年　　　組　　　番　氏名

## 1. 条件付き確率の定義

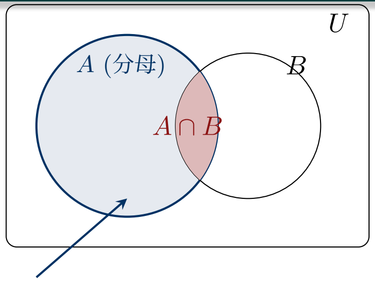
事象 $A$ が起こったという条件のもとで，事象 $B$ が起こる確率を**条件付き確率**といい，$\boldsymbol{P_A(B)}$ で表します．

### 条件付き確率の定義式

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

**【イメージ：分母の縮小】**

「全体 $U$」ではなく，「$A$ が起こった世界」を新たな全体と考えます．つまり，分母が $n(U)$ から $n(A)$ に縮小します．




ここ全体 $(A)$ の中で
赤い部分 $(A \cap B)$ の割合

### 例題 1. さいころの条件付き確率

1 個のさいころを投げて，「偶数の目が出る」事象を $A$,「3 以上の目が出る」事象を $B$ とする．

(1) 事象 $A$ が起こったときの事象 $B$ の確率 $P_A(B)$

(2) 事象 $B$ が起こったときの事象 $A$ の確率 $P_B(A)$

Memo / Answer

## 2. 「かつ」と「条件付き」の違い

文章表現の違いに注意しましょう．

- $\boldsymbol{P(A \cap B)}$ :「$A$ **かつ** $B$ が起こる確率」
  → 全体 $U$ に対する割合．
- $\boldsymbol{P_A(B)}$ :「$A$ **であるとき**，それが $B$ でもある確率」
  → $A$ に対する割合．

### 例題 2. 文章の読み取り

あるクラスの生徒 40 人のうち，男子は 25 人，眼鏡をかけている男子は 10 人である．このクラスから 1 人を選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 選ばれた人が,「男子」であり「かつ眼鏡をかけている」確率.

(2) 選ばれた人が「男子」であったとき，その人が「眼鏡をかけている」確率.

Memo / Answer

## Lecture Note：確率の乗法定理との関係

第 12 回で学んだ乗法定理 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ は，条件付き確率の定義式の分母を払った形です．

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

## 3. クロス集計表（カルノー図）

「男女 × 眼鏡」「数学好き × 英語好き」のような 2 つの属性が絡む問題では，ベン図よりも**表（クロス集計表）**を描くのが圧倒的に早くて確実です．

**表による解法**

- 行と列にそれぞれの属性を配置する．
- 問題文の数値を埋め，縦横の合計から空欄を埋める．
- $P_A(B)$ は，**「$A$ の行（または列）だけを見たときの $B$ の割合」**として読み取る．

| A＼B | $B$ (男) | $\bar{B}$ (女) | |
|---|---|---|---|
| $A$ (眼鏡) | $n(A \cap B)$ | $n(A \cap \bar{B})$ | |
| $\bar{A}$ (裸眼) | $n(\bar{A} \cap B)$ | $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ | 計 |

- $P(A \cap B)$ は 全体に対する $n(A \cap B)$
- $P_A(B)$ は $n(A)$ に対する $n(A \cap B)$

**例題 3. 表を使った計算**

ある高校の生徒 100 人を調べたところ，数学が好きな人は 60 人，英語が好きな人は 50 人，両方好きな人は 30 人であった．この中から 1 人選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 数学が好きな人が，英語も好きである確率．
(2) 英語が嫌いな人が，数学は好きである確率．

**Memo / Answer**

## Challenge：検査の陽性・陰性

「病気に感染している人が陽性と判定される確率」と「陽性と判定された人が実際に感染している確率」は全く別物です．これも表で解決します．

**例題 4. 検査キットの信頼性**

ある病気 $X$ にかかっている人は全体の 1% である．病気 $X$ を判定する検査キットは，

- 病気の人を正しく陽性と判定する確率が 90%
- 病気でない人を誤って陽性と判定する確率が 10%

であるとする．ある人がこの検査で「陽性」と判定されたとき，その人が実際に病気 $X$ にかかっている確率を求めよ．

**Memo / Answer**

ヒント：全体を 1000 人（または 10000 人）と仮定して，表（人数）を作るとわかりやすい．

| | 病気 (1%) | 健康 (99%) | 計 |
|---|---|---|---|
| 陽性 | | | |
| 陰性 | | | |
| 計 | 10 人 | 990 人 | 1000 人 |

## 確認テスト A（基本）

### 練習 1：条件付き確率の定義

1 から 10 までの番号札から 1 枚引く．引いた札が「偶数」であるという条件のもとで，それが「3 の倍数」である確率を求めよ．

### 練習 2：男女とスポーツ

あるサークルのメンバーは 40 人で，男子は 25 人，女子は 15 人である．テニス経験者は男子 15 人，女子 5 人である．このサークルから 1 人選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 選ばれた人が男子であったとき，テニス経験者である確率．
(2) 選ばれた人がテニス経験者であったとき，女子である確率．

Memo / Answer

## 確認テスト B（標準・応用）

### 練習 3：表の活用

生徒 50 人のクラスで，犬が好きな人は 30 人，猫が好きな人は 25 人，両方好きな人は 15 人である．このクラスから 1 人選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 犬が好きでない人が，猫は好きである確率．
(2) 猫が好きでない人が，犬も好きでない確率．

### 練習 4：当たりくじの推測

箱の中に当たりくじが 2 本，はずれくじが 8 本入っている．A 君が 1 本引き，戻さずに B 君が 1 本引いた．B 君が「当たりだ！」と言ったとき（B が当たったとき），A 君も当たっていた確率を求めよ．

Memo / Answer

## 【解答】確認テスト A

Memo / Answer

**1**

事象 $A$: 偶数 $\{2,4,6,8,10\}$ $(n(A)=5)$ 事象 $B$: 3 の倍数 $\{3,6,9\}$ 共通部分 $A\cap B=\{6\}$ $(n(A\cap B)=1)$ 求める確率は $P_A(B)$ なので,

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

**2**

表をイメージする.

| | テニス有 | テニス無 | 計 |
|---|---|---|---|
| 男子 | 15 | 10 | **25** |
| 女子 | 5 | 10 | 15 |
| 計 | **20** | 20 | 40 |

(1)「男子 (25 人)」という条件での割合.

$$\frac{15}{25}=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

(2)「テニス経験者 (20 人)」という条件での割合.

$$\frac{5}{20}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

## 【解答】確認テスト B

Memo / Answer

**3**

表を作成する.

- 犬のみ：$30-15=15$
- 猫のみ：$25-15=10$
- 両方なし：$50-(15+15+10)=10$

| | 猫○ | 猫× | 計 |
|---|---|---|---|
| 犬○ | 15 | 15 | 30 |
| 犬× | **10** | **10** | **20** |
| 計 | 25 | **25** | 50 |

(1) 分母は「犬× (20)」. その中で「猫○ (10)」. $\frac{10}{20}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) 分母は「猫× (25)」. その中で「犬× (10)」. $\frac{10}{25}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

**4**

事象 $A$: A が当たる, 事象 $B$: B が当たる. 求めるのは $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

- $P(A\cap B)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{90}$
- $P(B)$ は, A が当たり B も当たる＋ A がはずれ B が当たる. くじ引きの公平性より $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{18}{90}$. (計算：$\frac{2}{90}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{18}{90}$)

よって,

$$\frac{2/90}{18/90}=\frac{2}{18}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$