

1. 高次方程式の解き方

基本戦略：因数分解して次数を下げる

3 次以上の方程式を高次方程式という。解の公式が存在しない (あるいは複雑すぎる) ため、基本的には因数定理を用いて因数分解し、1 次式や 2 次式の積の形にもちこんで解く。

- 手順
- (1) $P(x) = 0$ となる x の値 (k) を見つける.

(2) $P(x)$ を $x - k$ で割り算し, $(x - k)(2 \text{ 次式}) = 0$ にする.

(3) 2 次方程式を解く (因数分解 or 解の公式).

割り算は「筆算」で十分！

教科書等では「組立除法」という計算テクニックが紹介されることがあるが、これは必須ではない。通常の筆算による割り算の方が、「今何をしているか」が明確であり、ミスをした際の確認もしやすい。堂々と筆算を使おう。

例題 1 (3 次方程式)

3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = 0$ を解け。

Memo / Answer

1. $P(1) = 1 - 4 + 8 - 5 = 0$ なので, $x - 1$ を因数にもつ.

2. 筆算で割り算を行う (右図).
商は $x^2 - 3x + 5$.

3. $(x - 1)(x^2 - 3x + 5) = 0$
 $x = 1$, または $x^2 - 3x + 5 = 0$
解の公式より
 $x = 1, \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

$x^2 - 3x + 5$

$x - 1$

)

$x^3 - 4x^2 + 8x - 5$

$x^3 - x^2$

$- 3x^2 + 8x$

$- 3x^2 + 3x$

$5x - 5$

$5x - 5$

0

練習 1

次の 3 次方程式を解け。

- (1) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
- (2) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

Memo / Answer

2. 置き換えを利用する形

複二次式 $ax^4 + bx^2 + c = 0$

x^4 と x^2 だけが登場する式は, $X = x^2$ と置き換えることで2次方程式に帰着できる. ただし, X が求まった後, $x = \pm\sqrt{X}$ で x に戻すことを忘れないこと.

例題 2 (複二次方程式)

次の方程式を解け.

- (1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
- (2) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Memo / Answer

Note: 重解の扱い

$(x - 1)^2(x + 2) = 0$ のように因数分解された場合, 解は $x = 1$ (2重解), $x = -2$ となる. 3次方程式だからといって必ずしも異なる3つの解をもつとは限らない.

確認テスト

練習 A1 (因数定理と筆算)

次の方程式を解け.

- (1) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
- (2) $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$

練習 A2 (複二次式)

次の方程式を解け.

- (1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- (2) $x^4 - 16 = 0$

Memo / Answer

練習 B1 (虚数解をもつ高次方程式)

$x^3 - 1 = 0$ を解け. また, その虚数解の一つを ω (オメガ) とするとき, $\omega^2 + \omega + 1$ の値を求めよ.

Hint

因数分解公式 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ を利用する.

練習 B2 (係数決定)

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$ が $x = 1$ と $x = 2$ を解にもつとき, 定数 a, b の値と, 残りの解を求めよ.

Memo / Answer