1. 組合せの定義

異なるいくつかのものから，順序を考えずにいくつかを選ぶことを組合せ (**Combination**) といいます．記号は $\boldsymbol{C}$ を使います．

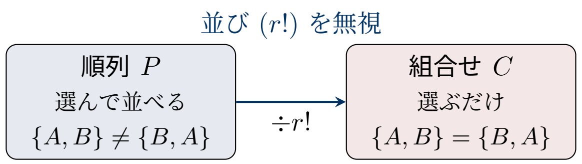
組合せの公式

異なる n 個のものから r 個を選ぶ組合せの総数は，

$$\boldsymbol{{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1}}$$

【式の意味】

(1) まず順列 ${}_nP_r$ で並べる．（選んで，並べる）
(2)「選んだ r 個の並び順 $(r!)$」は区別しないので，重複分 $r!$ で割る．



重要な性質

$$\boldsymbol{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$$

「r 個の選ぶもの」を決めることは，同時に「$n-r$ 個の選ばないもの（捨てるもの）」を決めることと同じです．計算が楽になるので積極的に使いましょう．例：${}_{100}C_{98} = {}_{100}C_2$

2. 基本計算と文章題

例題 1．組合せの計算

(1) 次の値を求めよ．　(1) ${}_8C_3$　(2) ${}_7C_5$　(3) ${}_nC_1$
(2) 男子 5 人，女子 4 人の中から，次のように選ぶ方法は何通りあるか．
　(a) 3 人の委員を選ぶ．
　(b) 男子 2 人，女子 1 人を選ぶ．

Memo / Answer

Lecture Note：0 の階乗と C

順列と同様に，以下の定義があります．

$${}_nC_0 = 1, \quad {}_nC_n = 1$$

「n 個から 0 個選ぶ」のも「何も選ばない」という 1 通りの方法と考えます．

3. 直線と対角線の本数

図形の問題では，「何個選べばその図形ができるか」に着目します．

図形の決定条件 (1)

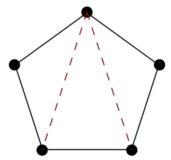
- **直線の本数**：異なる 2 点を選べば，直線が 1 本引ける．

$$_nC_2 \text{ (通り)}$$

- **対角線の本数**：多角形の頂点を 2 つ結ぶ線のうち，「辺」を除いたもの．

$$\boldsymbol{_nC_2 - n}$$

（全ての 2 点の結び方 － 辺の本数）



正五角形

頂点から 2 点選ぶ $\rightarrow {}_5C_2 = 10$
辺は 5 本
対角線 $\rightarrow 10 - 5 = 5$

例題 2．対角線の本数

正八角形について，次の数を求めよ．

(1) 2 つの頂点を結んでできる直線の本数．
(2) 対角線の本数．

Memo / Answer

4. 三角形の個数

図形の決定条件 (2)

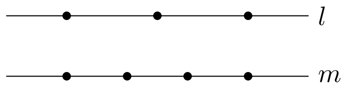
- **三角形の個数**：異なる 3 点を選べば，三角形が 1 つできる．

$$_nC_3 \text{ (通り)}$$

【重要注意】
ただし，選んだ 3 点が**「一直線上」**にあるときは三角形になりません．この場合は，全体から引く必要があります．

例題 3．三角形の個数（基本・一直線）

(1) 正十角形の頂点のうち 3 点を結んでできる三角形の個数．
(2) 下図のように，直線 l 上に 3 点，直線 m 上に 4 点がある．これら 7 点のうち 3 点を結んでできる三角形の個数．



Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

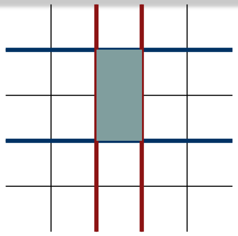
5. 平行四辺形と四角形

格子状の道や，平行線の交点を利用する問題です．

四角形の決定

平行四辺形などの四角形は，**「縦から 2 本，横から 2 本」**選ぶと 1 つ決まります．

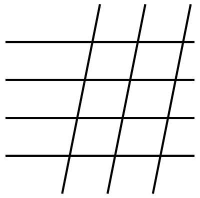
$${}_mC_2 \times {}_nC_2$$



縦線 2 本と
横線 2 本で
領域確定

例題 4．平行四辺形の個数

下図のように，4 本の平行線と 3 本の平行線が交わっている．これらによって作られる平行四辺形は全部で何個あるか．



Memo / Answer

Lecture Note：引き算の発想

三角形の個数の問題（直線上に点がある場合）で，「直線 l から 1 点，直線 m から 2 点選ぶ...」と場合分けして足していく方法（直接法）もあります．
しかし，点が複雑に配置されている場合は

（3 点の選び方全通り）−（一直線上に並ぶ 3 点）

という**補集合（引き算）**の考え方の方が圧倒的に計算ミスが減ります．「三角形にならないのはどんなときか？」を常に意識しましょう．

Challenge：円周上の点

例題 5．円と三角形

円周上に異なる 8 個の点がある．これらを頂点とする三角形はいくつあるか．また，そのうち直角三角形はいくつあるか．（直角三角形については次回詳しく扱いますが，予習として考えてみましょう）

Memo / Answer

確認テスト A（基本）

練習 1：組合せの計算

次の値を求めよ．

(1) ${}_9C_2$
(2) ${}_6C_4$
(3) ${}_5C_0$

練習 2：正多角形と対角線

正十二角形について，次の問いに答えよ．

(1) 頂点を結んでできる直線の本数を求めよ．
(2) 対角線の本数を求めよ．
(3) 頂点を結んでできる三角形の個数を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：直線上の点と三角形

平面上に 10 個の点がある．そのうち 4 点は一直線上にあり，この 4 点以外に一直線上にある 3 点はないものとする．

(1) これら 10 個の点のうち，2 点を結んでできる直線の本数．
(2) これら 10 個の点のうち，3 点を結んでできる三角形の個数．

練習 4：長方形の個数

縦の平行線が 5 本，横の平行線が 4 本ある．これらによって作られる長方形（正方形含む）は全部で何個あるか．

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

(1) $\dfrac{9\times 8}{2\times 1} = \mathbf{36}$

(2) ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6\times 5}{2\times 1} = \mathbf{15}$

(3) **1**

2

(1) 12 個の頂点から 2 個選べば直線が決まる．

$$ {}_{12}C_2 = \frac{12\times 11}{2\times 1} = \mathbf{66}\ (本)$$

(2) (直線の総数) - (辺の数 12) なので，

$$66 - 12 = \mathbf{54}\ (本)$$

(3) 12 個の頂点から 3 個選ぶ．正十二角形などの「円に内接する形」では，どの 3 点も一直線上にはないので，単純に ${}_{12}C_3$ でよい．

$$ {}_{12}C_3 = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} = 2\times 11\times 10 = \mathbf{220}\ (個)$$

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

(1) すべての点がバラバラなら ${}_{10}C_2 = 45$ 本．しかし，一直線上にある 4 点からは，どの 2 点を選んでも「同じ 1 本の直線」にしかならない．よって，重複分を引いて，最後にその 1 本を足す．

$$ {}_{10}C_2 - {}_4C_2 + 1 = 45 - 6 + 1 = \mathbf{40}\ (本)$$

(2) すべての点がバラバラなら ${}_{10}C_3$ 個．一直線上にある 4 点から 3 点選んでも三角形はできない（つぶれてしまう）．よって，その分を引く．

$$ {}_{10}C_3 - {}_4C_3 $$
$$ = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} - 4 = 120 - 4 = \mathbf{116}\ (個)$$

4

縦線 5 本から 2 本，横線 4 本から 2 本選べばよい．

$$ {}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10\times 6 = \mathbf{60}\ (個)$$