Introduction：動く解

2 次不等式の係数に文字が含まれると，**「解（境界となる点）」**の位置が動いたり，**「グラフの向き」**が変わったりします。このため，状況に応じて**場合分け**が必要になります。

例題 1：解の大小関係による場合分け

a を定数とする。次の不等式を解け。

$$x^2 - (a+1)x + a < 0$$

考え方: まず左辺を因数分解します。

$$(x-1)(x-a) < 0$$

グラフと x 軸の交点は 1 と a です。不等号が < 0 なので，解は「1 と a の間」になりますが，1 と a **どちらが大きいか**によって答え方が変わります。

- $a < 1$ のとき： $a < x < 1$
- $a = 1$ のとき： $(x-1)^2 < 0 \longrightarrow$ 解なし
- $a > 1$ のとき： $1 < x < a$

Memo / Answer

不等号の向きと挟み方

$(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ の形になっても，必ず $\alpha < x < \beta$ となるとは限りません。小さい方を左，大きい方を右に書くのがルールです。

- $\alpha < \beta$ ならば $\alpha < x < \beta$
- $\beta < \alpha$ ならば $\beta < x < \alpha$

この「大小比較」が場合分けの基準になります。

例題 2：場合分けが必要な不等式

a を定数とする。次の不等式を解け。

$$x^2 - ax - 2a^2 > 0$$

ヒント: たすき掛けで因数分解できます。

$$(x-2a)(x+a) > 0$$

境界となる値は $2a$ と $-a$ です。この 2 つの大小関係（$2a$ と $-a$ どっちが大きい？）で場合分けをします。

Memo / Answer

年　組　番　氏名

発展：x^2 の係数に文字を含む場合

不等式 $ax^2+bx+c>0$ において，a の符号が不明な場合，グラフの形状が変わります。

- $\boldsymbol{a>0}$：下に凸（いつもの 2 次不等式）
- $\boldsymbol{a=0}$：$bx+c>0$（1 次不等式になる！）
- $\boldsymbol{a<0}$：上に凸（または両辺に -1 を掛けて不等号逆転）

例題 3：係数の符号による場合分け

a を定数とする。次の不等式を解け。

$$ax^2-x+a>0$$

ただし，グラフが x 軸と異なる 2 点で交わると仮定し，その交点の x 座標を α,β $(\alpha<\beta)$ とする。

解説:

(1) $a>0$ **のとき**: 下に凸なので，両端（外側）。
(2) $a<0$ **のとき**: 上に凸なので，内側。
(3) $a=0$ **のとき**: $-x>0 \iff x<0$。

※問題文で「α,β を使ってよい」とされている場合の記述法を練習します。

Memo / Answer

文字係数問題のチェックポイント

(1) **因数分解できるか？**
(2) **境界の大小関係は決まっているか？**（場合分けが必要か？）
(3) x^2 **の係数は正か？**（0 や負の場合がないか？）

例題 4：定数 a の値の範囲

2 次不等式 $x^2-4x+a<0$ の解が存在しないような定数 a の値の範囲を求めよ。

言い換え: 「解が存在しない」 $\iff$ 「グラフが x 軸より下にある部分がない」 $\iff$ 「グラフが常に x 軸以上にある」 $\iff$ 「$D \leqq 0$」

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

a は定数とする。次の不等式を解け。

練習 A1: 解の大小比較 (1)

$$(x-2)(x-a)<0$$

練習 A2: 解の大小比較 (2)

$$x^2+(1-a)x-a>0$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 境界が動く

a は定数とする。次の不等式を解け。

$$x^2-a^2x<0$$

練習 B2: x^2 の係数が文字

a は定数とする。次の不等式を解け。

$$ax^2-ax-2a>0$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 境界となる値は $2, a$。これら 2 つの大小関係で場合分けする。

(i) $a < 2$ のとき

$$\boldsymbol{a < x < 2}$$

(ii) $a = 2$ のとき式は $(x-2)^2 < 0$ となる。これを満たす実数 x は存在しない。

解なし

(iii) $a > 2$ のとき

$$\boldsymbol{2 < x < a}$$

A2 左辺を因数分解すると，

$$(x+1)(x-a) > 0$$

境界となる値は $-1, a$。

(i) $a < -1$ のとき（-1 が大きい）

$$\boldsymbol{x < a, \quad -1 < x}$$

(ii) $a = -1$ のとき式は $(x+1)^2 > 0$ となる。$x = -1$ 以外ですべて成り立つ。

$\boldsymbol{x \neq -1}$ であるすべての実数

(iii) $a > -1$ のとき（a が大きい）

$$\boldsymbol{x < -1, \quad a < x}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 左辺を因数分解すると，

$$x(x-a^2) < 0$$

境界となる値は $0, a^2$。ここで $a^2 \geqq 0$ であることに注意する。

(i) $a \neq 0$ のとき $a^2 > 0$ なので，大小関係は $0 < a^2$ で確定する。

$$\boldsymbol{0 < x < a^2}$$

(ii) $a = 0$ のとき $a^2 = 0$ となり，式は $x^2 < 0$ となる。これを満たす実数は存在しない。

解なし

B2 左辺を a でくくると，

$$a(x^2 - x - 2) > 0$$
$$a(x-2)(x+1) > 0$$

(i) $a > 0$ のとき両辺を正の数 a で割っても，不等号の向きは変わらない。

$$(x-2)(x+1) > 0$$

よって，$\boldsymbol{x < -1, \quad 2 < x}$

(ii) $a = 0$ のとき式は $0 > 0$ となり，成り立たない。よって，解なし

(iii) $a < 0$ のとき両辺を負の数 a で割ると，不等号の向きが逆になる。

$$(x-2)(x+1) < 0$$

よって，$\boldsymbol{-1 < x < 2}$