

Introduction：日常言語を不等式へ

「3000 円以下で買いたい」「少なくとも 5 個は必要」など、私たちの生活には不等式が溢れています。不等式の文章題は、方程式とほとんど同じですが、「以下 ( $\leq$ )」「未満 ( $<$ )」の使い分けに注意が必要です。そして、今回の最大の敵は「整数の個数問題」です。「解の中に自然数が 3 個ある」とき、範囲はどこまで許されるのか？ここをクリアできるかどうか、数学が得意になるかの分かれ道です。

例題 1：1 次不等式の文章題

1 個 120 円のりんごと 1 個 80 円のみかんを合わせて 30 個買い、100 円の箱に詰めてもらう。合計金額を 3000 円以下にすると、りんごは最大で何個買えるか。

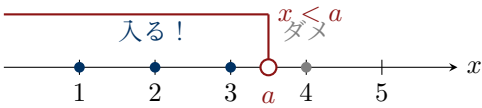
手順:

- 求めたいものを  $x$  とおく。(りんごの個数)
- みかんの個数は  $30 - x$  個。ただし  $x$  は整数で  $0 \leq x \leq 30$ 。
- 「合計金額  $\leq 3000$ 」という式を作る。

Memo / Answer

整数の個数と定数の決定

「不等式  $x < a$  を満たす自然数  $(1, 2, 3, \dots)$  がちょうど **3 個** ある」このとき、定数  $a$  はどんな範囲にあるべきでしょうか？



まず大まかに考える：

3 と 4 の間なら OK  $\rightarrow 3 < a < 4$

最重要：端点のチェック（イコールはつくのか？）

- $a = 3$  のとき： $x < 3$  となる。自然数は 1, 2 の **2 個**。  $\rightarrow \times$
- $a = 4$  のとき： $x < 4$  となる。自然数は 1, 2, 3 の **3 個**。  $\rightarrow \bigcirc$

よって、答えは  **$3 < a \leq 4$** （4 にはイコールがつく！）

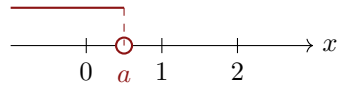
Check：なぜイコールの位置で迷うのか？

不等号が「 $<$  (白丸)」なのか「 $\leq$  (黒丸)」なのかによって、端点を含めるかどうかが変わるからです。「もし  $a$  がちょうどその数字になったら、条件を満たすか？」と、具体的に数字を入れて検証するクセをつけましょう。これが唯一の攻略法です。

例題 2：個数から範囲を求める

不等式  $x < a$  を満たす自然数がない (0 個) とき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

考え方: 数直線を描いて考えます。自然数は 1 から始まります。1 さえ入らなければ良いのです。



端点チェック：

- $a = 1$  のとき,  $x < 1$ 。自然数は…ない！ (OK)
- $a$  が 1 より大きかったら, 1.1 とかでも自然数 1 が入ってしまう。(NG)

Memo / Answer

例題 3：不等式の解に含まれる整数

不等式  $2x + a > 5(x - 1)$  を満たす自然数  $x$  が 2 個だけであるとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

手順:

- (1) まず不等式を解いて,  $x < \square$  の形にする。
- (2) 数直線を描き, 自然数が 2 個 (つまり 1 と 2) 入る状況を作る。
- (3) 端点の吟味をする。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 文章題

ある遊園地の入園料は、1 人 600 円である。ただし、15 人以上の団体は 1 割引になる。15 人に満たない人数で行くとき、15 人分の団体チケットを買った方が安くなるのは、何人以上で行くときか。

練習 A2: 自然数の個数

不等式  $x < a$  を満たす自然数  $x$  がちょうど 4 個あるとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 不等式の解と整数

不等式  $x + 2a > 4(x + 1)$  を満たす自然数  $x$  がちょうど 3 個 (1, 2, 3) であるとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

練習 B2: 連立不等式の整数解

次の連立不等式を満たす整数  $x$  がちょうど 3 個存在するような、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

$$\begin{cases} 2x + 3 < 3x + 5 \\ 4x - a < 3x + 2 \end{cases}$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 行く人数を  $x$  人とする ( $x < 15$ )。

- 普通に買う場合： $600x$  円
- 15 人分の団体チケットを買う場合： $600 \times 15 \times 0.9 = 8100$  円

団体チケットの方が安くなる条件は、

$$600x > 8100$$

$$x > \frac{81}{6} = 13.5$$

$x$  は人数（整数）なので、14 人以上。答え：14 人以上

A2 数直線を書く。自然数が 4 個 (1, 2, 3, 4) 入るということは、 $a$  は 4 と 5 の間にある。

$$4 < a < 5$$

端点の吟味：

- $a = 4$  のとき： $x < 4$ 。自然数は 1, 2, 3 の 3 個。(×)
- $a = 5$  のとき： $x < 5$ 。自然数は 1, 2, 3, 4 の 4 個。(○)

よって、 $4 < a \leq 5$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 まず不等式を解く。

$$x + 2a > 4x + 4$$

$$-3x > 4 - 2a$$

$$x < \frac{2a - 4}{3}$$

この範囲に自然数が 1, 2, 3 だけ入ればよい。つまり、境界線  $\frac{2a-4}{3}$  が 3 と 4 の間にあればよい。

$$3 < \frac{2a - 4}{3} < 4$$

端点の吟味：

- 右辺が 3 のとき： $x < 3$  (自然数 2 個)  $\rightarrow \times$
- 右辺が 4 のとき： $x < 4$  (自然数 3 個: 1,2,3)  $\rightarrow \bigcirc$

よって、

$$3 < \frac{2a - 4}{3} \leq 4$$

各辺を 3 倍して、

$$9 < 2a - 4 \leq 12$$

各辺に 4 を足して、

$$13 < 2a \leq 16$$

2 で割って、

$$\frac{13}{2} < a \leq 8$$

B2 連立不等式を解く。

$$(1) \ 2x + 3 < 3x + 5 \implies -x < 2 \implies x > -2$$

$$(2) \ 4x - a < 3x + 2 \implies x < a + 2$$

合わせると、 $-2 < x < a + 2$ 。この範囲に整数がちょうど 3 個入ればよい。範囲の左端は  $-2$  (含まない) なので、入るべき整数は大きい順に  $-1, 0, 1$  の 3 つである。(次の整数 2 は入ってはいけない) よって、右端  $a + 2$  が 1 と 2 の間にあればよい。

$$1 < a + 2 < 2$$

端点の吟味：

- $a + 2 = 1$  のとき： $-2 < x < 1$ 。整数は  $-1, 0$  の 2 個。(×)
- $a + 2 = 2$  のとき： $-2 < x < 2$ 。整数は  $-1, 0, 1$  の 3 個。(○)

したがって、

$$1 < a + 2 \leq 2$$

全体から 2 を引いて、 $-1 < a \leq 0$