

Introduction：数学の「言葉」を学ぼう

高校数学へようこそ！ 最初は計算練習のように見えますが，ここでは「式を整理整頓する力」と「式のカタマリを見る力」を養います。複雑な式も，整理のルールに従えばシンプルに見えてきます。まずは用語の確認から始めましょう。

単項式と多項式・次数のルール

- (1) 単項式：数や文字の掛け算だけで作られた式（例： $3x^2$ ， $-2ab$ ）
- 次数：掛け合わせた文字の個数。
 - 係数：数の部分。
- (2) 多項式：単項式の和で表された式（例： $x^2 + 2x + 1$ ）
- 次数：最も次数の高い項の次数。
 - 定数項：文字を含まない項。
- (3) 重要：特定の文字に着目する
- 「 x についての式」と見なす場合，他の文字（ a や y ）はただの数字（定数）として扱う。

例題 1：次数と係数

単項式 $-2ax^2y^3$ について，次の文字に着目したときの係数と次数を答えよ。

- (1) x
- (2) y
- (3) x と y

考え方: 着目した文字以外はすべて「係数（数字扱い）」として答えます。

- (1) x に着目 → x は 2 個 → 次数 2。残りの $-2ay^3$ が係数。

Memo / Answer

降べきの順（こうべきのじゅん）

多項式を整理するときは，「次数の高い項から低い項へ」順に並べるのが基本マナーです。これを降べきの順といいます。

例： $3x + x^2 - 1 \xrightarrow{\text{整理}} x^2 + 3x - 1$

例題 2：降べきの順

多項式 $ax^3 + x^2 - 2x^2 + 5a - 1$ を， x について降べきの順に整理せよ。また， x についての何次式か答えよ。

Point: 同類項（文字の部分が同じ項）はまとめます。 $x^2 - 2x^2 = (1 - 2)x^2 = -x^2$ 定数項（ x がいない部分）もまとめて後ろに置きます。

Memo / Answer

展開の「視点」：カタマリを見つける

高校数学では、式の一部を「カタマリ」として捉え、別の文字（ A など）に置き換えて計算を楽にする技術が必須です。

展開の公式（3 項の平方）

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

導出： $a + b = A$ と置くと、 $(A + c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$ これを展開して整理すると得られます。

例題 3：置き換えによる展開

次の式を展開せよ。

- (1) $(a - b + c)^2$
- (2) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 3)$

考え方: (1) 公式の b を $-b$ に変えて当てはめるか、 $a - b = A$ と置く。(2) バラバラに展開すると $3 \times 3 = 9$ 回の掛け算が必要になり大変。共通部分 $x^2 + x$ を見つけ、 A と置いてみよう。

$$(A + 1)(A - 3) = A^2 - 2A - 3$$

最後に A を元に戻すのを忘れずに。

Memo / Answer

展開の「順序」：組み合わせの工夫

「計算は前から順番にやるもの」という思い込みを捨てましょう。掛け算の順序を変えることで、共通部分（カタマリ）を自分で作り出すことができます。

例題 4：ベストカップルを探せ!!

次の式を展開せよ。

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4)$$

ヒント: 適当に 2 つずつペアを作って展開し、同じ部分 ($x^2 + \square x$) ができる組み合わせを探します。

- $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$
- $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$

これだと共通部分ができません。和が等しくなるペア ($-1 + 4 = 3$, $-2 + 3 = 1 \dots$ 違うな) を探そう。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 次数と係数

単項式 $-5xy^2z^3$ について、次の文字に着目したときの係数と次数を答えよ。

- (1) y
- (2) y と z

練習 A2: 降べきの順

次の整式を x について降べきの順に整理し、次数と定数項を答えよ。

$2x^2 + y^2 - 3xy - 4 + x + 5y$

練習 A3: 基本的な置き換え

次の式を展開せよ。

$(x + 2y - 3)(x + 2y + 1)$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 3 項の平方

次の式を展開せよ。

$(x - 2y - 3z)^2$

練習 B2: 組み合わせの工夫

次の式を展開せよ。

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

練習 B3: 少し複雑な置き換え

次の式を展開せよ。

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1)$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) y に着目：

- 係数： $-5xz^3$
- 次数： 2 (y^2 なので)

(2) y と z に着目：

- 係数： $-5x$
- 次数： $2 + 3 = 5$ (y^2z^3 なので)

A2 x を含む項を次数順に並べ、係数をまとめる。

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3xy + x + y^2 + 5y - 4 \\ &= 2x^2 + (-3y + 1)x + (y^2 + 5y - 4) \end{aligned}$$

よって、

- 整理した式： $2x^2 - (3y - 1)x + y^2 + 5y - 4$
- 次数： 2
- 定数項： $y^2 + 5y - 4$

A3 $x + 2y = A$ と置く。

$$(A - 3)(A + 1) = A^2 - 2A - 3$$

A を元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 3 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 \end{aligned}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 公式 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ において、 $a = x$, $b = -2y$, $c = -3z$ として考える。

$$\begin{aligned} & x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2x(-2y) + 2(-2y)(-3z) + 2(-3z)x \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx \end{aligned}$$

B2 定数項の和が等しくなる組み合わせを作る。 $(1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5)$ なので、

$$\begin{aligned} & \{(x + 1)(x + 4)\} \times \{(x + 2)(x + 3)\} \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) \end{aligned}$$

ここで $x^2 + 5x = A$ と置く。

$$(A + 4)(A + 6) = A^2 + 10A + 24$$

元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 \\ &= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24 \\ &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \end{aligned}$$

B3 $x^2 - 2x = A$ と置く。

$$(A - 3)(A + 1) = A^2 - 2A - 3$$

元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$