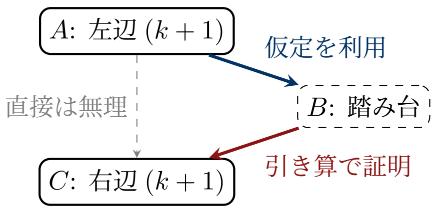
## 1. 不等式は「踏み台」を使え

等式 $A = B$ の証明は一本道だが, 不等式 $A > C$ の証明はそうはいかない. 帰納法で $n = k + 1$ のときを証明する際, 直接 $A > C$ を示すのが難しい場合が多い.
そこで, 「仮定から出てくる式 $B$」を間に挟んで証明する.

**不等式証明の 3 段論法**

目標: $A > C$ を示したい.

(1) **仮定の利用:** $n = k$ の仮定を使うと, $A > B$ であることが言える.
(2) **実力で勝負:** その $B$ が, 目標の $C$ より大きいこと $(B > C)$ を計算で示す.
(3) **結論:** $A > B > C$ より, $A > C$ が成り立つ.




## 2. 指数 vs 多項式

$n$ が大きくなると, 2 次関数 $n^2$ よりも指数関数 $2^n$ の方が圧倒的に大きくなる. これを証明してみよう.

**例題 1 (踏み台の利用)**

$n \geqq 5$ であるすべての自然数 $n$ について, 次の不等式を証明せよ.

$$2^n > n^2$$

**Memo / Answer**

**ポイント：評価の精度**

不等式の証明では, 間の $B$ (踏み台) が **「大きすぎず, 小さすぎず」** であることが重要. 仮定をうまく使って適切な $B$ を作り出すセンスが問われる.

## 3. 階乗の爆発力

階乗 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ は指数関数よりもさらに成長が速い.

**例題 2 (階乗 vs 指数)**

$n \geqq 4$ であるすべての自然数 $n$ について, 次の不等式を証明せよ.

$$n! > 2^n$$

Memo / Answer

## 4. 和の評価

$\sum \frac{1}{k^2}$ などの和が, ある値を超えないことを示す.

**例題 3 (和の上界)**

$n \geqq 2$ であるすべての自然数 $n$ について, 次の不等式を証明せよ.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Memo / Answer

## 確認テスト (A: 指数の不等式)

### 練習 A1 (3 の累乗)

$n \geqq 3$ であるすべての自然数 $n$ について, 次の不等式を証明せよ.

$$3^n > n^3$$

(ヒント: $n \geqq 3$ のとき $(n+1)^3$ より $3n^3$ の方が大きいことを示す)

Memo / Answer

## 確認テスト (B: 和の不等式)

### 練習 B1 (ルートの和)

すべての自然数 $n$ について, 次の不等式を証明せよ.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \sqrt{n}$$

(ヒント: 目標は $\sqrt{k+1}$. 仮定を使うと $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ が出る)

Memo / Answer

## 解答 (例題)

### 例題 1 解答

(I) $n=5$ のとき左辺 $2^5=32$, 右辺 $5^2=25$. $32>25$ より成立.
(II) $k \geqq 5$ として $2^k > k^2$ を仮定する. $n=k+1$ のとき,

$$左辺 = 2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k^2 \quad (仮定利用)$$

目標 $(k+1)^2$ との差をとる.

$$\begin{aligned} 2k^2-(k+1)^2 &= 2k^2-(k^2+2k+1) \\ &= k^2-2k-1 \\ &= (k-1)^2-2 \end{aligned}$$

$k \geqq 5$ なので $(k-1)^2-2 \geqq 4^2-2=14>0$. よって $2k^2>(k+1)^2$.
以上より $2^{k+1}>(k+1)^2$ となり成立.

### 例題 2 解答

(I) $n=4$ のとき左辺 $4!=24$. 右辺 $2^4=16$. $24>16$ より成立.
(II) $k \geqq 4$ として $k!>2^k$ を仮定する. $n=k+1$ のとき

$$左辺 = (k+1)! = (k+1)\cdot k! > (k+1)\cdot 2^k$$

ここで $k \geqq 4$ より $k+1>2$ なので,

$$(k+1)\cdot 2^k > 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$$

よって $(k+1)!>2^{k+1}$ が成り立つ.

### 例題 3 解答

(I) $n=2$ のとき左辺 $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. 右辺 $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$. $\frac{5}{4}<\frac{6}{4}$ より成立.
(II) $n=k$ で成立を仮定. $n=k+1$ のとき

$$左辺 < (2-\frac{1}{k}) + \frac{1}{(k+1)^2}$$

これが目標 $2-\frac{1}{k+1}$ より小さいことを示す.

$$\begin{aligned} &(2-\frac{1}{k+1}) - \left(2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

よって 目標 > 仮定の式 となり成立.

## 解答 (確認テスト)

### 練習 A1 解答

(I) $n=3$ のとき $27>27$ となり等号成立? 不等号 $>$ なので $n=4$ からかも. 問題文が $n \geqq 4$ なら $3^4=81, 4^3=64$ で成立. ($n \geqq 3$ でも $3^3=27, 3^3=27$ で $3^n \geqq n^3$ なら成立) ここでは $n \geqq 4$ 前提で記述する.
(II) $k \geqq 4, 3^k > k^3$ と仮定.

$$3^{k+1} = 3\cdot 3^k > 3k^3$$

目標 $(k+1)^3$ との差をとる. $3k^3-(k^3+3k^2+3k+1)=2k^3-3k^2-3k-1$. $k \geqq 4$ なので $2k^3$ が支配的で正になる. (詳細: $k^2(2k-3)-3k-1 \geqq 16(5)-12-1>0$) よって成立.

### 練習 B1 解答

(I) $n=1$ のとき $1 \geqq 1$. 成立.
(II) $n=k$ で成立を仮定.

$$左辺 \geqq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

これの 2 乗と, 目標 $\sqrt{k+1}$ の 2 乗を比べる. $(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}})^2 = k+\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}$. $\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \geqq 1$ ではないが...
(別法) 目標との差をとる. $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k+1}}>0$. よって成立.