P.62〜 P.66

基本事項

- 2 つの確率変数 $X,\ Y$ について，X が x という値をとり，かつ，Y が y という値を取る確率を $P(X=x,\ \ Y=y)$ と書き

$$(X,\ Y)\ \rightarrow\ P(X=x,\ \ Y=y)$$

の対応関係を $X,\ Y$ の________________という．

例

大小 2 つの歪みのないさいころの出る目を $X,\ Y$ とし，目の和 $X+Y$ の確率分布を考える．

- $X,\ Y$ の確率分布はそれぞれ，

X	1	2	3	4	5	6	計
P							1

Y	1	2	3	4	5	6	計
P							1

- $X+Y$ のとりうる値を表にすると，

$X\ /\ Y$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- よって $X+Y$ の確率分布は

$X+Y$	1	2	3	4	5	$\cdots$	12	計
P	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\frac{\quad}{36}$	$\cdots$	$\frac{\quad}{36}$	1

- ちなみにこの期待値 $E(X+Y)$ は，

$$E(X+Y)=$$

全体課題 pre

次のルールのゲームに参加する．

- 確率変数 X を次で定める．
  - サイコロ 1 個を投げ，偶数なら $X=1$, 奇数なら $X=0$.
- 次に，確率変数 Y を次で定める．
  - $X=1$ ならもう一度サイコロを振り，でた目を Y とする．
  - $X=0$ なら，サイコロを振らずに，$Y=0$ とする．
- 最後に, 2 種類 $Z_1,\ Z_2$ を $Z_1=100X+50Y,\ Z_2=5000XY$ (円) で定める．

あなたなら賞金 $Z_1,\ Z_2$ のどちらを選ぶか．

解答

全体課題 post

次のルールのゲームに参加する．

- 確率変数 X を次で定める．
  - サイコロ 1 個を投げ，偶数なら $X=1$, 奇数なら $X=0$.
- 次に，確率変数 Y を次で定める．
  - $X=1$ ならもう一度サイコロを振り，でた目を Y とする．
  - $X=0$ なら，サイコロを振らずに，$Y=0$ とする．
- 最後に, 2 種類 $Z_1,\ Z_2$ を $Z_1=100X+50Y,\ Z_2=5000XY$ (円) で定める．

あなたなら賞金 $Z_1,\ Z_2$ のどちらを選ぶか．$Z_1,\ Z_2$ の期待値を根拠に判断せよ．

解答

♠ エキスパート A「期待値の加法性」

目標 A

期待値の加法性 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ の導出を理解し，問題への活用方法を説明できる．

主張と証明

$\boxed{\text{主張}}$ 2 つの確率変数 $X,\ Y$ について $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

$\boxed{\text{証明}}$ (簡単のため，確率変数の取りうる値はそれぞれ 2 つであるとする．)
$X,\ Y$ がそれぞれ次の確率分布に従っているとする．

X	x_1	x_2	計
P	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	1

Y	y_1	y_2	計
P	$P(Y=y_1)$	$P(Y=y_2)$	1

このとき，$X+Y$ の取りうる値は ＿＿＿＿，＿＿＿＿，＿＿＿＿，＿＿＿＿ の 4 つ．
よって期待値 $E(X+Y)$ は

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &\overset{(イ)}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}}_{2\times 2\ \text{の計 4 つ}} (x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j)\\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} x_iP(X=x_i,\ Y=y_j)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} y_jP(X=x_i,\ Y=y_j)\\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}}_{\text{足す順番を入れ替えた}} x_iP(X=x_i,\ Y=y_j)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} y_jP(X=x_i,\ Y=y_j)\\
&\overset{(ロ)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{2} x_i\sum_{j=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)}_{x_i\text{はここでは定数．ので外に出した}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{2} y_j\sum_{i=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)}_{y_j\text{はここでは定数．ので外に出した}}\\
&\overset{(ハ)}{=} \sum_{i=1}^{2} x_iP(X=x_i)+\sum_{j=1}^{2} y_jP(Y=y_j)\\
&= E(X)+E(Y).\text{(証明終わり)}
\end{aligned}$$

- (イ) の式変形で $\sum$ を 2 つ使う理由は，1 つだと

$$\sum_{i=1}^{2}(x_i+y_i)P(X=x_i,\ Y=y_i)=(x_1+y_1)P(X=x_1,\ Y=y_1)+(x_2+y_2)P(X=x_2, Y=y_2)$$

  となってしまう．
- (ロ) の式変形では，$\sum_{j=1}^{2}$ の中で x_i は【 定数 (ボーナス) / 変数 (選手) 】だから外に出せる．
- (ハ) の式変形ではこんなことをしている．

$$\sum_{j=1}^{2}P(X=x_i,\ Y=y_j)=\underbrace{P(X=x_i,\ Y=y_1)+P(X=x_i,\ Y=y_2)}_{Y\ \text{は}\ y_1,y_2\text{が全事象．足したら}\ Y\ \text{については確率}\ 1 (Y\ \text{については無条件})}=\underbrace{P(X=x_i)}_{\text{ので}\ X\ \text{の条件だけが残る．}}$$

説明

- この性質は，より多変数でも成り立つ (例えば $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$).
- この性質を使えば，先の例のように $X+Y$ の分布を求めずとも，$E(X)$ と $E(Y)$ の値から $E(X+Y)$ がわかる．

♠ エキスパート B「期待値の積と独立性」

目標 B

期待値の積の性質 $E(XY)=E(X)E(Y)$ が限られた場合でしか成り立たないことを具体例から理解し (証明は今回は省略)，問題への活用方法を説明できる．

例

1 回のコイン投げと 1 回のサイコロふりで，
- 確率変数 X: 表なら 1，裏なら 0.
- 確率変数 Y: サイコロが偶数なら 1, 奇数なら 0
- 確率変数 Z: サイコロの出目によらず,X と同じ値をとる $(Z=X)$.

とする．

- X の期待値 $E(X)$ は $E(X)=$＿＿＿＿.
- Y の期待値 $E(Y)$ は $E(Y)=$＿＿＿＿.
- Z の期待値 $E(Z)$ は $E(Z)=$＿＿＿＿.
- 確率変数 XY の確率分布は

XY	0	1	計
P			1

  であるから，期待値 $E(XY)$ は $E(XY)=$＿＿＿＿.
- 確率変数 XZ の確率分布は

XZ	0	1	計
P			1

  であるから，期待値 $E(XZ)$ は $E(XZ)=$＿＿＿＿.

以上より,
- $E(XY)=E(X)E(Y)$ は【 成り立つ / 成り立たない 】.
- $E(XZ)=E(X)E(Z)$ は【 成り立つ / 成り立たない 】.
- この違いは，2 つの確率変数 X と Y が【 互いに独立である (無関係) / 独立ではない 】であるのに対して，確率変数 X と Z は【 互いに独立である (無関係) / 独立ではない 】ことに由来する．

まとめ

期待値の積の性質 $E(XY)=E(X)E(Y)$ は，2 つ確率変数 X,Y が【 独立である / 独立ではない 】場合に成り立つ.