

1. 実数条件最大の武器「2 乗」

絶対にマイナスにならない数

実数 x について, 最も重要な性質の一つがこれである.

$$x^2 \geq 0 \quad (\text{等号成立は } x = 0 \text{ のとき})$$

また, 2 乗の和についても同様である.

$$A^2 + B^2 \geq 0$$

これを利用すると, 「平方完成」することで不等式を証明できる.

例題 1 (基本の平方完成)

不等式 $x^2 - 4x + 6 > 0$ を証明せよ.

Proof

「等号成立」とは？

不等式 $A \geq B$ において, $A = B$ となる瞬間のことをいう. 例えば $x^2 \geq 0$ なら, $x = 0$ のとき等号が成立する.

では, そもそもなぜ「等号成立」を考えなければいけないのか??

最年少は何歳??

全員の中で最年少と最年長が何歳なのかを知りたい.

- 「全員 15 歳以上 ($x \geq 16$)」なら最年少は 15 歳であると【 言える / 言えない 】.
- 「全員 16 歳未満 ($x < 16$)」なら最年長は 15 歳であると【 言える / 言えない 】.
- 「全員 15 歳以上で, かつ, 15 歳の人が少なくとも一人いる」なら最年少は 15 歳であると【 言える / 言えない 】.

→ 最小値や最大値の問題では, 等号を成り立たせるような x の存在が極めて重要なのである.

2. 2変数の不等式

証明の流れ

- (1) (左辺) - (右辺) を計算する.
- (2) 平方完成して $(\quad)^2 + (\quad)^2$ などの形を作る.
- (3) 実数の2乗は0以上であることを述べる.
- (4) 等号成立条件 (= 0 になる時) を確認する.

例題 2 (2変数の不等式)

不等式 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ を証明せよ. また, 等号が成立するのはどのようなときか答えよ.

Proof

(左辺) - (右辺) = $x^2 + y^2 - 2xy$
= $x^2 - 2xy + y^2$
= $(x - y)^2$
ここで, x, y は実数であるから, $(x - y)^2 \geq 0$. よって, (左辺) - (右辺) ≥ 0 より
$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

等号が成立するのは, $x - y = 0$, すなわち $x = y$ のときである. □

なぜ実数条件が必要？

もし虚数でもよいなら, $x = i$ のとき $x^2 = -1 < 0$ となり, この証明は崩壊する. 「2乗して0以上」は, 実数だけの特権なのである.

確認テスト

練習 A1 (常に正であることの証明)

不等式 $x^2 + 6x + 10 > 0$ を証明せよ.

Proof

練習 A2 (2 変数の不等式)

不等式 $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ を証明せよ. また, 等号成立条件を求めよ.

Proof

練習 B1 (応用：平方の和)

不等式 $a^2 + b^2 \geq ab$ を証明せよ. また, 等号成立条件を求めよ.

Hint

a について整理して平方完成する. $a^2 - ba + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 = \dots$

Proof

練習 B2 (絶対不等式)

不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ を証明せよ. (ヒント: 全体を 2 倍して $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$ を作り, $(x - y)^2$ などの和に変形する)

Proof