1. 矢印を「移動量」として表す

座標平面上でベクトルを考えるとき，「右にどれだけ，上にどれだけ進むか」という**移動量**で表すと計算がしやすくなる．これを成分表示という．

成分表示 (Component)

ベクトル $\vec{a}$ が，x 軸方向に a_1，y 軸方向に a_2 進む移動を表すとき，次のように書く．

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

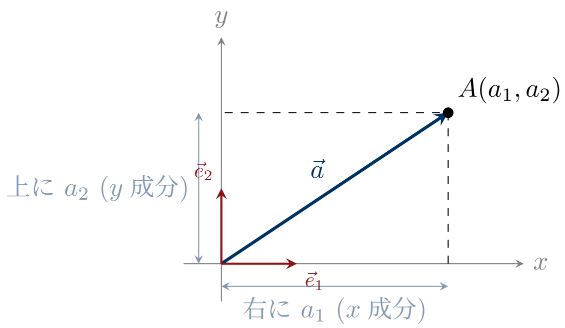
この a_1 を x 成分，a_2 を y 成分という．

また，基本ベクトル $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ を用いると，

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

と分解して表すことができる．

座標との関係:
始点を原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ にとったとき，ベクトル $\vec{a}$ の終点 A の座標は，そのまま成分 (a_1, a_2) と一致する．



2. 成分による演算と大きさ

成分表示すると，ベクトルの和・差・実数倍は，単なる「成分ごとの計算」になる．

成分の演算ルール

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき，

(1) **和:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$
(2) **差:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$
(3) **実数倍:** $k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2)$

ベクトルの大きさ（三平方の定理）

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ の大きさ（長さ）は，

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

2 点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 間の距離は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と等しい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

例題 1 (成分計算)

$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (-2, 4)$ のとき，次を求めよ．

(1) $2\vec{a} - \vec{b}$ の成分
(2) $|2\vec{a} - \vec{b}|$ （大きさ）

年　組　番　氏名

3. 成分による平行条件

ベクトルが平行であるということは，矢印の**「傾き」**が同じということである．

平行条件 (Component ver.)

$\vec{a}=(a_1,a_2)\neq\vec{0},\ \vec{b}=(b_1,b_2)\neq\vec{0}$ のとき，

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \quad (\text{実数倍})$$

成分で考えると，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$ (傾きが等しい) ということである．分母を払って整理すると，以下の重要公式が得られる．

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \quad (\text{たすき掛けの積が等しい})$$

なぜこの公式を使う？

$a_1=0$ の場合など，分数 $(\frac{a_2}{a_1})$ で書けないケースでも $a_1b_2-a_2b_1=0$ なら問題なく使えるため，この「たすき掛け」の形で覚えるのが安全である．

例題 2 (平行なベクトル)

$\vec{a}=(3,-4)$ に平行で，大きさが 10 であるベクトル $\vec{x}$ を求めよ．

方針: 平行なので $\vec{x}=k\vec{a}$ とおける．その後，大きさの条件 $|\vec{x}|=10$ から k を決定する．

4. 図形の座標を求める

「ベクトルが等しい」 $\iff$ 「成分がそれぞれ等しい」

例題 3 (平行四辺形の第 4 頂点)

3 点 $A(1,1), B(4,2), C(5,5)$ がある．四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ．

ヒント: 平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$．点 D を (x,y) とおいて成分計算する．

注意点

「平行四辺形 ABCD」と順序が指定されている場合は 1 通りだが，単に「4 点 A,B,C,D を頂点とする平行四辺形」といわれた場合は，3 通りの可能性があることに注意．

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (成分計算)

$\vec{a} = (4, -3), \vec{b} = (-1, 2)$ とする.

(1) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ の成分を求めよ.
(2) $|\vec{a}|$ を求めよ.
(3) $|\vec{a} + \vec{b}|$ を求めよ.

Memo / Answer

練習 A2 (ベクトルの分解)

$\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-1, 3)$ のとき, $\vec{c} = (5, -1)$ を $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形で表せ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (平行条件と大きさ)

$\vec{a} = (1, -2)$ に平行で, 大きさが $\sqrt{20}$ であるベクトル $\vec{x}$ をすべて求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (平行四辺形)

A$(-1, 3)$, B$(2, -1)$, C$(4, 1)$ とする. 四角形 ABDC が平行四辺形となるとき, 頂点 D の座標を求めよ. (※頂点の順序に注意: ABCD ではなく ABDC)

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 (成分計算)

(1) $2(4,-3)+3(-1,2)=(8,-6)+(-3,6)$
$=(8-3,-6+6)=\mathbf{(5,0)}$
(2) $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$
(3) $\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)$ なので,
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\mathbf{\sqrt{10}}$

Memo / Answer

A2 解答:
$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より,

$$(5,-1)=s(2,1)+t(-1,3)=(2s-t,\ s+3t)$$

成分を比較して連立方程式を解く.

$$\begin{cases} 2s-t=5 & \cdots(1) \\ s+3t=-1 & \cdots(2) \end{cases}$$

(1) より $t=2s-5$. (2) に代入. $s+3(2s-5)=-1 \implies 7s-15=-1 \implies 7s=14 \implies$
$s=2$. $t=4-5=-1$.
よって, $\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}}$

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:
$\vec{x}$ は $\vec{a}$ に平行なので, 実数 k を用いて $\vec{x}=k\vec{a}=k(1,-2)=(k,-2k)$ とおける.
大きさが $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ なので,

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 &= 20 \\ k^2+(-2k)^2 &= 20 \\ 5k^2 &= 20 \\ k^2 &= 4 \quad \therefore k=\pm 2 \end{aligned}$$

$k=2$ のとき, $\vec{x}=(2,-4)$.
$k=-2$ のとき, $\vec{x}=(-2,4)$.
答え: $\vec{x}=(2,-4),\ (-2,4)$

Memo / Answer

B2 解答:
四角形 ABDC が平行四辺形のとき, 対辺のベクトルが等しい.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

(※頂点順序に注意. AB に対応するのは CD. AC ではない)
点 D を (x,y) とすると, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x-4,\ y-1)$. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-(-1),\ -1-3)=(3,-4)$.
成分比較すると:

$$x-4=3 \implies x=7$$
$$y-1=-4 \implies y=-3$$

よって, **D(7, -3)**
(別解: $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ で解いても同じ結果になる)