

## Introduction : 解の条件からグラフの条件へ

「2 次方程式の解がすべて正である」これを解の公式や因数分解だけで処理するのは困難です。そこで、問題をグラフの話に翻訳します。

方程式  $f(x) = 0$  が「異なる 2 つの正の解」をもつ  
 $\Downarrow$  翻訳  
 グラフ  $y = f(x)$  が「 $x > 0$  の範囲で  $x$  軸と 2 回交わる」

これを満たすグラフを描くことで、必要な条件が見えてきます。

## 「正の解・負の解」の 3 点セット

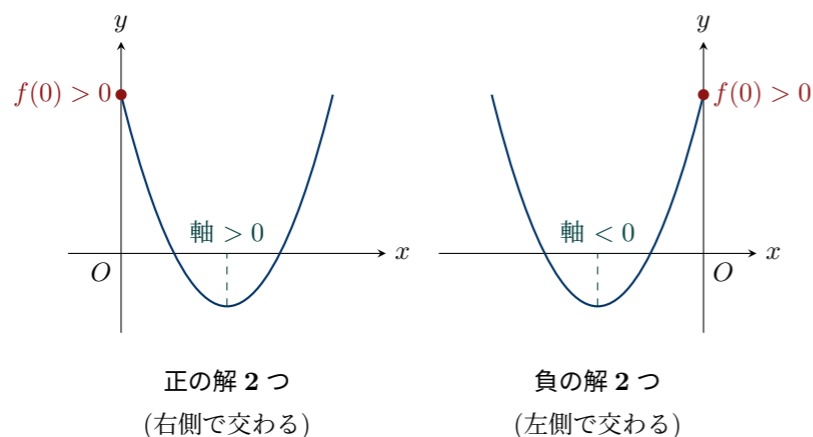
下に凸の 2 次関数  $f(x) = x^2 + \dots$  について、

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ条件

- ① 判別式  $D > 0$  ( $x$  軸と 2 点で交わる)
- ② 軸  $> 0$  (山が右側にある)
- ③ 端点  $f(0) > 0$  ( $x = 0$  でプラス)

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ条件

- ① 判別式  $D > 0$
- ② 軸  $< 0$  (山が左側にある)
- ③ 端点  $f(0) > 0$



## 例題 1 : 異なる 2 つの正の解

2 次方程式  $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$  が異なる 2 つの正の解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

方針:  $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$  とおく。以下の 3 つを連立させる。

- (1) 判別式  $\frac{D}{4} > 0$
- (2) 軸  $x = a > 0$
- (3)  $f(0) = a + 2 > 0$

Memo / Answer

例題 2：異なる 2 つの負の解

2 次方程式  $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$  が異なる 2 つの負の解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

方針：グラフが「左側」で交わる条件を立てる。

- (1) 判別式  $D > 0$
- (2) 軸  $< 0$
- (3)  $f(0) > 0$

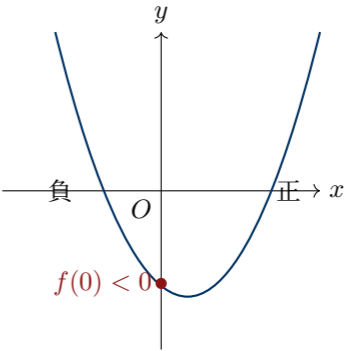
Memo / Answer

異符号の解 (1 つは正, 1 つは負)

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a > 0$ ) が、正の解と負の解を 1 つずつもつ (異符号の解をもつ) 条件は、

$f(0) < 0$

これ 1 つだけで OK !



理由：下に凸の放物線で、 $y$  切片が負 (地下にある) ならば、必ず  $x$  軸のプラス側とマイナス側を突き抜けて地上に出てくるからです。(判別式  $D$  や軸の条件は自動的に満たされるため不要)

例題 3：異符号の解

2 次方程式  $x^2 - ax + a - 3 = 0$  が異符号の解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

次の問いに答えよ。

練習 A1: 正の解

2 次方程式  $x^2 - 2(a - 1)x - a + 3 = 0$  が異なる 2 つの正の解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

練習 A2: 負の解

2 次方程式  $x^2 + 4x + k = 0$  が異なる 2 つの負の解をもつとき、定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

練習 A3: 異符号の解

2 次方程式  $x^2 - 5x + 2m - 4 = 0$  が異符号の解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 総合問題

2 次方程式  $x^2 - 2ax + 3a - 2 = 0$  が次のような解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲をそれぞれ求めよ。

- (1) 異なる 2 つの正の解をもつ。
- (2) 異符号の解をもつ。

練習 B2: 条件の緩和

2 次方程式  $x^2 - ax + a + 3 = 0$  が「正の解のみ」をもつ条件を求めよ。（重解の場合も含むことに注意）

Memo / Answer

## A 問題：解答

## Memo / Answer

**A1**  $f(x) = x^2 - 2(a-1)x - a + 3$  とおく。

(1) 判別式  $\frac{D}{4} > 0$

$$(a-1)^2 - (-a+3) > 0 \implies a^2 - 2a + 1 + a - 3 > 0$$

$$a^2 - a - 2 > 0 \implies (a-2)(a+1) > 0$$

$$\therefore a < -1, \quad 2 < a \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸  $x = a - 1 > 0$

$$\therefore a > 1 \dots \textcircled{2}$$

(3) 端点  $f(0) > 0$

$$-a + 3 > 0 \implies a < 3 \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて,  $2 < a < 3$

**A2**  $f(x) = x^2 + 4x + k$  とおく。

(1) 判別式  $\frac{D}{4} > 0$

$$2^2 - k > 0 \implies 4 - k > 0 \implies k < 4 \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸  $x = -2 < 0$

これは常に成り立つ。(条件なし)

(3) 端点  $f(0) > 0$

$$k > 0 \dots \textcircled{2}$$

①, ② より,  $0 < k < 4$

**A3** 異符号の解をもつ条件は  $f(0) < 0$  のみ。

$$2m - 4 < 0$$

$$2m < 4 \quad \therefore m < 2$$

## B 問題：解答

## Memo / Answer

**B1**  $f(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$  とおく。

(1) 異なる 2 つの正の解

$$(1) \quad \frac{D}{4} > 0 \implies (-a)^2 - (3a-2) > 0$$

$$a^2 - 3a + 2 > 0 \implies (a-1)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < 1, \quad 2 < a \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸  $x = a > 0 \dots \textcircled{2}$

$$(3) \quad f(0) > 0 \implies 3a - 2 > 0 \implies a > \frac{2}{3} \dots \textcircled{3}$$

共通範囲をとって,  $\frac{2}{3} < a < 1, \quad 2 < a$

(2) 異符号の解  $f(0) < 0 \implies 3a - 2 < 0 \therefore a < \frac{2}{3}$

**B2** 「正の解のみ」とは, 「異なる 2 つの正の解」または「正の重解」のことである。よって, 条件は以下の通り。

(1)  $D \geq 0$  (交わる または 接する)

(2) 軸  $> 0$

(3)  $f(0) > 0$  (端点は正でなければならない)

計算：

$$\bullet \quad D = (-a)^2 - 4(a+3) \geq 0 \implies a^2 - 4a - 12 \geq 0$$

$$(a-6)(a+2) \geq 0 \implies a \leq -2, \quad 6 \leq a$$

$$\bullet \quad \text{軸 } \frac{a}{2} > 0 \implies a > 0$$

$$\bullet \quad f(0) = a + 3 > 0 \implies a > -3$$

共通範囲をとって,  $a \geq 6$