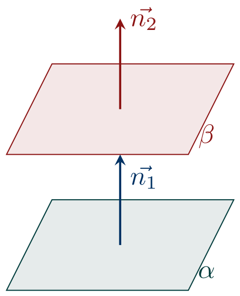
## 1. 2 平面の位置関係

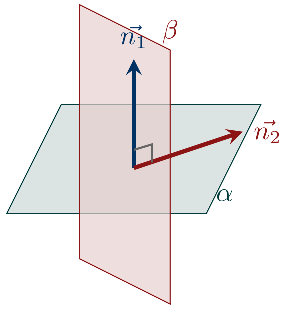
2 つの平面の位置関係（平行・垂直）は，それぞれの**法線ベクトル同士の関係**と一致する。平面そのものをイメージするより，突き刺さる法線を見る方が判断しやすい。

**【平行な 2 平面】**




$\alpha \parallel \beta \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

**【垂直な 2 平面】**




$\alpha \perp \beta \iff \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$
$\iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

### 例題 1

平面 $\alpha : 2x - y + 3z - 4 = 0$ がある。

(1) 平面 $\alpha$ に平行で，点 $(1, 2, -1)$ を通る平面の方程式を求めよ。
(2) 平面 $\alpha$ に垂直で，2 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,1,1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

**Memo / Answer**

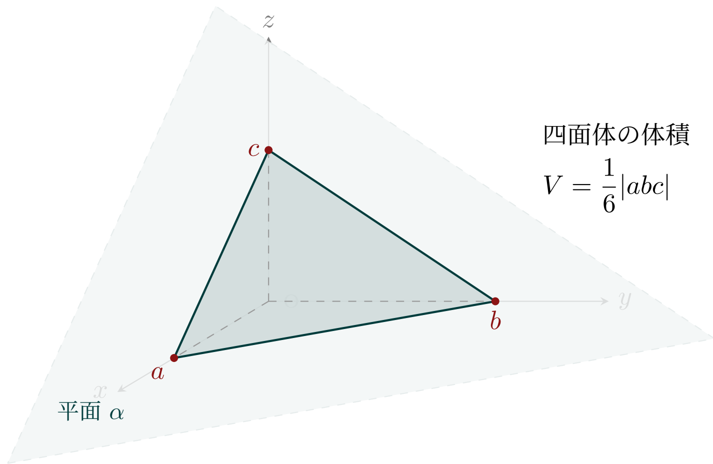
## 2. 座標軸との交点（切片形）

平面が $x, y, z$ 軸とそれぞれ点 $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$ で交わるとき，平面の方程式は次のように書ける。計算の工夫として非常に重要である。

### 平面の方程式（切片形）

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ただし $abc \neq 0$ とする。




### 参考：点と平面の距離

点 $(x_1, y_1, z_1)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 $h$ は，点と直線の距離の公式と同様の形で表される。

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

年　組　番　氏名

**例題 2**

点 $(2,2,1)$ を通り，3 つの座標平面により切り取られる線分の長さが等しくなるような平面の方程式を求めよ。ただし，座標軸との交点は原点以外の正の部分にあるとする。

Memo / Answer

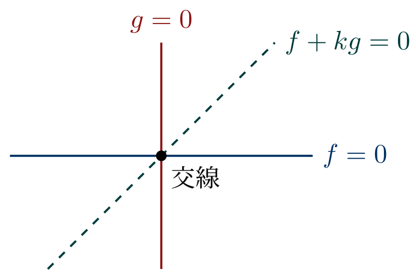
## 3. 2 平面の交線を通る平面（束）

2 つの平面の交わり（直線）を含むような，第 3 の平面を求めたいとき，まともに連立方程式を解いて直線を出す必要はない。恒等式の考え方を利用する（円の束と同じ）。

**交線を通る平面の方程式**

2 つの平面 $\alpha : f(x,y,z)=0,\quad \beta : g(x,y,z)=0$ が交わるとき，その交線を含む任意の平面（$\beta$ 自身を除く）は，定数 $k$ を用いて次のように表される。

$$f(x,y,z)+k\cdot g(x,y,z)=0$$




交線上の点は $f=0$ も $g=0$ も満たすので，
$f+kg=0$ も常に成り立つ！

**例題 3**

2 つの平面 $\alpha : x+2y-z-4=0,\ \beta : 2x-y+z-3=0$ の交線を含み，原点を通る平面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト A (基本)

### 練習 A1

平面 $\alpha : 3x-4y+5z+6=0$ について，次の平面の方程式を求めよ。

(1) 平面 $\alpha$ に平行で，点 $(1,1,1)$ を通る平面

(2) 平面 $\alpha$ に垂直で，2 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,0,0)$ を通る平面

### 練習 A2

$x, y, z$ 軸とそれぞれ点 $(3,0,0), (0,-2,0), (0,0,4)$ で交わる平面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト B (標準)

### 練習 B1

2 つの平面 $2x+y+z-1=0$, $x-2y+3z+2=0$ の交線を $l$ とする。

(1) 交線 $l$ を含み，点 $(1,2,3)$ を通る平面の方程式を求めよ。

(2) 交線 $l$ を含み，平面 $x+y+z=0$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

### 練習 B2

座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(a,0,0), \mathrm{B}(0,b,0), \mathrm{C}(0,0,c)$ $(a,b,c>0)$ を通る平面を $\alpha$ とする。原点 O から平面 $\alpha$ に下ろした垂線の長さが 1 であるとき，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ の値を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト A (基本) 【解答】

### 練習 A1

$\alpha : 3x-4y+5z+6=0$ (1) 平行で $(1,1,1)$ 通る (2) 垂直で $O, A$ 通る

**Memo / Answer**

(1) 平行な平面の法線ベクトルは同じ $\vec{n}=(3,-4,5)$ ととれる。$3(x-1)-4(y-1)+5(z-1)=0$ $3x-3-4y+4+5z-5=0$ 答 $3x-4y+5z-4=0$
(2) 求める法線ベクトルを $\vec{n'}=(a,b,c)$ とする。$\alpha$ の法線 $\vec{n}=(3,-4,5)$ と垂直 $\implies$ $3a-4b+5c=0\ldots$ ① 2 点 $O, A(1,0,0)$ を通る平面は $x$ 軸を含むため，その法線は $x$ 軸方向 $\vec{d}=(1,0,0)$ と垂直である。$\implies$ $1a+0b+0c=0$ $\iff$ $a=0$ ①に代入して $-4b+5c=0$ $\implies$ $4b=5c$。$b=5, c=4$ とすれば $\vec{n'}=(0,5,4)$。原点を通るから答 $5y+4z=0$

### 練習 A2

切片 $(3,0,0),(0,-2,0),(0,0,4)$

**Memo / Answer**

切片形の公式より $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1$ 分母を払うため，両辺に 12 を掛ける。$4x-6y+3z=12$ 答 $4x-6y+3z-12=0$

## 確認テスト B (標準) 【解答】

### 練習 B1

$2x+y+z-1=0\ldots$ ①, $x-2y+3z+2=0\ldots$ ②の交線を含む。(1) $(1,2,3)$ を通る (2) $x+y+z=0$ に垂直

**Memo / Answer**

交線を含む平面の方程式は，定数 $k$ を用いて $(2x+y+z-1)+k(x-2y+3z+2)=0 \quad \ldots(*)$ と表せる。
(1) 点 $(1,2,3)$ を通るから，(*) に代入する。$(2+2+3-1)+k(1-4+9+2)=0$ $6+8k=0$ $\implies$ $k=-\frac{3}{4}$ (*) に代入して整理する。$4(2x+y+z-1)-3(x-2y+3z+2)=0$ $8x+4y+4z-4-3x+6y-9z-6=0$ 答 $5x+10y-5z-10=0$ $\iff$ $x+2y-z-2=0$
(2) (*) を整理すると $(2+k)x+(1-2k)y+(1+3k)z+(-1+2k)=0$ この平面の法線ベクトルは $\vec{n_1}=(2+k,1-2k,1+3k)$ これと平面 $x+y+z=0$ の法線 $\vec{n_2}=(1,1,1)$ が垂直であればよい。$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(2+k)+(1-2k)+(1+3k)=0$ $4+2k=0$ $\implies$ $k=-2$ (*) に $k=-2$ を代入して $(2x+y+z-1)-2(x-2y+3z+2)=0$ $5y-5z-5=0$ 答 $y-z-1=0$

### 練習 B2

切片 $a,b,c$ の平面 $\alpha$。原点との距離 1。

**Memo / Answer**

平面 $\alpha$ の方程式は切片形より $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $\iff$ $\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0$ 原点 $(0,0,0)$ とこの平面の距離が 1 であるから，点と平面の距離の公式より $1=\dfrac{|-1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2+(\frac{1}{c})^2}}$ 分母を払って両辺を 2 乗すると $1^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ よって答 1