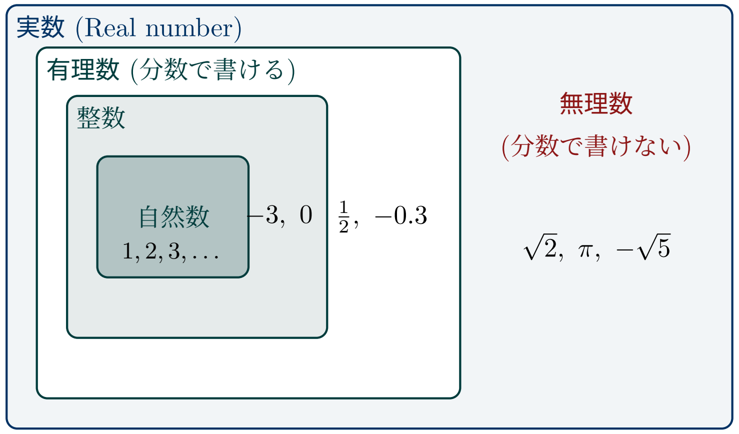
Introduction：数の世界地図

私たちが普段扱っている数は，実は何種類かに分類できます。特に重要なのが，分数で表せるか・表せないかの違いです。



有理数と循環小数

(1) **有理数**：整数 m と 0 でない整数 n を用いて $\dfrac{m}{n}$ と表せる数。
(2) **有限小数**：$0.5,\ 0.125$ のように終わりがある小数。
(3) **循環小数**：$0.333\ldots$ のように同じ並びが繰り返される無限小数。

- 表記法：$0.333\cdots = 0.\dot{3}, \quad 1.232323\cdots = 1.\dot{2}\dot{3}$
- **重要：循環小数は必ず分数に直せる（つまり有理数）。**

例題 1：循環小数を分数に

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}\dot{2} = 0.121212\ldots$
(2) $1.2\dot{3} = 1.2333\ldots$

解法: $x = 0.1212\ldots$ とおき，$100x$ (桁をずらしたもの) を用意して引き算します。「無限に続くしっぽ」を消すのが目的です。

Memo / Answer

平方根の定義と絶対値

中学では「ルート 2 乗したら外れる」と習ったかもしれませんが，高校ではもっと厳密に扱います。

$\sqrt{a}$ とは，2 乗すると a になる**正の数**

したがって，中身がマイナスの 2 乗であっても，結果はプラスでなければなりません。

★めちゃ大事

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -A & (A < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad (\neq -3)$ 「中身が負なら，マイナスをつけてプラスにして出す」という操作が必要です。

例題 2：ルートを外す

次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{16}$
(2) $\sqrt{(-5)^2}$
(3) $\sqrt{(x-2)^2}$ 　（ただし $x < 2$ とする）

考え方: (3) $x < 2$ なので，中身の $x - 2$ は「負」です。そのまま $x - 2$ と外すと負の数になってしまい，$\sqrt{} \geqq 0$ のルールに反します。どうすればよいでしょうか？

Memo / Answer

文字式を含む平方根の簡約化

文字式の場合，A が正か負か分からないことがあります。その場合は**「場合分け」**をして答えます。これは後の「絶対値」や「2 次関数」でも使う超重要スキルです。

例題 3：場合分けが必要なルート外し

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-3)^2}$ を簡単にせよ。

考え方: 式は $|a-1| + |a-3|$ と同じ意味です。数直線を描いて考えましょう。

- $a - 1$ の符号が変わる境界線 $\to a = 1$
- $a - 3$ の符号が変わる境界線 $\to a = 3$

この 2 つの境界線で，世界が 3 つに分かれます。

(1) $a < 1$ のとき（両方マイナス）
(2) $1 \leqq a < 3$ のとき（片方プラス，片方マイナス）
(3) $3 \leqq a$ のとき（両方プラス）

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 循環小数

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{5}$
(2) $0.\dot{2}\dot{7}$

練習 A2: 平方根の計算

次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{36}$
(2) $\sqrt{(-7)^2}$
(3) $\sqrt{a^2}$　(a は実数)

練習 A3: 条件付きルート外し

$x < -3$ のとき，次の式を簡単にせよ。

$$\sqrt{(x+3)^2}$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 少し複雑な循環小数

次の循環小数を分数で表せ。

$$2.1\dot{3}\dot{6}$$

練習 B2: 式の簡約化（場合分け）

次の式を簡単にせよ。

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}$$

練習 B3: 応用問題

$\sqrt{n^2-12n+36}=2$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $x = 0.555\ldots$ とおく。

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 5.555\ldots \\ -)\ x & = & 0.555\ldots \\ \hline 9x & = & 5 \end{array}$$

よって，$x = \mathbf{\frac{5}{9}}$

(2) $x = 0.2727\ldots$ とおく。

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 27.2727\ldots \\ -)\quad x & = & 0.2727\ldots \\ \hline 99x & = & 27 \end{array}$$

$x = \frac{27}{99} = \mathbf{\frac{3}{11}}$

A2

(1) $\mathbf{6}$

(2) $\sqrt{49} = \mathbf{7}$　（-7 ではない！）

(3) $|\boldsymbol{a}|$　（a の符号が不明なため絶対値をつける）

A3 $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$ ここで，$x < -3$ より $x + 3 < 0$（中身が負）。絶対値を外すときマイナスを掛けてプラスにする必要がある。

$$-(x+3) = \boldsymbol{-x-3}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $x = 2.13636\ldots$ とおく。循環部分は 36 なので，小数点をその直前と直後に持っていく。

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 2136.3636\ldots \\ -)\quad 10x & = & 21.3636\ldots \\ \hline 990x & = & 2115 \end{array}$$

$x = \frac{2115}{990} = \frac{423}{198} = \frac{141}{66} = \mathbf{\frac{47}{22}}$（計算ミスに注意。5 や 9 で約分できる）

B2 与式 $= |x| + |x-2|$

(1) $x < 0$ のとき：両方中身が負。$(-x) + \{-(x-2)\} = \boldsymbol{-2x+2}$

(2) $0 \leqq x < 2$ のとき：x は正，$x-2$ は負。$(x) + \{-(x-2)\} = \mathbf{2}$

(3) $2 \leqq x$ のとき：両方中身が正。$(x) + (x-2) = \boldsymbol{2x-2}$

B3 左辺 $= \sqrt{(n-6)^2} = |n-6|$ 方程式は $|n-6| = 2$ となる。これは「n と 6 の距離が 2」という意味。または，$n - 6 = \pm 2$。

- $n - 6 = 2 \implies n = 8$
- $n - 6 = -2 \implies n = 4$

両方とも自然数なので，答えは $\boldsymbol{n = 4, 8}$