1. 共役 (きょうやく) な複素数

虚部の符号を変えたペア

複素数 $z = a + bi$ に対して，虚部の符号を変えた複素数 $a - bi$ を，z の**共役な複素数**といい，記号 $\bar{z}$ で表す．

$$z = a + bi \text{ のとき，}\quad \bar{z} = \boldsymbol{a - bi}$$

性質：和と積が実数になるこのペアは非常に仲が良く，足しても掛けても i が消える．

- **和**: $(a+bi)+(a-bi)=2a$　(実数)
- **積**: $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2(-1)=\boldsymbol{a^2+b^2}$　(実数)

例題 1（共役な複素数）

次の複素数の共役な複素数をいえ．また，もとの複素数との積を求めよ．

(1) $3+2i$
(2) $5i$
(3) -4

Memo / Answer

2. 複素数の除法

分母の実数化

複素数の割り算（分数）は，**分母の共役な複素数**を分母・分子に掛けることで，分母を実数にして計算する．これは平方根の「有理化」と同じ発想である．

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

(公式として覚えるのではなく，**「共役を掛ける」手順**を覚えること!)

例題 2（分母の実数化）

次の式を $a+bi$ の形で表せ．

(1) $\dfrac{1+2i}{3+i}$
(2) $\dfrac{5}{2-i}$

計算のコツ

- 分母は $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ なので，瞬時に計算できるようにしよう．
- 約分を忘れないように注意．

Memo / Answer

3. 解の公式再訪

虚数解の出現

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

において，ルートの中身 $b^2-4ac<0$ となる場合，負の数の平方根（虚数）を用いることで解を表すことができる．

- これまでは → **「解なし」**（実数解をもたない）
- これからは → **「異なる 2 つの虚数解」**

例題 3（虚数解を持つ 2 次方程式）

次の 2 次方程式を解け．

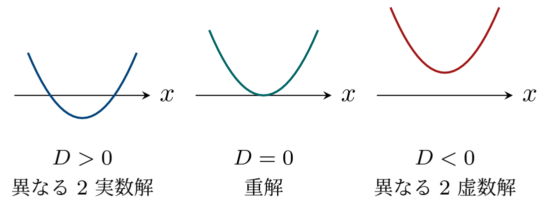
(1) $x^2+x+1=0$
(2) $2x^2-4x+3=0$

Memo / Answer

判別式再訪

定理：判別式 D (Discriminant)

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の種類は，判別式 $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ の符号で決まる．



- $D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解
- $D=0 \iff$ ただ 1 つの実数解（重解）
- $D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解

※ **偶数公式:** x の係数が偶数 $(2b')$ の時は $\dfrac{D}{4}=(b')^2-ac$ を利用する．

例題 4（解の種類の判別）

次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $x^2-3x-5=0$
(2) $4x^2-12x+9=0$
(3) $x^2+2x+4=0$

Memo / Answer

確認テスト (問題)

練習 A1（共役な複素数）

次の複素数の共役な複素数を答えよ.

(1) $1-i$

(2) $\sqrt{3}+i$

(3) $-3i$

練習 A2（計算練習）

次の式を計算し, $a+bi$ の形で表せ.

(1) $\dfrac{2-i}{1+i}$

(2) $\dfrac{1}{i}$

(3) $\dfrac{3+2i}{2-3i}$

Memo / Answer

練習 B1（方程式への応用）

等式 $(1+i)x-(1-3i)y=-1+i$ を満たす実数 x, y の値を求めよ.

Hint

左辺を計算して (実部)+(虚部)i の形に整理し, 両辺の係数を比較する. あるいは, x, y が混ざっているのが嫌なら連立方程式とみることもできる.

練習 B2（式の値の工夫）

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき, x^2-x+1 の値を求めよ.

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト (問題)

練習 A3（基本：2 次方程式の解法）

次の 2 次方程式を解け．

(1) $3x^2+5x-2=0$
(2) $x^2-2x+5=0$
(3) $2x^2+3x+2=0$

練習 A4（基本：解の判別）

次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $2x^2-x+3=0$
(2) $9x^2+6x+1=0$
(3) $x^2-\sqrt{5}x+1=0$

Memo / Answer

練習 B3（標準：条件を満たす定数）

2 次方程式 $x^2-4x+k=0$ が次のような解を持つように，定数 k の値または範囲を定めよ．

(1) 異なる 2 つの実数解を持つ
(2) 重解を持つ（また，そのときの重解を求めよ）
(3) 異なる 2 つの虚数解を持つ

練習 B4（発展：グラフとの融合）

2 次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の解を求めよ．また，2 次関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフを書き，頂点の座標を求めよ．(x 軸と共有点を持たないことを確認しよう)

Memo / Answer

確認テスト (解答・解説)

練習 A1（共役な複素数）

次の複素数の共役な複素数を答えよ．

(1) $1-i$
(2) $\sqrt{3}+i$
(3) $-3i$

練習 A2（計算練習）

次の式を計算し，$a+bi$ の形で表せ．

(1) $\dfrac{2-i}{1+i}$
(2) $\dfrac{1}{i}$
(3) $\dfrac{3+2i}{2-3i}$

Memo / Answer

A1

(1) 虚部の符号を変えるので $\mathbf{1+i}$
(2) $\boldsymbol{\sqrt{3}-i}$
(3) $0-3i$ と考えると $\mathbf{3i}$

A2

(1) $\dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i-i+i^2}{1+1}=\dfrac{1-3i}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}$
(2) $\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=\boldsymbol{-i}$
(3) $\dfrac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{6+9i+4i+6i^2}{4+9}=\dfrac{13i}{13}=\boldsymbol{i}$

練習 B1（方程式への応用）

等式 $(1+i)x-(1-3i)y=-1+i$ を満たす実数 x,y の値を求めよ．

Hint

左辺を計算して (実部)+(虚部)i の形に整理し，両辺の係数を比較する．あるいは，x,y が混ざっているのが嫌なら連立方程式とみることもできる．

練習 B2（式の値の工夫）

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，x^2-x+1 の値を求めよ．

Memo / Answer

B1

左辺を整理すると，$(x-y)+(x+3y)i=-1+i$
x,y は実数だから，実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+3y=1 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}}$

B2

与式より $2x=1+\sqrt{3}i \iff 2x-1=\sqrt{3}i$．
両辺を 2 乗して，$(2x-1)^2=-3$
$4x^2-4x+1=-3 \iff 4x^2-4x+4=0$
全体を 4 で割ると $\boldsymbol{x^2-x+1=0}$．
よって求める値は $\mathbf{0}$．

年　組　番　氏名

確認テスト (解答・解説)

練習 A3（基本：2 次方程式の解法）

次の 2 次方程式を解け．

(1) $3x^2+5x-2=0$
(2) $x^2-2x+5=0$
(3) $2x^2+3x+2=0$

練習 A4（基本：解の判別）

次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ．

(1) $2x^2-x+3=0$
(2) $9x^2+6x+1=0$
(3) $x^2-\sqrt{5}x+1=0$

Memo / Answer

A3

(1) 因数分解できる．$(x+2)(3x-1)=0$ より $\boldsymbol{x=-2,\ \frac{1}{3}}$

(2) 解の公式より $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{2\pm4i}{2}=\boldsymbol{1\pm2i}$

(3) 解の公式より $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-16}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}}$

A4

(1) $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot3=1-24=-23<0$．よって**異なる 2 つの虚数解**．
(2) $D/4=3^2-9\cdot1=9-9=0$．よって**ただ 1 つの実数解（重解）**．
(3) $D=(-\sqrt{5})^2-4\cdot1\cdot1=5-4=1>0$．よって**異なる 2 つの実数解**．

練習 B3（標準：条件を満たす定数）

2 次方程式 $x^2-4x+k=0$ が次のような解を持つように，定数 k の値または範囲を定めよ．

(1) 異なる 2 つの実数解を持つ
(2) 重解を持つ（また，そのときの重解を求めよ）
(3) 異なる 2 つの虚数解を持つ

練習 B4（発展：グラフとの融合）

2 次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の解を求めよ．また，2 次関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフを書き，頂点の座標を求めよ．

Memo / Answer

B3

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$．

(1) $D>0$ より $4-k>0 \iff \boldsymbol{k<4}$
(2) $D=0$ より $4-k=0 \iff \boldsymbol{k=4}$．
　このとき方程式は $x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0$ より，重解は $\boldsymbol{x=2}$．
(3) $D<0$ より $4-k<0 \iff \boldsymbol{k>4}$

B4

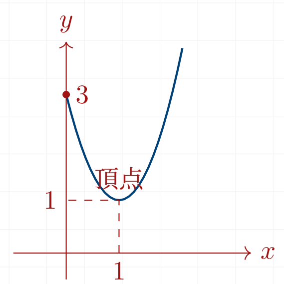
解の公式より

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}}$$

平方完成を行うと，

$$y=2(x^2-2x)+3=2\{(x-1)^2-1\}+3=2(x-1)^2+1$$

よって，**頂点 (1, 1)，下に凸の放物線**．



グラフが x 軸より上にある（共有点なし） $\iff$ 虚数解を持つ．