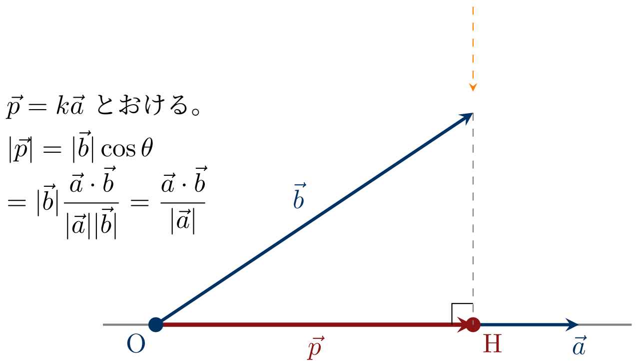
年　　組　　番　氏名

1. 正射影ベクトル (Orthogonal Projection)

あるベクトル $\vec{b}$ に光を当てたとき，もう一方のベクトル $\vec{a}$ 上にできる「影」のようなベクトルを**正射影ベクトル**という。「垂線の足」を求める計算において最強の道具となる。



正射影ベクトルの公式

ベクトル $\vec{b}$ の，ベクトル $\vec{a}$ 上への正射影ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

覚え方： $\vec{p}$ は $\vec{a}$ と平行なので $\vec{p} = k\vec{a}$ の形。係数は「内積 ÷ 大きさの 2 乗」。

例題 1

$\vec{a} = (1, 2, 2)$，$\vec{b} = (2, 5, -1)$ のとき，

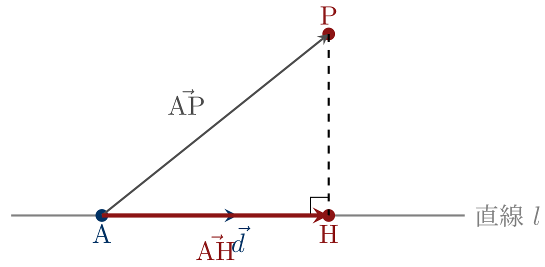
(1) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 上への正射影ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。
(2) $\vec{b} - \vec{p}$ の大きさを求めよ（これが $\vec{b}$ の始点から $\vec{a}$ への垂線の長さになる）。

Memo / Answer

2. 空間における点と直線の距離

点 P から直線 l（方向ベクトル $\vec{d}$，通過点 A）に下ろした垂線の足 H は，正射影ベクトルを使えば一発で求まる。

$$\vec{AH} = (\vec{AP} \text{ の } \vec{d} \text{ 上への正射影})$$



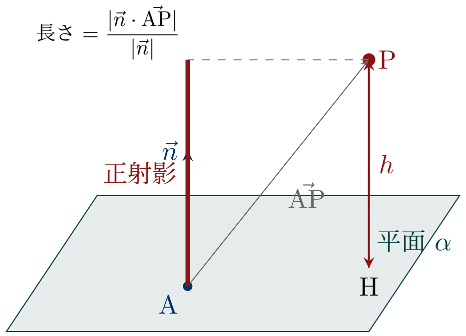
例題 2

点 A$(1, 0, 0)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d} = (2, 1, -2)$ の直線を l とする。原点 O から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標と，距離 OH を求めよ。

Memo / Answer

3. 点と平面の距離

点 P から平面 α（法線ベクトル $\vec{n}$）までの距離 h は，$\vec{n}$ 方向への正射影の大きさとして捉えることができる。



点と平面の距離（ベクトル形式）

点 A を通る平面（法線 $\vec{n}$）と，任意の点 P との距離 h は

$$h = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\vec{n}|}$$

これは $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の $\vec{n}$ 上への正射影ベクトルの大きさに等しい。これを成分計算すると，公式 $h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ が導かれる。

例題 3

4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,2,0)$, $\mathrm{B}(2,0,1)$, $\mathrm{C}(0,1,2)$ を頂点とする四面体 OABC について，以下の問に答えよ。

(1) $\triangle$OAB の面積 S を求めよ。
(2) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線の長さ h を求めよ。
(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ。

Memo / Answer

方針:
(1) $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$
(2) 平面 OAB の法線ベクトル $\vec{n}$ を求める（垂直条件 or 外積）。その後，距離の公式 $h = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}{|\vec{n}|}$ を使う。

参考：なぜ絶対値？

公式の分子に絶対値がついているのは，法線ベクトル $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角 θ が鈍角（$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$）になる場合，内積が負になるからである。距離は常に正の値でなければならない。

確認テスト A (基本)

練習 A1

$\vec{a} = (3, 4, 0)$，$\vec{b} = (5, 0, 10)$ とする。$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 上への正射影ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

練習 A2

点 $\mathrm{P}(1, -2, 3)$ と，平面 $2x - y + 2z + 5 = 0$ の距離 h を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

2 点 $\mathrm{A}(0, 1, 2)$, $\mathrm{B}(2, 3, 0)$ を通る直線 l がある。原点 O から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

練習 B2

空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 2)$ がある。

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 α の方程式を求めよ。
(2) 原点 O から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

$\vec{a}(3,4,0), \vec{b}(5,0,10)$ の正射影 $\vec{p}$

Memo / Answer

公式 $\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ を用いる。$|\vec{a}|^2 = 3^2+4^2+0^2 = 9+16 = 25$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 5 + 4\cdot 0 + 0\cdot 10 = 15$
係数は $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ よって $\vec{p} = \frac{3}{5}\vec{a} = \frac{3}{5}(3,4,0) = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 0)$ 答 $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 0)$

練習 A2

点 $(1,-2,3)$ と 平面 $2x-y+2z+5=0$ の距離

Memo / Answer

点と平面の距離の公式より $h = \dfrac{|2(1)-1(-2)+2(3)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|2+2+6+5|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{|15|}{\sqrt{9}} = \dfrac{15}{3} =$
5
答 5

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

直線 AB に原点から下ろした垂線の足 H

Memo / Answer

直線 AB の方向ベクトル $\vec{d} = \vec{\mathrm{AB}} = (2,2,-2)$。計算を楽にするため $\vec{d'} = (1,1,-1)$ を使う。
$\vec{\mathrm{AH}}$ は，$\vec{\mathrm{AO}}$ の $\vec{d'}$ 上への正射影ベクトルである。$\vec{\mathrm{AO}} = (0,-1,-2)$ $|\vec{d'}|^2 = 1+1+1 = 3$
$\vec{d'}\cdot\vec{\mathrm{AO}} = 1(0)+1(-1)+(-1)(-2) = 1$ よって $\vec{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{3}\vec{d'} = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3})$ $\vec{\mathrm{OH}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AH}} =$
$(0,1,2) + (\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}) = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3})$
答 $\mathrm{H}(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3})$

練習 B2

$\mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}(0,1,0), \mathrm{C}(0,0,2)$ (1) 平面 α (2) 垂線の足 H

Memo / Answer

(1) 切片形より $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1$ $2x+2y+z-2=0$ 答 $2x+2y+z-2=0$
(2) 平面の法線ベクトルは $\vec{n} = (2,2,1)$。直線 OH は原点を通り $\vec{n}$ に平行なので $\mathrm{H}(2k,2k,k)$
とおける。H は平面上にあるので代入：$2(2k)+2(2k)+k-2=0$ $4k+4k+k=2 \implies$
$9k=2 \implies k=\frac{2}{9}$ よって $\mathrm{H}(\dfrac{4}{9}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{2}{9})$
答 $\mathrm{H}(\dfrac{4}{9}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{2}{9})$