

1. ベクトルの「大きさ」の扱い方

ベクトルの大きさ  $|\vec{a}|$  は、そのままでは扱いにくい。しかし、**2 乗**すると内積に変身するという最強の性質がある。

大きさの 2 乗公式

同じベクトル同士の内積は、大きさの 2 乗になる。

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

逆に、大きさ  $|\vec{a}|$  が出てきたら、とりあえず **2 乗**して内積に持ち込むのが定石である。

ベクトルの展開公式

ベクトルの内積は分配法則が成り立つため、文字式の展開（乗法公式）と同じ感覚で計算できる。

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(2) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

注意:  $2\vec{a} \cdot \vec{b}$  の部分は単なる掛け算ではなく「内積」である。

例題 1 (基本計算)

$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ , なす角が  $60^\circ$  とする。このとき、 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  の値を求めよ。

手順: 1. まず内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めておく。2. 求めたい式を **2 乗**して展開する。3. 最後にルートをとる。

例題 2 (垂直と実数倍)

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ , なす角が  $120^\circ$  とする。ベクトル  $\vec{a} + t\vec{b}$  が  $\vec{b}$  と垂直になるとき、実数  $t$  の値を求めよ。

ヒント: 「垂直」  $\iff$  「内積が 0」。

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

この式を展開して計算する。

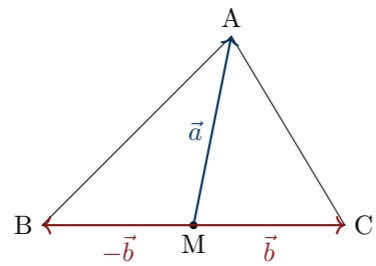
2. 等式の証明と図形的意味

ベクトルの演算性質を利用して、図形の定理を証明できる。

例題 3 (中線定理の証明)

$\triangle ABC$  において、辺  $BC$  の中点を  $M$  とする。このとき、  
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$
  
が成り立つことをベクトルを用いて証明せよ。

証明の方針： 始点を  $M$  にそろえる（位置ベクトル）。 $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$  は長さが等しく逆向きなので...



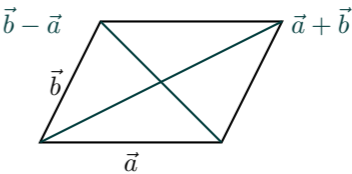
3. 平行四辺形の法則

平行四辺形の法則

平行四辺形の対角線の長さについて、以下の等式が成り立つ。

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

(対角線の長さの 2 乗和) = (各辺の長さの 2 乗和)



この証明は、左辺を展開して整理するだけで完了する。

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (大きさの計算)

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = -3$  とする.

- (1)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2$  を求めよ.
- (2)  $|\vec{a} - \vec{b}|$  を求めよ.

Memo / Answer

練習 A2 (垂直なベクトル)

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ , なす角  $60^\circ$  とする.  $\vec{a} + t\vec{b}$  と  $\vec{a} - \vec{b}$  が垂直であるとき, 実数  $t$  の値を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (ベクトルの大きさ)

2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  が,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 4, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = 2$$

を満たすとき, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (大きさの最小値)

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$  とする.  $|\vec{a} + t\vec{b}|$  が最小となる時の実数  $t$  の値と, その最小値を求めよ.

ヒント: 2 乗して  $t$  の 2 次関数として扱う.

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

Memo / Answer

A1 (解答) (1) 展開公式を利用する.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 + 2(-3) + 3^2 \\ &= 4 - 6 + 9 = 7 \end{aligned}$$

(2) 同様に 2 乗して計算する.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 - 2(-3) + 9 \\ &= 4 + 6 + 9 = 19 \end{aligned}$$

大きさは正なので,  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{19}$

Memo / Answer

A2 解答:

まず内積の準備:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$ .

垂直条件より, 内積が 0.

$$\begin{aligned} (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 &= 0 \\ 1^2 - 1 + t(1) - t(2^2) &= 0 \\ 1 - 1 + t - 4t &= 0 \\ -3t &= 0 \\ \therefore t &= 0 \end{aligned}$$

(注: 計算結果が 0 になることもある)

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:

与えられた条件をそれぞれ 2 乗する.

- $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 16 \implies |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 \dots (1)$
- $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4 \implies |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \dots (2)$

(1) - (2) を計算すると,  $|\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2$  が消える.

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

Memo / Answer

B2 解答:

$y = |\vec{a} + t\vec{b}|^2$  とおき, 最小値を考える.

$$\begin{aligned} y &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 4 + 2t(2) + t^2(4) \\ &= 4t^2 + 4t + 4 \end{aligned}$$

これを平方完成する.

$$\begin{aligned} y &= 4(t^2 + t) + 4 \\ &= 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 4 \\ &= 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって  $t = -\frac{1}{2}$  のとき, 最小値 3 をとる... ではない!

求めているのは  $|\vec{a} + t\vec{b}|$  (2 乗する前) の最小値なので,  $y$  の最小値のルートをとる必要がある.

答え:  $t = -\frac{1}{2}$  のとき, 最小値  $\sqrt{3}$