

P.56~P.61

a, b を定数とし, 確率変数 X が次の確率分布に従っているとする.

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	計
P	p_1	p_2	\cdots	p_n	1

♣期待値の性質

性質 ($aX + b$ の期待値)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

解釈

$x_1 \sim x_n$ が全て a 倍されたら, 期待値も a 倍. 全て $+b$ されたら, 期待値も $+b$.

証明

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= (ax_1 + b) \cdot p_1 + (ax_2 + b) \cdot p_2 + \cdots + (ax_n + b) \cdot p_n \\ &= a \underbrace{(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n)}_{=E(X)} + b \underbrace{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}_{\text{確率の総和は 1}} \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

練習 4

1 個のサイコロを投げて出る目を X とする. X は確率変数となり, $E(X) = \frac{7}{2}$ である. 次の確率変数の期待値を求めよ.

- (1) $X + 2$ (2) $4X - 1$ (3) $-3X$

解答

定義 (X^2 の期待値)

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n \left(= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k \right).$$

説明

X^2 は X の各値を 2 乗した値たちのこと.

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	計		X^2	x_1^2	x_2^2	\cdots	x_n^2	計
P	p_1	p_2	\cdots	p_n	1	\rightarrow	P	p_1	p_2	\cdots	p_n	1

練習 5

2 枚の硬貨を同時に投げて表が出る硬貨の枚数を X とするとき, X^2 の期待値を求めよ.

解答

確率分布	X	0	1	2	計		X^2	0 ²	1 ²	2 ²	計
	P				1	\rightarrow	P				1

♣分散の定義

定義

X の期待値を m であるとする．次で定義される値 $V(X)$ を X の分散と呼ぶ．

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - m)^2) \\ &= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n \\ &\left(= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k \right) \end{aligned}$$

♠全体課題

全体課題 pre

A と B,2 つのゲームがあり，どちらのゲームも,1 個のサイコロを振って出た目に応じて賞金が決まります．あなたはどちらのゲームに参加しますか．

- | | |
|------------------|----------------|
| ● ゲーム A | ● ゲーム B |
| – 1,2,3 の目:100 円 | – 1,2,3 の目:0 円 |
| – 4 の目:200 円 | – 4 の目:100 円 |
| – 5,6 の目:300 円 | – 5,6 の目:500 円 |

解答

全体課題 post

A と B,2 つのゲームがあります．あなたはどちらのゲームに参加しますか．「分散」と「リスク」に言及して解答せよ．

- | | |
|------------------|----------------|
| ● ゲーム A | ● ゲーム B |
| – 1,2,3 の目:100 円 | – 1,2,3 の目:0 円 |
| – 4 の目:200 円 | – 4 の目:100 円 |
| – 5,6 の目:300 円 | – 5,6 の目:500 円 |

解答

♠ エキスパート A 「分散とは何か」

目標 A

分散が「散らばり」を表す量であることを理解し，説明できる．

例

次の 2 つのゲームを考えてみよう．

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ● ゲーム A (安定型) <ul style="list-style-type: none"> － 1 等 (確率 30%):600 円 － 2 等 (確率 40%):500 円 － 3 等 (確率 30%):400 円 | <ul style="list-style-type: none"> ● ゲーム B (ハイリスク型) <ul style="list-style-type: none"> － 1 等 (確率 5%):5,000 円 － 2 等 (確率 25%):1,000 円 － 3 等 (確率 70%):0 円 |
|---|---|

- ゲーム A,B ともに賞金 X の期待値 $m(=E(X))$ は $m =$ _____
- A, B それぞれ表にまとめると,,,

賞金 X_A	確率 P	偏差 $X_A - m$	偏差の 2 乗 $(X_A - m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))	
600					
500					
400					
合計	1				
賞金 X_B	確率 P	偏差 $X_B - m$	偏差の 2 乗 $(X_B - m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))	
5000					
1000					
0					
合計	1				

- より分散が大きいのは，【 A / B 】．

まとめ

「偏差」のみでは表現できない「散らばり」度合いを，2 乗を用いて表現したものが分散である．

♠ エキスパート B 「分散と期待値の関係式」

目標 B

関係式 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ の導出を理解し，活用方法を説明できる．

性質

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

証明

確率変数 X の期待値 $E(X)$ を m とおくと^a，分散の定義から，

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2mx_k + m^2) p_k \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 p_k - 2mx_k p_k + m^2 p_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - \underbrace{2m \sum_{k=1}^n x_k p_k}_{=m} + \underbrace{m^2 \sum_{k=1}^n p_k}_{=1} \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m^2 + m^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - m^2 \\
 &= E(X^2) - (E(X))^2 .
 \end{aligned}$$

^a $m = E(X)$ とおくということ． $E(X)$ だと式全体が複雑に見えるから m と書き換えよう，くらいの気分．

説明

- 全体課題のゲーム A,B の期待値はどちらも _____ . ← 分数
- ところで分散の定義は

$$V(X) = E((X - m)^2) = \underbrace{(x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n}_{\text{それぞれの } m \text{ に分数を代入して計算するのはちょっと面倒}}$$

- そこで，この関係式を利用する．
- 全体課題において，ゲーム A,B それぞれについて， X^2 の期待値 $E(X_A^2)$ ， $E(X_B^2)$ は
 $E(X_A^2) =$ _____， $E(X_B^2) =$ _____ . ← 少しは計算が楽そう．