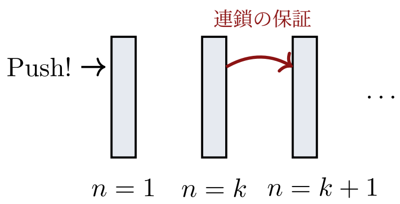
年　　組　　番　氏名

1. 無限を倒す論理 (ドミノ倒し)

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が, すべての自然数で成り立つことを証明したい. 一つ一つ確かめていては永遠に終わらない. そこで**「自動的に証明が進む仕組み」**を作る.



数学的帰納法 (Mathematical Induction)

命題 $P(n)$ がすべての自然数 n で成り立つことを示すには, 次の 2 ステップを証明すればよい.

(1) **[Base Step]** $n=1$ のとき成り立つことを示す. (最初のドミノを倒す)

(2) **[Inductive Step]** $n=k$ のとき成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のときも成り立つことを示す. (前が倒れれば, 次も必ず倒れるという連鎖の保証)

2. 等式の証明手順

例として, 公式 $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を証明する.

(I) $n=1$ **のとき**

- 左辺 $=1$
- 右辺 $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$

よって $n=1$ のとき成り立つ.

(II) $n=k$ **のとき成り立つと仮定する**

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \quad \cdots ①$$

この①を使って, $n=k+1$ のときの式

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \quad (\text{ゴール})$$

を導く.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1+2+\cdots+k)+(k+1)\\ &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \quad (\leftarrow ①\text{を代入!})\\ &= (k+1)\left\{\frac{1}{2}k+1\right\}\\ &= (k+1)\cdot\frac{k+2}{2}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

これより $n=k+1$ のときも成り立つ.

(結論) (I), (II) より, すべての自然数 n で成り立つ.

年　　組　　番　氏名

3. 推測した一般項の正しさを保証する

漸化式を解いて得た一般項が本当に合っているか, 帰納法で証明できる.

例題 1 (一般項の証明)

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ で定義される数列に対し, 一般項が $a_n = 2^n - 1$ であることを数学的帰納法で証明せよ.

Memo / Answer

証明のコツ

- **ゴールを見失わない**: $n = k+1$ のとき, どんな式になれば正解なのか（目標式）を最初にメモしておくと迷わない.
- **仮定を使う**: 変形の途中で必ず「$n = k$ の仮定」を代入する瞬間がある. それがないと帰納法にならない.

Memo: 目標式の確認

例題 1 の場合:

- **仮定** $(n = k)$: $a_k = 2^k - 1$
- **目標** $(n = k+1)$: $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$
- **使う道具**: 漸化式 $a_{k+1} = 2a_k + 1$

漸化式の a_k に仮定を代入して, 目標の式に変形すればよい.

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 和の公式)

練習 A1 (奇数の和)

すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 漸化式)

練習 B1 (一般項の証明)

$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2$ で定義される数列の一般項は $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ である. これを数学的帰納法を用いて証明せよ.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

(I) $n=1$ のとき左辺 $a_1=1$. 右辺 $2^1-1=1$. よって $n=1$ のとき成り立つ.
(II) $n=k$ のとき成り立つ, すなわち

$$a_k = 2^k - 1 \quad \cdots ①$$

と仮定する. $n=k+1$ のときを考えると, 漸化式より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 1 \\ &= 2(2^k-1)+1 \quad (\leftarrow ①を代入) \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ.
(I), (II) より, すべての自然数 n で $a_n = 2^n - 1$ が成り立つ.

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(I) $n=1$ のとき左辺 $=1$. 右辺 $=1^2=1$. よって成り立つ.
(II) $n=k$ のとき成り立つ, すなわち

$$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2 \quad \cdots ①$$

と仮定する. $n=k+1$ のとき, 左辺は

$$\begin{aligned} &1+3+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} \\ &= k^2+(2k+1) \quad (\leftarrow ①を利用) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

これは右辺の n に $k+1$ を代入したものと一致する. よって $n=k+1$ のときも成り立つ.
(I), (II) より, すべての自然数 n で等式は成り立つ.

練習 B1 解答

(I) $n=1$ のとき左辺 $a_1=1$. 右辺 $2\cdot 3^0-1=2-1=1$. よって成り立つ.
(II) $n=k$ のとき成り立つ, すなわち

$$a_k = 2\cdot 3^{k-1} - 1 \quad \cdots ①$$

と仮定する. $n=k+1$ のとき, 漸化式より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_k + 2 \\ &= 3(2\cdot 3^{k-1}-1)+2 \quad (\leftarrow ①を代入) \\ &= 2\cdot 3^k - 3 + 2 \\ &= 2\cdot 3^k - 1 \end{aligned}$$

これは $a_n = 2\cdot 3^{n-1}-1$ の n に $k+1$ を代入した式 $2\cdot 3^{(k+1)-1}-1 = 2\cdot 3^k - 1$ と一致する.
よって $n=k+1$ のときも成り立つ.
(I), (II) より, すべての自然数 n で成り立つ.