年　組　番　氏名

Introduction：無限に続く小数を飼いならす

無理数（例：$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$）は，無限に続くため正確に書くことができません。しかし，**「整数部分」**と**「はみ出した部分（小数部分）」**に分けることで，すっきりと扱うことができます。

$$1.414\cdots = \mathbf{1} + \mathbf{0.414}\ldots$$

整数部分と小数部分の定義

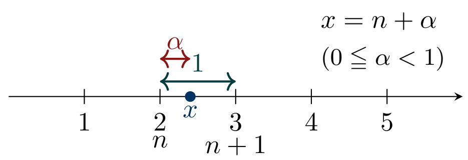
ある実数 x に対して，

$$n \leqq x < n+1$$

を満たす整数 n を，x の**整数部分**という。また，残りの部分を**小数部分** α とすると，

$$小数部分\ \alpha = x - n \quad (元の数 - 整数部分)$$

が成り立つ。



例題 1：整数部分と小数部分

次の数の整数部分 a と小数部分 b を求めよ。

(1) $\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

考え方: (1) $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ より，$2 < \sqrt{5} < 3$ です。(2) まずは**有理化**をして，おおよその値を推測しましょう。

Memo / Answer

Topic：式の次数下げ（魔法の計算術）

$x=\sqrt{2}-1$ のとき，x^3+x^2+x+1 の値を求めたい。直接代入すると計算が大変です。**「無理数を消去した 2 次方程式」**を作ると，計算が劇的に楽になります。

$$x=\sqrt{2}-1 \iff x+1=\sqrt{2}$$

両辺を 2 乗すると，

$$(x+1)^2=2 \iff x^2+2x+1=2 \iff x^2+2x-1=0$$

この $x^2+2x-1=0$ $(x^2=1-2x)$ を利用して，次数を下げていきます。

例題 2：次数下げの利用

$x=\sqrt{2}-1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+2x
(2) x^3+2x^2+3x+1

解説: (1) 先ほど作った式 $x^2+2x-1=0$ を変形すれば一瞬です。(2) x^3 などの高次式は，多項式の割り算を利用するか，$x^2=1-2x$ を繰り返し代入して次数を下げます。

Memo / Answer

小数部分の性質

小数部分 α は，$\alpha=x-n$ で表されるため，x に関する式は α に関する式に書き換えることができます。

$$x=n+\alpha$$

これを利用して，複雑な式の値を求める問題がよく出題されます。

例題 3：整数・小数部分の応用

$\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき，次の式の値を求めよ。

(1) a，b
(2) b^2+2b+1
(3) b^2+3b

考え方: a はすぐに求まります。$b=\sqrt{3}-a$ です。(2) 因数分解できませんか？ (3) そのまま代入しても良いですが，$b=\sqrt{3}-1$ は「$b+1=\sqrt{3}$」と変形できることに注目しましょう。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 整数部分と小数部分

次の数の整数部分 a と小数部分 b を求めよ。

(1) $\sqrt{10}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

練習 A2: 式の値（因数分解利用）

前問 (1) の b について，b^2+6b の値を求めよ。

練習 A3: 次数下げの準備

$x=\sqrt{3}-2$ のとき，x^2+4x の値を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 複雑な数の整数部分

$x=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$ とする。

(1) x の整数部分 a と小数部分 b を求めよ。

(2) b^2+ab の値を求めよ。

練習 B2: 次数下げの応用（割り算）

$x=1+\sqrt{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $x^2-2x-1=0$ であることを示せ。

(2) $x^4-2x^3-x^2+5x-3$ の値を求めよ。（ヒント：与えられた多項式を x^2-2x-1 で割ってみよう）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ より $3 < \sqrt{10} < 4$。よって，整数部分 $\boldsymbol{a = 3}$。小数部分 $\boldsymbol{b = \sqrt{10} - 3}$。

(2) 有理化する。$\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ より $2 < \sqrt{5} < 3$。全体に 1 を足して 2 で割ると，$\dfrac{2+1}{2} < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < \dfrac{3+1}{2} \iff 1.5 < x < 2$ よって，整数部分 $\boldsymbol{a = 1}$。小数部分 $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$。

A2 $b = \sqrt{10} - 3$ より，$b + 3 = \sqrt{10}$。両辺を 2 乗すると，$(b+3)^2 = 10 \iff b^2 + 6b + 9 = 10$ よって，$b^2 + 6b = 10 - 9 = \mathbf{1}$ （別解：直接代入でも可）

A3 $x = \sqrt{3} - 2 \iff x + 2 = \sqrt{3}$ 両辺を 2 乗して，$(x+2)^2 = 3 \iff x^2 + 4x + 4 = 3$ よって，$x^2 + 4x = \mathbf{-1}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) 有理化する。$x = \dfrac{4(3+\sqrt{5})}{9-5} = 3 + \sqrt{5}$ $2 < \sqrt{5} < 3$ より，$5 < 3 + \sqrt{5} < 6$。よって，整数部分 $\boldsymbol{a = 5}$。小数部分 $b = (3 + \sqrt{5}) - 5 = \boldsymbol{\sqrt{5} - 2}$。

(2) $b = \sqrt{5} - 2$ より，$b + 2 = \sqrt{5}$。2 乗して $b^2 + 4b = 1$。求める式：$b^2 + ab = b(b + a)$ ここで $a = 5$ なので，$b^2 + 5b$ を求めればよい。$b^2 + 4b = 1$ を使うと，$b^2 + 5b = (b^2 + 4b) + b = 1 + b = 1 + (\sqrt{5} - 2) = \boldsymbol{\sqrt{5} - 1}$ （別解：$b(a+b) = (\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} + 5 - 6 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5} - 1$）

B2

(1) $x - 1 = \sqrt{2}$ の両辺を 2 乗。$(x-1)^2 = 2 \iff x^2 - 2x + 1 = 2 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$

(2) 多項式の割り算を行う。$(x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x - 3) \div (x^2 - 2x - 1) = x^2 + (5x - 3)$ (商は x^2，余りは $5x - 3$) 式で書くと：与式 $= (x^2 - 2x - 1)x^2 + 5x - 3$ ここで $x^2 - 2x - 1 = 0$ なので，与式 $= 0 \cdot x^2 + 5x - 3 = 5x - 3$ $x = 1 + \sqrt{2}$ を代入して，$5(1 + \sqrt{2}) - 3 = \boldsymbol{2 + 5\sqrt{2}}$