年　組　番　氏名

1. 天才ガウスの計算テクニック

1 から 100 までの数をすべて足すといくつになるか？

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

これを素直に足すのは大変だ．かつて少年時代のガウスは，この数列を**「ひっくり返して足す」**ことで一瞬で答えを出したという．

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & \boxed{1} & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 \\ S & = & \boxed{100} & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 \end{array}$$

縦に足す

「101」が 100 個できる

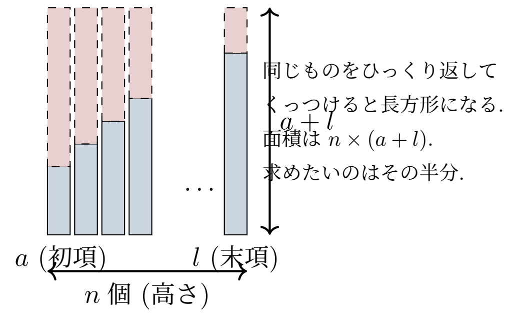
$$2S = 101 \times 100 = 10100$$
$$\therefore S = 5050$$

2. 等差数列の和の公式

ガウスのアイデアを一般化しよう．初項 a, 末項 l, 項数 n の等差数列の和 S_n は,

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

これは**台形の面積公式**「(上底 + 下底)× 高さ ÷2」と同じ形をしている．



等差数列の和

初項 a, 公差 d, 末項 l, 項数 n のとき

(1) **末項 l がわかる場合:**

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

(2) **末項 l が不明な場合** ($l = a + (n-1)d$ を代入):

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

例題 1 (基本計算)

初項 3, 末項 15, 項数 7 の等差数列の和を求めよ．

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

3. 末項がわからないときは？

問題文に「末項」が書いていない場合は, 公式 (2) を使うか, 自分で末項を求めてから (1) を使う.

例題 2 (公差が与えられた場合)

初項 10, 公差 -3 の等差数列の, 初項から第 20 項までの和を求めよ.

Memo / Answer

例題 3 (項数を自分で求める)

次の和を求めよ.

$$2+5+8+\cdots+101$$

ヒント：まずは一般項 a_n を求めて, 101 が第何項かを調べる.

Memo / Answer

注意点

等差数列の和の計算において, 最も多いミスは**「項数 n の数え間違い」**である. 必ず一般項 a_n を求めてから n を逆算する習慣をつけよう.

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (公式の確認)

次の等差数列の和を求めよ.

(1) 初項 4, 末項 20, 項数 9
(2) 初項 2, 公差 3 の等差数列の, 初項から第 10 項までの和

Memo / Answer

練習 A2 (整数の和)

1 から 50 までの自然数の和を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (項数を求める和)

次の数列の和を求めよ.

$$5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 101$$

Memo / Answer

練習 B2 (条件を満たす数の和)

100 以下の自然数のうち, 6 で割ると 1 余る数の総和を求めよ.
(ヒント: まず書き出してみて, 初項・末項・項数を調べる)

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

(1) 公式 $S=\frac{1}{2}n(a+l)$ より，

$$S=\frac{1}{2}\times 9\times(4+20)=\frac{9\times 24}{2}=9\times 12=\mathbf{108}$$

(2) 項数 $n=10$. 末項 $a_{10}=2+9\times 3=29$.

$$S=\frac{1}{2}\times 10\times(2+29)=5\times 31=\mathbf{155}$$

(別解: $S=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 2+9\cdot 3\}=5(4+27)=155$)

練習 A2 解答

初項 1, 末項 50, 項数 50 の等差数列の和である.

$$S=\frac{1}{2}\times 50\times(1+50)=25\times 51=\mathbf{1275}$$

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

初項 5, 公差 4 の等差数列である.

1. 一般項を求める $a_n=5+(n-1)4=4n+1$.

2. 項数を求める末項が 101 なので, $4n+1=101 \implies 4n=100 \implies n=25$. 項数は 25.

3. 和を計算する

$$S=\frac{1}{2}\times 25\times(5+101)=\frac{25\times 106}{2}=25\times 53=\mathbf{1325}$$

練習 B2 解答

6 で割ると 1 余る数: $1,7,13,19,\ldots$ これは初項 1, 公差 6 の等差数列である. 一般項は $a_n=1+(n-1)6=6n-5$.

1. 末項を求める 100 以下の最大のものを探す. $6n-5 \leqq 100 \implies 6n \leqq 105 \implies n \leqq 17.5$. よって項数は $n=17$. 末項は $a_{17}=6(17)-5=102-5=97$.

2. 和を計算する初項 1, 末項 97, 項数 17.

$$S=\frac{1}{2}\times 17\times(1+97)=\frac{17\times 98}{2}=17\times 49=\mathbf{833}$$