♣ 学びの全体像

【第 1, 2 回】 極限 (lim)

「無限」を定義する

- 「限りなく近づく」概念と収束の理解
- 不定形（$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$）を処理する計算技術の習得

【第 3 回】 定積分の定義

曲がった図形の面積．計算に難あり

- 区分求積法（$\lim \sum$）による面積の厳密な定義
- はさみうちの原理による値の確定と記号 $\int$ の導入

【第 4 ～ 8 回】 微分

計算のための準備期間

- 接線の傾き（微分係数）と導関数 $(x^n)'$ の公式
- 接線の方程式と，増減表によるグラフ描画

【第 9 ～ 12 回】 原始関数と微積分学の基本定理

「面積」と「傾き」の関係

- 原始関数と面積関数
- 微積分学の基本定理
- 不定積分の定義と定積分計算 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

【第 13, 14 回】 面積計算の基礎

面積計算再訪 (難無し!!)

- 定積分と図形の面積の関係理解
- 積分区間と上下関係による立式 $\int (上 - 下)dx$

【第 15 ～ 16 回】 面積計算の応用と発展

グラフと面積を自由に行き来せよ！

- 2 曲線間の面積や接線が絡む図形の計量
- $\frac{1}{6}$ 公式などの計算テクニックの活用

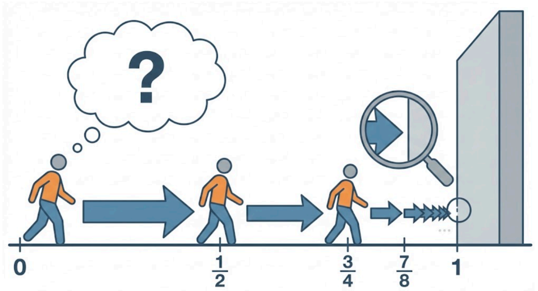
♣ いつまでたっても辿り着けない!?

全体課題

あなたは「壁」に向かって歩いている．ただし，「壁までの距離の半分進んだら一度止まる」という操作を繰り返している．

- 1 回目　残りの半分を進む．
- 2 回目　またその半分を進む．
- 3 回目　さらにその半分進む．

この操作を「とてつもなくたくさん」繰り返したとき，あなたは「壁」に辿り着けるといえるか．



Memo / Answer

pre：今の自分の考え（予想）

- 結論：【　辿り着ける　/　辿り着けない　】
- 理由：

post：授業を通しての考え（変容）

- 結論：【　辿り着ける　/　辿り着けない　】
- 理由・必要な考え方：

♣ エキスパート A「いつまでたっても有理数」

目標 A

$\sqrt{2}$ のような無理数を，分数の入れ子構造（連分数）で近似する操作を通して，有限回の計算の限界を感じ取る．また，誤差を 0 とみなす方法としての極限概念を大雑把に説明できる．

説明：構造を見抜け

$\sqrt{2}$ は無理数なので，整数の比（分数）で表すことはできない．しかし，「無理やり分数の中に分数を入れ込む」ことで近づくことはできそう．

$$\text{基本変形：}\quad \sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

この「$\sqrt{2}-1$」の部分を，再び上の式を使って置き換えていく．

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&=1+(\sqrt{2}-1)\\&=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\\&=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}\\&=\cdots\end{aligned}$$

末尾の $\sqrt{2}-1$ を切り捨てれば，

$$\begin{aligned}x_1&=1\quad(\text{第 1 近似})\\x_2&=1+\frac{1}{2}=1.5\quad(\text{第 2 近似})\\x_3&=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=1.4\quad(\text{第 3 近似})\end{aligned}$$

この操作を繰り返すことで，次々と新しい近似値 x_n が生まれる．

課題 1：計算せよ

もう一層連分数展開を進め，x_4 を求めよ (小数第 4 位まで)．　→　$x_4 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿．

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}\rightarrow$$

まとめまで終わり時間が余ったら!!

さらにもう一層連分数展開を進め，x_5 を求めよ (小数第 5 位まで)　→　$x_5 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿．

課題 2：構造を見直せ

この連分数展開を「100 万回」繰り返して $x_{1000000}$ を作ったとする．

(1) その数は $\sqrt{2}$ と完全に一致するか?

【 一致する / 一致しない 】

(2) その数は有理数か，無理数か?

【 有理数 / 無理数 】

→ 有理数 ≠ 無理数であるから，**どこまで行っても誤差はなくならない．**

【おまけ】

n	小数近似値 x_n
5	$1.41379\cdots$
6	$1.41428\cdots$
7	$1.41420\cdots$
8	$1.41421\cdots$

課題 3: 諦めるな．ルールを作れ

そこで，新しいルールを作成する．

【前提】$\sqrt{2}$ の小数第 6 位までの値 1.414213 は既知のものとする．

【ルール】x_n と $\sqrt{2}$ の誤差が $\varepsilon = 0.01$[*1] を下回ったら「x_n と $\sqrt{2}$ **は一致したとみなす」ことにする．**

このルールのもとで，

(1) x_3 は $\sqrt{2}$ と【 一致する / 一致しない 】$\xrightarrow{\text{誤差}}$

(2) x_4 は $\sqrt{2}$ と【 一致する / 一致しない 】$\xrightarrow{\text{誤差}}$

課題 4：あまいルールで満足するな

上のルールをどんどん厳しくしていく．

(1) $\varepsilon = 0.001$ と設定しても，階数 n を十分大きくすれば，$\sqrt{2}$ と x_n は

【 一致する / なんとも言えない 】

(2) $\varepsilon = 0.00000001$ と設定しても，階数 n を十分大きくすれば，$\sqrt{2}$ と x_n は

【 一致する / なんとも言えない 】

まとめ

- どんなに n を大きくしても，有限回の操作では $\sqrt{2}$ にはなれない → $x_n \neq \sqrt{2}$．
- しかし，その誤差に閾値 (しきいち)ε を設けることで一致したとみなすことにすれば，この誤差がどんなに小さな値だとしても，n を十分大きくすれば，x_n と $\sqrt{2}$ は一致したとみなすことができる．
- この事実を，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

という記号を使い，「無限回操作した**その行き着く先**」として $\sqrt{2}$ を定義しなおす．これが極限概念である．

[*1] ε とは誤差 (error) の頭文字 e のギリシャ文字のこと．

♣ エキスパート B「曲がった図形の面積」

目標 B

面積を決定する方法としての長方形近似を理解し，長方形近似を用いて曲線 $y=x^2$ のグラフと座標軸等が囲う場所の面積を求めることができる．またその導出過程を説明できる．

導入：予想せよ

関数 $y=x^2$ のグラフと $x=1$ と x 軸で囲われた面積 T により近いと思うものと次から選び，選んだ理由を自由に説明せよ．【 1 / $\frac{1}{2}$ / $\frac{1}{3}$ / $\frac{1}{4}$ 】

選んだ理由

課題 1：長方形近似

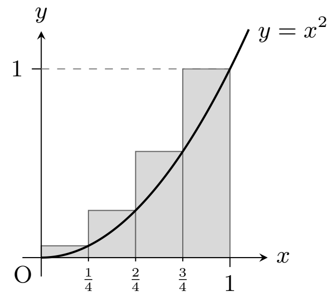
曲がった図形の面積を求める代わりに，図形を覆い尽くす長方形の面積 S(過剰和) と図形に覆い尽くされる長方形の面積 s(不足和) を求める．$x=0$ から $x=1$ までを 4 等分した場合 (S_4 と s_4) を考える．

(1) 過剰和 S_4 は

$$S_4=\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{横幅}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^2}\sum_{k=1}^{4}k^2=\underline{\qquad\qquad}.$$

(ヒント：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

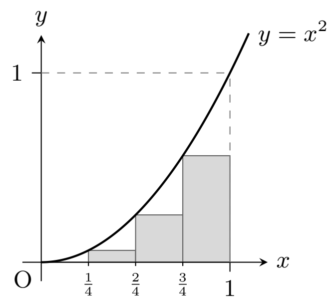


$\to T<S_4$

(2) 不足和 s_4 は，

$$s_4=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{0}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^2}\sum_{k=1}^{3}k^2=\underline{\qquad\qquad}.$$



$\to s_4<T$

(3) (1), (2) から判断できる，面積 T のとりうる値の範囲は $\underline{\qquad <T< \qquad}$.

課題 2：さらに細かく刻む

$n=10$（幅 0.1）と $n=100$（幅 0.01）の場合を計算した結果を用意した．以下の表を見て問いに答えよ．

分割数	幅	不足和 s_n (内側)	過剰和 S_n (外側)
$n=4$	0.25	0.21875	0.46875
$n=10$	0.1	0.28500	0.38500
$n=100$	0.01	0.32835	0.33835

問い：

(1) 分割数を増やしていくと，過剰和と不足和の差 (ズレ) は【 広がる / 縮まる / 変わらない 】.

(2) しかし，n をどんなに大きな値にしても，誤差は 0 に【 なる / ならない 】.

(3) 本当の面積 T はおよそいくつと予想できるだろうか? $\to$ 【 $0.300\cdots$ / $0.333\cdots$ / $0.385\cdots$ 】

まとめ

分割数 n 大きくすると，過剰和 S_n と不足和 s_n は，どちらも $\frac{1}{3}(=0.333\cdots)$ に近づくが，有限回の操作では階段の「カクカク」した部分が消えずに，真の値との誤差が残る．

$$s_n<T<S_n.$$

不等号を等号に変えるためには，極限概念「**n を限りなく大きくする**」という操作が必要になる．これを

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}$$

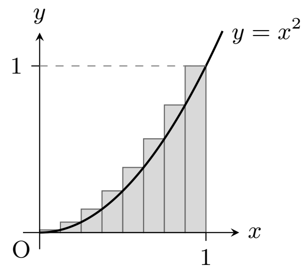
と書き，これにより「誤差が限りなく 0 に近くなった」とみなし，面積は $T=\frac{1}{3}$ と確定する<u>ことにする</u> (**挟み撃ちの原理**).

<u>**有限回では消すことができない「誤差」を消すために「極限」概念を用いて誤差をないものとみなすことにした．**</u>

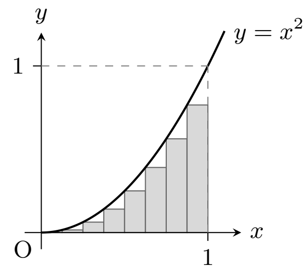
課題 3：時間が余ったら取り組もう!!

$x=0$ から $x=1$ までを 8 等分した場合の過剰和 S と不足和 s を求めよ．

過剰和 S_8



不足和 s_8



♣ エキスパート C「接線が追い詰める解」

目標 C

方程式の解を，接線を用いて近似的に求める手法（ニュートン法）を通して，接線の有用性と，反復操作による極限への収束を理解し説明できる．

導入：$\sqrt{2}$ を捕まえよ!

【前提】私たちは $\sqrt{2}$ について，「2 乗したら 2 になる数のうち正の数」ということしか知らない (近似値は知らない．).
【目標】グラフを用いて，曲線 $y = x^2 - 2$ と x 軸 $(y = 0)$ の交点として $\sqrt{2}$ の値を特定する．
【方針】曲線のままだと計算が難しいので，曲線を「部分的に直線（接線）」とみなして計算する．

ルール：ちょっと先取り

本来，接線の傾きを求めるには「微分」という計算が必要[*2]だが，今日は以下の事実を使ってよい．

> 【特別ルール】
> 関数 $y = x^2 - 2$ 上の $x = a$ の点における**接線の傾き**は，$2a$ で求められる．

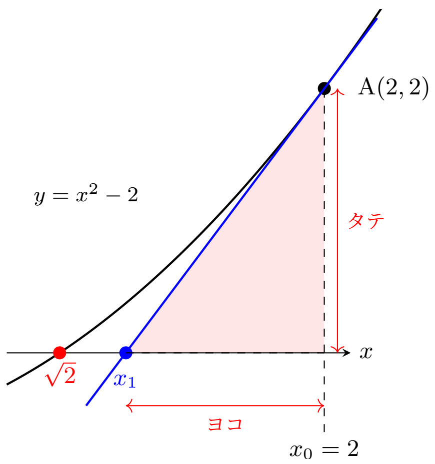
- 例：$x = 3$ の点なら，接線の傾きは $2 \times 3 = 6$，　$x = 4$ の点なら，接線の傾きは $2 \times 4 = 8$.

課題 1：直角三角形で解く

【ステップ 1】初期値として $x_0 = 2$ を設定する．ここから接線に沿って滑り降り，より正解（$\sqrt{2}$）に近い値 x_1 を求めよう (**直角三角形**に注目!!).

(1) $x = 2$ における曲線 $y = x^2 - 2$ 上の点 A の座標　→　$(2, \quad)$.
(2) 点 A における「接線の傾き」(特別ルールを使用)
　→　傾き ＝ ______
(3) ヨコ ＝ タテ ÷ 傾き ＝ ______

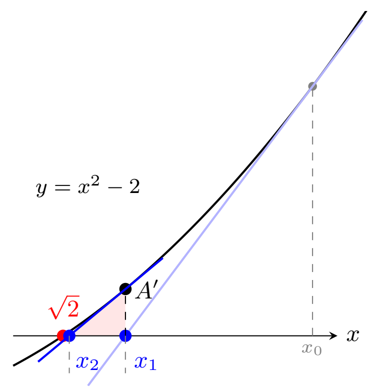
(4) $x_1 = 2 - (\text{ヨコの長さ}) =$ ______



課題 2：繰り返す

【ステップ 2】求まった x_1 を新しいスタート地点として，小さな直角三角形に注目して，もう一度同じ計算を行う．(電卓使用可)

(1) 点 A’ の座標　→　(____ , ____).
(2) 点 A’ における傾き　→　______
(3) ヨコ ＝ タテ ÷ 傾き ＝ ____________
(小数第 4 位まで)
(4) $x_2 = x_1 -$ ヨコ ＝ ____________
(小数第 4 位まで)



課題 3：誤差の行方

たった 2 回の操作で，$2.0 \to 1.5 \to 1.4166\cdots$ と，真の値 $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に劇的に近づいた．
(1) この操作を繰り返せば，値は真の値に近づくか？　→　【 近づく / 遠ざかる 】
(2) 有限回の操作で，完全に誤差 0（$x_n = \sqrt{2}$）になるか？　→　【 なる / ならない 】

課題 4：諦めるな．ルールを作れ!!

そこで，新しいルールを作成する．
【ルール】x_n と $\sqrt{2}$ の誤差が 0.00000001 を下回ったら「x_n と $\sqrt{2}$ **は一致したとみなす**」ことにする．
このルールのもとで，
(1) x_2 は $\sqrt{2}$ と【 一致する / 一致しない 】
(2) n を十分大きくしていけば，いつかは,x_n と $\sqrt{2}$ は【 一致する / 一致しない 】

→ ルールをどんどん厳しくしていけば，最終的には真の値 $\sqrt{2}$ に到達したと言えそう．

まとめ

- 接線を利用して解に迫るこの方法を**ニュートン法**という．
- 非常に効率よく解に近づくが，有限回の操作では絶対に誤差はなくならない $(x_n \neq \sqrt{2})$.
- そこで，誤差に関するルールを定めて，**そのルールを満足すれば，x_n と $\sqrt{2}$ は一致したとみなすことにする．**
- 操作の回数 n を**限りなく大きくしていけば**，どんなに厳しいルールでもクリアでき，「$\sqrt{2}$ に到達した」と言えそう．
- この様子を

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$$

と書くことにする．これが極限概念である．

[*2] 微分による傾きの定義は次回以降登場する．