Introduction：人類の至宝，$\sqrt{2}$ の証明

「$\sqrt{2}$ が分数で表せない数（無理数）であること」これは古代ギリシャのピタゴラス学派にとって，世界の秩序を揺るがす大発見でした。「分数で表せるはずだ」と仮定して計算を進めると，奇妙な矛盾に突き当たる。この歴史的証明は，背理法の美しさを最もよく表しています。今日はこの証明を，何も見ずに書けるようになることが目標です。

有理数と既約分数

証明の前に，言葉の定義を確認します。

- **有理数**：整数 m と自然数 n を用いて，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表せる数。
- **無理数**：有理数ではない実数（分数で表せない）。
- **既約分数**：これ以上約分できない分数。（分母と分子が**「互いに素」**である分数）

証明の作戦：

(1)「$\sqrt{2}$ は有理数（分数）」と仮定する。
(2) しかも，これ以上約分できない**「既約分数」**であるとする。
(3) 計算を進めると，**「まだ約分できるじゃないか！」**という矛盾を導く。

例題 1：準備（偶数の性質）

次の命題が真であることを確認せよ。（対偶を利用する）「自然数 n について，n^2 が偶数ならば，n は偶数である」

証明: 対偶「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」を証明する。n が奇数のとき，k を整数として $n = 2k+1$ と表せる。

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ は整数なので，n^2 は奇数である。対偶が真なので，元の命題も真である。（証明終）
※この事実は，次の証明の中で「当たり前」として使います！

Memo / Answer

例題 2：$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

背理法を用いて，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

証明の流れ:

(1) $\sqrt{2}$ を有理数 $\frac{m}{n}$ と置く。(m, n は互いに素)
(2) 式変形して，m が偶数であることを示す。
(3) $m = 2k$ と置いて，n も偶数であることを示す。
(4) 両方偶数（約分できる）になり，矛盾！

Proof：完全記述

証明 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。このとき，互いに素な自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

と表すことができる。分母を払って両辺を 2 乗すると，

$$n\sqrt{2} = m \implies 2n^2 = m^2 \quad \cdots (1)$$

左辺 $2n^2$ は偶数なので，右辺 m^2 も偶数である。よって，**m は偶数である。**
m は偶数なので，ある自然数 k を用いて $m = 2k$ と表せる。これを (1) に代入すると，

$$2n^2 = (2k)^2$$
$$2n^2 = 4k^2$$
$$n^2 = 2k^2$$

右辺 $2k^2$ は偶数なので，左辺 n^2 も偶数である。よって，**n も偶数である。**
以上より，m も n も偶数となった。これは，m と n が**「互いに素」**であること（既約分数であること）に矛盾する。（両方偶数なら 2 で約分できてしまうから）
したがって，仮定は誤りであり，$\sqrt{2}$ は無理数である。（証明終）

年　組　番　氏名

Topic：$\sqrt{3}$ の場合はどうなる？

$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明する場合も，流れは全く同じです。「偶数（2 の倍数）」の代わりに**「3 の倍数」**を使います。

ポイント：

- 準備：「n^2 が 3 の倍数 $\implies$ n は 3 の倍数」を使う。
- 仮定：$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ $(m, n$ は互いに素$)$
- 結論：m も n も 3 の倍数となり，矛盾。

例題 3：$\sqrt{3}$ の無理数証明

$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，自然数 n について「n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である」ことは用いてよい。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 証明の穴埋め

次の証明の空欄を埋めて，証明を完成させよ。(練習のために解答を自分で書こう!!)

【命題】 $\sqrt{2}$ は無理数である。

（証明）$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。1 以外に公約数をもたない（互いに素な）自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

と表せる。変形して 2 乗すると，

$$2n^2 = m^2 \quad \cdots(1)$$

m^2 は偶数だから，m も □ である。そこで，整数 k を用いて $m = \square$ と置く。これを (1) に代入して整理すると，

$$n^2 = \square$$

よって，n^2 は偶数だから，n も □ である。ゆえに，m と n はともに偶数となり，公約数 □ をもつ。これは m, n が互いに素であることに矛盾する。したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: $\sqrt{5}$ の証明

$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，整数 n について「n^2 が 5 の倍数ならば，n も 5 の倍数である」ことは用いてよい。

練習 B2: ちょっと応用

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が無理数であることを背理法で証明せよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 順に,

- **偶数**
- $\boldsymbol{2k}$
- $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies n^2 = \boldsymbol{2k^2}$
- **偶数**
- **2**

この証明の流れを何も見ずに書けるように練習しておきましょう。

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定する。互いに素な自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n}$$

と表せる。両辺を 2 乗して分母を払うと,

$$5n^2 = m^2 \quad \cdots (1)$$

m^2 は 5 の倍数なので，m も 5 の倍数である。ある自然数 k を用いて $m = 5k$ と置ける。(1) に代入すると,

$$\begin{aligned} 5n^2 &= (5k)^2 \\ 5n^2 &= 25k^2 \\ n^2 &= 5k^2 \end{aligned}$$

n^2 は 5 の倍数なので，n も 5 の倍数である。以上より，m, n はともに 5 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する。したがって，$\sqrt{5}$ は無理数である。（証明終）

B2 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が有理数であると仮定する。その有理数を r （$r \neq 0$）と置くと,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = r$$

両辺の逆数をとると,

$$\sqrt{2} = \frac{1}{r}$$

ここで，r は 0 でない有理数なので，その逆数 $\frac{1}{r}$ も有理数である。しかし，左辺 $\sqrt{2}$ は無理数であるから,「無理数 ＝ 有理数」となり矛盾する。したがって，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数である。（証明終）