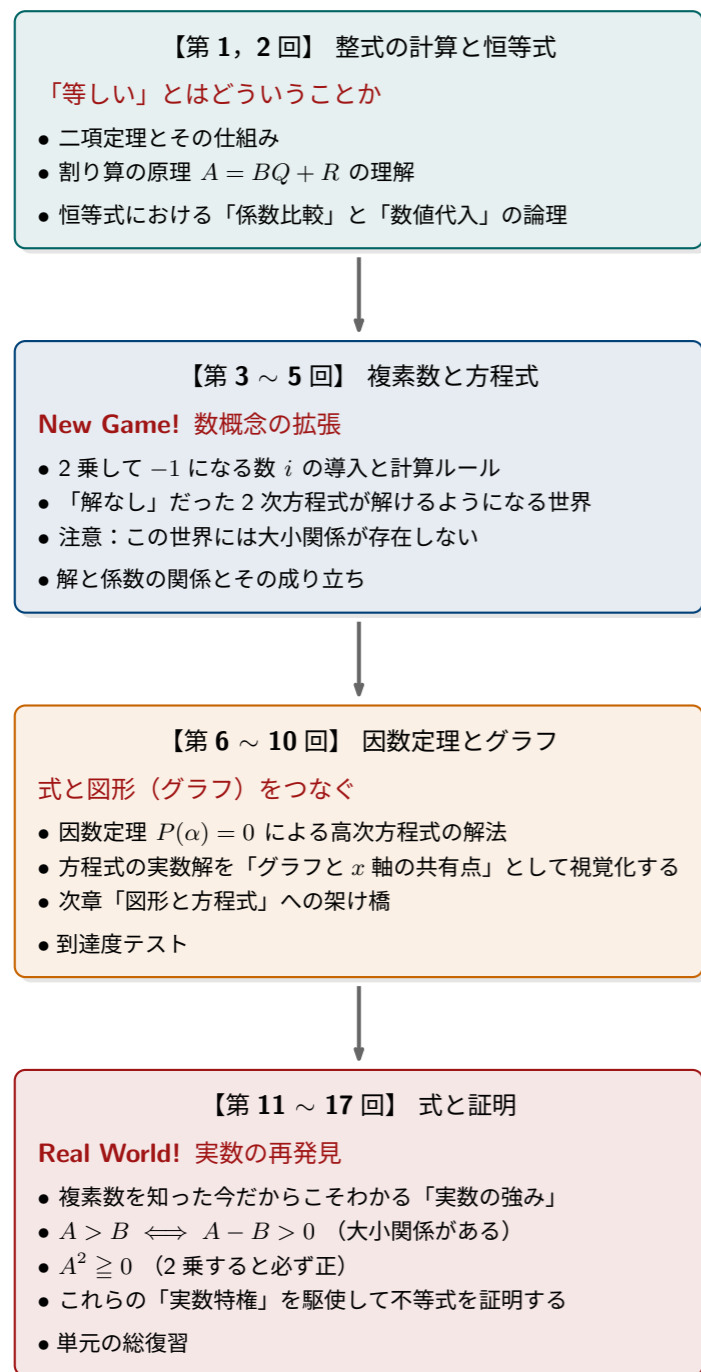


♣ 学びの全体像



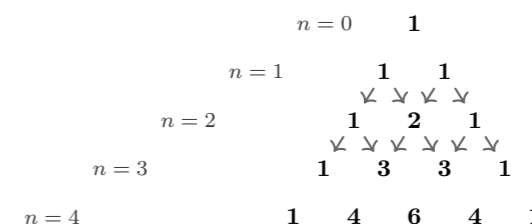
1. 二項定理の仕組み

パスカルの三角形と係数の法則

$(a + b)^n$ の展開式について、係数の並びにどのような規則があるか観察してみよう。

- $n = 0$: $(a + b)^0 = 1$
- $n = 1$: $(a + b)^1 = 1a + 1b$
- $n = 2$: $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $n = 3$: $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

これらの係数だけを取り出して並べると、次のような三角形ができる。これをパスカルの三角形という。



なぜこうなるのか？（組合せの考え方）

$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ 個}}$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の項は、 n 個の因数 $(a + b)$ の中から、

- r 個の b を選ぶ（残りの $n - r$ 個は a を選ぶ）

組合せの総数に等しい。したがって、展開式の各項の係数は

$$\left[{}_nC_r / {}_nP_r \right]$$

で表すことができる。

二項定理

一般に、次の二項定理が成り立つ。

$$(a + b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$

または、和の記号 \sum を用いて

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

特に、一般項は次のように表される。

$$\text{一般項: } {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

例題 1

$(2x + y)^4$ を展開せよ.

Memo / Answer

2. 二項定理の活用

特定の項の係数を求める

展開式すべてを求める必要はなく, 「ある特定の項」の係数だけを知りたい場合がある. このときは, 一般項 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ だけを取り出して考える.

例題 2

$(2x^2 - 1)^6$ の展開式における, x^4 の項の係数を求めよ.

Memo / Answer

二項定理の応用（頻出証明）

$(a + b)^n$ の展開式において、 $a = 1, b = x$ を代入すると、次の等式が得られる。

$$(1 + x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + \cdots + {}_nC_nx^n$$

例題 3

次の等式が成り立つことを証明せよ。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

Proof

3. 多項定理（発展）

3 つの項の展開

$(a + b + c)^n$ の展開式における一般項は、次の式で与えられる。

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \quad (\text{ただし } p + q + r = n)$$

例題 4

$(a + b + c)^6$ の展開式における、 a^2b^3c の係数を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1

次の式を展開せよ.

- (1) $(a + b)^5$
- (2) $(2x - 3)^4$

練習 A2

次の式の展開式における, [] 内の項の係数を求めよ.

- (1) $(x + 2)^6$ [x^4]
- (2) $(3a - 2b)^5$ [a^3b^2]

Memo / Answer

練習 B1

次の式の展開式における, [] 内の項の係数を求めよ.

- (1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ [x^3]
- (2) $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^5$ [定数項]

練習 B2

- (1) $(x^2 - 2x + 3)^5$ の展開式における x^2 の係数を求めよ.
(ヒント: $x^2 - 2x + 3 = x(x - 2) + 3$ と変形して考えるか, 多項定理を利用する)

Memo / Answer