年　　組　　番　氏名

1. 重複組合せの考え方

異なる n 種類のものから，**重複を許して** r 個取る組合せを**重複組合せ**といい，${}_nH_r$ で表します．しかし，この H の公式を覚えるよりも，「丸と仕切り」の図を描いて C で計算する方が応用が利きます．

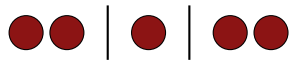
丸と仕切りの法則

r 個の「モノ（丸）」と，$n-1$ 個の「仕切り（棒）」を一列に並べる順列と同じ．

$$\boldsymbol{{}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r}$$

例：3 種類 (A,B,C) から重複を許して 5 個選ぶ

「A, A, B, C, C」という選び方



A (2 個) B (1 個) C (2 個)

5 個の丸と
2 本の仕切りの
並べ替えと同じ！

例題 1. 果物の購入

りんご，みかん，バナナの 3 種類の果物がたくさんある．この中から合計 6 個の果物を買うとき，次のような買い方は何通りあるか．

(1) 買わない果物があってもよい場合．
(2) どの果物も少なくとも 1 個は買う場合．

Memo / Answer

2. 少なくとも 1 つ選ぶ場合

例題 1(2) のように「0 個はダメ（空箱不可）」という条件がある場合は，**「先に 1 個ずつ配っておく」**のが定石です．

最低個数の保証

「少なくとも 1 個は選ぶ」場合：

(1) 先に全員に 1 個ずつ配る．（予約）
(2) 残りの個数を，重複を許して自由に選ぶ．

例題 2. 飴の分配

10 個の同じ飴玉を，A，B，C の 3 人の子供に分ける．

(1) 1 個ももらえない子がいてもよい場合．
(2) 全員が少なくとも 1 個はもらえる場合．

Memo / Answer

Lecture Note：H の公式について

$$ {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r $$

という公式は教科書に載っていますが，数字を当てはめる際に n と r を逆にしがちです．「仕切りの数 $(n-1)$」と「丸の数 (r)」を足した場所から「丸の場所」を選ぶ，と図形的に理解しておけば間違えません．

3. 方程式の整数解

「足して n になる整数の組」を求める問題は，重複組合せそのものです．

- x：1 種類目の個数
- y：2 種類目の個数
- z：3 種類目の個数

例題 3. 整数解の個数

方程式 $x+y+z=12$ について，次のような整数解 (x,y,z) の組は何個あるか．

(1) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ のとき（非負整数解）
(2) $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ のとき（正の整数解）

Memo / Answer

4. 不等式の整数解

条件が「$=$」ではなく「$\leq$（以下）」になった場合，どのように対処すべきでしょうか．

不等式の処理テクニック

$x+y+z \leq n$ $(x,y,z \geq 0)$ の解法：

(1) **スラック変数（ゴミ箱）の導入：**
足りない分を表す変数 w を用意し，

$$x+y+z+w=n \quad (w \geq 0)$$

という等式に持ち込む．

(2) **場合分け：**
$x+y+z=k$ として，$k=0,1,\ldots,n$ の場合を足し合わせる．（計算が大変）

推奨は **1. スラック変数**の方法です．

例題 4. 不等式の整数解

不等式 $x+y+z \leq 10$ を満たす非負整数解 (x,y,z) の組は何個あるか．

ヒント：10 との差を埋める「残りもの (w)」を考えると，4 つの和が 10 になることと同じ．

Memo / Answer

氏名　　得点　　/ 20

確認テスト A（基本）

練習 1：重複組合せの計算

3 種類の文字 a, b, c から，重複を許して 7 個取る組合せは何通りあるか.

練習 2：方程式の非負整数解

方程式 $x+y+z=8$ を満たす負でない整数解 (x, y, z) の組は何個あるか.

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：条件付き整数解

方程式 $x+y+z=15$ を満たす整数解について，

(1) $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ のとき，解は何個あるか.

(2) $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$ のとき，解は何個あるか.

練習 4：不等式の解

不等式 $x+y+z \leq 6$ を満たす負でない整数解 (x, y, z) の組は何個あるか.

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

7 個の丸 (◯) と，3 種類を分けるための 2 本の仕切り (|) の並べ替え．合計 9 個の場所から，丸の 7 個を選ぶ（または仕切りの 2 個を選ぶ）．

$$ {}_{7+3-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = \mathbf{36}\ (\text{通り}) $$

2

3 つの変数 x, y, z の和が 8．8 個の丸と 2 本の仕切りを並べる重複組合せと同じ．

$$ {}_{8+3-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = \mathbf{45}\ (\text{個}) $$

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

(1) x, y, z にあらかじめ 1 ずつ配る（予約）．残りは $15-3=12$．これを 3 人で分ける重複組合せ．

$$ {}_{12+2}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14\times 13}{2} = \mathbf{91}\ (\text{個}) $$

(2) x, y, z にあらかじめ 2 ずつ配る．残りは $15-6=9$．これを 3 人で分ける．

$$ {}_{9+2}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11\times 10}{2} = \mathbf{55}\ (\text{個}) $$

4

スラック変数 $w \geq 0$ を導入して，

$$ x+y+z+w=6 $$

と考える．（w は選ばれなかった残り）4 つの変数（丸 6 個，仕切り 3 本）の重複組合せ．

$$ {}_{6+3}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 3\times 4\times 7 = \mathbf{84}\ (\text{個}) $$