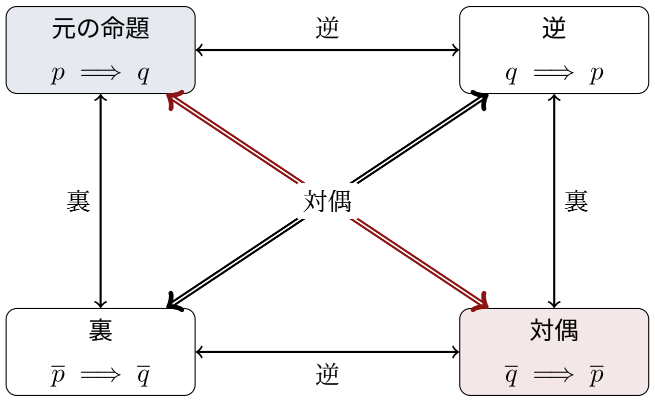
Introduction：視点を変える魔法

「雨が降ったら，傘を持つ ($p \implies q$)」これと全く同じ意味の文を作れますか？
「傘を持っていないなら，雨は降っていない ($\overline{q} \implies \overline{p}$)」これが**対偶**です。この変換を使うと，証明しにくい命題も一瞬で証明できることがあります。

逆・裏・対偶の関係

元の命題 $p \implies q$ に対して：



- 重要：元の命題と対偶の真偽は必ず一致する！
- 逆と裏の真偽も一致するが，元の命題とは一致するとは限らない。

例題 1：逆・裏・対偶を作る

次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

$$x = 2 \implies x^2 = 4$$

Memo / Answer

対偶証明法

「$p \implies q$」を直接証明するのが難しいとき，代わりに「$\overline{q} \implies \overline{p}$（**対偶**）」を証明してもよい。
特に有効な場面：

- 結論が「〜でない ($\neq$)」のとき（扱いにくいから）
- 「または」「少なくとも」が含まれるとき

例題 2：対偶証明法の基本

n を整数とする。次の命題を証明せよ。

$$n^2 \text{ が奇数} \implies n \text{ は奇数}$$

考え方: 「2 乗して奇数になる数」を文字で置くのは難しいです（$\sqrt{\cdots}$ になってしまう）。そこで対偶をとります。
対偶：

$$n \text{ が偶数} \implies n^2 \text{ は偶数}$$

これなら，$n = 2k$ と置いて計算できそうです。

Memo / Answer

例題 3：応用的な対偶証明

x, y を実数とする。次の命題を証明せよ。

$$x + y > 0 \implies x > 0 \text{ または } y > 0$$

考え方: 「または」の証明は面倒です（どちらか一方だけ成り立てばいいので）。対偶をとって「かつ」に変えましょう。

ド・モルガンの法則を思い出そう：

- 「$x > 0$ または $y > 0$」の否定
- $\iff$ 「$x \leqq 0$ **かつ** $y \leqq 0$」

これで，対偶は「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0 \implies x + y \leqq 0$」となります。これは当たり前ですね。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 逆・裏・対偶

次の命題の逆・裏・対偶を述べよ。また，それぞれの真偽を答えよ。

$$x > 0 \implies x + 1 > 0$$

練習 A2: 対偶の作成

n は自然数とする。次の命題の対偶を述べよ。（証明はしなくてよい）

(1) n は奇数 $\implies$ n^2 は奇数

(2) n は 3 の倍数ではない $\implies$ n は 9 の倍数ではない

(3) mn が奇数 $\implies$ m, n はともに奇数

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 対偶を利用した証明①

n を整数とする。対偶を利用して，次の命題を証明せよ。

$$n^2 \text{ が偶数} \implies n \text{ は偶数}$$

練習 B2: 対偶を利用した証明②

x, y を実数とする。対偶を利用して，次の命題を証明せよ。

$$x + y \neq 5 \implies x \neq 2 \text{ または } y \neq 3$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

- **元の命題**：$x > 0 \implies x > -1$。（真）
- **逆**：$x+1 > 0 \implies x > 0$ $(x > -1 \implies x > 0)$ 反例：$x = -0.5$ など。（偽）
- **裏**：$x \leqq 0 \implies x+1 \leqq 0$ 反例：$x = 0$ のとき $1 \leqq 0$ となり成り立たない。（偽）
- **対偶**：$x+1 \leqq 0 \implies x \leqq 0$ $(x \leqq -1 \implies x \leqq 0)$ -1 以下なら当然 0 以下である。（真）

A2

(1) n^2 は偶数 $\implies$ n は偶数

(2) n は 9 の倍数 $\implies$ n は 3 の倍数

(3) m, n の少なくとも一方は偶数 $\implies$ mn は偶数（※「ともに奇数」の否定は「少なくとも一方は偶数」）

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 与えられた命題の対偶は，「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」となる。これを示す。
n が奇数のとき，整数 k を用いて $n = 2k+1$ と表せる。このとき，

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ は整数であるから，$2(2k^2+2k)+1$ は奇数である。よって，n^2 は奇数である。
対偶が真であるから，元の命題も真である。（証明終）

B2 与えられた命題の対偶は，「$x = 2$ かつ $y = 3 \implies x + y = 5$」となる。これを示す。
（証明）$x = 2$ かつ $y = 3$ のとき，

$$x + y = 2 + 3 = 5$$

となり，結論は成り立つ。対偶が真であるから，元の命題も真である。（証明終）

ポイント：「または」の否定 $\to$「かつ」「$\neq$」の否定 $\to$「$=$」これらを組み合わせることで，非常に計算しやすい命題に変形できる。