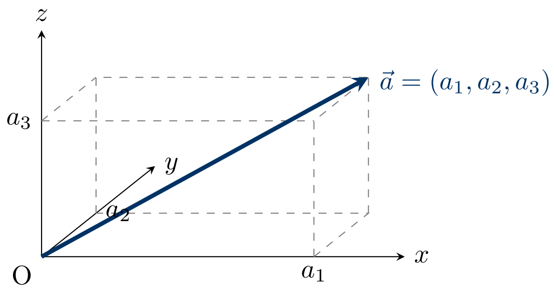
年　組　番　氏名

1. 空間ベクトルの成分と大きさ

平面ベクトルと同様に，始点を原点 O にあわせたときの終点の座標 (a_1, a_2, a_3) を用いて表す。成分が z 成分（高さ）分だけ増えるが，基本的な考え方は全く同じである。



成分と大きさ・2 点間のベクトル

(1) **成分表示と大きさ**
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき，

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(2) **2 点間のベクトル**
2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ について，

$$\vec{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$|\vec{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例題 1

次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = (2, -1, -2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。
(2) 2 点 $\mathrm{A}(1, 3, 2)$, $\mathrm{B}(3, -1, 4)$ について，$\vec{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

Memo / Answer

2. ベクトルの演算

加法・減法・実数倍は，各成分ごとに計算すればよい。

成分による演算

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, k は実数とする。

(1) **和**　$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$
(2) **差**　$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$
(3) **実数倍**　$k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

例題 2

$\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, 4, -1)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $2\vec{a} + \vec{b}$
(2) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

Memo / Answer

年　組　番　氏名

3. ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \quad (k \text{ は実数})$$

成分で表すと，$(b_1, b_2, b_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$ となり，3 つの等式が連動する。

例題 3

$\vec{a} = (2, -3, 1)$ と $\vec{b} = (-4, x, y)$ が平行になるように，実数 x, y の値を定めよ。

Memo / Answer

4. 空間図形への応用

平面と同様に，$\vec{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{DC}}$ などを用いて，空間内の点の座標を求めることができる。

例題 4

3 点 A$(2, 1, 0)$, B$(1, -2, 1)$, C$(-1, 2, 4)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

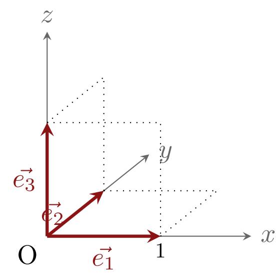
Memo / Answer

参考：基本ベクトル

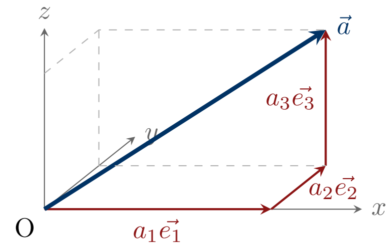
座標空間において，各軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを基本ベクトルという。

- $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$　(x 軸方向)
- $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$　(y 軸方向)
- $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$　(z 軸方向)

【基本ベクトルの定義】



【分解のイメージ】



これらを用いると，任意のベクトルは次のように分解できる。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

年　　組　　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,-4,5)$

(2) 2 点 $\mathrm{A}(2,-1,3)$, $\mathrm{B}(0,1,2)$ を結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

練習 A2

$\vec{a}=(3,-1,2)$, $\vec{b}=(-1,2,0)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

$$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$$

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

$\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(3,x,y)$ が平行であるとき，実数 x,y の値を求めよ。また，このとき $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の関係を式で表せ。

練習 B2

平行四辺形 ABCD において，3 つの頂点が $\mathrm{A}(4,1,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,5)$, $\mathrm{C}(1,2,0)$ であるとき，第 4 の頂点 D の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

(1) $\vec{a} = (3, -4, 5)$
(2) A$(2, -1, 3)$, B$(0, 1, 2)$ の $\vec{\mathrm{AB}}$

Memo / Answer

(1)
$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$
答 $5\sqrt{2}$
(2)
$\vec{\mathrm{AB}} = (0 - 2,\ 1 - (-1),\ 2 - 3) = (-2, 2, -1)$
$|\vec{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9}$
答 3

練習 A2

$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ の成分と大きさ

Memo / Answer

$$\begin{aligned}\vec{c} &= 2(3, -1, 2) - 3(-1, 2, 0)\\ &= (6, -2, 4) - (-3, 6, 0)\\ &= (6 + 3,\ -2 - 6,\ 4 - 0)\\ &= (9, -8, 4)\end{aligned}$$

答 成分 $(9, -8, 4)$

大きさは

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= \sqrt{9^2 + (-8)^2 + 4^2}\\ &= \sqrt{81 + 64 + 16}\\ &= \sqrt{161}\end{aligned}$$

答 大きさ $\sqrt{161}$

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

$\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, x, y)$ が平行であるとき，x, y の値と大きさの関係。

Memo / Answer

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ より，$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在する。
$(3, x, y) = k(1, 2, -1) = (k, 2k, -k)$
成分を比較して，

$$\begin{cases} 3 = k \\ x = 2k \\ y = -k \end{cases}$$

$k = 3$ を代入して，$x = 2 \times 3 = 6$, $y = -3$
答 $x = 6, y = -3$

また，$\vec{b} = 3\vec{a}$ であるから，大きさについて $|\vec{b}| = |3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$ すなわち答 $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$

練習 B2

平行四辺形 ABCD の第 4 頂点 D

Memo / Answer

四角形 ABCD が平行四辺形になる条件は

$$\vec{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{DC}}$$

$\vec{\mathrm{AB}} = (2 - 4,\ -1 - 1,\ 5 - 3) = (-2, -2, 2)$
点 D の座標を (x, y, z) とすると，$\vec{\mathrm{DC}} = (1 - x,\ 2 - y,\ 0 - z)$
よって

$$\begin{aligned} 1 - x = -2 &\implies x = 3\\ 2 - y = -2 &\implies y = 4\\ -z = 2 &\implies z = -2 \end{aligned}$$

答 D$(3, 4, -2)$
別解：対角線の中点が一致することを利用してもよい。