1. 全体像再訪（Map）

この単元で学んだこと

- **数の拡張**: 実数 $\mathbb{R}$ → 複素数 $\mathbb{C}$
- **式の世界**: 恒等式, 方程式, 不等式

それぞれの世界で「できること」「できないこと」を整理しよう.

「実数」vs「複素数」

項目	実数の世界 ($\mathbb{R}$)	複素数の世界 ($\mathbb{C}$)
2 乗すると	$\boldsymbol{x^2 \geqq 0}$	負になることもある ($i^2 = -1$)
大小関係	ある ($>, <$)	ない (定義できない)
方程式の解	解なしの場合あり	**n 次式は必ず n 個持つ**
証明	不等式の証明が可能	等式の証明がメイン

「恒等式」vs「方程式」

恒等式（Identity）：

- どんな x でも成り立つ. (x にとらわれない)
- 例: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- 手法: 係数比較法, 数値代入法

方程式（Equation）：

- 特定の x (解) でしか成り立たない.
- 例: $x^2 + 2x + 1 = 0$
- 手法: 因数分解, 解の公式, グラフの共有点

例題 1（概念の確認）

次の等式が「恒等式」であるか,「方程式」であるか答えよ.

(1) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
(2) $x^2 - 1 = 0$
(3) $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Memo / Answer

2. 融合問題演習

複素数と式の値

「解と係数の関係」や「次数の低下」を駆使する問題. 直接代入は最終手段！

例題 2（次数下げ）

$x = 1 + \sqrt{2}i$ のとき, 次の式の値を求めよ.

$$x^3 - x^2 + 3x + 5$$

方針

$x - 1 = \sqrt{2}i$ として両辺を 2 乗すると, $x^2 - 2x + 1 = -2$, つまり $x^2 - 2x + 3 = 0$ が得られる. この 2 次式 $x^2 - 2x + 3$ で元の式を**割り算**する.

$$(\text{元の式}) = (x^2 - 2x + 3)Q(x) + R(x)$$

$x^2 - 2x + 3 = 0$ なので, 結局 **余り $R(x)$ に代入すればよい**.

Memo / Answer

不等式の証明と相加相乗

条件を見て「相加・相乗平均」を使うか,「平方完成」を使うか判断する.

- 「$a > 0$」や「積が定数」 → 相加・相乗
- 「実数」や「2 次式」 → 平方完成 $(A^2 \geqq 0)$

年　　組　　番　氏名

総合演習

練習 A1（恒等式の係数決定）

等式 $x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c, d の値を定めよ．

Hint

右辺を展開して係数比較してもよいが，$x-1$ の塊に注目し，組立除法を繰り返し適用する方法（テイラー展開的発想）もある．あるいは，$x = 1, 2, 0, -1$ などを代入してみよう．

Memo / Answer

練習 A2（高次方程式と虚数解）

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ の 1 つの解が $1 - i$ であるとき，実数の定数 a, b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

Memo / Answer

年　組　番　氏名

練習 B1（条件付き不等式の証明）

$a+b=1$ のとき，不等式 $a^2+b^2 \geqq \frac{1}{2}$ を証明せよ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

Memo / Answer

練習 B2（相加・相乗平均の応用）

$a>0, b>0$ とする．$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$ の最小値を求めよ．

Memo / Answer