

1. 等比数列の定義

等差数列が「足し算のリレー」なら、等比数列は「掛け算のリレー」である。

等比数列 (Geometric Progression)

一定の数  $r$  を次々と掛けていく数列を等比数列といい、 $r$  を公比 (こうひ) という。

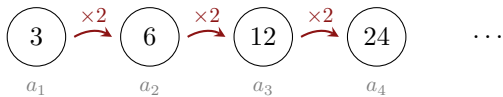
【漸化式による定義】

$$a_{n+1} = a_n \times r \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

意味：次の項は、前の項を  $r$  倍したもの

例: 3, 6, 12, 24, ...

- 初項  $a_1 = 3$
- 毎回  $\times 2$  されているので、公比  $r = 2$
- 漸化式で書くと:  $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n$

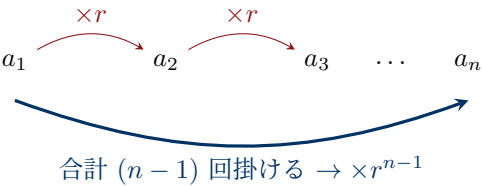


細胞分裂や借金の利子など、急激に増えていく現象（指数関数的増加）を表すモデルとなる。

2. 何回掛ければいい？（一般項）

等差数列と同じく、スタート地点からゴールまで一気にワープする式（一般項）を作ろう。掛け算を繰り返すということは、累乗 (るいじょう) になる。

- $a_1 = a$
- $a_2 = a \times r$  (1 回掛ける)
- $a_3 = a \times r \times r = ar^2$  (2 回掛ける)
- $a_4 = a \times r \times r \times r = ar^3$  (3 回掛ける)



$n$  番目に行くには、公比  $r$  を  $(n-1)$  回 掛ければ良い。

等比数列の一般項

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の一般項  $a_n$  は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例題 1 (基本計算)

初項 2、公比  $-3$  の等比数列の一般項を求めよ。また、第 5 項を求めよ。

Memo / Answer

3. 数列の決定（割り算で消去）

初項  $a$  と 公比  $r$  が不明なときは, 連立方程式を立てる. 等比数列では, 変数  $a$  を消去するために辺々を割り算するのがテクニックである.

例題 2 (2 つの項から決定)

第 2 項が 6, 第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ.

Memo / Answer

4. 等比中項（3 つの数が等比数列）

3 つの数  $a, b, c$  がこの順で等比数列になっているとき, 公比  $r$  は

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

と表せる. これを分母を払って整理すると

$$b^2 = ac$$

というきれいな関係式が得られる. これを等比中項の性質という.

例題 3 (等比中項)

数列  $x - 1, x + 1, 2x + 2$  が等比数列となるとき,  $x$  の値を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (一般項の計算)

次の等比数列の一般項  $a_n$  と, 第 4 項  $a_4$  を求めよ.

- (1) 初項 3, 公比 2
- (2) 初項  $-2$ , 公比  $-3$
- (3)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Memo / Answer

練習 A2 (項の決定)

初項 3, 公比 2 の等比数列において, 初めて 1000 を超えるのは第何項か. ( $2^{10} = 1024$  を用いてもよい)

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (2 項から決定)

第 3 項が 12, 第 6 項が  $-96$  である等比数列の一般項を求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (等比中項)

3 つの数  $a, 4, b$  が等差数列であり, かつ  $a, 3, b$  が等比数列であるとき,  $a, b$  の値を求めよ.

Memo / Answer

## 解答 (例題)

## 例題 1 解答

公式  $a_n = ar^{n-1}$  より

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

第 5 項は  $n = 5$  を代入して

$$a_5 = 2 \cdot (-3)^{5-1} = 2 \cdot (-3)^4 = 2 \cdot 81 = 162$$

## 例題 2 解答

初項  $a$ , 公比  $r$  とおく.

- $a_2 = 6 \iff ar = 6 \dots (1)$
- $a_5 = 162 \iff ar^4 = 162 \dots (2)$

(2)  $\div$  (1) を計算する:

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{6} \implies r^3 = 27$$

$r$  は実数なので  $r = 3$ . (1) に代入して  $3a = 6 \implies a = 2$ .

よって,  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

## 例題 3 解答

等比中項の性質  $b^2 = ac$  より

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x-1)(2x+2) \\ x^2 + 2x + 1 &= 2(x-1)(x+1) \\ x^2 + 2x + 1 &= 2(x^2 - 1) \\ x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 - 2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

よって  $x = 3, -1$ .

( $x = -1$  のときは 0 が現れるため等比数列とみなさない場合もあるが, ここでは数式上の解として扱う. ただし等比数列の定義において公比 0 や初項 0 を除くのが一般的であるため,  $x = 3$  のみが適する場合が多い.  $x = 3$  のとき 2, 4, 8.  $x = -1$  のとき -2, 0, 0.)

## 解答 (確認テスト)

## 練習 A1 解答

$$(1) a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

$$(2) a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}.$$

$$a_4 = -2 \cdot (-27) = 54.$$

$$(3) \text{初項 } 1, \text{公比 } \frac{1}{2}.$$

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$a_4 = \frac{1}{8}.$$

## 練習 A2 解答

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}. 3 \cdot 2^{n-1} > 1000 \iff 2^{n-1} > 333.3 \dots$$

$2^8 = 256, 2^9 = 512$ . これでは足りない.  $2^{n-1}$  が 512 を超える必要はないかもしれないが...

$$2^8 = 256 \rightarrow 3 \times 256 = 768 \text{ (まだ)} \quad 2^9 = 512 \rightarrow 3 \times 512 = 1536 \text{ (超えた!)}$$

よって指数部分  $n-1 = 9 \implies n = 10$ . 答え: 第 10 項

## 練習 B1 解答

$$ar^2 = 12 \dots (1), ar^5 = -96 \dots (2). \text{ 割り算して } r^3 = -8 \implies r = -2. \text{ (1) より}$$

$$a(-2)^2 = 12 \implies 4a = 12 \implies a = 3.$$

$$\text{答え: } a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

## 練習 B2 解答

$$(I) a, 4, b \text{ が等差} \rightarrow 2 \times 4 = a + b \implies a + b = 8 \dots (1) \quad (II) a, 3, b \text{ が等比} \rightarrow 3^2 = ab \implies ab = 9 \dots (2)$$

$$(1) \text{ より } b = 8 - a. (2) \text{ に代入. } a(8 - a) = 9 \implies a^2 - 8a + 9 = 0. \text{ 因数分解できないので解の}$$

$$\text{公式. } a = 4 \pm \sqrt{16 - 9} = 4 \pm \sqrt{7}.$$

$$a = 4 + \sqrt{7} \text{ のとき } b = 4 - \sqrt{7}. a = 4 - \sqrt{7} \text{ のとき } b = 4 + \sqrt{7}.$$

$$\text{答え: } (a, b) = (4 \pm \sqrt{7}, 4 \mp \sqrt{7}) \text{ (複号同順)}$$