1. 実数だけの特権：大小関係

虚数に大小はない！

私たちはこれまで複素数 $(a+bi)$ を学んできたが, 実は**虚数には大小関係（不等号）が存在しない**. もし $i>0$ だと仮定すると, 両辺に i を掛けて $i^2>0$ となり, $-1>0$ という矛盾が生じる. ($i<0$ としても同様)

結論： 不等式の問題が出たら, それは「**実数の世界の話ですよ**」という合図である.

不等式証明の基本原理

A が B より大きいことを証明するには, 「**引いたらプラスになる**」ことを言えばよい.

$$A>B \iff A-B>0$$

手順：

(1) 左辺 − 右辺 $(A-B)$ を計算する.
(2) 式変形（因数分解や平方完成）をする.
(3) その式が「正である」といえる根拠を示す.

例題 1（基本的な不等式の証明）

$a>b$ かつ $x>y$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$ax+by>ay+bx$$

Proof

2. 条件を利用する証明

「1 より大きい」条件の使い方

「$a>1$」という条件は, 「$a-1>0$」という形で使うことが多い. 式変形して (正) × (正) の形を作り出すのが目標となる.

例題 2（条件付き不等式）

$a>1,\ b>1$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$ab+1>a+b$$

Proof

Check

式変形の途中で「因数分解できそう」という感覚を持つことが大切.

- $xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$
- $a^2-a-b+ab=a(a-1)+b(a-1)=(a+b)(a-1)$

などの形に慣れておこう.

年　　組　　番　氏名

確認テスト

練習 A1（基本証明）

$a > b$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$3a - 4b > 2a - 3b$$

Proof

練習 A2（因数分解の利用）

$x > 3,\ y > 3$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$xy + 9 > 3x + 3y$$

Proof

練習 B1（大小比較）

$a > 0,\ b > 0$ のとき, $\dfrac{a+b}{2}$ と $\dfrac{2ab}{a+b}$ の大小を比較せよ. (ヒント: 引き算をして, 通分してみよう)

Proof

振り返り

不等式の証明は,「計算」ではなく「説明」である.

- 「なぜプラスになるのか」の理由を書くこと.
- ($a > 2$ より $a - 2 > 0$ など)

ここを省略せずに書く癖をつけよう.