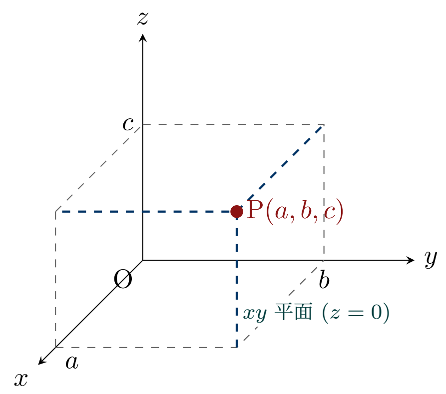
年　組　番　氏名

1. 空間座標の仕組み

これまで扱ってきた「xy 平面」に，高さ方向の「z 軸」を加えたものが座標空間である。基本的には平面の拡張に過ぎないが，見取り図を描く力（空間認識能力）が必要になる。



空間の点の座標と対称移動

点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ に対して，

- xy 平面への正射影（垂線の足）：$(a,b,0)$　（z 座標が 0 になる）
- 原点に関して対称な点：$(-a,-b,-c)$　（すべて符号反転）
- x 軸に関して対称な点：$(a,-b,-c)$　（x だけそのまま）
- xy 平面に関して対称な点：$(a,b,-c)$　（z だけ符号反転）

例題 1

点 $\mathrm{A}(2,-3,4)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) x 軸に関して対称な点 B
(2) zx 平面に関して対称な点 C
(3) 点 A から y 軸に下ろした垂線の足 H

Memo / Answer

2. 2 点間の距離

平面における三平方の定理の拡張である。直方体の対角線の長さを求める操作に等しい。

2 点間の距離

2 点 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ 間の距離は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特に，原点 O と点 $\mathrm{A}(x,y,z)$ の距離は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例題 2

次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $\mathrm{A}(2,3,1)$, $\mathrm{B}(4,1,2)$
(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,-2,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,4)$ から等距離にある y 軸上の点 P

Memo / Answer

3. 球面の方程式

「ある点 (中心) からの距離が一定 (半径) である点の集まり」という定義は円と同じである。したがって，式の形も円の方程式に z の項が増えるだけである。

球面の方程式

中心 (a, b, c), 半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

特に，原点中心，半径 r の球面は $x^2+y^2+z^2=r^2$ である。

例題 3

次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1, -2, 3)$ を中心とし，半径が 4 の球面
(2) 2 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(5, -2, 1)$ を直径の両端とする球面

Memo / Answer

一般形 $x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+k=0$ の形であれば，平方完成を行って中心と半径を求める。

例題 4

方程式 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ が表す球面の中心の座標と半径を求めよ。

Memo / Answer

発展：座標平面に接する球

- xy 平面に接する $\iff$ (中心の z 座標の絶対値) $=$ 半径
- xy, yz, zx 平面のすべてに接する $\iff$ 中心 (r, r, r) など (半径 r)

例題 5

点 $(1, 2, 3)$ を通り，3 つの座標平面のすべてに接する球面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

点 P$(3, -4, 5)$ に対して，次のような点の座標を求めよ。

(1) 原点に関して対称な点
(2) yz 平面に関して対称な点
(3) z 軸に関して対称な点

練習 A2

次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(-2, 1, 0)$ で，原点を通る球面
(2) 方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ が表す球面

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

2 点 A$(2, 0, 1)$, B$(1, 3, 5)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

練習 B2

点 $(2, 2, 4)$ を通り，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてに接する球面の方程式をすべて求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

点 $\mathrm{P}(3,-4,5)$ に対して，次のような点の座標を求めよ。

Memo / Answer

(1) 原点に関して対称：
すべての符号が変わる。
答 $(-3,4,-5)$
(2) yz 平面に関して対称：
yz 平面は「$x=0$ の壁」なので，x 座標の符号だけが変わる。
答 $(-3,-4,5)$
(3) z 軸に関して対称：
z 軸の周りに 180 度回転するイメージ。z 座標はそのままで，他が変わる。
答 $(-3,4,5)$

練習 A2

(1) 中心 $(-2,1,0)$, 原点を通る球面
(2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$

Memo / Answer

(1)
半径は，中心 $\mathrm{C}(-2,1,0)$ と 原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ との距離である。
$r^2=\mathrm{CO}^2=(-2)^2+1^2+0^2=5$
よって求める方程式は
答 $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=5$
(2)
平方完成を行う。
$(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z)=2$
$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9=2$
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$
よって
答 中心 $(1,-2,3)$, 半径 4

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

2 点 $\mathrm{A}(2,0,1)$, $\mathrm{B}(1,3,5)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

Memo / Answer

点 P は x 軸上にあるので，$\mathrm{P}(x,0,0)$ とおける。
条件より $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(0-0)^2+(0-1)^2&=(x-1)^2+(0-3)^2+(0-5)^2\\(x-2)^2+1&=(x-1)^2+9+25\\x^2-4x+4+1&=x^2-2x+1+34\\-2x&=30\\x&=-15\end{aligned}$$

よって，求める点 P の座標は
答 $(-15,0,0)$

練習 B2

点 $(2,2,4)$ を通り，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてに接する球面の方程式をすべて求めよ。

Memo / Answer

3 つの座標平面すべてに接することから，半径を r $(r>0)$ とすると，中心の座標は $(\pm r,\pm r,\pm r)$ のいずれかの形になる。
ここで，球面は点 $(2,2,4)$ を通る。この点は第 1 象限 $(x>0, y>0, z>0)$ の領域にあるため，中心の座標もすべて正でなければならない。
よって，中心は (r,r,r) とおける。
球面の方程式は $(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$
これが点 $(2,2,4)$ を通るから
$(2-r)^2+(2-r)^2+(4-r)^2=r^2$
$(4-4r+r^2)+(4-4r+r^2)+(16-8r+r^2)=r^2$
$2r^2-16r+24=0$
$r^2-8r+12=0$
$(r-2)(r-6)=0$
よって，$r=2,6$

これより，求める方程式は 2 つある。
答
$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$
$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=36$