実施日：　　　　　　　／50 点　氏名

【問題】 制限時間 30 分

第 1 (複素数の計算・10 点) 問

次の計算をし，$a+bi$ の形で答えよ．

(1) $(3-2i)^2$

(2) $\dfrac{5}{1-2i}$

Memo / Answer

第 2 (2 次方程式の解・10 点) 問

2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

Memo / Answer

第 3 (因数定理と高次方程式・15 点) 問

3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ が $x = 1$ と $x = 2$ を解にもつとき，以下の問いに答えよ．

(1) 定数 a, b の値を求めよ．

(2) 残りの解を求めよ．

Memo / Answer

第 4 (高次方程式とオメガ・15 点) 問

以下の問いに答えよ．

(1) 4 次方程式 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ を解け．

(2) 方程式 $x^3 = 1$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^5 + \omega^4 + 1$ の値を求めよ．

Memo / Answer

【解答・解説】

学習チェックリスト

間違えた問題に関連する項目をチェックしよう．

- ☐ 複素数の四則演算（特に分母の実数化）
- ☐ 解と係数の関係と対称式の変形
- ☐ 剰余の定理・因数定理の使い方
- ☐ 高次方程式の解法（因数分解・複二次式）
- ☐ 1 の 3 乗根 ω の性質 $(\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0)$

【解説】第 1 問

(1) 展開公式 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ を利用．

$$\begin{aligned}(3-2i)^2 &= 9-12i+4i^2\\ &= 9-12i-4\\ &= \mathbf{5-12}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

(2) 分母の共役な複素数 $1+2i$ を掛ける．

$$\begin{aligned}\frac{5}{1-2i} &= \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\\ &= \frac{5(1+2i)}{1^2+2^2}\\ &= \frac{5(1+2i)}{5} = \mathbf{1+2}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

【解説】第 2 問

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=4.$

(1)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= 3^2-2\cdot 4\\ &= 9-8=\mathbf{1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\ &= \mathbf{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

【解説】第 3 問

(1) $x=1,2$ を解にもつので，代入して成り立つ．

$$\begin{cases}1-4+a+b=0\\ 8-16+2a+b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a+b=3\\ 2a+b=8\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=5, b=-2}$

(2) 方程式は $x^3-4x^2+5x-2=0$. $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ で割り切れるので，筆算などで割り算を行うと，$(x-1)(x-2)(x-1)=0$ となる．よって残りの解は $\boldsymbol{x=1}$ (重解).

【解説】第 4 問

(1) $x^2=X$ とおくと $X^2-3X-4=0$. $(X-4)(X+1)=0$ より $X=4,-1$. よって $x^2=4,\ x^2=-1$. $\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm i}$

(2) ω の性質を利用する．

- $\omega^5=\omega^3\cdot\omega^2=1\cdot\omega^2=\omega^2$
- $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=1\cdot\omega=\omega$

よって

$$\omega^5+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$$