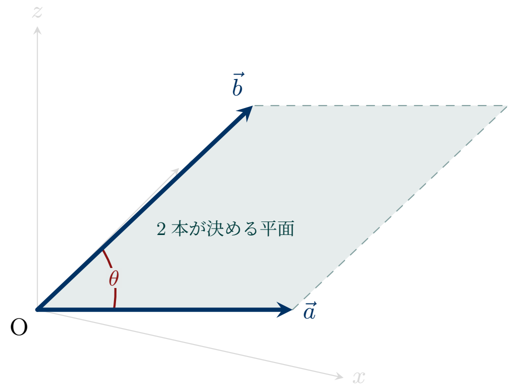
1. 内積の定義となす角

空間内の 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の始点を点 O にそろえると，一直線上にない限り，**これらを含む平面がただ 1 つ決まる**。空間の角度といっても，実際には**「その 2 本が乗っている平面（2 次元）」の上で測った角度**のことである。定義式は平面ベクトルの場合と全く変わらない。



内積の定義・成分による計算

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ とし，これらが作る平面上で測ったなす角を θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とする。

(1) **定義式**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

(2) **成分による計算**

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

例題 1

$\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$ のとき，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

Memo / Answer

2. ベクトルのなす角

内積の定義式を変形することで，なす角 θ を求めることができる。

なす角の公式

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

例題 2

$\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ のなす角 θ を求めよ。

Memo / Answer

3. 垂直条件

内積の応用の中で最も重要な性質である。空間図形において「垂直」を示すためには，内積が 0 であることを利用する。

垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

例題 3

$\vec{a} = (2, x, -1)$, $\vec{b} = (3, 1, 4)$ が垂直になるように，実数 x の値を定めよ。

Memo / Answer

4. 内積の性質と大きさ

ベクトルの大きさの計算では，2 乗して内積の形に展開する手法が空間でも有効である。

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

例題 4

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，次の値を求めよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2) $|2\vec{a} - \vec{b}|$

Memo / Answer

確認テスト A (基本)

練習 A1

$\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$ について，次の値を求めよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$
(2) なす角 θ

練習 A2

$\vec{a} = (3, 2, a)$, $\vec{b} = (2, -4, 1)$ が垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

2 点 $\mathrm{A}(2, 3, 1)$, $\mathrm{B}(3, 5, 2)$ と原点 O に対して，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを求めよ。

練習 B2

1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，辺 BC の中点を M とする。

(1) 内積 $\vec{\mathrm{OA}} \cdot \vec{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。
(2) $|\vec{\mathrm{AM}}|^2$ の値を計算することで，線分 AM の長さを求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

$\vec{a}=(2,-1,1),\ \vec{b}=(1,3,-2)$

Memo / Answer

(1) 内積の計算
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-1)\times3+1\times(-2)$
$=2-3-2=-3$
答 -3
(2) なす角の計算
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$
$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$
$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=\frac{-3}{\sqrt{84}}=\frac{-3}{2\sqrt{21}}$
$=\frac{-3\sqrt{21}}{42}=-\frac{\sqrt{21}}{14}$
答 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{14}$
(※ きれいな角度にならない場合は $\cos\theta$ の値でよい)

練習 A2

$\vec{a}=(3,2,a),\ \vec{b}=(2,-4,1)$ が垂直

Memo / Answer

垂直条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$3\times2+2\times(-4)+a\times1=0$
$6-8+a=0$
$a-2=0$
$a=2$
答 $a=2$

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

A$(2,3,1)$, B$(3,5,2)$, O の $\angle$AOB

Memo / Answer

$\vec{\mathrm{OA}}=(2,3,1),\ \vec{\mathrm{OB}}=(3,5,2)$
内積：$\vec{\mathrm{OA}}\cdot\vec{\mathrm{OB}}=2\cdot3+3\cdot5+1\cdot2=6+15+2=23$
大きさ：
$|\vec{\mathrm{OA}}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$
$|\vec{\mathrm{OB}}|=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}$
$\cos\theta=\frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{38}}=\frac{23}{\sqrt{532}}$
(※ 計算練習用の数値設定。入試では通常きれいな角度が出る)
答 $\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{23}{\sqrt{532}}$

練習 B2

1 辺 2 の正四面体 OABC。(1) $\vec{\mathrm{OA}}\cdot\vec{\mathrm{OB}}$　(2) AM の長さ

Memo / Answer

(1)
正四面体の面は正三角形だから $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$
$\vec{\mathrm{OA}}\cdot\vec{\mathrm{OB}}=|\vec{\mathrm{OA}}||\vec{\mathrm{OB}}|\cos60^\circ$
$=2\times2\times\frac{1}{2}=2$
答 2
(2)
M は BC の中点より $\vec{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{\mathrm{OB}}+\vec{\mathrm{OC}})$
$\vec{\mathrm{AM}}=\vec{\mathrm{OM}}-\vec{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\vec{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\vec{\mathrm{OC}}-\vec{\mathrm{OA}}$
$|\vec{\mathrm{AM}}|^2=|\frac{1}{2}\vec{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\vec{\mathrm{OC}}-\vec{\mathrm{OA}}|^2$
ここで，すべての辺の長さは 2，内積は (1) より 2 である。
$=\frac{1}{4}|\vec{\mathrm{OB}}|^2+\frac{1}{4}|\vec{\mathrm{OC}}|^2+|\vec{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{2}\vec{\mathrm{OB}}\cdot\vec{\mathrm{OC}}-\vec{\mathrm{OC}}\cdot\vec{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{OA}}\cdot\vec{\mathrm{OB}}$
$=\frac{1}{4}(4)+\frac{1}{4}(4)+4+\frac{1}{2}(2)-2-2$
$=1+1+4+1-2-2=3$
$|\vec{\mathrm{AM}}|>0$ より
答 $\sqrt{3}$