

1. 直線の復習と準備

復習：通る点と傾きがわかれば、直線は決まる

数学IIの「図形と方程式」で学んだように、点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は、

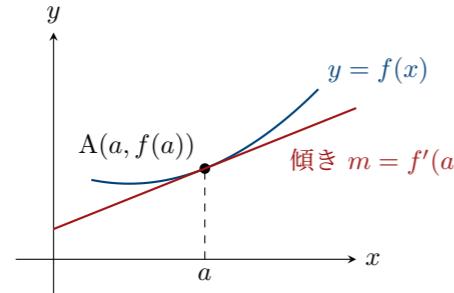
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

で表される。

接線の場合

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線について考える。

- 通る点：点 $A(a, f(a))$ である。
- 傾き：微分係数 $f'(a)$ が接線の傾きを表す。



2. 接線の方程式

公式：接線の方程式

上の復習で確認した直線の式に、

- 通る点 $(x_1, y_1) \rightarrow (a, f(a))$
- 傾き $m \rightarrow f'(a)$

を代入すると、次の公式が得られる。

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

つまり、接線を求めるには「接点の座標」と「微分して傾き」の2つを求めればよい。

例題 1：基本的な接線

曲線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

Memo / Answer

例題 2：接点の y 座標から求める

曲線 $y = x^2 - 3x$ 上の、 x 座標が 2 である点における接線の方程式を求めよ。

Memo / Answer

3. 接線と曲線の共有点(ちょっと先取り)

定理：接点と重解の関係

3次関数のグラフと接線の交点を求める際、「接している」という情報を利用すると、高次方程式の因数分解が劇的に楽になる。

$$x = a \text{ で接する} \iff (x - a)^2 \text{ を因数に持つ}$$

つまり、連立して作った方程式は、必ず $(x - \text{接点の } x \text{ 座標})^2$ で割り切れる。

例題 3：接線と曲線の交点

曲線 $C : y = x^3 - 2x$ 上の点 $A(1, -1)$ における接線を ℓ とする。 (1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。 (2) 曲線 C と接線 ℓ の共有点のうち、A 以外の座標を求めよ。

(1) $y' = 3x^2 - 2$ より、傾きは $3(1)^2 - 2 = 1$ 。よって接線 ℓ は

$$y - (-1) = 1(x - 1) \iff y = x - 2$$

(2) 曲線と接線の交点の x 座標は

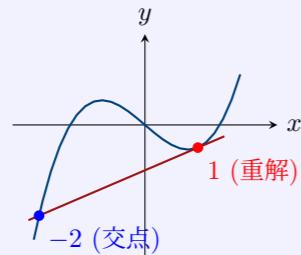
$$\begin{aligned} x^3 - 2x &= x - 2 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$x = 1$ で接しているため、この式は必ず $(x - 1)^2$ で割り切れる。組み立て除法等を利用すると、

$$(x - 1)^2(x + 2) = 0$$

よって、 $x = 1, -2$ 。A 以外の交点は $x = -2$ 。 y 座標は接線の式より $y = -2 - 2 = -4$ 。

答え：点 $(-2, -4)$



練習

曲線 $C : y = x^3 - 4x$ 上の点 $A(2, 0)$ における接線を ℓ とする。

- (1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C と接線 ℓ の共有点のうち、A 以外の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト

今回のポイント

- 接線の公式：

接点 $(a, f(a))$ と傾き $f'(a)$ が分かれば勝てる。

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- 曲線外の点から引く場合：

接点の x 座標を文字 (t など) において方程式を作る。

- 接線との共有点（重要）：

$x = a$ で接する \Leftrightarrow 連立した式は $(x - a)^2$ を因数を持つ。

これを利用すると、因数分解が一瞬で終わる。

Memo / Answer

練習 A：基本練習

曲線 $y = x^2$ について、次の点における接線の方程式を求めよ。

- 点 $(2, 4)$
- $x = -1$ である点

練習 B：様々な関数の接線

次の曲線の、与えられた点における接線の方程式を求めよ。

- $y = -x^2 + 4x$ (点 $(1, 3)$)
- $y = x^2 + 2x + 3$ ($x = 0$ である点)

練習 C：接線と曲線の交点（因数定理）

曲線 $C : y = x^3 - 4x$ 上の点 $A(2, 0)$ における接線を ℓ とする。

- 接線 ℓ の方程式を求めよ。
- 曲線 C と接線 ℓ の共有点の方程式 ($x^3 - 4x = \text{接線}$) を作り、因数分解せよ。ヒント： $(x - 2)^2$ で必ず割り切れる。
- 共有点のうち、A 以外の座標を求めよ。