P.56〜P.61

a, b を定数とし，確率変数 X が次の確率分布に従っているとする．

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

♣期待値の性質

性質 ($aX+b$ の期待値)

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

解釈

$x_1 \sim x_n$ が全て a 倍されたら，期待値も a 倍．全て $+b$ されたら，期待値も $+b$.

証明

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= (ax_1+b)\cdot p_1 + (ax_2+b)\cdot p_2 + \cdots + (ax_n+b)\cdot p_n \\ &= a\underbrace{(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n)}_{=E(X)} + b\underbrace{(p_1+p_2+\cdots+p_n)}_{\text{確率の総和は } 1} \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

練習 4

1 個のサイコロを投げて出る目を X とする．X は確率変数となり，$E(X) = \dfrac{7}{2}$ である．次の確率変数の期待値を求めよ．

(1) $X+2$　　(2) $4X-1$　　(3) $-3X$

解答

定義 (X^2 の期待値)

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n \left(= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k \right).$$

説明

X^2 は X の各値を 2 乗した値たちのこと．

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$\rightarrow$

X^2	x_1^2	x_2^2	$\cdots\cdots$	x_n^2	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

練習 5

2 枚の硬貨を同時に投げて表が出る硬貨の枚数を X とするとき，X^2 の期待値を求めよ．

解答

確率分布

X	0	1	2	計
P				1

$\rightarrow$

X^2	0^2	1^2	2^2	計
P				1

♣分散の定義

定義

X の期待値を m であるとする．次で定義される値 $V(X)$ を X の分散と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X-m)^2\right) \\
&= (x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n \\
&\left(=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k\right)
\end{aligned}
$$

♠全体課題

全体課題 pre

A と B,2 つのゲームがあり，どちらのゲームも,1 個のサイコロを振って出た目に応じて賞金が決まります．あなたはどちらのゲームに参加しますか．

- ゲーム A
  - 1,2,3 の目:100 円
  - 4 の目:200 円
  - 5,6 の目:300 円
- ゲーム B
  - 1,2,3 の目:0 円
  - 4 の目:100 円
  - 5,6 の目:500 円

解答

全体課題 post

A と B,2 つのゲームがあります．あなたはどちらのゲームに参加しますか．「分散」と「リスク」に言及して解答せよ．

- ゲーム A
  - 1,2,3 の目:100 円
  - 4 の目:200 円
  - 5,6 の目:300 円
- ゲーム B
  - 1,2,3 の目:0 円
  - 4 の目:100 円
  - 5,6 の目:500 円

解答

♠ エキスパート A「分散とは何か」

目標 A

分散が「散らばり」を表す量であることを理解し，説明できる．

例

次の 2 つのゲームを考えてみよう．

- ゲーム A (安定型)
  - 1 等 (確率 30%):600 円
  - 2 等 (確率 40%):500 円
  - 3 等 (確率 30%):400 円
- ゲーム B (ハイリスク型)
  - 1 等 (確率 5%):5,000 円
  - 2 等 (確率 25%):1,000 円
  - 3 等 (確率 70%):0 円

- ゲーム A,B ともに賞金 X の期待値 $m(=E(X))$ は $m=$ ______
- A, B それぞれ表にまとめると,,,

賞金 X_A	確率 P	偏差 X_A-m	偏差の 2 乗 $(X_A-m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))
600				
500				
400				
合計	1			

賞金 X_B	確率 P	偏差 X_B-m	偏差の 2 乗 $(X_B-m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))
5000				
1000				
0				
合計	1			

- より分散が大きいのは，【 A / B 】．

まとめ

「偏差」のみでは表現できない「散らばり」度合いを，2 乗を用いて表現したものが分散である．

♠ エキスパート B「分散と期待値の関係式」

目標 B

関係式 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ の導出を理解し，活用方法を説明できる．

性質

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$\boxed{\text{証明}}$

確率変数 X の期待値 $E(X)$ を m とおくと[a], 分散の定義から,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2-2mx_k+m^2\right)p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2p_k-2mx_kp_k+m^2p_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k \underbrace{-2m}_{\text{定数は外に}}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_kp_k}_{=m} + \underbrace{m^2}_{\text{定数は外に}}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}p_k}_{=1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2m^2+m^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-m^2 \\
&= E(X^2)-(E(X))^2 .
\end{aligned}$$

[a] $m=E(X)$ とおくということ．$E(X)$ だと式全体が複雑に見えるから m と書き換えよう，くらいの気分．

説明

- 全体課題のゲーム A,B の期待値はどちらも______.← 分数
- ところで分散の定義は

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=\underbrace{(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n}_{\text{それぞれの } m \text{ に分数を代入して計算するのはちょっと面倒}}.$$

- そこで，この関係式を利用する．
- 全体課題において，ゲーム A,B それぞれについて，X^2 の期待値 $E(X_A^2)$，$E(X_B^2)$ は
  $E(X_A^2)=$ __________， $E(X_B^2)=$ __________． ← 少しは計算が楽そう．