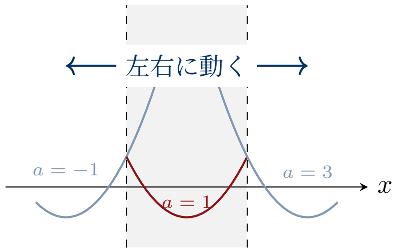
年　組　番　氏名

Introduction：動くグラフと固定された定義域

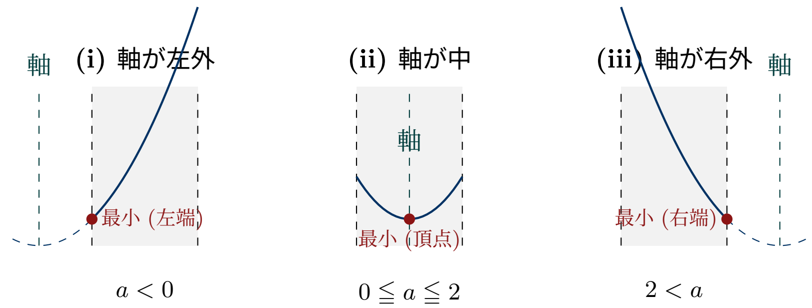
関数 $y=(x-a)^2$ のグラフを考えます。頂点は $(a,0)$ です。a の値が変化すると，グラフは左右に動きます。
しかし，定義域（x の変域）が $0 \leqq x \leqq 2$ で固定されているとどうなるでしょうか？ グラフの動きによって，「切り取られる部分」が変わり，その結果**「どこで最小となるか」**が変わってしまいます。



定義域 $0 \leqq x \leqq 2$

下に凸の最小値：3 つのパターン

軸（頂点）の位置によって，最小値をとる場所は次の 3 つに分類されます。



例題 1：具体的な数値での確認

関数 $y=(x-a)^2+2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ について，次のそれぞれの a の値のとき，グラフを描いて最小値を求めよ。

(1) $a=-1$ （軸が左に外れる）
(2) $a=1$ （軸が中にある）
(3) $a=3$ （軸が右に外れる）

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

場合分け問題の解答の書き方

「a の値によって答えが変わる」ため，答えも 3 通りに分けて記述します。

- **いつ (When)**：どのような a の範囲のとき
- **どこで (Where)**：x がいくつのとき
- **いくら (How much)**：最小値は何になるか

このセットを記述することがゴールです。

例題 2：文字定数を含む最小値

関数 $y = (x-a)^2 + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を，a の値で場合分けをして求めよ。

ヒント: 軸は直線 $x = a$ です。この a が定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の「左」「中」「右」のどこにあるかで分けます。

(1) $a < 0$ のとき $\longrightarrow$ グラフは左寄り $\longrightarrow$ $x = 0$ で最小
(2) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき $\longrightarrow$ 軸は中 $\longrightarrow$ 頂点 $x = a$ で最小
(3) $2 < a$ のとき $\longrightarrow$ グラフは右寄り $\longrightarrow$ $x = 2$ で最小

Memo / Answer

年　組　番　氏名

A 問題：基礎確認

関数 $y=(x-a)^2 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$ について，以下の問いに答えよ。

練習 A1: グラフと最小値

次のそれぞれの a の値のとき，最小値を与える x の値と，最小値を求めよ。

(1) $a=0$
(2) $a=2$
(3) $a=4$

練習 A2: 状況の把握

最小値が頂点 $(a,0)$ となるのは，a がどのような範囲にあるときか。

Memo / Answer

B 問題：場合分けの実践

練習 B1: 最小値の場合分け

関数 $y=(x-a)^2+1 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ の最小値を，次の 3 つの場合に分けて求めよ。

(1) $a<0$ のとき
(2) $0 \leqq a \leqq 4$ のとき
(3) $4<a$ のとき

練習 B2: 一般形の処理

関数 $y=x^2-2ax+a^2+1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 定義域は $1 \leqq x \leqq 3$。

(1) $a = 0$（軸 $x = 0$ は左外）
グラフは定義域内で単調増加。
$x = 1$ (左端) で最小値 $(1 - 0)^2 = \mathbf{1}$

(2) $a = 2$（軸 $x = 2$ は定義域内）
頂点が定義域に含まれる。
$x = 2$ (頂点) で最小値 $(2 - 2)^2 = \mathbf{0}$

(3) $a = 4$（軸 $x = 4$ は右外）
グラフは定義域内で単調減少。
$x = 3$ (右端) で最小値 $(3 - 4)^2 = \mathbf{1}$

A2 最小値が頂点となるのは，軸 $x = a$ が定義域 $1 \leqq x \leqq 3$ の中に含まれるときである。
よって，$\mathbf{1 \leqq a \leqq 3}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 軸は $x = a$，定義域は $0 \leqq x \leqq 4$。

(1) $a < 0$ **のとき（軸は左外）**
$x = 0$ で最小となる。
最小値 $y = (0 - a)^2 + 1 = \boldsymbol{a^2 + 1}$

(2) $0 \leqq a \leqq 4$ **のとき（軸は中）**
$x = a$ で最小となる。
最小値 $y = (a - a)^2 + 1 = \mathbf{1}$ (頂点の y 座標)

(3) $4 < a$ **のとき（軸は右外）**
$x = 4$ で最小となる。
最小値 $y = (4 - a)^2 + 1 = \boldsymbol{a^2 - 8a + 17}$

B2 まず平方完成する。

$$y = (x - a)^2 - a^2 + a^2 + 1 = (x - a)^2 + 1$$

軸は $x = a$，頂点は $(a, 1)$。定義域は $0 \leqq x \leqq 2$。
(i) $a < 0$ **のとき** (軸が左)
$x = 0$ で最小値 $0^2 - 0 + a^2 + 1 = \boldsymbol{a^2 + 1}$
(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ **のとき** (軸が中)
$x = a$ (頂点) で最小値 $\mathbf{1}$
(iii) $2 < a$ **のとき** (軸が右)
$x = 2$ で最小値 $2^2 - 4a + a^2 + 1 = \boldsymbol{a^2 - 4a + 5}$