

1. 数の拡張：New Game!

虚数単位  $i$  の定義

実数の世界では  $x^2 = -1$  となる  $x$  は存在しない (実数は2乗すると必ず0以上になるから). そこで, 2乗して  $-1$  になる新しい数 を考え, 虚数単位  $i$  で表す.

$$i^2 = -1$$

複素数  $a + bi$

実数  $a, b$  と虚数単位  $i$  を用いて,  $a + bi$  の形で表される数を複素数という.

- $a$  を実部,  $b$  を虚部という.
- $b \neq 0$  のとき, その複素数を虚数という.
- 特に  $a = 0$  かつ  $b \neq 0$  のとき ( $bi$  の形), 純虚数という.

例題 1 (複素数の分類)

次の複素数の実部と虚部をいえ. また, 虚数, 純虚数であるものを選べ.

$$3 - 2i, \quad -5i, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{1 + i}{2}$$

Memo / Answer

2. 複素数の相等

複素数が等しいとは?

$a, b, c, d$  が実数のとき,

- $a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d$
- $a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ かつ } b = 0$

つまり, 実部同士・虚部同士をそれぞれ比較すればよい.

例題 2 (恒等式のように解く)

等式  $(2x + 1) + (y - 3)i = 5 + 2i$  を満たす実数  $x, y$  の値を求めよ.

Memo / Answer

3. 複素数の計算

文字式と同じルール+α

複素数の四則演算は、 $i$  を文字  $x$  と同じように扱って計算する。ただし、 $i^2$  が出てきたら  $-1$  に置き換えること。

- 加法・減法: 実部同士、虚部同士を計算する。

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

- 乗法: 分配法則で展開し、 $i^2 = -1$  を利用して整理する。

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

例題 3 (計算の基本)

次の計算をせよ。

- (1)  $(4 + 2i) + (3 - 5i)$
- (2)  $(2 + i)(3 - 2i)$

Memo / Answer

4. 負の数の平方根

ルートの中がマイナスになったら

$a > 0$  のとき、 $\sqrt{-a}$  は「2 乗して  $-a$  になる数」であるから、

$$\sqrt{-a} = \sqrt{ai}$$

と表す。

- 例:  $\sqrt{-4} = \sqrt{4i} = 2i$
- 注意: 計算するときは、最初に  $i$  の形に直してから計算すること。
- 誤答例:  $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{6}$  (← ダメ!!)

例題 4 (負の数の平方根)

次の数を  $i$  を用いて表せ。また、計算せよ。

- (1)  $\sqrt{-12}$
- (2)  $\sqrt{-2} \times \sqrt{-6}$

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1 (基本の確認)

- (1) 次の複素数の実部と虚部をいえ.  
 $5-i, \quad -3i, \quad 7$
- (2) 次の等式を満たす実数  $x, y$  の値を求めよ.  
 $(x-2) + (x+y)i = 0$

練習 A2 (複素数の計算)

- 次の計算をせよ.
- (1)  $(2-4i) - (1-3i)$
- (2)  $(3+2i)(1-4i)$
- (3)  $(2+3i)^2$

Memo / Answer

練習 B1 (負の数の平方根)

- 次の計算をせよ. 注意: 必ず先に  $i$  を外に出すこと.
- (1)  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12}$
- (2)  $\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{2}}$
- (3)  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

練習 B2 (式の値)

- $x = 2+i$  のとき, 次の式の値を求めよ.
- $$x^2 - 4x + 5$$

(ヒント: そのまま代入するか,  $x-2=i$  として両辺を2乗して関係式を作る)

Memo / Answer