年　　組　　番　氏名

1. ドミノ倒しの設計図（復習）

私たちはこれまで，数列を「隣り合う項の関係式」から考えてきた．

数列の決定条件

数列を特定するためには，以下の 2 つが必要である．

(1) **初項** a_1: スタート地点

(2) **漸化式** $a_{n+1} = f(a_n)$: 次へ進むルール

これまでは一つ一つ計算して確かめてきたが，今回は**「式の形を見た瞬間に一般項の形を見抜く」**練習をする．これができれば，漸化式はただのパズルになる．

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\text{Rule}} a_2 \xrightarrow{\text{Rule}} a_3 \xrightarrow{\text{Rule}} \cdots$$

ルール (漸化式) の形から
数列の正体を特定せよ！

2. 知っておくべき 3 つの型

まずは基本となる 3 つのパターンを整理しよう．

漸化式の基本パターン

- **Type A: 等差型 (足し算)**

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (\text{定数})$$
$$\downarrow \text{公差 } d \text{ の等差数列}$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- **Type B: 等比型 (掛け算)**

$$a_{n+1} = r a_n \quad (\text{定数})$$
$$\downarrow \text{公比 } r \text{ の等比数列}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

- **Type C: 階差型 (変化する足し算)**

$$a_{n+1} = a_n + f(n) \quad (n \text{ の式})$$
$$\downarrow \text{階差数列が } f(n) \quad (n \geqq 2)$$
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

見極めのポイント

a_n に「何を足しているか」「何を掛けているか」に注目する．特に，**足すものが「定数」か「n の式」か**で Type A と Type C が分かれる．

年　組　番　氏名

3. 型の判別練習

式を見て，どのパターンか瞬時に判断し，一般項を求めよう．

例題 1 (基本の診断)

次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n$

Memo / Answer

例題 2 (階差型の診断)

次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 1$$

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (等差・等比型)

次の数列の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n + 4$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n$

Memo / Answer

練習 A2 (少し変形が必要な型)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n = -3$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (階差型 - 足すものが n の式)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + n$$

Memo / Answer

練習 B2 (階差型 - 足すものが指数の式)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3^n$$

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

(1) $a_{n+1} = a_n + (-2)$ と見れば, 公差 -2 の等差数列.

$$a_n = 3 + (n-1)(-2) = \boldsymbol{-2n+5}$$

(2) $a_{n+1} = (-3) \times a_n$ と見れば, 公比 -3 の等比数列.

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

例題 2 解答

$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ より, 階差数列 $b_n = 2n - 1$. $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $1^2 - 2(1) + 2 = 1$ (一致). **答え:** $\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 2}$

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(1) 公差 4 の等差数列. $a_n = 5 + (n-1)4 = \boldsymbol{4n+1}$.

(2) 公比 2 の等比数列. $a_n = \boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1}}$.

練習 A2 解答

移項すると $a_{n+1} = a_n - 3$. これは公差 -3 の等差数列である. $a_n = 1 + (n-1)(-3) = \boldsymbol{-3n+4}$.

練習 B1 解答

$a_{n+1} - a_n = n$. 階差数列が n. $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 + \frac{1}{2}(n-1)n$$

$$a_n = \frac{4 + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

$n = 1$ のとき $\frac{1-1+4}{2} = 2$ (一致). **答え:** $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 4)}$.

練習 B2 解答

$a_{n+1} - a_n = 3^n$. 階差数列が 3^n (等比数列). $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \quad \text{(初項 3, 公比 3, 項数 } n-1\text{)} \\ &= 1 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{2 + 3^n - 3}{2} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $\frac{3-1}{2} = 1$ (一致). **答え:** $\boldsymbol{a_n = \frac{3^n - 1}{2}}$.