年　　組　　番　氏名

1. ベクトルとは何か

- **スカラー (scalar)**: 大きさだけで決まる量（例：長さ, 質量, 温度, エネルギー）.
- **ベクトル (vector)**: 「大きさ」と「向き」を持つ量（例：速度, 力, 変位）.

ベクトルは図形的には「有向線分」として表されるが, 本質的には「点 A を点 B に移す**平行移動**」を表す量である.

用語と定義

(1) **表記**: 始点 A, 終点 B のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く. 1 文字で $\vec{a}$ とも書く.

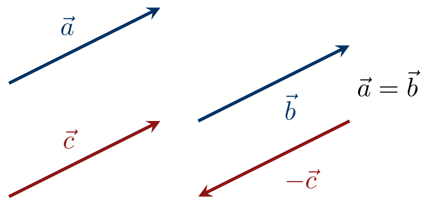
(2) **大きさ**: 線分の長さ. $|\vec{a}|$ または $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と書く.

(3) **ベクトルの相等**: 「向き」と「大きさ」が同じならば, 始点がどこにあっても**同じベクトル**とみなす.

$$\vec{a} = \vec{b}$$

(4) **逆ベクトル**: 大きさが同じで向きが反対のベクトル. $\vec{a}$ に対し $-\vec{a}$ と書く.

(5) **ゼロベクトル**: 大きさが 0 のベクトル $\vec{0}$. 向きは考えない. 始点と終点が一致する（移動しない）.



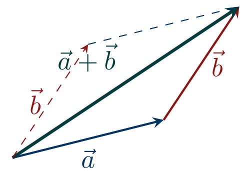
2. ベクトルの和と差

ベクトルの演算は「物理的な継ぎ足し」として定義される.

和の定義（三角形の法則・平行四辺形の法則）

$\vec{a}$ 進んでから $\vec{b}$ 進むことは, $\vec{a} + \vec{b}$ 進むことに等しい.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



差の定義（逆ベクトルの和）

数の引き算 $5 - 3 = 5 + (-3)$ と同様に, ベクトルの差は**「逆ベクトルを足す」**こととして定義する.

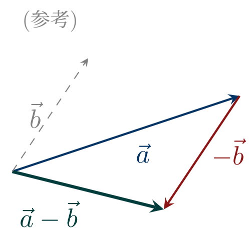
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

作図の手順:

(1) $\vec{a}$ を描く.

(2) $\vec{a}$ の終点に, $\vec{b}$ と逆向きのベクトル $-\vec{b}$ を継ぎ足す.

(3) 始点から最後の終点を結ぶ.



重要：位置ベクトルの視点

始点を O にそろえて考えると, 上図の結果は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad (\text{引く方の終点} \to \text{引かれる方の終点})$$

となっている. 実戦ではこの「視点」で計算することが多い.

3. 実数倍と平行条件

ベクトル $\vec{a}$ を k 倍する（k は実数）.

- 大きさは $|k|$ 倍になる. $(|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|)$
- $k > 0$ なら向きは同じ, $k < 0$ なら向きは反対.

平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき,

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \quad (k \text{ は実数})$$

単位ベクトル: 大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという. $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ は, $\vec{a}$ を自身の大きさで割ることで得られる.

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

例題 1 (計算規則)

通常の文字式と同様に計算できる. 次の等式を満たす $\vec{x}$ を求めよ.

$$2(\vec{x} - 3\vec{a}) = \vec{x} + 4\vec{b}$$

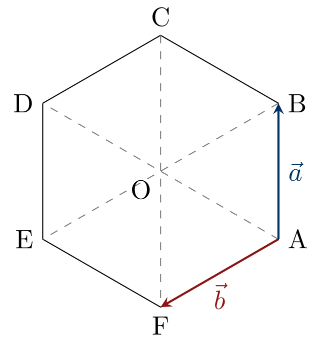
4. ベクトルの分解

平面上の任意のベクトルは, 平行でない 2 つのベクトル（基底）を用いてただ 1 通りに表すことができる. 「**道順**」を辿るイメージで分解していく.

例題 2 (正六角形と分解)

正六角形 ABCDEF において, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とする. 次のベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$



年　組　番　氏名

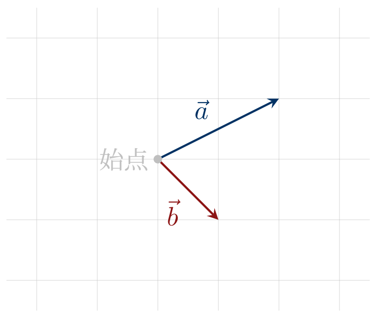
確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (作図)

右の図を利用して, 以下のベクトルを作図せよ.

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$　($\vec{a}$ に $-\vec{b}$ を足す)



練習 A2 (計算)

次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a},\vec{b}$ で表せ.

$$3(\vec{x}-2\vec{a})+2(\vec{a}-2\vec{x})=6\vec{b}$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

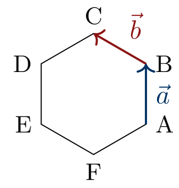
練習 B1 (正六角形)

正六角形 ABCDEF において, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とする. 次のベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$



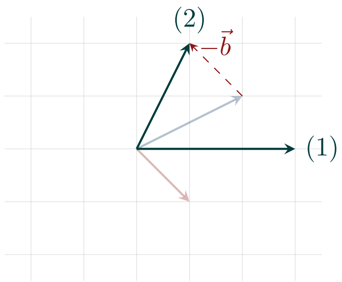
Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 (作図)

(1) 平行四辺形の対角線.

(2) $\vec{a}$ の終点から $\vec{b}$ と逆向きに進む.



Memo / Answer

A2 解答:

$$
\begin{aligned}
3\vec{x} - 6\vec{a} + 2\vec{a} - 4\vec{x} &= 6\vec{b} \\
-\vec{x} - 4\vec{a} &= 6\vec{b} \\
-\vec{x} &= 4\vec{a} + 6\vec{b} \\
\therefore \quad \vec{x} &= -4\vec{a} - 6\vec{b}
\end{aligned}
$$

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:

与えられた基底は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b}$.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と平行で逆向きだが, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}$? 複雑になる.

正六角形の中心を O とすると, $\triangle ABO, \triangle BCO$ は正三角形.

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \vec{a} + \vec{b}$.

また $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の関係から...

最短ルート: $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{b} - \vec{a}$ (前回参照). $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の逆ベクトルである.

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = -\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -(\vec{b} - \vec{a}) = \boldsymbol{\vec{a} - \vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

AD は BC と平行で長さが 2 倍である.

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{2\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. まず $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}$. $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\vec{a}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

したがって,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CE}} &= (2\vec{b} - \vec{a}) - (\vec{a} + \vec{b}) \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - 2\vec{a}}
\end{aligned}
$$

別解 (図形的直観): CE は BF と平行かつ等しい. $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -\vec{b}$ ...? 図を確認すると, BF は y 軸方向逆. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$ (30° 方向), $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b}$ (90° 方向). この組み合わせは少し難しい. 式変形で確実に解くのが良い.