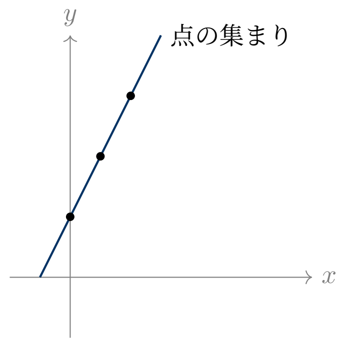
1. (復習) そもそも「図形の方程式」とは？

数学 II で習った「直線の方程式 $y = 2x + 1$」とは何だっただろうか.

図形の定義

図形とは, **ある条件を満たす「点」全体の集合** である.

例えば $y = 2x + 1$ は,「x 座標を 2 倍して 1 足すと y 座標になる」という条件を満たす点 (x, y) を無数に集めると, 一本の直線になることを意味している.



2. 点とベクトルの同一視

位置ベクトルを導入したことで, 我々は次の対応関係を手に入れた.

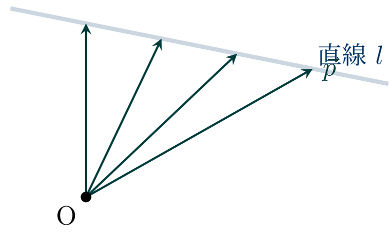
$$\text{点 P} \longleftrightarrow \text{位置ベクトル } \vec{p} \text{ (原点 O からの矢印)}$$

これにより,「点 P が満たす条件」を「ベクトル $\vec{p}$ が満たす条件」に書き換えることができる. これが**ベクトル方程式**である.

ベクトル方程式

変数ベクトル $\vec{p}$ が満たすべき等式のこと. この等式を満たす $\vec{p}$ の終点 P 全体が作る図形を考える.

イメージ: 条件を満たすような矢印 $\vec{p}$ を無数に描いたとき, その「矢印の先端（終点）」が描く軌跡が図形となる.



条件を満たす矢印の
先端が直線を形作る.

3. 「1 点」と「向き」で決まる直線

最も基本的な直線の定義は，「通る点 A」と「進む方向 $\vec{d}$」を指定することである．
点 P($\vec{p}$) がこの直線上にある条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} // \vec{d} \quad \text{(平行)}$$

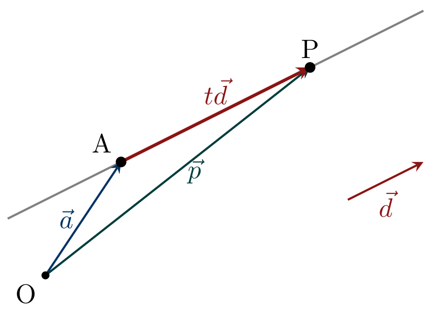
である．つまり，ある実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$ と書ける．
これを用いて $\vec{p}$ を表すと:

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{a} + t\vec{d}$$

直線のベクトル方程式 (方向ベクトル)

定点 A($\vec{a}$) を通り，方向ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線:

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t \text{ は実数})$$



直線 AP とは，ある実数 t を用いて，

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

と書けるようなベクトル全体の集合のことである．

4. 成分（座標）との関係

ベクトル方程式 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を成分で書いてみる．

- 通る点: $\vec{a} = (x_1, y_1)$
- 方向ベクトル: $\vec{d} = (l, m)$
- 直線上の点: $\vec{p} = (x, y)$

代入すると:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(l, m) = (x_1 + lt,\ y_1 + mt)$$

直線の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

ここから t を消去すると，見慣れた $y - y_1 = \frac{m}{l}(x - x_1)$ などの式が得られる．

例題 1 (2 点を通る直線)

2 点 $A(2, 3), B(4, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ．

方針: 方向ベクトル $\vec{d}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．$\vec{d} = (4-2, 7-3) = (2, 4)$．$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ に代入する．

5. 「1 点」と「垂直な向き」で決める直線

もう一つの直線の決め方は，「通る点 A」と「直線の**傾きに垂直なベクトル** $\vec{n}$」を指定することである．
この $\vec{n}$ を**法線 (ほうせん) ベクトル**という．
点 P($\vec{p}$) が直線上にある条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n} \quad (\text{または } \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0})$$

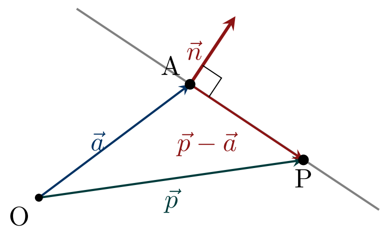
である．これを内積を用いて表すと:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

直線のベクトル方程式 (法線ベクトル)

定点 A($\vec{a}$) を通り，法線ベクトル $\vec{n}$ を持つ直線:

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$



6. 一般形 $ax + by + c = 0$ の正体

法線ベクトルの式を成分で計算してみよう．$\vec{n} = (a, b), A(x_1, y_1), P(x, y)$ とする．

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$
$$(a, b) \cdot (x - x_1,\ y - y_1) = 0$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

これを展開すると:

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$

$-ax_1 - by_1$ は定数なので c と置くと，直線の方程式 $ax + by + c = 0$ になる!

係数の正体

直線の方程式 $ax + by + c = 0$ における x, y の係数ベクトル (a, b) は，その直線の**法線ベクトル**を表している．

例題 2 (法線ベクトルの利用)

点 $A(3, 1)$ を通り，$\vec{n} = (2, -5)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

解法: 法線が $(2, -5)$ なので，直線の式は $2x - 5y + c = 0$ の形になる．あとは点 A を通ることから決定する．(ベクトル方程式 $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ に直接代入してもよい)

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (方向ベクトル)

点 $A(-1,2)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(3,-4)$ に平行な直線 l を考える．

(1) 直線 l 上の点 (x,y) を，媒介変数 t を用いて表せ．

(2) t を消去して x,y の方程式を求めよ．

Memo / Answer

練習 A2 (法線ベクトル)

次の直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(2,3)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(4,-1)$ に垂直な直線．

(2) 直線 $2x+3y-5=0$ に垂直なベクトル（法線ベクトル）を 1 つ答えよ．

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (2 点を通る直線と法線)

2 点 $A(1,4), B(5,2)$ を通る直線 l について以下の問いに答えよ．

(1) 直線 l の方向ベクトル $\vec{d}$ を求めよ．

(2) 直線 l の法線ベクトル $\vec{n}$ を 1 つ求めよ．(成分は整数でよい)

(3) 点 $P(2,1)$ から直線 l に下ろした垂線の足を H とする．H の座標を求めよ．

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

(1) $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ より,

$$(x,y)=(-1,2)+t(3,-4)$$

よって, $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1+3t} \\ \boldsymbol{y=2-4t} \end{cases}$

(2) t を消去する．第 1 式より $3t=x+1 \implies t=\frac{x+1}{3}$．第 2 式へ代入: $y=2-4(\frac{x+1}{3})$. $3y=6-4(x+1) \implies 3y=6-4x-4$. $\boldsymbol{4x+3y-2=0}$

別解: 方向ベクトル $(3,-4)$ より傾きは $-\frac{4}{3}$. $y-2=-\frac{4}{3}(x-(-1))$ を整理してもよい.

練習 A2 解答

(1) 法線ベクトルが $\vec{n}=(4,-1)$ なので, 求める直線の式は $4(x-2)-1(y-3)=0$ $4x-8-y+3=0$ $\boldsymbol{4x-y-5=0}$

(2) 直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルは (a,b) である．よって $\boldsymbol{\vec{n}=(2,3)}$ (またはその実数倍)

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

(1) 方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\vec{d}=(5-1,2-4)=(4,-2)$$

簡単にするため 2 で割って $\boldsymbol{\vec{d}=(2,-1)}$ としてもよい.

(2) $\vec{d}=(2,-1)$ に垂直なベクトル $\vec{n}=(a,b)$ を探す．内積が 0 になればよい: $2a-b=0$．例えば $a=1,b=2$ とすれば成り立つ．よって $\boldsymbol{\vec{n}=(1,2)}$ (例).

(3) 垂線の足 H の求め方．H は直線 l 上にあるので, 方向ベクトル $\vec{d}=(2,-1)$ を用いて $H(1+2k,\ 4-k)$ （点 A を通り $\vec{d}$ 方向）とおける.

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\vec{d}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1+2k-2,\ 4-k-1)=(2k-1,\ 3-k)$.

垂直条件より内積が 0:

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{d}=0$$
$$(2k-1)\cdot 2+(3-k)\cdot(-1)=0$$
$$4k-2-3+k=0 \implies 5k=5 \implies k=1$$

$k=1$ を H の座標に代入して, $H(1+2(1),\ 4-1)=\boldsymbol{(3,3)}$.

別解（法線ベクトルの利用）

直線 l の式は, $\vec{n}=(1,2)$ と点 $\mathrm{A}(1,4)$ より $1(x-1)+2(y-4)=0 \implies x+2y-9=0$. 点 $P(2,1)$ を通り，直線 l に垂直な直線 m を求める．m の方向ベクトルは $\vec{n}=(1,2)$. $m:(x,y)=(2,1)+s(1,2)=(2+s,1+2s)$．これを l の式に代入して交点 H を求める. $(2+s)+2(1+2s)-9=0 \implies 5s-5=0 \implies s=1$．よって $H(3,3)$.