P.98, 99

基本事項

- 求めた標本比率 $R$ から母比率 $p$ の真の値がどのような範囲にあるか推測することを______________________といい，

$$R - 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R + 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

で表される母比率 $p$ の範囲を，母比率 $p$ に対する__________________________という．

♣ 母比率の推定

**全体課題 (練習 33 改題)**

ある世論調査で，有権者から無作為に抽出した 900 人について，A 政党の支持者を調べたら 324 人いた．

(1) A 政党の支持者の母比率 $p$ に対して，信頼度 99% の信頼区間を求めよ．

(2) 信頼区間の幅を 4% 以下にになるように推定したい．信頼度 99% で推定するには，何人以上を抽出して調べればよいか．

解答

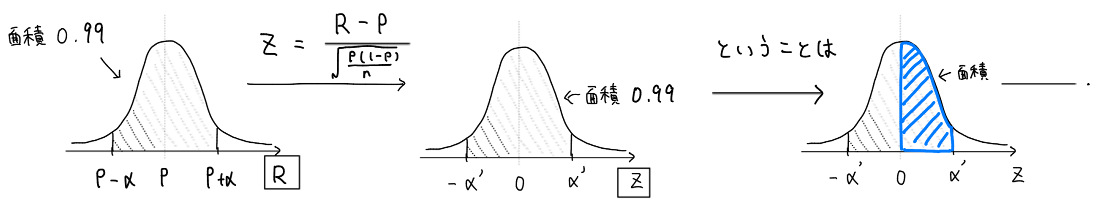
♠ エキスパート A「信頼度 99% 信頼区間の導出」

**目標 A**

母比率 $p$ に対する信頼度 99% の信頼区間を，誤差面積 $P(|R-p| \leqq \alpha) = 0.99$ を頼りに導出することができる．

**課題**

- $n$ が十分大きいとき中心極限定理より，標本比率 $R$ は，正規分布 $N(\qquad,\qquad)$ に従う．
- $Z = \dfrac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ とおくと，$Z \sim N(0,\ 1)$.




- 前回 (母平均の推定) の議論と同様に, 正規分布表を読み取ることで, 上の図の $\alpha'$ の値は, $\alpha' =$ ＿＿＿＿ と分かる．
- 前回と同様に $Z$ から $R$ に書き直すと，

$$
\begin{aligned}
|Z| \leqq 2.58 &\iff \left| \frac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right| \leqq 2.58 \\
&\iff |R-p| \leqq 2.58 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
&\iff R - 2.58 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq R + 2.58 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.
\end{aligned}
$$

- また，$n$ が十分大きいとき大数の法則より，標本比率 $R$ は母比率 $p$ に近いとみなしてよい．
- よって，$p$ に関する不等式の**上限と下限の** $p$ を $R$ と書き換えることができる ↓↓↓

$$
R - 2.58 \times \underbrace{\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}}_{p \longrightarrow R} \leqq p \leqq R + 2.58 \times \underbrace{\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}}_{p \longrightarrow R}.
$$

- これが，母比率 $p$ に対する信頼度 99% の信頼区間である．

♠ エキスパート B「信頼区間の幅」

**目標 B**

母比率 $p$ に対する信頼区間の幅を求め，標本数と幅の関係を信頼度の観点から説明することができる．

**説明**

- 標本比率を $R$ とすると，母比率 $p$ に対する信頼度 99% の信頼区間は

$$
R - 2.58 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R + 2.58 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}
$$

  であることが知られている (導出はエキスパート A がしてくれる).
- この区間は【 $R$ / $p$ 】を中心とした左右対称である．
- したがって区間の幅は,【 $2.58 \times \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ / $2 \times 2.58 \times \sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ 】.
- ところで，より正確な母比率 $p$ の値を推定するには，信頼区間の幅を【 広げればよい / 狭めればよい 】.
- 区間の幅の式より，標本数 $n$ を大きくすれば区間の幅は【 広くなる / 狭くなる 】ことが分かる．
- 例えば $R = 0.5$ のとき，$n = 100$ のときの区間の幅は＿＿＿＿＿＿，$n = 400$ のときの区間の幅は＿＿＿＿＿＿.
- 反対に，$R = 0.5$ のとき区間の幅が $4\% = 0.04$ 以下になるような標本数 $n$ の最小値を求めるには，【 $2.58 \times \sqrt{\dfrac{0.5(1-0.5)}{n}} \leqq 0.04$ / $2 \times 2.58 \times \sqrt{\dfrac{0.5(1-0.5)}{n}} \leqq 0.04$ 】を $n$ につけばよい．

**課題**

母平均や母比率の信頼区間の幅を，以下の表にまとめよ．

| | 95% 信頼区間 | 95% 信頼区間の幅 | 99% 信頼区間 | 99% 信頼区間の幅 |
|---|---|---|---|---|
| 母平均 ($m$) | | | | |
| 母比率 ($p$) | | | | |