年　組　番　氏名

1. 区切りを入れると見えてくる

次の数列の規則性がわかるだろうか？

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ \ldots$$

不規則に見えるが, **「1 が出るたびにリセットされている」**ことに着目して区切り線を入れてみよう.

$$1 \mid 1,\ 2 \mid 1,\ 2,\ 3 \mid 1,\ 2,\ 3,\ 4 \mid \ \ldots$$

- 第 1 群: 1 個 (1)
- 第 2 群: 2 個 $(1, 2)$
- 第 3 群: 3 個 $(1, 2, 3)$
- 第 k 群: k 個 $(1, 2, \ldots, k)$

このように, 数列をある規則に従ってグループ分けしたものを**群数列**という.

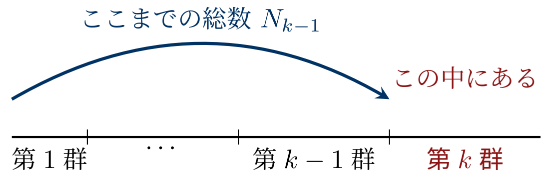
群数列の基本戦略

群数列の問題は, 次の 2 ステップで攻略する.

(1) **住所の特定**: 通し番号 n 番目の項が, **「第 k 群の m 番目」**にあるかを突き止める.
(2) **値の計算**: その住所にある数が何かを考える.

2. 第 k 群への扉

第 100 項が「第何群」にあるかを知るには, **「第 $(k-1)$ 群までに合計何個の項があるか」**を計算する.



第 k 群の項数を $f(k)$ とすると, 第 $(k-1)$ 群までの総項数 N_{k-1} は

$$N_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} f(i)$$

この N_{k-1} が n (知りたい番号) を超えないギリギリの k を探せばよい.

$$N_{k-1} < n \leqq N_k$$

例題 1 (住所の特定)

数列 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ において, 第 50 項を求めよ.

Memo / Answer

3. 分母は住所

分数の数列では，「分母」に注目して区切るとよいことが多い．

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

区切り: $\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \mid \ldots$

- 第 k 群のルール: 分母が k. 分子は $1 \sim k$.
- 第 k 群の個数: k 個.

例題 2 (分数の群数列)

上の数列において，$\frac{3}{10}$ は第何項か．

Memo / Answer

4. 群ごとの和 (Total Sum)

「初項から第 n 項までの和」を求めるときは，2 段階で計算する．

(1) 完全に含まれる群（第 $1 \sim k-1$ 群）の和を求める．
(2) 半端な群（第 k 群の途中まで）を足す．

例題 3 (和の計算)

例題 1 の数列 $(1|1, 2|1, 2, 3|\ldots)$ で，初項から第 50 項までの和を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (整数)

奇数の列を次のように区切る.

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ \ldots$$

(1) 第 n 群の最初の項を求めよ. (2) 第 10 群の 3 番目の項を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (分数)

次の数列の第 50 項を求めよ.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

(ヒント: 区切り方は $\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \mid \ldots$ 分母 + 分子=一定 のルールがある)

Memo / Answer

練習 B2 (和)

A1 の数列 $(1|3,5|\ldots)$ について, 初項から第 30 項までの和を求めよ. (ヒント: まず第 30 項がどこにあるか探す)

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

第 k 群の項数は k 個である．第 $(k-1)$ 群までの総項数は $1+2+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1)$．これがおよそ 50 になる k を探すと，$k=10$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=45$．$k=11$ だと 55 なので，第 50 項は**第 10 群**にある．
第 10 群の $50-45=5$ 番目．第 10 群は $1,2,\dots,10$ と並ぶので，5 番目の数は **5**.

例題 2 解答

この群数列は「分母が n」のものが「第 n 群」にある．$\frac{3}{10}$ は分母が 10 なので**第 10 群**．分子が 3 なので **3 番目**である．
第 9 群までの総項数は $1+2+\cdots+9=45$．よって，$45+3=$ **48 番目（第 48 項）**．

例題 3 解答

第 50 項は「第 10 群の 5 番目」である（例題 1 より）．
1. 完全に含まれる群（第 1 ～ 9 群）の和第 k 群の和は $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{1}{2}k(k+1)$．これの $k=1\sim 9$ の総和をとる．

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{2}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\frac{9(10)(19)}{6}+\frac{9(10)}{2}\right)=\frac{1}{2}(285+45)=165$$

2. 第 10 群の途中（1 ～ 5 番目）の和 $1+2+3+4+5=15$.
合計: $165+15=$ **180**.

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

第 k 群には k 個の項がある．
(1) 第 n 群の最初の項は，全体の通し番号でいうと「第 $(n-1)$ 群までの総数 $+1$」番目である．第 $(n-1)$ 群までの個数は $\frac{1}{2}(n-1)n$．よって，通し番号は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目．奇数の列の一般項は $2m-1$ なので，

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n(n-1)+2-1=\boldsymbol{n^2-n+1}$$

(2) 第 10 群の 3 番目．第 10 群の最初は $10^2-10+1=91$．ここから奇数が並ぶので，$91, 93, 95$．
答え: 95.

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

区切り: $\frac{1}{1}\mid\frac{1}{2},\frac{2}{1}\mid\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\mid\dots$ 第 k 群は「分母 + 分子 $=k+1$」を満たすものが並ぶ．個数は k 個．
第 50 項の住所を探す．第 $(k-1)$ 群までの個数 $\frac{1}{2}k(k-1)$ が 50 に近いものを探す．$k=10$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10=45$．よって第 50 項は**第 10 群の 5 番目** $(50-45=5)$.
第 10 群は 分母 + 分子 $=11$．分子は $1,2,3,\dots$ と増えるので，5 番目の分子は 5．分母は $11-5=6$．**答え:** $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$.

練習 B2 解答

(1) 30 項目の住所: $\frac{1}{2}(k-1)k$ が 30 に近いのは，$k=8$ $(\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8=28)$．よって 30 項は**第 8 群の 2 番目**.
(2) 第 1 群 ～ 第 7 群の和: 第 k 群は「項数 k の等差数列」．初項は k^2-k+1 (A1 より)．第 k 群の和 S_k は，項数 k，初項 k^2-k+1，末項 $(k+1)^2-(k+1)+1-2$ などを計算してもよいが，実は第 k 群は「k^3」になるという性質がある (奇数の和の性質)．確認: 1 群 (1)=1^3，2 群 (3+5=8)=2^3，3 群 (7+9+11=27)=3^3.
よって $\sum_{k=1}^{7}k^3=(\frac{7\cdot 8}{2})^2=28^2=784$.
(3) 第 8 群の 2 番目まで: 第 8 群の初項は $8^2-8+1=57$．2 番目は 59．$57+59=116$.
合計: $784+116=$ **900**.
(別解: 実は初項から奇数を 30 個足すだけなので，単に $30^2=900$ でもよい)