P.74~P.77

基本事項

- (復習)「離散型」の確率変数 X とは，「X の値が定まれば確率が決まる」ような X のこと．
  - 例 1 ：コイン投げ「表なら $X = 1$」，「裏なら $X = 0$」→ $P(X=1)=1/2$， $P(X=0)=1/2$.
  - 例 2：サイコロ投げ「i の目が出たら $X = i (i = 1, 2, \cdots, 6)$」→ $P(X=i)=1/6$
- 「連続型」の確率変数 X とは，「X の範囲が定まれば確率が決まる」ような X のこと．

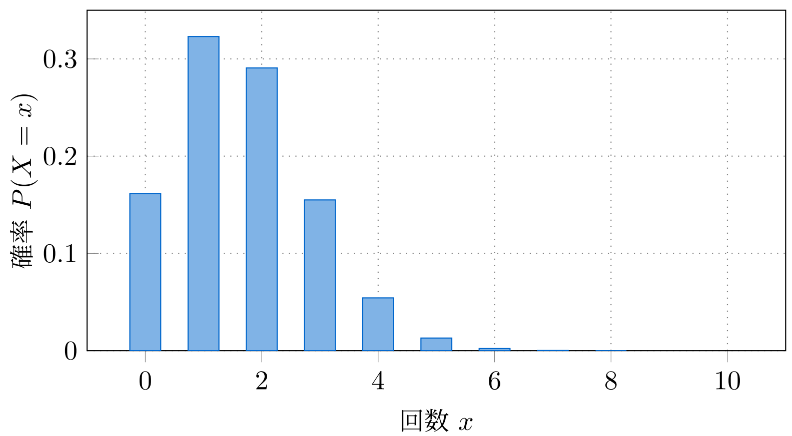
説明

例：$X =$ 身長

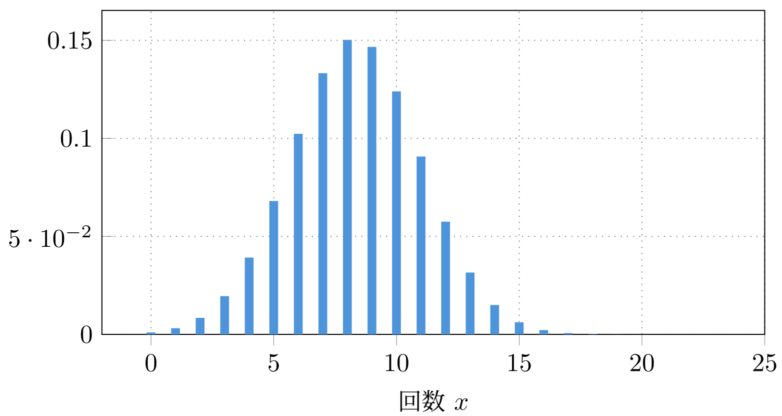
- 身長 170cm の人 $(X = 170)$ は【 誰もいない / 何人か存在する 】→$P(X=170)=0$.
- 身長 170cm 以上 171cm 未満の人 $(170 \leqq X < 171)$ は【 誰もいない / 何人か存在する 】→$P(170 \leqq X < 171) > 0$
- 1 点「$X = 170$」では確率が測れないから，「$170 \leqq X < 171$」のような範囲で確率を定める．

- 試行回数 n を十分大きくすると，右のヒストグラムのように，形は徐々に滑らかになり，ある曲線 $y = f(x)$ が現れる．この曲線 $y = f(x)$ を**分布曲線**といい，関数 $f(x)$ を**確率密度関数**という．

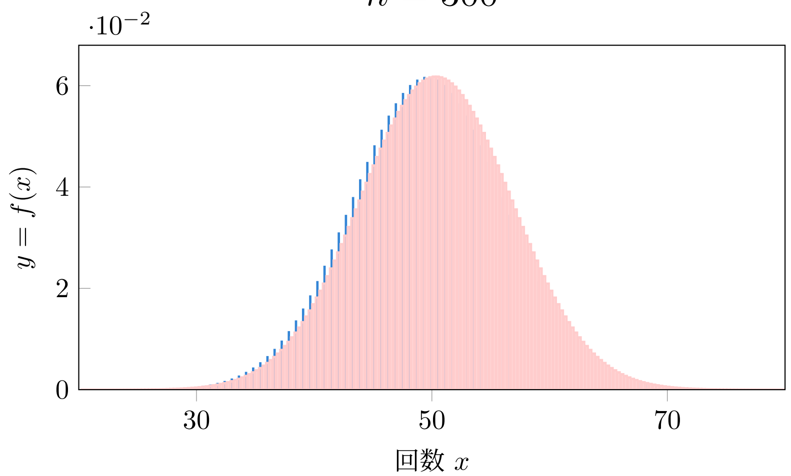
$n = 10$



$n = 50$



$n = 300$



全体課題 pre/post

ある工場で，ペットボトル飲料 (内容量 $X = 500$ml) を生産している．機械の特性上，内容量 X にはわずかなばらつきが生じる．過去のデータから，この内容量 X は，平均 $m = 500$ml, 標準偏差 $\sigma = 2$ml の「正規分布」という分布に従うことがわかっている．
この工場では，内容量が 498ml 未満，または 502ml 超過 の製品を「不良品」として出荷できない．
この工場で不良品が発生する確率 $P(X < 498$ または $X > 502)$ を求めるための「考え方」を説明せよ (確率を求めるのは次回以降).

解答

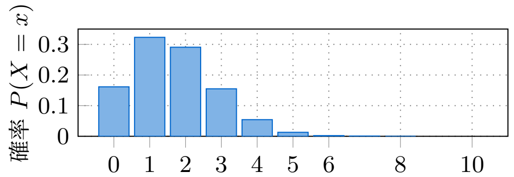
♠エキスパート A「面積と確率」

目標 A

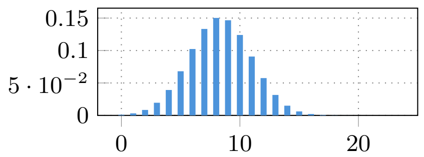
確率密度関数 $f(x)$ が確率の**詰まり具合**を表していることを理解し，確率が面積であることを説明できる．

例

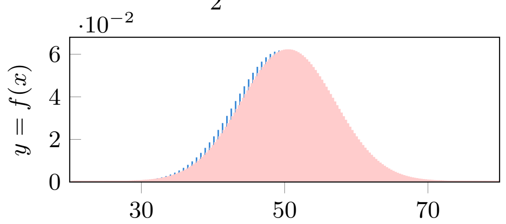
- n 回サイコロを振り，1 の目が出た回数を X とすると，X は，二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う．
  - $n=10$ のとき，期待値は $E(X)=$_____ だから，大体 1,2 回前後の確率が大きくなっている．
    さらに，各棒の横幅は 1, 縦幅はそれぞれの確率を表しているため，棒の面積の合計は_____.



  - $n=50$ のとき，期待値は $E(X)=$_______ だから，大体 8,9 回前後の確率が大きくなっている．$n=10$ よりも棒の数が増えるものの，棒の縦幅 (確率) が小さくなっていて，結果として棒の面積の合計は変わらず____.



  - $n=300$ のとき，期待値 $E(X)$ は $E(X)=$______ だから，大体 50 回前後の確率が大きくなっている．棒はさらに細分化され，棒それぞれの縦幅 (確率) はとても小さくなり，棒全体の面積の合計は____．さらに，$P(50\leqq X\leqq 70)\simeq\dfrac{1}{2}$ も見て取れる.(← 全体「1」に対する割合と理解できる．)



- 確率密度関数 $f(x)$ とは，n を十分大きくしたときに現れる曲線 $y=f(x)$ を表す関数であると理解でき，曲線 $y=f(x)$ の表す山全体の面積は_____である.
- そして確率 $P(a\leqq X\leqq b)$ とは, 全体に対して，範囲 $a\leqq X\leqq b$ がどのくらいの割合を占めているのか，つまり，確率がどの程度詰まっているのかを表しているものと理解できる.

まとめ

確率密度関数 $f(x)$ とは，文字通り確率の密度を表す関数であり，グラフと横軸が囲う箇所の面積[a]は 1 である．全体を「1」にすることで，表す範囲の面積が, 割合，すなわち確率になる．

[a] 教科書にある記号 $\int_a^b$ は積分の記号で，面積を表すものである．使わなくても理解できるからここではふれない.

♠エキスパート B「正規分布」

目標 B

正規分布の定義の意味を大雑把に理解し，グラフと式の関係を説明できる．

説明

定義. m を実数，σ を正の実数とする，確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

であるとき，確率変数 X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うといい，

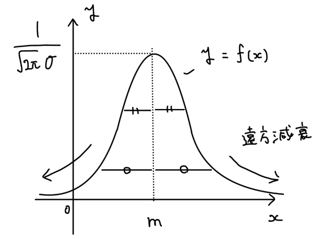
$$X\sim N(m,\ \sigma^2)$$

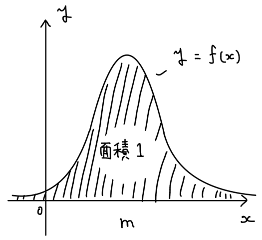
と書く．ただし，e とはおおよそ $e\simeq 2.71828$ を満たす無理数である．

- e は π や $\sqrt{2}$ 同じ, ただの無理数．詳しい性質は数学 3 で習う．
- 指数部分の分子 $-(x-m)^2$ は x の値によらずに常に【 0 以上 / 0 以下 】であり，$x=$______ のときに最大値を______をとる．
- $f(m+\sigma)$ と $f(m-\sigma)$ の値が【 等しい / 等しくない 】ことからもわかるように，$y=f(x)$ のグラフは，$x=m$ に関して【 対称である / 対称ではない 】．← 期待値 (山の中心) が m になるように調整されている．
- 指数部分の分母は $2\sigma^2$ ← 標準偏差 (山の散らばり) が σ になるように調整されている．
- x の値が $x=m$ から離していくと，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\times\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{マイナス乗は逆数}}}\xrightarrow{x\text{ を遠方へ}}0$$

  となり，$f(x)$ の値は【 どんどん小さく / どんどん大きく 】0 に近づいていく．← グラフの遠方減衰性.
- 定数倍 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ は山全体と x 軸が囲う場所の面積が 1 になるように調整された数である．





- そして不思議なことに，自然現象 (個体差 (身長，体重) など) や社会現象 (テストの得点など) の分布が，正規分布に近い分布になることが知られている (詳しくは大学で).

まとめ

正規分布の定義は，期待値と標準偏差がそれぞれ $E(X)=m,\ \ \sigma(X)=\sigma$ となるように調整された定義であると理解せよ．