1. 相加平均と相乗平均

足して 2 で割る vs 掛けてルート

2 つの正の数 a, b について,

- **相加平均**: $\dfrac{a+b}{2}$ 　(いわゆる普通の平均)
- **相乗平均**: $\sqrt{ab}$ 　(掛け算の平均)

この 2 つの間には, 常に「相加平均の方が大きい（か等しい）」という関係が成り立つ.

相加・相乗平均の大小関係

$\boldsymbol{a > 0,\ b > 0}$ のとき,

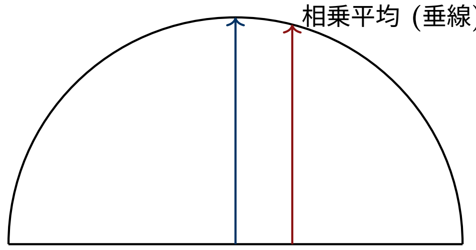
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a + b \geqq 2\sqrt{ab}}$$

(等号成立は $\boldsymbol{a = b}$ のとき)

※この公式は, 必ず**「正の数」**のときしか使えない！

図形的な意味（半径と半弦）

半円において, 半径は常に「弦への垂線」以上になる.



2. 逆数の和の最小値

文字を消去できる！

この不等式が最強の威力を発揮するのは, 積 ab が定数（特に $ab = 1$）になるときである. 例えば x と $\frac{1}{x}$ の和などは, 掛け算すると文字が消える.

例題 1（基本的な利用）

$x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$x + \frac{4}{x} \geqq 4$$

Proof

等号成立条件のチェック

「最小値は 4 である」と言い切るためには, 実際に $=4$ になる瞬間が存在することを確認する必要がある. 等号が成立するのは $x=\frac{4}{x}$ のとき.

$$x^2=4 \iff x=2 \quad (\because x>0)$$

つまり, $x=2$ のとき最小値 4 をとる.

例題 2（最小値を求める）

$x>0$ のとき, $x+\frac{1}{x}$ の最小値を求めよ.

Memo / Answer

3. 応用：分母を作り出す

約分できないときは？

相加・相乗平均の関係は「掛け算すると文字が消える」ときに最強の威力を発揮する. しかし, $x+\dfrac{1}{x+1}$ のような式は, 単純に掛けても $\dfrac{x}{x+1}$ となり, 文字が消えない.

Strategy: 分母と同じ形を無理やり作る！

$$x+\frac{k}{x+a}=\boldsymbol{(x+a)}+\frac{k}{x+a}\boldsymbol{-a}$$

勝手に足した分を, 後ろで引いて帳尻を合わせればよい.

例題 3（定数項の調整）

$x>-2$ のとき, $x+\dfrac{9}{x+2}$ の最小値を求めよ.

Memo / Answer

4. 条件付きの最大・最小

和が一定なら積は最大

$a+b=const$（一定）のとき，ab の最大値を求めるのにも使える．

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \iff \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

両辺を 2 乗すれば，ab の上限が見えてくる．

例題 4（積の最大値）

$x>0,\ y>0$ とする．$2x+3y=12$ のとき，xy の最大値を求めよ．

Memo / Answer

等号成立時の x, y

等号成立は $2x=3y$ のとき．これと $2x+3y=12$ を連立させると，$2x+2x=12 \to 4x=12 \to x=3$．$3y=6 \to y=2$．つまり $(x,y)=(3,2)$ のとき最大となる．

年　　組　　番　氏名

確認テスト

練習 A1（基本証明）

$a > 0,\ b > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$$

を利用して, $2a + 3b \geqq 2\sqrt{6ab}$ を示せ.

Proof

$a > 0, b > 0$ より $2a > 0, 3b > 0$. 相加・相乗平均の大小関係より

$$2a + 3b \geqq 2\sqrt{2a \cdot 3b} = 2\sqrt{6ab}$$

等号成立は $2a = 3b$ のとき.

練習 A2（逆数の和）

$x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ. また, 等号成立条件を求めよ.

$$x + \frac{9}{x} \geqq 6$$

Proof

練習 B1（展開してから使う）

$a>0,\ b>0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqq 4$$

Hint

まずは左辺を展開してみよう. $ab+1+1+\frac{1}{ab}=ab+\frac{1}{ab}+2$ この $ab+\frac{1}{ab}$ の部分に相加・相乗平均を使う.

Proof

練習 B2（最小値）

$x>0$ のとき, 関数 $y=3x+\frac{12}{x}+5$ の最小値を求めよ.

Memo / Answer