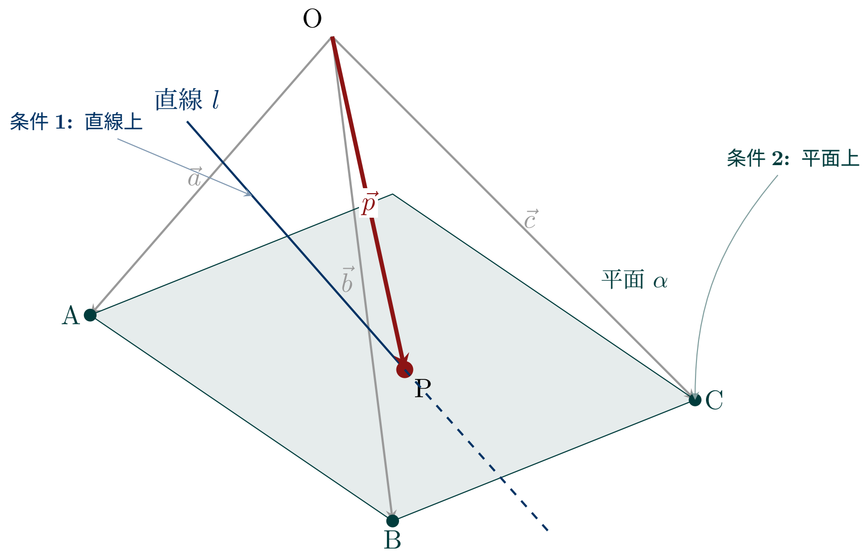
1. 交点位置決定の基本戦略

空間図形において「直線と平面の交点 P」を求める問題は，ベクトルを用いて解く最も標準的かつ重要なテーマである。点 P は「直線上の住人」であり，かつ「平面上の住人」でもある。この 2 つの条件を連立させる。



交点を求める手順

点 P が，直線 l と 平面 α の交点であるとき：

(1) **直線上の条件**
パラメータ k を用いて $\vec{\mathrm{OP}}$ を 1 通りに表す。

$$\vec{\mathrm{OP}} = (1-k)\vec{\mathrm{OA}} + k\vec{\mathrm{OB}} \quad \text{など}$$

(2) **平面上の条件**
$\vec{\mathrm{OP}}$ を平面の基準ベクトル（基底）で表し，**係数の和が 1**（または係数比較）を利用して方程式を立てる。

$$\vec{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \implies s+t+u=1$$

(3) **連立して解く**

例題 1

四面体 OABC において，辺 OA の中点を L，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を M とする。線分 LM を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。点 P が △OBC の定める平面上にあるとき，t の値を求めよ。

Memo / Answer

2. 係数比較による解法

「係数の和が 1」の条件が使いにくい場合（始点が平面上にない場合など）は，2 通りの表し方を作って係数を比較する。

ベクトルの 1 次独立

空間内の 3 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が同一平面上になく，いずれも $\vec{0}$ でないとき（1 次独立），任意のベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

の形で**ただ 1 通り**に表される。$\Longrightarrow$ 2 通りに表せたら，係数はすべて一致する。

例題 2

四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を E，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を F とする。面 ABC と直線 OG（G は △DEF の重心）との交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

Memo / Answer

3. 図形的性質の利用

交点を求める際，「面積比」や「相似」などの平面幾何の知識が使える場合がある（メネラウスの定理など）。しかし，空間図形では断面を取り出す手間がかかるため，まずはベクトルの計算で押し切る力をつけることが重要である。

例題 3

平行六面体 OADB – CEGF において，辺 DG の中点を M，辺 OC の中点を N とする。直線 MN と平面 OAB の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。また，P は線分 MN をどのような比に外分するか。

Memo / Answer

方針:
基準ベクトルを $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。平面 OAB 上にある条件は，$\vec{c}$ の係数が 0 になることである。

年　組　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N とする。線分 MN 上の点 P が平面 OAB 上にあるとき，MP : PN を求めよ。

練習 A2

四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする。辺 OA 上に点 D をとり，OD : DA $= 2:1$ とする。直線 DG と平面 OBC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

四面体 OABC において，辺 OA を $3:1$ に内分する点を D，辺 OB を $2:1$ に内分する点を E，辺 AC を $2:1$ に内分する点を F とする。3 点 D, E, F の定める平面と，辺 OC との交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ。また，OP : OC を求めよ。

練習 B2

四面体 OABC において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を L，辺 BC の中点を M，辺 OC を $1:2$ に内分する点を N とする。3 点 L, M, N を通る平面が 直線 OA と交わる点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。また，点 P は線分 OA をどのような比に分ける点か。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

M : OA の中点，N : BC を 1 : 2 に内分。P は MN 上かつ平面 OAB 上。

Memo / Answer

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{a}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$ 点 P は線分 MN 上にあるので，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=t\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と表せる。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\frac{1}{2}\vec{a}+t\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$ 点 P が平面 OAB 上にある条件は，$\vec{c}$ の係数が 0 になることである。$\frac{t}{3}=0 \implies t=0$ $t=0$ のとき P は M と一致する。これでは比が求まらないため，問題の解釈としては「平面 OAB（空間全体でなく面を含む無限平面）」との交点であり，P = M ということになる。答 P は M と一致する (0 : 1) ※ もし問題設定として N が平面外にあれば交点は M そのもの。

練習 A2

D : OA を 2 : 1 に内分。G : △ABC 重心。直線 DG と平面 OBC の交点 P。

Memo / Answer

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a} \iff \vec{a}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ 点 P は直線 DG 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c})$ $=(1-\frac{k}{2})\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$ 平面 OBC 上にある条件は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の係数が 0。$1-\frac{k}{2}=0 \implies k=2$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$ 答 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

$\mathrm{D}(\frac{3}{4}\vec{a}), \mathrm{E}(\frac{2}{3}\vec{b}), \mathrm{F}(\frac{1\vec{a}+2\vec{c}}{3})$。面 DEF と OC の交点 P。

Memo / Answer

点 P は辺 OC 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{c}$ (k は実数) とおける。また，点 P は平面 DEF 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{OF}}$　$(s+t+u=1)$ $k\vec{c}=s(\frac{3}{4}\vec{a})+t(\frac{2}{3}\vec{b})+u(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c})$

$k\vec{c}=(\frac{3}{4}s+\frac{1}{3}u)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}+\frac{2}{3}u\vec{c}$ 係数を比較して $\begin{cases}\frac{3}{4}s+\frac{1}{3}u=0\\ \frac{2}{3}t=0 \implies t=0 \\ \frac{2}{3}u=k\end{cases}$ 第 1 式より $u=-\frac{9}{4}s$。

$s+t+u=1$ に代入して $s+0-\frac{9}{4}s=1 \implies -\frac{5}{4}s=1 \implies s=-\frac{4}{5}$ $u=-\frac{9}{4}\times(-\frac{4}{5})=\frac{9}{5}$

よって $k=\frac{2}{3}u=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}=\frac{6}{5}$ 答 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{6}{5}\vec{c}$,　OP : OC = 6 : 5 (外分)

練習 B2

L(1 : 2 内分), M(中点), N(1 : 2 内分)。面 LMN と直線 OA の交点 P。

Memo / Answer

点 P は直線 OA 上より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}$。平面 LMN 上より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}$　$(s+t+u=1)$ $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{3}\vec{c}$ $k\vec{a}=s(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b})+t(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})+u(\frac{1}{3}\vec{c})$ 係数比較：$\vec{b}$ の係数：$\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}t=0 \implies t=-\frac{4}{3}s$ $\vec{c}$ の係数：$\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}u=0 \implies u=-\frac{3}{2}t=-\frac{3}{2}(-\frac{4}{3}s)=2s$ $s+(-\frac{4}{3}s)+2s=1 \implies \frac{5}{3}s=1 \implies s=\frac{3}{5}$ $\vec{a}$ の係数：$k=\frac{1}{3}s=\frac{1}{5}$ 答 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{5}\vec{a}$, 線分 OA を 1 : 4 に内分する点。