

Introduction：文字は「数」だが、ただの数ではない

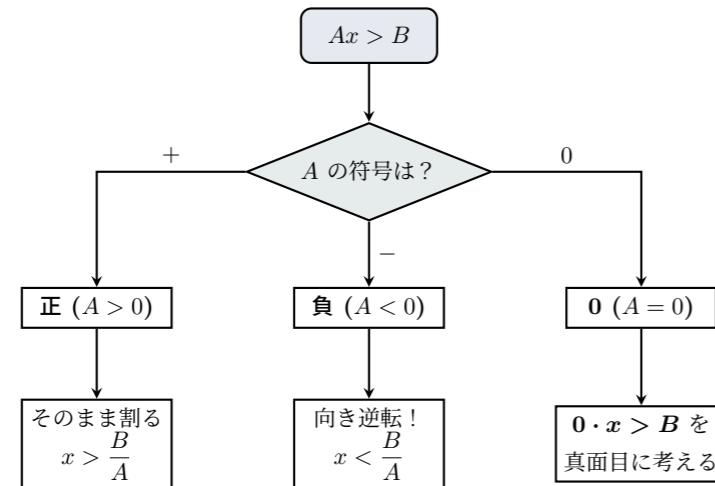
不等式 $2x > 6$ を解くとき、迷わず 2 で割って $x > 3$ とします。では、不等式 $ax > 6$ ならどうでしょう？

$$x > \frac{6}{a} \cdots \text{としてはいけません！}$$

なぜなら、もし $a = -2$ だったら不等号は逆転しますし、もし $a = 0$ だったら「ゼロ割り」という数学最大のタブーを犯すことになるからです。文字を見たら「正・負・0」の3パターンを疑う。これが「場合分け」の入り口です。

文字係数の処理フローチャート

不等式 $Ax > B$ を解くときの手順：



特に $A = 0$ の場合： $0 \cdot x > B$ という式になります。 $0 \cdot x$ は常に 0 なので、

$$0 > B$$

という式が「正しい（真）」か「間違い（偽）」かで判定します。

- 正しいとき → どんな x でも OK → すべての実数
- 間違いのとき → どんな x でもダメ → 解なし

例題 1 : a で割れるか？

不等式 $ax > 3$ を解け。

考え方: a の符号（プラス、マイナス、ゼロ）で場合分けします。

- (1) $a > 0$ のとき：そのまま割って $x > \frac{3}{a}$
- (2) $a < 0$ のとき：向きが変わって $x < \frac{3}{a}$
- (3) $a = 0$ のとき：式は $0 \cdot x > 3$ つまり $0 > 3$ 。これはありえない（偽）。よって、解なし。

Memo / Answer

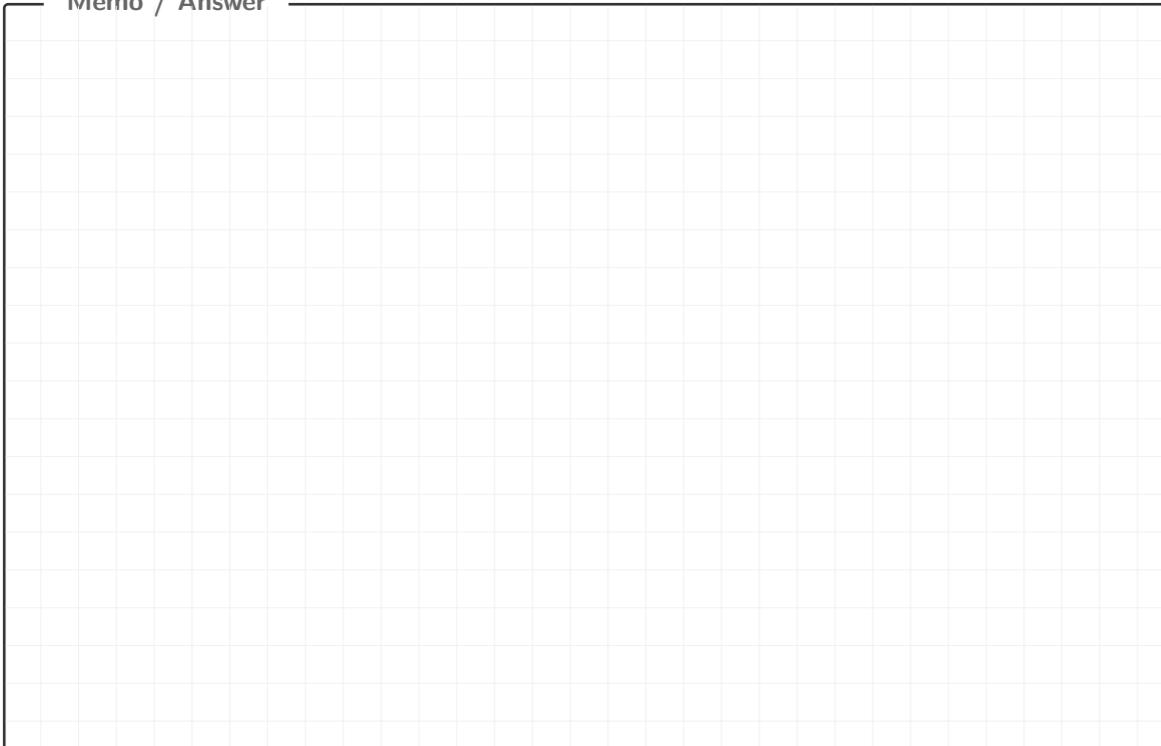
例題 2：係数に式を含む場合

不等式 $(a - 1)x \geq 2$ を解け。

考え方: x の係数は $(a - 1)$ です。このカタマリが正・負・0 のときを考えます。

- 正: $a - 1 > 0 \iff a > 1$
- 負: $a - 1 < 0 \iff a < 1$
- 0: $a - 1 = 0 \iff a = 1$

Memo / Answer

**Topic : 整理してから場合分け**

最初から $Ax > B$ の形になっているとは限りません。まずは x を含む項を左辺に集め、因数分解して

$$()x > ()$$

の形を作るのが第一歩です。

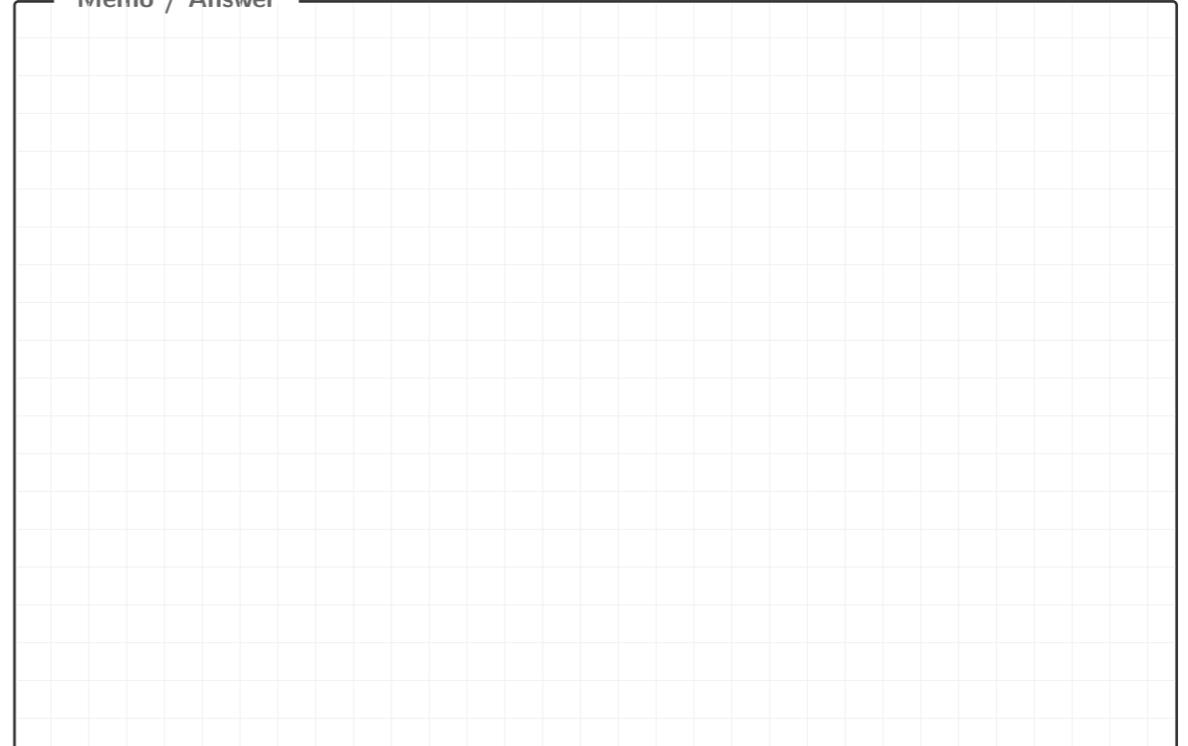
例題 3：項をまとめてから解く

a を定数とするとき、不等式 $ax + 2 > 2x + a$ を解け。

手順:

- 移項して x を左辺にまとめる。 $ax - 2x > a - 2$
- 係数でくくる。 $(a - 2)x > a - 2$
- 係数 $(a - 2)$ の符号で場合分けをする。

Memo / Answer



A 問題：基礎の定着**練習 A1: 基本的な文字係数**

a を定数とするとき、不等式 $ax \leq 5$ を解け。

練習 A2: 0 の解釈

次の不等式の解を答えよ。

- (1) $0 \cdot x > -2$
- (2) $0 \cdot x \leq -5$
- (3) $0 \cdot x \geq 0$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用**練習 B1: 項をまとめるタイプ**

a を定数とするとき、不等式 $ax + 1 > x + a^2$ を解け。

練習 B2: ちょっと複雑な場合分け

a を定数とするとき、不等式 $ax \geq 2x - a + 2$ を解け。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 a の符号で場合分けをする。

$$(1) \ a > 0 \text{ のとき向きはそのまま。} x \leq \frac{5}{a}$$

$$(2) \ a < 0 \text{ のとき向きが逆転する。} x \geq \frac{5}{a}$$

(3) $a = 0$ のとき不等式は $0 \cdot x \leq 5$ となる。左辺は常に 0 なので、 $0 \leq 5$ は常に成り立つ。よって、すべての実数。

A2

(1) $0 > -2$ は正しい。→ すべての実数

(2) $0 \leq -5$ は間違い。→ 解なし

(3) $0 \geq 0$ は正しい（等号成立）。→ すべての実数

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 移項して整理する。

$$ax - x > a^2 - 1$$

$$(a-1)x > (a+1)(a-1)$$

係数 $(a-1)$ の符号で場合分け。

(i) $a-1 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき正の数で割るので向きはそのまま。

$$x > \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \implies x > a+1$$

(ii) $a-1 < 0$ すなわち $a < 1$ のとき負の数で割るので向きは逆転。

$$x < \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \implies x < a+1$$

(iii) $a-1 = 0$ すなわち $a = 1$ のとき不等式は $0 \cdot x > 0 \cdot 2$ つまり $0 > 0$ となる。これは成り立たない。よって、解なし。

B2 整理する。

$$ax - 2x \geq -a + 2$$

$$(a-2)x \geq -(a-2)$$

係数 $(a-2)$ の符号で場合分け。

(i) $a-2 > 0$ すなわち $a > 2$ のとき

$$x \geq \frac{-(a-2)}{a-2} \implies x \geq -1$$

(ii) $a-2 < 0$ すなわち $a < 2$ のとき向きが逆転。

$$x \leq \frac{-(a-2)}{a-2} \implies x \leq -1$$

(iii) $a-2 = 0$ すなわち $a = 2$ のとき不等式は $0 \cdot x \geq 0$ となる。これは常に成り立つ。よって、すべての実数。