Introduction：あれれ〜，おかしいぞ〜??

「彼が犯人であることを証明したい。でも，直接的な証拠がない」そんなとき，探偵はこう考えます。「もし彼が犯人じゃないとしたら，あの時間に大阪にいるはずがない。しかし実際には大阪にいた。これは矛盾だ。だから彼が犯人に違いない！」

数学でも同じです。証明したいことを一旦**「嘘だ」と仮定**して，話を進めていくと，どこかで話が食い違う（矛盾する）。ということは，「嘘だ」という仮定が間違っていた，つまり**「本当だった」**ことになります。このひねくれた，しかし強力な証明方法を**背理法**といいます。

背理法（Proof by Contradiction）の仕組み

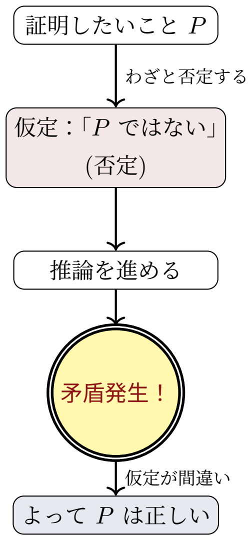
命題 P が正しいことを証明するために，

(1) まず，**「P は正しくない（否定）」と仮定する。**

(2) その仮定のもとで論理を進め，**矛盾**を導く。（矛盾とは：$1=0$ になったり，「奇数であり偶数である」となったりすること）

(3) 矛盾が出たのは最初の仮定がおかしかったから。

(4) ゆえに，**P は正しい。**



Step 1：正しい「否定」を作る

背理法のスタートは「否定すること」です。ここを間違えると，その後の証明はすべて無意味になります。特に「不等号」や「少なくとも」の否定には注意が必要です。

否定のチェックリスト：

- $x = y \xrightarrow{\text{否定}} \boldsymbol{x \neq y}$
- $x > 0 \xrightarrow{\text{否定}} \boldsymbol{x \leqq 0}$（イコールを忘れるな！）
- x は無理数 $\xrightarrow{\text{否定}}$ x **は有理数**
- x, y はともに正 $\xrightarrow{\text{否定}}$ x, y **の少なくとも一方は** 0 **以下**

例題 1：否定を作る練習

次の命題の否定を述べよ。

(1) $x \neq 3$

(2) $x < 5$

(3) a, b の少なくとも一方は偶数である

Memo / Answer

例題 2：背理法の論理（簡単な例）

背理法を用いて，次の命題を証明せよ。「$x+y>0$ ならば，$x>0$ または $y>0$ である」

Memo / Answer

例題 3：有理数と無理数の矛盾

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，次の命題を証明せよ。「$1+2\sqrt{2}$ は無理数である」

Memo / Answer

Topic：なぜ「対偶法」と似ている？

「対偶法」と「背理法」は兄弟のような関係です。

- **対偶法**：$\overline{q} \implies \overline{p}$ を示す。
- **背理法**：$\overline{q}$ と仮定して，p との矛盾（や数学的な矛盾）を導く。

やっている計算はほぼ同じになることが多いですが，背理法の方が**「使える範囲が広い」**です。（例えば「$\sqrt{2}$ は無理数」のような，$p \implies q$ の形でない命題も証明できるため）

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 否定を作る

次の条件の否定を述べよ。

(1) $x \geqq -2$
(2) a, b はともに 3 の倍数である
(3) $x = 0$ または $x = 1$

練習 A2: 背理法の入り口

次の文章は，背理法による証明の書き出し（冒頭）である。空欄を埋めよ。
命題「x^2 が偶数ならば，x は偶数である」を証明する。
結論を否定して，「x は □ である」と仮定する。すると，ある整数 k を用いて $x = \square$ と表せる。このとき，

$$x^2 = (\square)^2 = \dots$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 不等式の証明

背理法を用いて，次の命題を証明せよ。「$x + y > 5$ ならば，$x > 2$ または $y > 3$ である」

練習 B2: 無理数の証明（基本）

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，「$3 - \sqrt{3}$ は無理数である」ことを背理法で証明せよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $\boldsymbol{x < -2}$
(2) a, b の少なくとも一方は 3 の倍数ではない
(3) $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$

A2 結論「x は偶数」の否定は「x は奇数」。よって，「x は奇数である」と仮定する。すると，ある整数 k を用いて $x = \boldsymbol{2k+1}$ と表せる。このとき，

$$x^2 = (\boldsymbol{2k+1})^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

となり，x^2 は奇数となる。これは仮定「x^2 が偶数」に矛盾する。

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 結論を否定して，「$x \leqq 2$ かつ $y \leqq 3$」と仮定する。
このとき，2 つの式を辺々足すと，

$$x + y \leqq 2 + 3$$
$$x + y \leqq 5$$

となる。しかし，これは問題の前提条件である $\boldsymbol{x + y > 5}$ に矛盾する。
したがって，仮定は誤りであり，「$x > 2$ または $y > 3$」は正しい。（証明終）

B2 「$3 - \sqrt{3}$ は有理数である」と仮定する。その有理数を r と置くと，

$$3 - \sqrt{3} = r$$

移項して $\sqrt{3}$ について解くと，

$$\sqrt{3} = 3 - r$$

ここで，3 は有理数，r も有理数であるから，右辺 $3 - r$ は有理数である。しかし，左辺 $\sqrt{3}$ は無理数である。「無理数 ＝ 有理数」となるのは矛盾である。
したがって，仮定は誤りであり，$3 - \sqrt{3}$ は無理数である。（証明終）