Introduction：文章題を解く 3 ステップ

2 次関数の最大・最小問題を，現実の事象や図形に応用します。最も重要なのは，計算前の**「設定」**です。

(1) **変数の設定**：何を x と置くかを決め，図に書き込む。
(2) **定義域の確認**：これが命！ 長さや個数は必ず正の値をとるなど，隠れた条件を探し出す（例：$x > 0$）。
(3) **立式と最大・最小**：y を x で表し，平方完成する。

例題 1：長方形の面積

長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形を作る。この長方形の面積の最大値を求めよ。

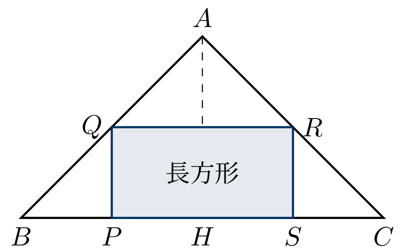
考え方: 縦の長さを x cm とすると，横の長さはどう表せるか？

- 周の長さが 20 なので，$(\text{縦} + \text{横}) = 10$
- よって，$\text{横} = 10 - x$
- 定義域：縦も横も「正の長さ」でなければならない。

Memo / Answer

例題 2：図形への内接

底辺が $BC = 12$，高さ $AH = 6$ の二等辺三角形 ABC がある。図のように，この三角形に内接する長方形 $PQRS$ を作る。この長方形の面積の最大値を求めよ。



ヒント: 長方形の縦の長さを x とする。
$\triangle ABC \sim \triangle AQR$ （相似）を利用して，横の長さ QR を x で表そう。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

Topic：経済・売上への応用

売上金額 ＝ （単価） × （個数）
価格を変えると，売れる個数も変化します。「x 円上げると，y 個減る」といった関係式を正しく立てられるかがポイントです。

例題 3：売上の最大化

ある商品を 1 個 100 円で売ると，1 日あたり 400 個売れる。単価を 1 円**下げる**ごとに，1 日の売上個数は 10 個ず**つ増える**という。1 日の売上金額を最大にするには，単価をいくらにすればよいか。また，そのときの売上金額を求めよ。

立式: x 円値下げすると考える。

- 単価：$100 - x$ (円)
- 個数：$400 + 10x$ (個)
- 定義域：単価 > 0，個数 > 0 （今回は常識的な範囲で考える）

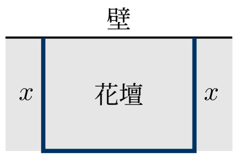
Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

図を描き，変数の定義域を明記して解答すること。

練習 A1: 壁を利用した長方形

長さ 12m のロープがある。これを使って，壁に接するように長方形の花壇を作りたい（壁側の辺にはロープは不要）。花壇の面積を最大にするには，縦の長さを何 m にすればよいか。また，そのときの面積を求めよ。



練習 A2: 直角三角形への内接

$AB = AC = 4\text{cm}$，$\angle A = 90°$ の直角二等辺三角形 ABC がある。この三角形の直角をはさむ 2 辺 AB, AC 上に頂点をもつ長方形を作る。この長方形の面積の最大値を求めよ。

Memo / Answer

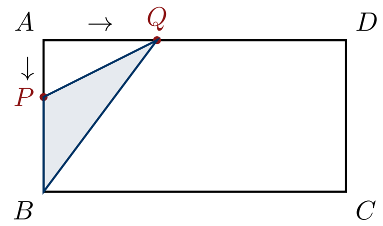
B 問題：標準・応用

練習 B1: 利益の最大化

ある品物の原価は 1 個 200 円である。これを定価 500 円で売ると 1 日 100 個売れる。定価を 10 円上げるごとに，売上個数は 2 個ずつ減るという。**1 日の利益**を最大にするには，定価をいくらにすればよいか。

練習 B2: 動点と面積

図のような長方形 $ABCD$ において，$AB = 4, BC = 8$ である。点 P は A を出発して辺 AB 上を B まで毎秒 1 の速さで動く。点 Q は A を出発して辺 AD 上を D まで毎秒 2 の速さで動く。P, Q が同時に出発してから x 秒後の $\triangle PBQ$ の面積を S とする。S の最大値を求めよ。



Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 縦の長さを x m とする。ロープは「縦＋横＋縦」で使用するので，

$$2x + 横 = 12 \quad \therefore 横 = 12 - 2x$$

辺の長さは正なので，

$$x > 0 \text{ かつ } 12 - 2x > 0 \implies 0 < x < 6$$

面積を y とすると，

$$y = x(12 - 2x) = -2x^2 + 12x$$

平方完成して，

$$y = -2(x^2 - 6x) = -2(x - 3)^2 + 18$$

頂点 $x = 3$ は定義域 $0 < x < 6$ 内にある。よって，**縦 3m のとき，最大値 18 m^2**

A2 図形を座標平面に置いて考えると分かりやすい（A を原点とする）。あるいは，長方形の縦（AB 上の辺）を x とおく。$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形なので，頂点以外の小さな直角三角形も直角二等辺三角形になる。
長方形の縦を x $(0 < x < 4)$ とすると，残りの部分（上の小さな三角形）も直角二等辺三角形なので，長方形の横の長さは $4 - x$ となる。

$$面積\ S = x(4 - x) = -x^2 + 4x$$

$$S = -(x - 2)^2 + 4$$

定義域 $0 < x < 4$ より，頂点 $x = 2$ で最大。よって，**最大値 4 cm^2**

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 定価を $10x$ 円上げるとする（x は整数でなくてもよい）。

- 定価：$500 + 10x$ (円)
- 個数：$100 - 2x$ (個)
- 1 個あたりの利益：(定価) $-$ (原価) $= (500 + 10x) - 200 = 300 + 10x$

総利益 y は，

$$y = (300 + 10x)(100 - 2x)$$

10 と 2 をくくりだして，

$$y = 10(30 + x) \cdot 2(50 - x) = 20(30 + x)(50 - x)$$
$$y = 20(-x^2 + 20x + 1500)$$

平方完成すると，

$$y = -20(x - 10)^2 + \dots$$

$x = 10$ のとき最大となる。定価は $500 + 10(10) = 600$。よって，**定価 600 円**

B2 x 秒後の長さは以下の通り。

- $AP = x \quad (P$ は B までなので $0 \leqq x \leqq 4)$
- $AQ = 2x \quad (Q$ は D までなので $0 \leqq 2x \leqq 8 \iff 0 \leqq x \leqq 4)$
- $PB = 4 - x$

$\triangle PBQ$ の面積 S は，台形（あるいは長方形全体）から周囲の三角形を引くよりも，底辺 PB，高さ AQ の三角形として見た方が早い。（$\angle A = 90^\circ$ なので，$AQ \parallel BC$。Q から AB に下ろした垂線の長さは AQ に等しい）

$$S = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot AQ$$

$$S = \frac{1}{2}(4 - x) \cdot 2x = x(4 - x) = -x^2 + 4x$$
$$S = -(x - 2)^2 + 4$$

定義域 $0 \leqq x \leqq 4$ より，頂点 $x = 2$ で最大値をとる。よって，**最大値 4**