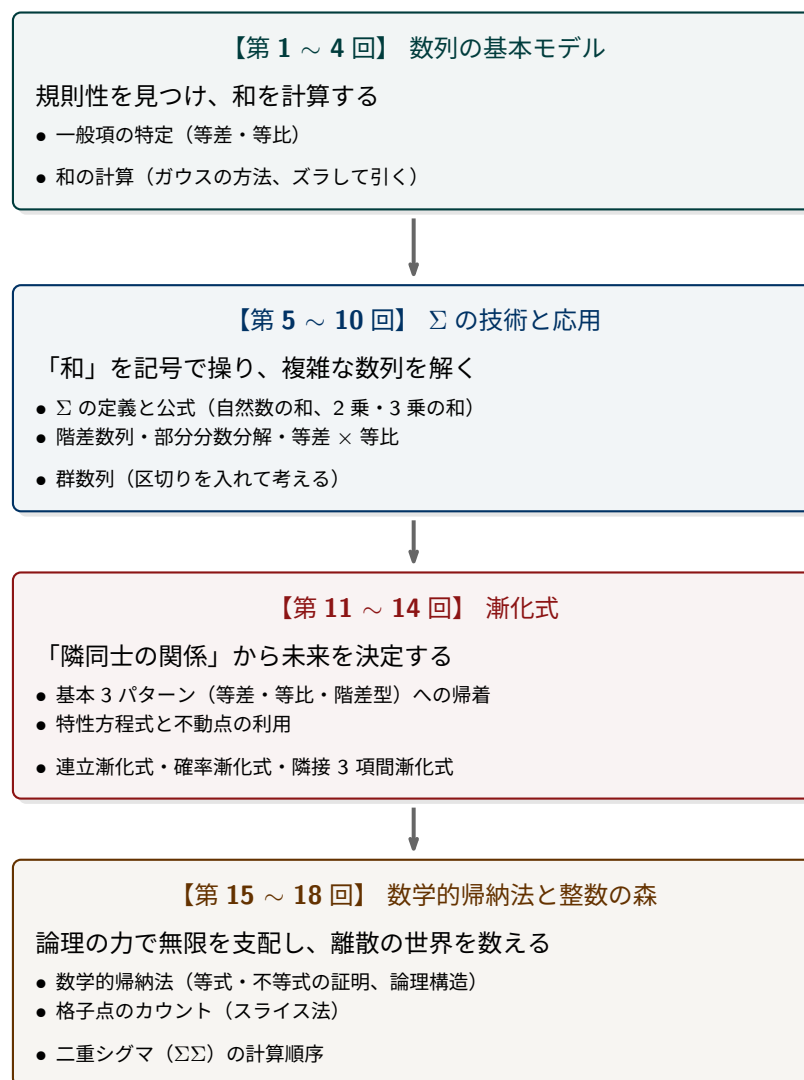


♣ 学びの全体像



1. 数列の世界へようこそ

クイズ: 次の \square に入る数字はなんでしょう？

- (1) 2, 4, 6, 8, \square
- (2) 1, 2, 4, 7, 11, \square
- (3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, \square

このように、数を一列に並べたものを**数列**という。

用語の定義

- **項 (こう):** 数列を作る一つ一つの数.
- **初項 (しょこう):** 1 番目の数. (a_1 と書く)
- **末項 (まっこう):** 最後の数.
- **第 n 項:** n 番目の数. (a_n と書く)
- **一般項:** 第 n 項を n の式で表したもの.

数列全体を $\{a_n\}$ と表すことが多い.

例: 3, 6, 9, 12, ...

- 初項 $a_1 = 3$
- 第 2 項 $a_2 = 6$
- 一般項 $a_n = 3n$

数列のルールを他人に伝えるとき、どう表現するのが良いだろうか？ 実は、大きく分けて **2 つ** の流儀がある.

2. ルールを伝える 2 つの方法

例として、奇数の列 1, 3, 5, 7, 9, ... を考えよう.

A ワープ型 (一般項 a_n)

「 n 番目の数は $2n - 1$ だよ」と伝える方法.

$$a_n = 2n - 1$$

メリット: $n = 100$ を代入すれば、いきなり 100 番目がわかる.

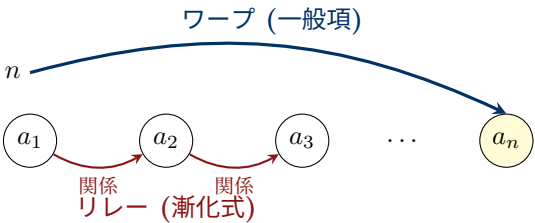
B リレー型 (漸化式)

「最初は 1 で、次は前の数に 2 を足したものだよ」と伝える方法.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

この「隣り合う項の関係式」を漸化式 (ぜんかしき) という.

メリット: 数字が変化していく様子 (プロセス) が記述できる. コンピュータのプログラムや自然現象はこちらに近い.



例題 1 (一般項から書き出す)

一般項が $a_n = n^2 + 1$ で表される数列の、初項から第 4 項までを求めよ.

例題 2 (漸化式から書き出す)

次の条件で定められる数列の、初項から第 4 項までを求めよ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n$$

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (一般項の利用)

次の一般項を持つ数列の初項から第 3 項までを書き出せ.

- (1) $a_n = 3n - 2$
- (2) $a_n = 2^n$
- (3) $a_n = (-1)^n \cdot n$

Memo / Answer

練習 A2 (漸化式の利用)

次の条件で定められる数列の初項から第 4 項までを書き出せ.

- (1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4$
- (2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (規則性の記述)

次の数列の規則性を発見し, 一般項 a_n と 漸化式 $a_{n+1} = \dots$ の両方で表現してみよ.
5, 10, 15, 20, ...

Memo / Answer

一般項: $a_n =$

漸化式: $a_1 =$, $a_{n+1} =$

練習 B2 (少し複雑な漸化式)

次の漸化式で定義される数列の第 2 項, 第 3 項を求めよ.
 $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$
(ヒント: 次の数は, 前の数を 2 倍して 1 足したもの)

Memo / Answer

解答 (導入クイズ)

- (1) 10 (2 ずつ増える偶数)
(2) 16 (増える数が 1, 2, 3, 4 と変化. 次は +5)
(3) 13 (前の 2 つを足すと次の数になる. $5 + 8 = 13$)

※ (3) はフィボナッチ数列と呼ばれる有名な数列.

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

$n = 1, 2, 3$ を代入する.

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7$. 答: 1, 4, 7
(2) $a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8$. 答: 2, 4, 8
(3) $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3$. 答: -1, 2, -3

練習 A2 解答

前の項を使って次を計算する.

- (1) 「4 ずつ足す」数列.
 $1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+4} 13$.
答: 1, 5, 9, 13
(2) 「2 ずつ引く」数列.
 $3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-2} -3$.
答: 3, 1, -1, -3

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

数列は 5 の倍数が並んでいる.

一般項: n 番目は $5 \times n$ なので,

$$a_n = 5n$$

漸化式: 隣同士を見ると 5 ずつ増えているので, 「次の項は前の項に 5 を足したもの」.

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n + 5$$

練習 B2 解答

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ の計算を行う.

- $n = 1$ のとき:

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

- $n = 2$ のとき:

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

答え: 第 2 項 3, 第 3 項 7

(参考: さらに続けると 1, 3, 7, 15, 31... となる)