P.100~P.104

♣ 仮説検定

全体課題 pre

S先生とH先生がじゃんけんを100回行ったところ, S先生が61回勝った. このとき,

「S先生はイカサマをしている (S先生とH先生の勝率には偏りがある)」

と判断して良いか.

解答

全体課題 post

S先生とH先生がじゃんけんを100回行ったところ, S先生が61回勝った. このとき,

「S先生はイカサマをしている (S先生とH先生の勝率には偏りがある)」 $\cdots$ [I]

と判断して良いか. **主張 [I] に反する仮説を立て, 有意水準5%, 両側検定で検定せよ.**

解答

♠ エキスパート A「あれれ〜，おかしいぞ〜??」

目標 A

「仮説検定」の手順に背理法の論理構造が使用されていることを理解し，仮説検定の大枠を理解し，説明できる．

復習 (背理法)

「$\sqrt{2}$ が無理数であること」の証明では,

(1) まず【 $\sqrt{2}$ は無理数である / $\sqrt{2}$ は無理数ではない 】ことを仮定する.

(2) その仮定から形式論理的に議論を進めると，あるところで ______ が生じる.

(3) これより，仮定が間違っていたと結論づけ，「$\sqrt{2}$ が無理数である」と結論づける.

→ 背理法が導くのは**「絶対的な矛盾」**.

仮説検定の論理

「S 先生がイカサマをしている (S 先生と H 先生の勝率には偏りがある)」かを検証するために,

(1) まず，【 勝率に偏りがある / 勝率に偏りはない 】という仮説を立てる.
ここでは S 先生の勝率を p と置いて,【 $p \neq \frac{1}{2}$ / $p = \frac{1}{2}$ 】という仮説を立てる.

(2) 次に，この仮説が正しいのであれば,「100 回中 61 回勝利」という事実は，**どのくらい珍しいのか (矛盾に近いのか)** を確率計算を用いて検証する (これはエキスパート B がやってくれる).

(3) 最後に, 次のように結論を出す．もし，計算結果が, , ,

- 起こるはずがないほど「珍しい」確率だった
⇒「起こるはずがない」のだから，(1) で立てた仮説は【 誤っている / 誤っているとは言えない 】と判断する.
(このような判断を，仮説を**棄却する**という．)
- 十分「起りうる」確率だった
⇒「まあそんなこともあるよね」という気分で，(1) で立てた仮説は【 誤っている / 誤っているとは言えない 】と判断する.
(このような判断を，仮説は**棄却されない**という．)

→ 仮説検定が導くのは，**「確率統計的な矛盾」**.

まとめ

仮説検定とは,

(1) まず，検証したい主張の「否定」の仮説をたて,

(2) 次に，その仮説の下で，起こった現象の珍しさを計算し,

(3) 最後に，計算した確率を元に，仮説を「棄却する」のか「棄却しない」のかを決定する,

の手順を踏んだ統計的な推論方法である.

♠ エキスパート B「統計的な偶然の基準」

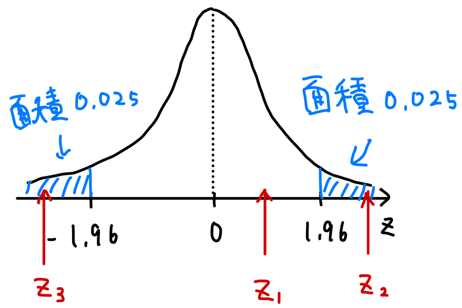
目標 B

「偶然の範疇 (起こりうる)」か「偶然ではない」かを決める基準としての有意水準の意味を理解し，統計的に結論づける方法を説明できる.

説明

「100 回中 61 回」が偶然かどうかを以下の手順で決定する.

- まず, S 先生はイカサマをしていない (二人の勝率には偏りがない) と仮定する.（この仮説の立て方はエキスパート A が説明してくれる.）
- 次に，**この仮説のもとで**，現実におきた「100 回中 61 回」がどれほど起こりやすい事象なのかを計算をする.（この計算はエキスパート C がやってくれる.）
ここでは仮にその値を z とおいておく.（この値 z を**検定統計量の実現値**という.（諦めないで最後まで読んで.））
- 最後に，計算した値 z が珍しいかどうかを判定する．z が起こる確率が 5% 以上なら**偶然の範疇 (起こりうる)**，5% 未満なら**偶然ではない**と結論づける ことにする．このような基準 5% のことを**有意水準**という.



- z_1 は【 偶然の範疇 (起こりうる) / 偶然ではない 】と判断する.
- z_2 は【 偶然の範疇 (起こりうる) / 偶然ではない 】と判断する.
- z_3 は【 偶然の範疇 (起こりうる) / 偶然ではない 】と判断する.

まとめ

有意水準とは,「偶然の範疇 (起こりうる)」か「偶然ではない」かを決める基準の確率のことであり,

- (起こった事象の確率)≧(有意水準)⇒【 偶然の範疇 (起こりうる) / 偶然ではない 】
- (起こった事象の確率)<(有意水準)⇒【 偶然の範疇 (起こりうる) / 偶然ではない 】

と判断する.

♠ エキスパート C「検定統計量の算出」

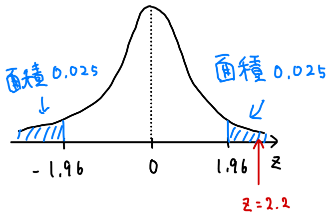
目標 C

実現した「100 回中 61 回」がどの程度起こりやすい事象なのかを，検定統計量を定める方法で求め，その計算過程を説明できる．

説明

仮に S 先生がイカサマをしていない (二人の勝率に偏りはない) という仮説をたてる.(この仮説の立て方はエキスパート A がやってくれる．)

- この仮説のもとでは S 先生が「勝つか負けるか」は 50:50 だから，S 先生がかつ回数 X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数になる．
- X の期待値 $100 \times \frac{1}{2} = 50$ と標準偏差 $\sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ を用いて，標準化された確率変数 Z を
$$Z = \frac{X-50}{5}$$
と定めると，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数になる．このような Z を**検定統計量**という．
- 実現した値 $X = 61$ を代入すると，
$$Z = \frac{61-50}{5} = 2.2$$
となる．このような値 $z = 2.2$ を検定統計量の**実現値**という．
- 下のグラフから，実現値 $z = 2.2$ の位置を読み取り，起こりやすい事象なのかを読み取る．



- グラフより，「100 回中 61 回 ($z = 2.2$)」は【 起こりやすい / 起こりやすいとは言えない 】と判断できそう (実際の判断方法はエキスパート B がやってくれる．)

まとめ

現した値について，二項分布から標準化と正規近似を経て，グラフのどこに位置するのかを求めれば良い．

今回：$X \sim B(100,\ 1/2) \xrightarrow{Z=(X-50)/5} Z \sim N(0,\ 1) \xrightarrow{X=61\text{ を代入}} z = 2.2 \rightarrow$ グラフ書く．