1. 定積分 = 符号付き面積

前回,「定積分=面積」と学習したが，実は，これには重要な条件がある.

グラフと軸の位置関係

「面積 = 定積分」となるためには，積分区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ という条件が必要である．実際，次の例題のように面積計算の結果は負の値になることもある．

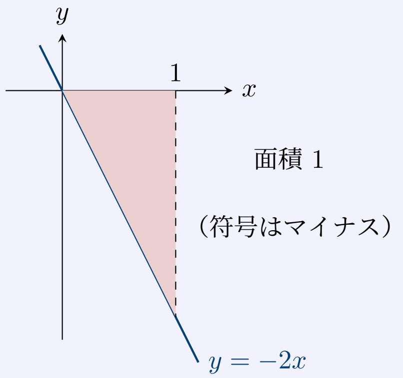
例題 1

次の定積分の値を計算せよ.

$$\int_0^1 (-2x)\,dx$$

解答

$$\int_0^1 (-2x)\,dx = \left[-x^2\right]_0^1$$
$$= -1^2 - (-0^2)$$
$$= \mathbf{-1}$$



まとめ

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は,

- x 軸より上の部分 . . . **プラスの面積**
- x 軸より下の部分 . . . **マイナスの面積**

として計算される．これを**符号付き面積**と呼ぶ．

例題 2

次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^3 (2x-2)\,dx$$

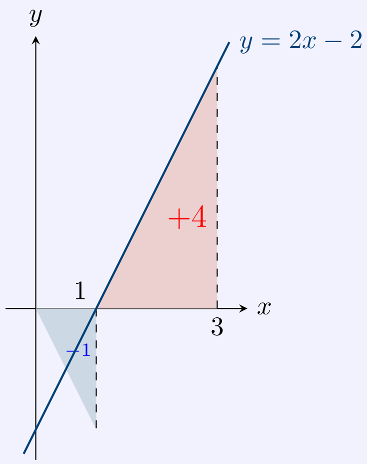
解答

$$\int_0^3 (2x-2)\,dx = \left[x^2-2x\right]_0^3$$
$$= (3^2 - 2\cdot 3) - (0^2 - 2\cdot 0)$$
$$= 9 - 6 = \mathbf{3}$$

図形的意味：

グラフ $y = 2x-2$ は $x = 1$ で x 軸と交わる.

→ 定積分は「上 − 下」の相殺した面積を表している.



面積を求めるためには

以上を踏まえて，グラフと x 軸で囲まれた箇所の面積を求めるためには，「マイナスの場所はマイナス倍」して足し合わせれば良い．

例題 3

曲線 $y = 2x-2$ と x 軸，および直線 $x = 0, x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

解答

関数 $f(x) = 2x-2$ は,

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \leqq 0$,　$1 \leqq x \leqq 3$ において $f(x) \geqq 0$

であるから,

$$S = \underbrace{-\int_0^1 (2x-2)dx}_{\text{マイナス倍して面積を + に}} + \int_1^3 (2x-2)dx$$
$$= 1 + 4 = \mathbf{5}.$$

年　組　番　氏名

練習 1

次の定積分の値を計算せよ．

$$\int_0^2 (-3x^2)\,dx$$

Memo / Answer

練習 2

次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^2 (x^2-1)\,dx$$

Memo / Answer

練習 3

曲線 $y = x^2 - 1$ と x 軸，および直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．ヒント：グラフを描いて，プラスの区間とマイナスの区間を確認しよう．

Memo / Answer

2. 定積分の性質①：足し算と定数倍

定積分は「足し算（シグマ）」の親戚であるため，以下の性質が成り立つ．

定積分の線形性

k, l を定数とするとき

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　（係数は外に出せる）

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

つまり，**中身を合体・分割してよい．**

例題 1：合体してから計算

$$\int_1^2 (2x^2+3x)\,dx - \int_1^2 x^2\,dx$$

解答積分区間が $[1,2]$ で同じなので，中身を先に計算する．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^2 \{(2x^2+3x)-x^2\}\,dx = \int_1^2 (x^2+3x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+6\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{7}{3}+\frac{9}{2} = \boldsymbol{\frac{41}{6}}\end{aligned}$$

3. 定積分の性質②：区間の操作

端点に関する性質

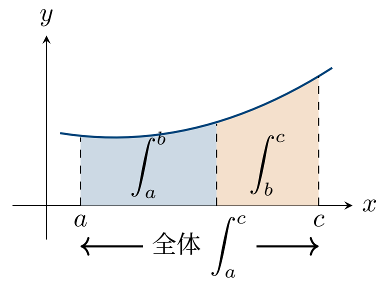
(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　（幅が 0 なら面積も 0）

(2) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$　（逆走すると符号反転）

重要：区間の連結

「a から c までの面積」は，途中の b で分割して足してもよい．

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



例題 2：区間をつなぐ

次を計算せよ．

$$\int_1^2 (x^2+1)\,dx + \int_2^3 (x^2+1)\,dx$$

解答中身が同じ関数なので，積分区間 $[1,2]$ と $[2,3]$ を連結できる．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^3 (x^2+1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^3 \\ &= \left(\frac{27}{3}+3\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right) \\ &= 12 - \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{32}{3}}\end{aligned}$$

年　組　番　氏名

確認テスト

練習 A

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-4x)\,dx+\int_{-1}^{2}(2x^2+4x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2+x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2+x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}(x^2-2x)\,dx-\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$

Memo / Answer

練習 B

以下の定積分を，性質をうまく利用して計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{1}^{3}(x^2+2x+3)\,dx-\int_{1}^{3}(2x+1)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^3+1)\,dx+\int_{0}^{2}(x^3+1)\,dx$

Memo / Answer