

Introduction: 解の条件からグラフの条件へ

「2次方程式の解がすべて正である」これを解の公式や因数分解だけで処理するのは困難です。そこで、問題をグラフの話に翻訳します。

方程式 $f(x) = 0$ が「異なる2つの正の解」をもつ
 ↓
 グラフ $y = f(x)$ が「 $x > 0$ の範囲で x 軸と2回交わる」

これを満たすグラフを描くことで、必要な条件が見えてきます。

「正の解・負の解」の3点セット

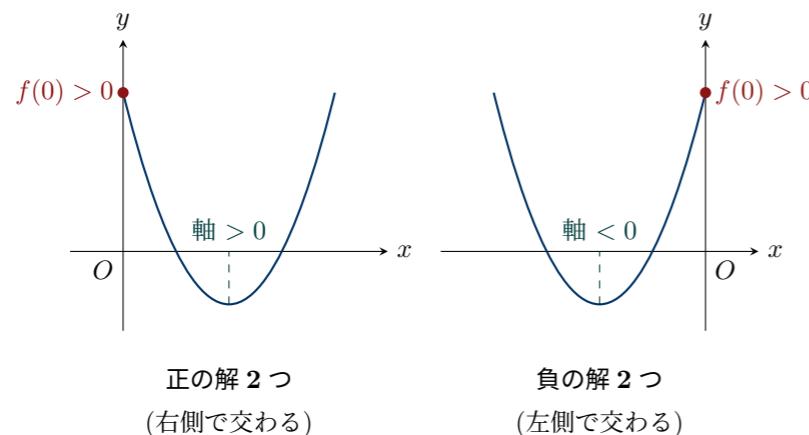
下に凸の2次関数 $f(x) = x^2 + \dots$ について、

(1) 異なる2つの正の解をもつ条件

- ① 判別式 $D > 0$ (x 軸と2点で交わる)
- ② 軸 > 0 (山が右側にある)
- ③ 端点 $f(0) > 0$ ($x = 0$ でプラス)

(2) 異なる2つの負の解をもつ条件

- ① 判別式 $D > 0$
- ② 軸 < 0 (山が左側にある)
- ③ 端点 $f(0) > 0$



例題1: 異なる2つの正の解

2次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ が異なる2つの正の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

方針: $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ とおく。以下の3つを連立させる。

- (1) 判別式 $\frac{D}{4} > 0$
- (2) 軸 $x = a > 0$
- (3) $f(0) = a + 2 > 0$

Memo / Answer

例題2:異なる2つの負の解

2次方程式 $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ が異なる2つの負の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

方針: グラフが「左側」で交わる条件を立てる。

- (1) 判別式 $D > 0$
- (2) 軸 < 0
- (3) $f(0) > 0$

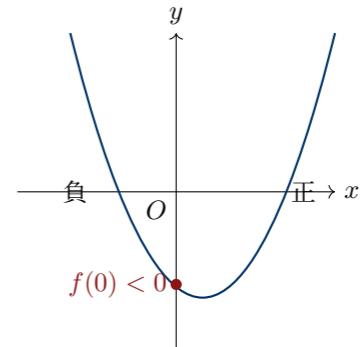
Memo / Answer

異符号の解(1つは正, 1つは負)

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) が、正の解と負の解を1つずつもつ(異符号の解をもつ)条件は、

$$f(0) < 0$$

これ1つだけでOK!



理由: 下に凸の放物線で、 y 切片が負(地下にある)ならば、必ず x 軸のプラス側とマイナス側を突き抜けて地上に出てくるからです。(判別式 D や軸の条件は自動的に満たされるため不要)

例題3:異符号の解

2次方程式 $x^2 - ax + a - 3 = 0$ が異符号の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

次の問い合わせよ。

練習 A1: 正の解

2次方程式 $x^2 - 2(a-1)x - a + 3 = 0$ が異なる2つの正の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

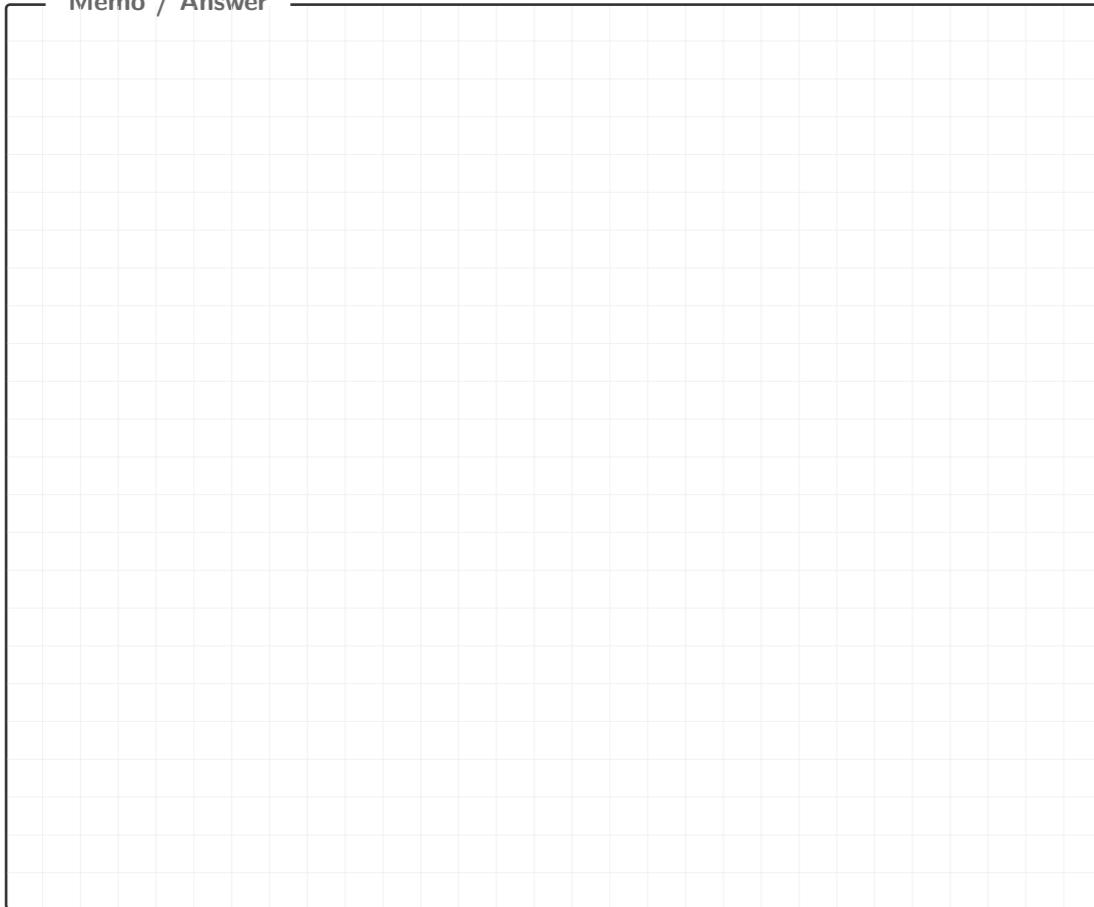
練習 A2: 負の解

2次方程式 $x^2 + 4x + k = 0$ が異なる2つの負の解をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

練習 A3: 異符号の解

2次方程式 $x^2 - 5x + 2m - 4 = 0$ が異符号の解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

**B 問題：標準・応用****練習 B1: 総合問題**

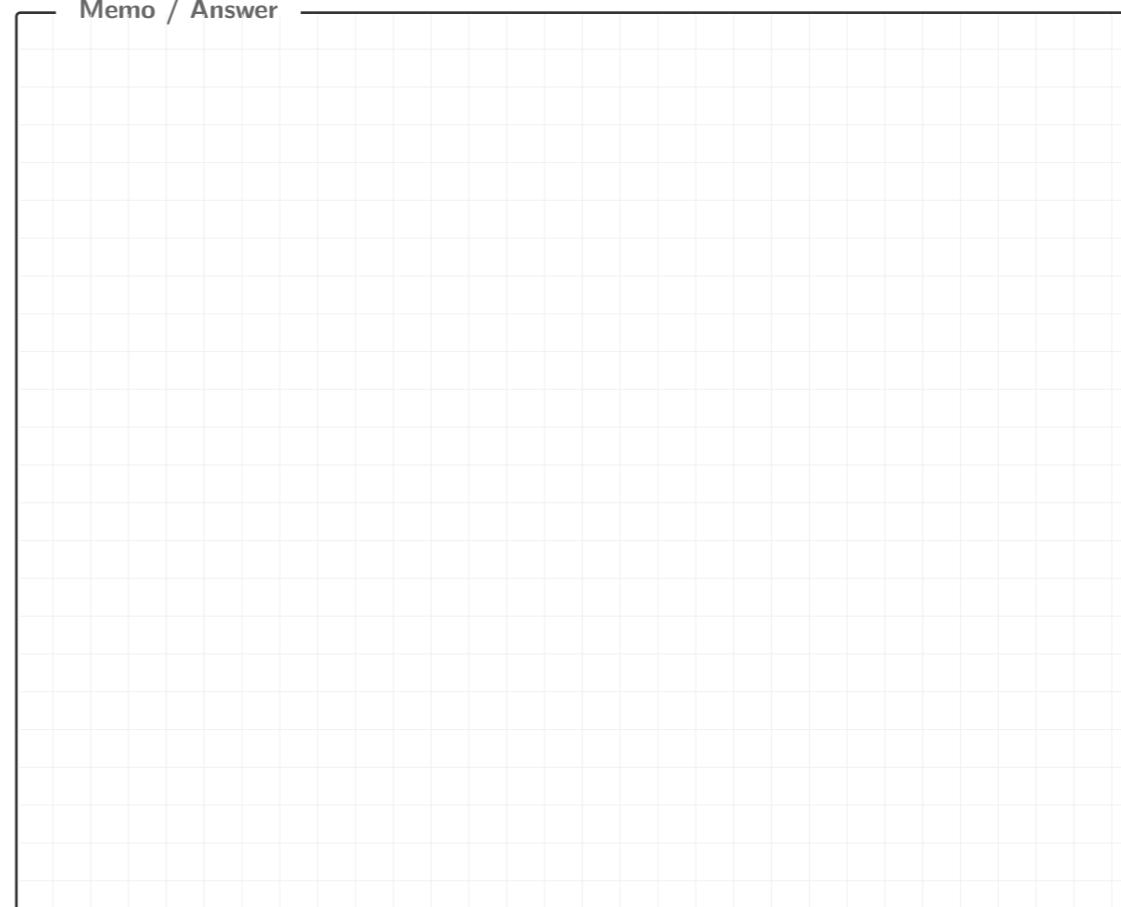
2次方程式 $x^2 - 2ax + 3a - 2 = 0$ が次のような解をもつとき、定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

- (1) 異なる2つの正の解をもつ。
- (2) 異符号の解をもつ。

練習 B2: 条件の緩和

2次方程式 $x^2 - ax + a + 3 = 0$ が「正の解のみ」をもつ条件を求めよ。（重解の場合も含むことに注意）

Memo / Answer



A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x - a + 3$ とおく。

(1) 判別式 $\frac{D}{4} > 0$

$$(a-1)^2 - (-a+3) > 0 \implies a^2 - 2a + 1 + a - 3 > 0$$

$$a^2 - a - 2 > 0 \implies (a-2)(a+1) > 0$$

$$\therefore a < -1, \quad 2 < a \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸 $x = a-1 > 0$

$$\therefore a > 1 \dots \textcircled{2}$$

(3) 端点 $f(0) > 0$

$$-a + 3 > 0 \implies a < 3 \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて, $2 < a < 3$

A2 $f(x) = x^2 + 4x + k$ とおく。

(1) 判別式 $\frac{D}{4} > 0$

$$2^2 - k > 0 \implies 4 - k > 0 \implies k < 4 \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸 $x = -2 < 0$

これは常に成り立つ。(条件なし)

(3) 端点 $f(0) > 0$

$$k > 0 \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $0 < k < 4$

A3 異符号の解をもつ条件は $f(0) < 0$ のみ。

$$2m - 4 < 0$$

$$2m < 4 \quad \therefore m < 2$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $f(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$ とおく。

(1) 異なる 2 つの正の解

(1) $\frac{D}{4} > 0 \implies (-a)^2 - (3a-2) > 0$

$$a^2 - 3a + 2 > 0 \implies (a-1)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < 1, \quad 2 < a \dots \textcircled{1}$$

(2) 軸 $x = a > 0 \dots \textcircled{2}$

$$(3) f(0) > 0 \implies 3a - 2 > 0 \implies a > \frac{2}{3} \dots \textcircled{3}$$

共通範囲をとって, $\frac{2}{3} < a < 1, \quad 2 < a$

$$(2) 異符号の解 f(0) < 0 \implies 3a - 2 < 0 \therefore a < \frac{2}{3}$$

B2 「正の解のみ」とは、「異なる 2 つの正の解」または「正の重解」のことである。よって、条件は以下の通り。

(1) $D \geq 0$ (交わる または 接する)

(2) 軸 > 0

(3) $f(0) > 0$ (端点は正でなければならない)

計算：

- $D = (-a)^2 - 4(a+3) \geq 0 \implies a^2 - 4a - 12 \geq 0$

$$(a-6)(a+2) \geq 0 \implies a \leq -2, \quad 6 \leq a$$

- 軸 $\frac{a}{2} > 0 \implies a > 0$

- $f(0) = a+3 > 0 \implies a > -3$

共通範囲をとって, $a \geq 6$