる値を表にすると，

| $X\ /\ Y$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

- よって $X+Y$ の確率分布は

| $X+Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | 12 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | $\cdots$ | $\frac{\phantom{0}}{36}$ | 1 |

- ちなみにこの期待値 $E(X+Y)$ は，

$$E(X+Y)=$$

全体課題 pre

次のルールのゲームに参加する．

- 確率変数 $X$ を次で定める．
  - サイコロ 1 個を投げ，偶数なら $X=1$, 奇数なら $X=0$.
- 次に，確率変数 $Y$ を次で定める．
  - $X=1$ ならもう一度サイコロを振り，でた目を $Y$ とする．
  - $X=0$ なら，サイコロを振らずに，$Y=0$ とする．
- 最後に, 2 種類 $Z_1,\ Z_2$ を $Z_1=100X+50Y,\ Z_2=5000XY$(円) で定める．

あなたなら賞金 $Z_1,\ Z_2$ のどちらを選ぶか．

解答

全体課題 post

次のルールのゲームに参加する．

- 確率変数 $X$ を次で定める．
  - サイコロ 1 個を投げ，偶数なら $X=1$, 奇数なら $X=0$.
- 次に，確率変数 $Y$ を次で定める．
  - $X=1$ ならもう一度サイコロを振り，でた目を $Y$ とする．
  - $X=0$ なら，サイコロを振らずに，$Y=0$ とする．
- 最後に, 2 種類 $Z_1,\ Z_2$ を $Z_1=100X+50Y,\ Z_2=5000XY$(円) で定める．

あなたなら賞金 $Z_1,\ Z_2$ のどちらを選ぶか．$Z_1,\ Z_2$ の期待値を根拠に判断せよ．

解答

## ♠ エキスパート A「期待値の加法性」

**目標 A**

期待値の加法性 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ の導出を理解し，問題への活用方法を説明できる．

**主張と証明**

$\boxed{\text{主張}}$ 2 つの確率変数 $X,\ Y$ について $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

$\boxed{\text{証明}}$ (簡単のため，確率変数の取りうる値はそれぞれ 2 つであるとする．)
$X,\ Y$ がそれぞれ次の確率分布に従っているとする．

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | 1 |

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $P(Y=y_1)$ | $P(Y=y_2)$ | 1 |

このとき，$X+Y$ の取りうる値は ＿＿＿＿，＿＿＿＿，＿＿＿＿，＿＿＿＿ の 4 つ．
よって期待値 $E(X+Y)$ は

$$E(X+Y)\overset{(イ)}{=}\underbrace{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}}_{2\times2\text{ の計 4 つ}}(x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}x_iP(X=x_i,\ Y=y_j)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}y_jP(X=x_i,\ Y=y_j)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}}_{\text{足す順番を入れ替えた}}x_iP(X=x_i,\ Y=y_j)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}y_jP(X=x_i,\ Y=y_j)$$

$$\overset{(ロ)}{=}\sum_{i=1}^{2}\underbrace{x_i\sum_{j=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)}_{x_i\text{はここでは定数．ので外に出した}}+\sum_{j=1}^{2}\underbrace{y_j\sum_{i=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)}_{y_j\text{はここでは定数．ので外に出した}}$$

$$\overset{(ハ)}{=}\sum_{i=1}^{2}x_iP(X=x_i)+\sum_{j=1}^{2}y_jP(Y=y_j)$$

$=E(X)+E(Y)$.(証明終わり)

- (イ) の式変形で $\sum$ を 2 つ使う理由は，1 つだと

$$\sum_{i=1}^{2}(x_i+y_i)P(X=x_i,\ Y=y_i)=(x_1+y_1)P(X=x_1,\ Y=y_1)+(x_2+y_2)P(X=x_2,Y=y_2)$$

  となってしまう．
- (ロ) の式変形では，$\sum_{j=1}^{2}$ の中で $x_i$ は【 定数 (ボーナス) / 変数 (選手) 】だから外に出せる．
- (ハ) の式変形ではこんなことをしている．

$$\sum_{j=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)=\underbrace{P(X=x_i,\ Y=y_1)+P(X=x_i,\ Y=y_2)}_{Y\text{ は }y_1,y_2\text{が全事象．足したら }Y\text{ については確率 }1(Y\text{ については無条件})}=\underbrace{P(X=x_i)}_{\text{ので }X\text{ の条件だけが残る．}}$$

**説明**

- この性質は，より多変数でも成り立つ (例えば $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$).
- この性質を使えば，先の例のように $X+Y$ の分布を求めずとも，$E(X)$ と $E(Y)$ の値から $E(X+Y)$ がわかる．

## ♠ エキスパート B「期待値の積と独立性」

**目標 B**

期待値の積の性質 $E(XY)=E(X)E(Y)$ が限られた場合でしか成り立たないことを具体例から理解し (証明は今回は省略)，問題への活用方法を説明できる．

**例**

1 回のコイン投げと 1 回のサイコロふりで，
- 確率変数 $X$: 表なら 1，裏なら 0.
- 確率変数 $Y$: サイコロが偶数なら 1, 奇数なら 0
- 確率変数 $Z$: サイコロの出目によらず,$X$ と同じ値をとる ($Z=X$).

とする．

- $X$ の期待値 $E(X)$ は $E(X)=$＿＿＿＿.
- $Y$ の期待値 $E(Y)$ は $E(Y)=$＿＿＿＿.
- $Z$ の期待値 $E(Z)$ は $E(Z)=$＿＿＿＿.
- 確率変数 $XY$ の確率分布は

| $XY$ | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| P | | | 1 |

  であるから，期待値 $E(XY)$ は $E(XY)=$＿＿＿＿.
- 確率変数 $XZ$ の確率分布は

| $XZ$ | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| P | | | 1 |

  であるから，期待値 $E(XZ)$ は $E(XZ)=$＿＿＿＿.

以上より，
- $E(XY)=E(X)E(Y)$ は【 成り立つ / 成り立たない 】.
- $E(XZ)=E(X)E(Z)$ は【 成り立つ / 成り立たない 】.
- この違いは，2 つの確率変数 $X$ と $Y$ が【 互いに独立である (無関係) / 独立ではない 】であるのに対して，確率変数 $X$ と $Z$ は【 互いに独立である (無関係) / 独立ではない 】ことに由来する．

**まとめ**

期待値の積の性質 $E(XY)=E(X)E(Y)$ は，2 つ確率変数 $X,Y$ が【 独立である / 独立ではない 】場合に成り立つ．