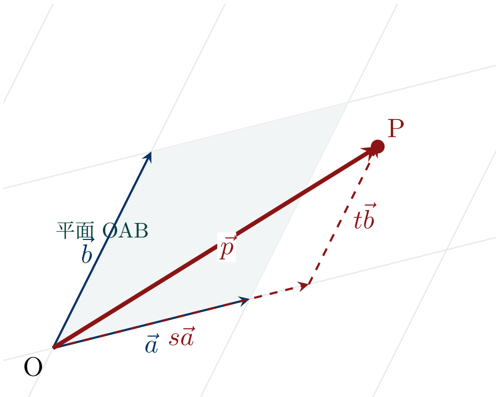
1. 点が平面上にある条件

空間において，一直線上にない 3 点 O, A, B は平面を 1 つ決定する。この平面上の任意の点 P は，$\vec{\mathrm{OA}}$ と $\vec{\mathrm{OB}}$ の 2 つのベクトルを使って「寄り道」することで到達できる。



共面条件 (Coplanar Condition) 1

点 O を始点とし，一直線上にない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があるとき，この 2 本が張る平面上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は，実数 s, t を用いて次のように表される。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

すなわち　$\vec{\mathrm{OP}} = s\vec{\mathrm{OA}} + t\vec{\mathrm{OB}}$

例題 1

3 点 $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 6)$ が定める平面 ABC 上に点 $\mathrm{P}(2, 1, z)$ があるとき，z の値を求めよ。

Memo / Answer

2. 4 点が同一平面上にある条件

始点が平面の外（原点 O など）にある場合を考える。$\vec{\mathrm{OP}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AP}}$ と分解し，$\vec{\mathrm{AP}}$ を平面 ABC 上のベクトルで表すと公式が得られる。

共面条件 2 （係数の和が 1）

点 P が，3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ の定める平面上にある条件は

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad \text{かつ} \quad s + t + u = 1$$

【重要】 直線の場合の「$s + t = 1$」が，平面では「$s + t + u = 1$」に拡張されたと捉える。

例題 2

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を $2:1$ に内分する点を E，辺 OC を $1:2$ に内分する点を F とする。3 点 D, E, F の定める平面上に点 P があり，$\vec{\mathrm{OP}} = k\vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{OB}} + \vec{\mathrm{OC}}$ と表されるとき，定数 k の値を求めよ。

Memo / Answer

3. 直線と平面の交点（導入）

空間図形の問題では，「ある直線上の点」かつ「ある平面上の点」という 2 つの条件を連立させて解く場面が多い。

例題 3

四面体 OABC において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を L，辺 OB の中点を M，辺 BC を $2:1$ に内分する点を N とする。直線 LN と平面 ABC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

Memo / Answer

参考：2 変数のイメージ

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ という式は，「平面を張る」ための設計図である。

- s,t が全実数 $\Longrightarrow$ 無限に広がる平面
- $s \geqq 0, t \geqq 0$ $\Longrightarrow$ ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ で挟まれた領域（角）
- $0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1$ $\Longrightarrow$ 平行四辺形の内部
- $s+t=1$ $\Longrightarrow$ 2 点 A, B を通る直線（次元が 1 つ下がる）

年　組　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ が定める平面 ABC 上に点 $P(-1,a,b)$ がある。また，点 P は直線 AB 上にあるとする。このとき，定数 a,b の値を求めよ。

練習 A2

四面体 OABC において，$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}+u\vec{OC}$ とする。次の条件を満たすとき，点 P はどのような位置にあるか。最も適切なものを語群から選べ。

(1) $s+t+u=1$
(2) $s+t+u=1, \quad s>0, t>0, u>0$
(3) $s+t=1, \quad u=0$

語群：
ア：平面 ABC 上　イ：△ABC の内部　ウ：直線 AB 上

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

4 点 $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(-1,0,2)$, $P(x,y,1)$ が同一平面上にあるとき，点 P が直線 AB 上にあるための条件を満たす x,y を求めよ。(※ 問題設定が少し特殊ですが，共面条件と共線条件を同時に満たす点の計算練習です)

練習 B2

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を F とする。3 点 D, E, F の定める平面と，直線 OG（G は △ABC の重心）との交点を P とするとき，$\vec{OP}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

Memo / Answer

確認テスト A（基本）【解答】

練習 A1

$A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$。$P(-1,a,b)$ は平面 ABC 上かつ直線 AB 上。

Memo / Answer

直線 AB 上にあるということは，平面 ABC 上にある条件も自動的に満たすため，まずは「直線 AB 上にある」条件を使う。
$\vec{AP} = k\vec{AB}$ となる実数 k が存在する。
$\vec{AB} = (-1,2,0)$
$\vec{AP} = (-1-1, a-0, b-0) = (-2,a,b)$
よって $(-2,a,b) = k(-1,2,0) = (-k,2k,0)$
成分比較して，$-2 = -k \implies k = 2$
$a = 2k = 4$
$b = 0$
答 $a = 4, b = 0$
(注：もし「直線 AB 上」という条件がなければ，$\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ を解くことになる)

練習 A2

(1) $s+t+u=1$　(2) 各係数が正　(3) $u=0$

Memo / Answer

(1) 係数の和が 1 $\implies$ 3 点 A, B, C で決まる平面上。
答 ア：平面 ABC 上
(2) 平面上かつ，係数がすべて正 $\implies$ 三角形の内分点の集まり。
答 イ：△ABC の内部
(3) $u=0$ より $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ かつ $s+t=1$。これは直線 AB の式。
答 ウ：直線 AB 上

確認テスト B（標準）【解答】

練習 B1

$A(2,0,0), B(0,1,0), C(-1,0,2), P(x,y,1)$。P は平面 ABC 上かつ直線 AB 上。

Memo / Answer

点 P が直線 AB 上にあるならば，$\vec{AP} = k\vec{AB}$ と表せる。また，このとき自動的に点 P は平面 ABC 上にある。$\vec{AB} = (-2,1,0)$ $\vec{AP} = (x-2,y,1)$ ここで，直線 AB 上にあるとすると z 成分が 0 になるはずだが，点 P の z 座標は 1 である。$0 \neq 1$ なので矛盾。すなわち，点 P が直線 AB 上にあることはあり得ない。
(※ 問題設定の意図：共線条件だけでは解けないことの確認，または計算練習) もし，「平面 ABC 上にある」ことだけを条件とするならば：$\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$ $\vec{CP} = (x+1,y,-1)$ $\vec{CA} = (3,0,-2), \vec{CB} = (1,1,-2)$ $(x+1,y,-1) = s(3,0,-2) + t(1,1,-2)$ z 成分：$-1 = -2s-2t \dots$ これを解く。答 直線 AB 上には存在しない（解なし）

練習 B2

交点 P の位置ベクトル $\vec{OP}$。$D(\frac{1}{2}\vec{a}), E(\frac{1}{3}\vec{b}), F(\frac{2}{5}\vec{c})$

Memo / Answer

点 P は直線 OG 上にあるので，$\vec{OP} = k\vec{OG}$ (k は実数) とおける。G は重心なので $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ よって $\vec{OP} = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}$ $\cdots$ ①
また，点 P は平面 DEF 上にあるので，$\vec{OP}$ を $\vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ で表したとき，係数の和は 1 になる。①を変形して基底をそろえる。$\vec{OP} = \frac{k}{3}(2\vec{OD}) + \frac{k}{3}(3\vec{OE}) + \frac{k}{3}(\frac{5}{2}\vec{OF})$ $\vec{OP} = \frac{2k}{3}\vec{OD} + k\vec{OE} + \frac{5k}{6}\vec{OF}$ 係数の和が 1 より $\frac{2k}{3} + k + \frac{5k}{6} = 1$ 両辺 6 倍して $4k+6k+5k=6 \implies 15k=6 \implies k=\frac{2}{5}$ ①に代入して答 $\vec{OP} = \frac{2}{15}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$