

## 1. 実数条件最大の武器「2乗」

絶対にマイナスにならない数

実数  $x$  について、最も重要な性質の一つがこれである。

$$x^2 \geq 0 \quad (\text{等号成立は } x = 0 \text{ のとき})$$

また、2乗の和についても同様である。

$$A^2 + B^2 \geq 0$$

これを利用すると、「平方完成」することで不等式を証明できる。

### 例題 1 (基本の平方完成)

不等式  $x^2 - 4x + 6 > 0$  を証明せよ。

Proof

「等号成立」とは？

不等式  $A \geq B$  において、 $A = B$  となる瞬間のことをいう。例えば  $x^2 \geq 0$  なら、 $x = 0$  のとき等号が成立する。

では、そもそもなぜ「等号成立」を考えなければいけないのか??

最年少は何歳??

全員の中で最年少と最年長が何歳なのかを知りたい。

- ・「全員 15 歳以上 ( $x \geq 16$ )」なら最年少は 15 歳であると【 言える / 言えない 】。
- ・「全員 16 歳未満 ( $x < 16$ )」なら最年長は 15 歳であると【 言える / 言えない 】。
- ・「全員 15 歳以上で、かつ、15 歳の人が少なくとも一人いる」なら最年少は 15 歳であると【 言える / 言えない 】。

→ 最小値や最大値の問題では、等号を成り立たせるような  $x$  の存在が極めて重要なのである。

## 2. 2変数の不等式

## 証明の流れ

- (1) (左辺) - (右辺) を計算する.
- (2) 平方完成して  $(\ )^2 + (\ )^2$  などの形を作る.
- (3) 実数の2乗は0以上であることを述べる.
- (4) 等号成立条件 ( $= 0$  になる時) を確認する.

## なぜ実数条件が必要?

もし虚数でもよいなら,  $x = i$  のとき  $x^2 = -1 < 0$  となり, この証明は崩壊する. 「2乗して0以上」は, 実数だけの特権なのである.

## 例題2 (2変数の不等式)

不等式  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  を証明せよ. また, 等号が成立するのはどのようなときか答えよ.

## Proof

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

ここで,  $x, y$  は実数であるから,  $(x - y)^2 \geq 0$ . よって,  $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) \geq 0$  より

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

等号が成立するのは,  $x - y = 0$ , すなわち  $x = y$  のときである.  $\square$

確認テスト

練習 A1 (常に正であることの証明)

不等式  $x^2 + 6x + 10 > 0$  を証明せよ.

Proof

練習 A2 (2変数の不等式)

不等式  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$  を証明せよ. また, 等号成立条件を求めよ.

Proof

**練習 B1 (応用: 平方の和)**

不等式  $a^2 + b^2 \geq ab$  を証明せよ。また、等号成立条件を求めよ。

**Hint**

$a$ について整理して平方完成する。 $a^2 - ba + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 = \dots$

**Proof****練習 B2 (絶対不等式)**

不等式  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  を証明せよ。(ヒント: 全体を2倍して  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$  を作り、 $(x - y)^2$ などの和に変形する)

**Proof**