

1. 座標データから内積を計算する

前回, 内積は「長さ」と「角度」で定義した $(\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)$. しかし, 成分 (座標) がわかっているならば, わざわざ角度を測らなくても内積を一発で計算できる.

成分による内積の公式

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

つまり, 「 x 同士, y 同士を掛けて足す」だけでよい.

なぜこの式になる? (余弦定理との関係)

$\triangle OAB$ に余弦定理を適用する.

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ より式変形すると:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

ここで成分を代入する.

- $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$
- $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$
- $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

代入して計算 (項が綺麗に消える!):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \{ (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} - (\cancel{b_1^2} - 2a_1 b_1 + \cancel{a_1^2}) - (\cancel{b_2^2} - 2a_2 b_2 + \cancel{a_2^2}) \} \\ &= \frac{1}{2} (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

例題 1 (成分計算となす角)

$\vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$ のとき,

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.
- (2) \vec{a}, \vec{b} のなす角 θ を求めよ.

2. 垂直条件 (Perpendicular Condition)

内積の定義より、ベクトルが垂直ならば $\cos 90^\circ = 0$ なので内積は 0 になる。これを成分で表すと強力な武器になる。

垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

「垂直」というワードを見たら、条件反射で「内積 = 0」の式を作る。

応用（垂直なベクトルの作り方）：
 (a, b) に垂直なベクトルのひとつは $(b, -a)$ である。

$$a \times b + b \times (-a) = ab - ab = 0$$

例題 2 (垂直なベクトル)

$\vec{a} = (3, 1)$ に垂直で、大きさが $\sqrt{10}$ であるベクトル \vec{x} をすべて求めよ。

方針: 未知数が 2 つ (x 成分, y 成分) なので式が 2 つ必要。

- 垂直条件: $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$
- 大きさ条件: $|\vec{x}| = \sqrt{10}$

これらを連立する。

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (成分計算)

次のベクトルの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

- (1) $\vec{a} = (2, -5), \vec{b} = (3, 2)$
- (2) $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (0, 1)$
- (3) $\vec{a} = (-1, -1), \vec{b} = (1, -1)$

Memo / Answer

練習 A2 (なす角)

$\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-3, 1)$ のなす角 θ を求めよ.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

を利用する.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (垂直条件)

$\vec{a} = (x - 1, 3), \vec{b} = (2, x)$ が垂直になるような実数 x の値を求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (垂直な単位ベクトル)

$\vec{a} = (4, 3)$ に垂直な単位ベクトル \vec{e} を求めよ.

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 (成分計算)

- (1) $2 \times 3 + (-5) \times 2 = 6 - 10 = -4$
 (2) $1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ (直交している)
 (3) $(-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = -1 + 1 = 0$

Memo / Answer

A2 解答:

まずは内積とそれぞれの大きさを計算する.

- 内積: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-3) + 1(1) = -6 + 1 = -5$
- 大きさ: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

よって,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\theta = 135^\circ$

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:

垂直条件より, 内積が 0 になればよい.

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot 2 + 3 \cdot x &= 0 \\ 2x - 2 + 3x &= 0 \\ 5x &= 2 \\ \therefore x &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Memo / Answer

B2 解答:

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y)$ とおく.

- 垂直条件: $4x + 3y = 0 \implies x = -\frac{3}{4}y \dots (1)$
- 単位ベクトル (大きさ 1): $x^2 + y^2 = 1 \dots (2)$

$$(1) \text{ を } (2) \text{ に代入: } \left(-\frac{3}{4}y\right)^2 + y^2 = 1 \implies \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{25}{16}y^2 = 1 \implies y^2 = \frac{16}{25} \implies y = \pm \frac{4}{5}.$$

$$y = \frac{4}{5} \text{ のとき } x = -\frac{3}{5}. \quad y = -\frac{4}{5} \text{ のとき } x = \frac{3}{5}.$$

$$\text{よって, } \vec{e} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

別解 (テクニク):

$(4, 3)$ に垂直なベクトルの 1 つは $(3, -4)$. この大きさは $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. これを大きさ 1 に縮めればよいので, $\pm \frac{1}{5}(3, -4)$.