年　　組　　番　氏名

1. 究極の選択：パラメータか，法線か

空間図形の問題を解くとき，「パラメータ表示」で攻めるか，「法線ベクトル」で攻めるかの選択が運命を分ける。それぞれの得意分野（守備範囲）を理解しよう。

A. パラメータ表示

$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$

- **視点**：平面上を「歩く」
- **得意**：
  - 平面上の点の表現
  - 直線と平面の交点
  - 三角形や領域の内部判定
- **計算**：連立方程式（係数比較）

VS

B. 法線ベクトル

$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

- **視点**：平面を「貫く・固定する」
- **得意**：
  - 点と平面の**距離**
  - 平面の**方程式**
  - 対称点・垂直条件
- **計算**：内積ゼロ

使い分けの鉄則

(1) 交点を求めたいとき $\Longrightarrow$ **パラメータ表示**（直線上の点 = 平面上の点）

(2) **距離・垂直・角度**を扱いたいとき $\Longrightarrow$ **法線ベクトル**（方程式・正射影）

(3) 体積を求めるとき $\Longrightarrow$ **法線ベクトル**で「高さ」を求めるのが近道。

例題 1

点 $\mathrm{A}(0,1,2)$ から，3 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{B}(2,1,0), \mathrm{C}(1,2,2)$ を通る平面 α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

Memo / Answer

【解法 A：パラメータ】 $\vec{\mathrm{OH}} = s\vec{\mathrm{OB}} + t\vec{\mathrm{OC}}$ とおき，$\vec{\mathrm{AH}} \perp \vec{\mathrm{OB}}, \vec{\mathrm{AH}} \perp \vec{\mathrm{OC}}$ を解く。

【解法 B：法線（推奨）】 法線 $\vec{n}$ を求め，直線 $\mathrm{AH} \parallel \vec{n}$ として H を直線上の点として表し，平面の方程式に代入する（交点計算）。

2. 法線ベクトルの決定（基本）

法線ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ を求めるには，平面上の 2 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ との内積が 0 になることを利用する。未知数 3 つに対して式は 2 つなので，比を求めることになる。

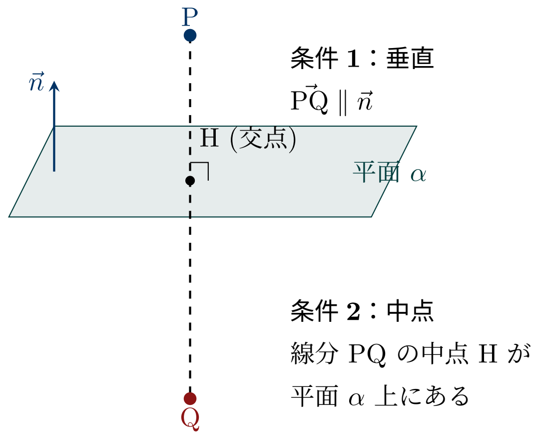
例題 2

$\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n}$ を 1 つ求めよ。

Memo / Answer

3. 平面に関して対称な点

点 P と平面 α に関して対称な点 Q を求める問題は，法線ベクトルの絶好の練習台である。



例題 3

点 P(2, 3, 4) と，平面 $\alpha : x - 2y + 2z - 9 = 0$ に関して対称な点 Q の座標を求めよ。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

4. 四面体の体積（座標型）

4 点の座標から体積を求める問題は，記述式試験で最も差がつくテーマの一つ。「法線 → 方程式 → 距離 → 高さ」の流れをマスターしよう。

体積を求める手順

四面体 OABC の体積 V

(1) **底面積** $S_{\triangle \mathrm{OAB}}$ を求める。

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

(2) 平面 OAB の**法線ベクトル** $\vec{n}$ を求める。

(3) 点 C から平面 OAB への**距離** h を求める。

$$h = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{OC}}|}{|\vec{n}|} \quad \text{(または点と平面の距離公式)}$$

(4) $V = \frac{1}{3}Sh$

例題 4

3 点 $\mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}(0,2,0), \mathrm{C}(0,0,3)$ を通る平面を α とする。原点 O から平面 α に下ろした垂線の長さを h とし，四面体 OABC の体積を V とする。h と V を求めよ。

Memo / Answer

年　組　番　氏名

総合演習 A (標準)

練習 A1

点 $\mathrm{A}(1,2,3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,-1,2)$ に平行な直線を l とする。点 $\mathrm{P}(0,5,5)$ から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

練習 A2

点 $\mathrm{A}(3,2,1)$ と，平面 $\alpha : x+y+z=0$ に関して対称な点 B の座標を求めよ。

Memo / Answer

総合演習 B (応用)

練習 B1

座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,1,0), \mathrm{B}(0,1,1), \mathrm{C}(1,2,3)$ がある。

(1) 平面 OAB の方程式を求めよ。
(2) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線の長さ h を求めよ。
(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ。

練習 B2

定点 $\mathrm{A}(0,0,2)$ と，平面 $z=0$ (xy 平面) 上を動く点 P，および 平面 $x=0$ (yz 平面) 上を動く点 Q がある。△APQ が正三角形となるとき，四面体 OAPQ の体積を求めよ。ただし O は原点とする。

Memo / Answer

総合演習 A (標準) 【解答】

練習 A1

$A(1,2,3), \vec{d}=(2,-1,2)$ の直線 l。$P(0,5,5)$ からの垂線 H。

Memo / Answer

点 H は直線 l 上にあるので，実数 t を用いて $H(1+2t, 2-t, 3+2t)$ とおける。$\vec{PH}=\vec{OH}-\vec{OP}=(1+2t, -3-t, -2+2t)$ $\vec{PH}\perp\vec{d}$ より内積が 0。$2(1+2t)-1(-3-t)+2(-2+2t)=0$ $2+4t+3+t-4+4t=0$ $9t+1=0 \implies t=-\frac{1}{9}$ 座標に代入して $x=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$ $y=2-(-\frac{1}{9})=\frac{19}{9}$ $z=3-\frac{2}{9}=\frac{25}{9}$ 答 $H(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{25}{9})$

練習 A2

$A(3,2,1)$ と 平面 $x+y+z=0$ に関して対称な点 B

Memo / Answer

平面の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,1,1)$。直線 AB $\parallel \vec{n}$ より $\vec{AB}=k\vec{n}$ とおける。$B(x,y,z)$ とすると $(x-3, y-2, z-1)=(k,k,k)$。$B(k+3, k+2, k+1)$ 線分 AB の中点 M は $M(\frac{k+6}{2}, \frac{k+4}{2}, \frac{k+2}{2})$ M は平面上にあるので $\frac{k+6}{2}+\frac{k+4}{2}+\frac{k+2}{2}=0$ $3k+12=0 \implies k=-4$ よって $B(-4+3, -4+2, -4+1)=(-1,-2,-3)$ 答 $B(-1,-2,-3)$

総合演習 B (応用) 【解答】

練習 B1

$O(0,0,0), A(1,1,0), B(0,1,1), C(1,2,3)$

Memo / Answer

(1) 平面 OAB の法線 $\vec{n}=(a,b,c)$ を求める。$\vec{OA}=(1,1,0), \vec{OB}=(0,1,1)$ $\vec{n}\cdot\vec{OA}=a+b=0 \implies a=-b$ $\vec{n}\cdot\vec{OB}=b+c=0 \implies c=-b$ $b=-1$ とすると $a=1, c=1$ なので $\vec{n}=(1,-1,1)$。原点を通るので答 $x-y+z=0$

(2) 点 $C(1,2,3)$ と平面 $x-y+z=0$ の距離 h $h=\frac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 答 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $\triangle$OAB の面積 S $|\vec{OA}|=\sqrt{2}, |\vec{OB}|=\sqrt{2}, \vec{OA}\cdot\vec{OB}=1$ $S=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ 答 $\frac{1}{3}$

練習 B2

$A(0,0,2), P(p_1,p_2,0), Q(0,q_2,q_3)$

Memo / Answer

$AP=AQ=PQ$ という条件から座標を決定する。$AP^2=p_1^2+p_2^2+4$ $AQ^2=q_2^2+q_3^2+4$ (ここで $x=0$ より $q_1=0$) $PQ^2=p_1^2+(p_2-q_2)^2+q_3^2$ これらを連立し，さらに面積を計算するが，記述欄の都合上，指針のみ。