年　組　番　氏名

1. 「距離が一定」となる矢印の集まり

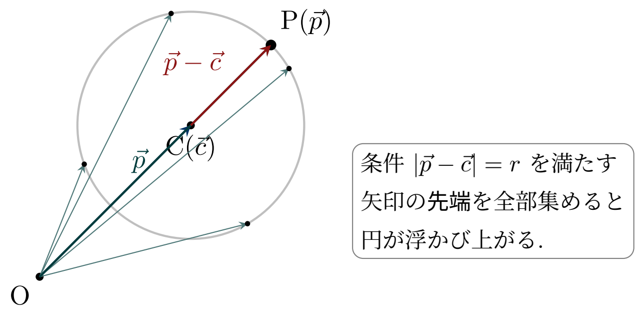
前回学んだ通り，図形とは条件を満たす点の集合である．「ある定点 C からの距離が一定値 r である」ような点 P の集まりは円になる．
これをベクトル（矢印）で表現してみよう．

円のベクトル方程式 (基本形)

中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 r の円の方程式は，

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

と表される．($\vec{p}$ は円周上の動点)



計算のコツ：
絶対値 $|\cdot|$ のままでは扱いにくいので，実際の問題では**両辺を 2 乗して内積の形にする**ことが多い．

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2 \iff (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

2. 「直径」が見込む角は 90 度

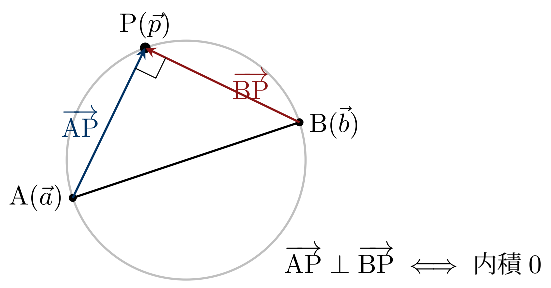
円にはもう一つの定義がある．「直径 AB に対する円周角は 90°」という性質だ．これをベクトルの言葉（垂直＝内積 0）に翻訳する．

円のベクトル方程式 (直径形)

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円の方程式は，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

と表される．



この式を展開して整理すると，

$$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

となり，さらに変形すると中心が $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$（中点）の基本形に帰着する．

例題 1 (方程式の読解)

次の方程式はどのような図形を表すか．

$$|\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b})|=3$$

3. 円じゃない場合（垂直二等分線）

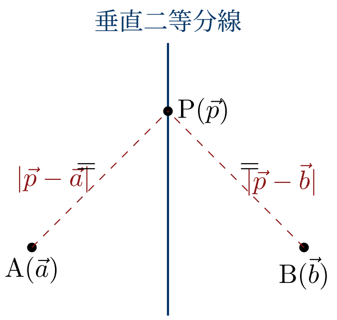
絶対値がついているからといって，必ずしも円になるとは限らない．式の意味（図形的条件）を日本語に翻訳する癖をつけよう．

垂直二等分線のベクトル方程式

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ からの距離が等しい点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の集合:

$$|\vec{p}-\vec{a}| = |\vec{p}-\vec{b}|$$

これは線分 AB の**垂直二等分線**を表す．



証明: 両辺を 2 乗して差を取ると，

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2 - |\vec{p}-\vec{b}|^2 = 0$$

$$\cdots \iff (\vec{p} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$$

これは「P と中点を結ぶベクトル」と「AB ベクトル」が垂直であることを示している．

例題 2 (式の変形と図形の特定)

$|\vec{p}+2\vec{a}| = |\vec{p}-\vec{a}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ はどのような図形を描くか．ただし $\vec{a} \neq \vec{0}$ とする．

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (方程式の翻訳)

次のベクトル方程式はどのような図形を表すか．言葉で答えよ．

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=2$
(2) $|\vec{p}+\vec{a}|=1$
(3) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+\vec{a})=0$
(4) $|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}+\vec{a}|$

Memo / Answer

練習 A2 (成分計算)

$\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(3,-2)$ を直径の両端とする円の方程式を，ベクトルを用いずに x,y の式で表せ．（※検算として，内積の式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ を利用してもよい）

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (係数を含む方程式)

定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，次の式を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ はどのような図形を描くか．

$$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$$

Memo / Answer

練習 B2 (アポロニウスの円・導入)

$|\vec{p}|=2|\vec{p}-\vec{a}|$ を満たす点 P 全体はどのような図形になるか．両辺を 2 乗して計算し，中心と半径（またはどのような円か）を答えよ．

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

(1) 中心 $\mathrm{A}(\vec{a})$, 半径 2 の円.
(2) $|\vec{p}-(-\vec{a})|=1$ と変形できる. 中心 $-\vec{a}$, 半径 1 の円.
(3) 直径の両端が $\mathrm{A}(\vec{a})$ と $-\mathrm{A}(-\vec{a})$ である円. (中心は原点 O, 半径 $|\vec{a}|$ の円)
(4) 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $-\mathrm{A}(-\vec{a})$ からの距離が等しい点の集合. 線分 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $-\mathrm{A}(-\vec{a})$ の垂直二等分線. (原点を通り $\vec{a}$ に垂直な直線)

練習 A2 解答

数学 II の知識で解くと: 中心は AB の中点 $(2,0)$, 半径は $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. よって $(x-2)^2+y^2=5$.
ベクトル方程式で解くと: $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-(-2))=0$ $x^2-4x+3+y^2-4=0$ $x^2-4x+y^2=1 \iff (x-2)^2+y^2=5$. 同じ結果になる.

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

$\vec{p}$ の係数を 1 にするために, 両辺を 3 で割る.

$$|3(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a})|=6$$
$$3|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}|=6$$
$$|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}|=2$$

この式の形は「中心からの距離が 2」を表している. 中心の位置ベクトルは $\frac{2}{3}\vec{a}$. これは線分 OA を $2:1$ に内分する点である.
答え: 線分 OA を $2:1$ に内分する点を中心とする, 半径 2 の円.

練習 B2 解答

両辺を 2 乗して展開する.

$$|\vec{p}|^2=4|\vec{p}-\vec{a}|^2$$
$$|\vec{p}|^2=4(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})$$
$$|\vec{p}|^2=4(|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2)$$
$$|\vec{p}|^2=4|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2$$
$$3|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2=0$$

全体を 3 で割って平方完成を目指す.

$$|\vec{p}|^2-\frac{8}{3}\vec{p}\cdot\vec{a}+\frac{4}{3}|\vec{a}|^2=0$$
$$|\vec{p}-\frac{4}{3}\vec{a}|^2-|\frac{4}{3}\vec{a}|^2+\frac{4}{3}|\vec{a}|^2=0$$
$$|\vec{p}-\frac{4}{3}\vec{a}|^2-\frac{16}{9}|\vec{a}|^2+\frac{12}{9}|\vec{a}|^2=0$$
$$|\vec{p}-\frac{4}{3}\vec{a}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2$$
$$|\vec{p}-\frac{4}{3}\vec{a}|=\frac{2}{3}|\vec{a}|$$

答え: 中心 $\frac{4}{3}\vec{a}$ (線分 OA を $4:1$ に外分する点), 半径 $\frac{2}{3}|\vec{a}|$ の円. (アポロニウスの円)