Introduction：数学的な「正しさ」とは

「1 億回実験して成功したから，この法則は正しい」科学の世界ではこれで十分かもしれませんが，数学の世界では不十分です。数学では**「どんな場合でも 100% 成り立つ」**ことの保証が必要です。逆に言えば，**「たった 1 つでも例外があれば，それは間違い（偽）」**なのです。この厳格なルールを学びましょう。

命題と条件の違い

「命題」と「条件」は明確に区別されます。

- **命題 (Proposition)**：それ自体で「正しい（真）」か「正しくない（偽）」かが明確に決まる文や式。
  - 例 1：「3 は素数である」 → **真**（誰が見ても正しい）
  - 例 2：「$1+1=3$」 → **偽**（誰が見ても間違い）
- **条件 (Condition)**：文字 x などを含み，**その値を一つ固定して初めて真偽が定まる文。**
  - 例：「x は素数である」 → これだけでは真偽不明！
  - $x=3$ を代入すると → 「3 は素数」(**真**)
  - $x=4$ を代入すると → 「4 は素数」(**偽**)

条件をつなぐと「命題」になる

条件 p, q 単体では真偽が決まりませんが，「p ならば q」という形でつなぐと，真偽が判定できる**命題になります。**

- $\boldsymbol{p \implies q}$ （p ならば q）
- p を仮定，q を結論という。

例題 1：真偽の判定と反例

次の命題の真偽を答えよ。偽の場合は**反例**（成り立たない例）を 1 つ挙げよ。

(1) 実数 x について，$x^2=4 \implies x=2$

(2) 自然数 n について，n が素数 $\implies n$ は奇数

考え方: (1) 「2 乗して 4 になる数」は 2 だけですか？ → -2 もあります。$x=-2$ のとき，「仮定 ($x^2=4$)」は満たすのに「結論 ($x=2$)」は満たしません。これが反例です。(2) 素数は $2, 3, 5, 7, \ldots$ です。偶数の素数が 1 つだけいますね。

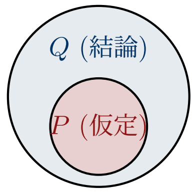
Memo / Answer

集合を使った真偽判定

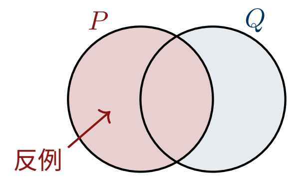
条件 p を満たす集合を P，条件 q を満たす集合を Q とします。

$$\text{命題 } p \implies q \text{ が真} \iff \boldsymbol{P \subset Q}$$

「p のエリアが，すっぽりと q のエリアに含まれている」ときだけ真です。はみ出している部分があれば，そこが**反例**です。



$\boldsymbol{P \subset Q} \implies$ **真**



はみ出しあり $\implies$ **偽**

例題 2：集合の利用

実数 x に関する次の命題の真偽を答えよ。

$$-1<x<2 \implies -2<x<3$$

考え方: 仮定の範囲 $P=\{x \mid -1<x<2\}$ 結論の範囲 $Q=\{x \mid -2<x<3\}$ 数直線を書いて，P が Q の中にすっぽり入っているか確認します。

Memo / Answer

Topic：反例探しのコツ

命題が「偽」であることを示すには，反例を**たった 1 つ**見つければ OK です。反例になりやすい「意地悪な数字」をチェックする癖をつけましょう。

- **0 の罠**：割り算，掛け算などで例外になりやすい。
- **負の数**：2 乗するとプラスになる，不等号が逆転するなど。
- **1, -1**：2 乗しても変わらない，など。
- **無理数**：有理数だと思い込んでいると足元をすくわれる。
- **図形**：正三角形や正方形などの「特殊な形」だけでなく，「ひしゃげた形」も考える。

例題 3：反例を見つける練習

次の命題は偽である。反例を 1 つ挙げよ。

(1) $x^2 = y^2 \implies x = y$
(2) x, y が無理数 $\implies x + y$ も無理数
(3) $xy > 0 \implies x > 0$ かつ $y > 0$

ヒント: (1) 符号違いはどう？ （3 と -3 など）(2) 無理数と無理数を足して 0 (有理数) になることは？ (3) 「マイナス × マイナス」は？

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 命題の真偽（計算）

次の命題の真偽を答えよ。偽の場合は反例を 1 つ挙げよ。

(1) $x = 3 \implies x^2 = 9$
(2) $x^2 = 9 \implies x = 3$
(3) 自然数 n が 6 の倍数 $\implies$ n は 3 の倍数

練習 A2: 集合と真偽

実数 x に関する次の命題の真偽を答えよ。

(1) $1 < x < 4 \implies 0 < x < 5$
(2) $x > 0 \implies x > 1$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 反例探し

次の命題はすべて偽である。反例を 1 つ挙げよ。

(1) $x + y > 0 \implies x > 0$ かつ $y > 0$
(2) 平行四辺形ならば，長方形である。
(3) $|x| > |y| \implies x > y$

練習 B2: 真偽の判定（集合）

$U = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ とする。条件 $p : 2 < x < 6$，条件 $q : x < a$ について，命題 $p \implies q$ が真となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) 真
(x = 3 ならば，2 乗すれば必ず 9 になる)

(2) 偽 （反例：$\boldsymbol{x = -3}$）
(-3 も 2 乗すれば 9 になるが，3 ではない)

(3) 真
(6 の倍数は $6, 12, 18, \ldots$ であり，これらはすべて 3 の倍数に含まれる)

A2

(1) 真
仮定の範囲 $(1, 4)$ は，結論の範囲 $(0, 5)$ にすっぽり含まれる。($1 < x < 4$ ならば必ず $0 < x < 5$ と言える)

(2) 偽 （反例：$\boldsymbol{x = 0.5}$ など）
(0 より大きくても，1 より大きいとは限らない。集合で言うと包含されていない)

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) 反例：$\boldsymbol{x = 5,\ y = -2}$ など。
足せば 3 で正になるが，y が負である。(「片方がすごく大きなプラスなら，もう片方はマイナスでもいい」という状況)

(2) 反例：(普通の傾いた) 平行四辺形
長方形は平行四辺形の一種だが，逆は成り立たない。(角度が 90 度でないものが反例)

(3) 反例：$\boldsymbol{x = -5,\ y = 2}$ など。
絶対値は $5 > 2$ で条件を満たすが，中身は $-5 < 2$ となり大小関係が逆転する。(負の数を含めると絶対値と大小関係は一致しない)

B2 命題 $p \implies q$ が真となる条件は，集合 $P \subset Q$ が成り立つことである。$P = \{x \mid 2 < x < 6\}$ $Q = \{x \mid x < a\}$ 数直線を書くと，P（2 から 6 の区間）が Q（a より左側）に完全に覆われていなければならない。つまり，境界線 a が 6 よりも右にあればよい。

$$6 \leqq a$$

(端点の吟味：$a = 6$ のとき，$P : x < 6$，$Q : x < 6$ となり，$P \subset Q$ は成り立つ) 答え：$\boldsymbol{a \geqq 6}$