年　組　番　氏名

1. 反復試行の確率とは

さいころを投げたりコインを投げたりする試行を，**「同じ条件で繰り返す」**とき，これを**反復試行**といいます．各回の試行は**独立**であるため，確率は掛け算で求められます．

反復試行の確率の公式

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行うとき，A がちょうど r 回起こる確率は，

$$ {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r} $$

例：5 回投げて表 (◯) が 3 回出る確率

$$\left.\begin{array}{ll} \bigcirc\bigcirc\bigcirc\times\times & \to \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \bigcirc\times\bigcirc\bigcirc\times & \to \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right\}\ \text{どのパターンも確率は同じ}$$

$$\vdots$$

並び方は「5 か所から ◯ の場所を 3 つ選ぶ」
→ ${}_5C_3$ 通り

1. さいころの反復試行

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 の目がちょうど 2 回出る確率．
(2) 奇数の目がちょうど 3 回出る確率．

Memo / Answer

2. 「何勝何敗」の問題

スポーツの試合などで「先に◯勝した方が優勝」という問題も，反復試行の応用です．

2. 優勝する確率

A，B の 2 人が試合を行う．1 回の試合で A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であり，引き分けはないものとする．

(1) 4 回試合を行って，A が 3 勝 1 敗となる確率．
(2) 先に 3 勝した方が優勝とするとき，4 試合目で A が優勝する確率．

ヒント：(2) は「4 回中 3 回勝つ」のではない．「3 試合目までに 2 勝 1 敗」で，かつ「4 試合目に A が勝つ」必要がある．

Memo / Answer

3. 点の移動（数直線）

確率の問題である前に，まずは **「回数の方程式」** を立てる整数問題です．

点の移動の解法ステップ

(1) 全体の試行回数を n，特定の事象が起こる回数を x と置く．
(2) そうでない回数は $n-x$ となる．
(3) 点の座標 P を x を用いて表し，方程式を解いて x を求める．
(4) 求めた回数 x で反復試行の公式を使う．

3. 数直線上の移動

数直線上の原点に点 P がある．1 個のさいころを投げて，

- 偶数の目が出たら $+2$
- 奇数の目が出たら -1

だけ P を移動させる．さいころを 5 回投げた後，点 P が座標 4 にある確率を求めよ．

Memo / Answer

4. 平面上の移動

x 軸方向と y 軸方向の移動が独立かどうかを見極めます．

4. 平面上の移動

座標平面上の原点に点 P がある．1 枚の硬貨を投げて，

- 表が出たら x 軸方向に $+1$
- 裏が出たら y 軸方向に $+1$

移動させる．硬貨を 6 回投げた後，点 P が $(4,2)$ にある確率を求めよ．

Memo / Answer

Lecture Note：最短経路との違い

この問題は「反復試行（確率）」ですが，**「最短経路（場合の数）」** と同じ構造です．全事象は 2^6 通り．$(4,2)$ に行くには，表 4 回，裏 2 回出る必要がある（${}_6C_4$ 通り）．

$$\frac{{}_6C_4}{2^6} = {}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

どちらで考えても同じ式になります．

5. 確率の最大値

「〇〇となる確率 P_k を最大にする k を求めよ」という問題は，関数の微分ではなく，**隣り合う項の比をとって調べます.**

確率の最大値の求め方

確率 P_k が最大となる k を求めるには，比 $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小を比較する.

- $\dfrac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \iff P_{k+1} > P_k$ （増加）
- $\dfrac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \iff P_{k+1} < P_k$ （減少）

不等式を解いて，増加から減少に転じる頂点を探す.

5. 確率の最大値

1 個のさいころを 20 回投げるとき, 1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とする $(0 \leq k \leq 20)$.

(1) $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を k を用いて表せ.

(2) P_k が最大となる k の値を求めよ.

Memo / Answer

Challenge：非復元抽出の最大値

くじ引きのような「非復元抽出」の場合でも，確率は k の関数になります.

6. 赤玉の個数の最大確率

白玉 10 個，赤玉 20 個が入っている袋から，同時に n 個の玉を取り出す．このとき，赤玉が k 個含まれる確率 P_k が最大となる k を求めよ．ただし $n = 10$ とする.

Memo / Answer

確認テスト A（基本）

練習 1：反復試行の計算

1 個のさいころを 5 回投げるとき，3 の倍数の目がちょうど 2 回出る確率を求めよ．

練習 2：点の移動

数直線上の原点に点 P がある．硬貨を投げて，表なら $+2$，裏なら -1 だけ移動する．硬貨を 4 回投げたとき，点 P の座標が 2 になる確率を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：勝負の確率

A，B の 2 人がゲームを行い，先に 3 勝した方を優勝とする．各ゲームで A が勝つ確率は $\frac{1}{3}$，B が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ である（引き分けなし）．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

練習 4：確率の最大値

1 個のさいころを $n=50$ 回投げるとき，1 の目が k 回出る確率 P_k が最大となる k の値を求めよ．

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

1 回で 3 の倍数（3, 6）が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$．5 回中 2 回出るので，

$$\begin{aligned} &{}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \mathbf{\frac{80}{243}} \end{aligned}$$

2

表が出る回数を x 回とする．裏は $4 - x$ 回．座標が 2 になる条件は，

$$\begin{aligned} 2x + (-1)(4 - x) &= 2 \\ 2x - 4 + x &= 2 \\ 3x = 6 \quad &\therefore x = 2 \end{aligned}$$

表が 2 回，裏が 2 回出ればよい．

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

A が優勝するパターンは，3 勝 0 敗，3 勝 1 敗，3 勝 2 敗の場合がある．

- 3 勝 0 敗：$(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$
- 3 勝 1 敗：2 勝 1 敗で迎えた 4 戦目で勝つ．${}_3C_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{81}$
- 3 勝 2 敗：2 勝 2 敗で迎えた 5 戦目で勝つ．${}_4C_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{4}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{24}{243}$

通分して足す（分母 243）．$\frac{9}{243} + \frac{18}{243} + \frac{24}{243} = \frac{51}{243} = \mathbf{\frac{17}{81}}$

4

$P_k = {}_{50}C_k(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{50-k}$．比 $\frac{P_{k+1}}{P_k}$ を計算すると（例題 5 参照），

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{50-k}{k+1} \cdot \frac{1}{5}$$

$P_{k+1} > P_k$ となる条件は，

$$\frac{50-k}{5(k+1)} > 1 \iff 50 - k > 5k + 5 \iff 45 > 6k \iff k < 7.5$$

$k = 0, \ldots, 7$ までは増加し，$k = 8$ から減少する．よって最大となるのは $k = 7$ の次，P_8 である．答え：$\mathbf{k = 8}$