年　組　番　氏名

Introduction：数式の美しさ

文字が a, b, c と 3 つあっても，綺麗に循環している式は，因数分解の結果も綺麗な形になります。

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

このように，$a \to b \to c \to a$ の順に並べることを**輪環（りんかん）の順**といいます。一見複雑に見える式も，前回の「黄金ルール」を守れば必ず解けます。

対称式と交代式

(1) **対称式**：文字を入れ替えても元の式と同じになる式。
- 例：$a^2+b^2+c^2, \quad (a+b)(b+c)(c+a)$

(2) **交代式**：文字を入れ替えると符号が逆になる式。
- 例：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
- 重要：交代式は必ず $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数に持ちます。

例題 1：交代式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

$$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$$

考え方: a, b, c どの文字についても 2 次式です。黄金ルールに従い，a **について整理**（降べきの順）しましょう。

(1) 展開してバラバラにする。
(2) a^2 の項，a の項，定数項に分ける。
(3) 共通因数が見えるはず！

Memo / Answer

例題 2：対称式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$

考え方: これも a,b,c すべて対等です。a について整理しましょう。

$$\{\underbrace{(b+c)}_{\text{係数}}a+bc\}(b+c)+abc$$

全部展開するのは大変なので，a がある部分とない部分を見極めて展開します。最後は**たすき掛け**になります。

Memo / Answer

Topic：3 文字の 3 乗の因数分解

高校数学で最も長い因数分解の公式です。入試では「知っている前提」で出題されることが多い重要公式です。

3 乗の和の因数分解

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

覚え方：「(足して) (2 乗の和 - グルグル積)」

例題 3：公式の利用

次の式を因数分解せよ。

$$x^3+y^3-3xy+1$$

考え方: 項が 4 つあり，3 乗が 2 つ見えます。$1=1^3$ と見なすと，$a=x$，$b=y$，$c=1$ の形に見えませんか？

$$x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$$

公式に当てはめてみましょう。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 交代式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

練習 A2: 公式の利用

次の式を因数分解せよ。

$$a^3+b^3+8c^3-6abc$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 対称式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$

練習 B2: 公式の応用

次の式を因数分解せよ。

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

（ヒント：$x-y=A, y-z=B, z-x=C$ と置くと，$A+B+C=?$）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 a について整理する。

$$\text{与式} = a^2b - ab^2 + bc(b-c) + c^2a - ca^2$$
$$= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c)$$

共通因数 $(b-c)$ でくくる。

$$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$$

中括弧の中を因数分解（たすき掛け，または因数の発見）。

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

輪環の順に整理する。$(a-c) = -(c-a)$ に注意。

$$\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

A2 公式 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ において，$X=a$，$Y=b$，$Z=2c$ と考える。

$$a^3+b^3+(2c)^3-3(a)(b)(2c)$$

公式に代入。

$$(a+b+2c)\{a^2+b^2+(2c)^2-ab-b(2c)-(2c)a\}$$
$$= \boldsymbol{(a+b+2c)(a^2+b^2+4c^2-ab-2bc-2ca)}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 a について整理する。

$$a(b+c)^2 + \{b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)\} - 4abc$$

a^2 の項：$ba^2+ca^2=(b+c)a^2$ a の項：$a(b+c)^2+2bca+2bca-4abc=a(b+c)^2$ 定数項：$bc^2+cb^2=bc(b+c)$ よって，

$$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$

共通因数 $(b+c)$ でくくる。

$$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$

中身を因数分解。

$$(b+c)(a+b)(a+c)$$

答え：$\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

B2 $x-y=A$，$y-z=B$，$z-x=C$ と置く。与式 $=A^3+B^3+C^3$。ここで，$A+B+C=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ である。公式より，

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$

$A+B+C=0$ なので，右辺は 0 になる。

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=0 \quad \therefore A^3+B^3+C^3=3ABC$$

よって，

$$\text{与式} = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

答え：$\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}$