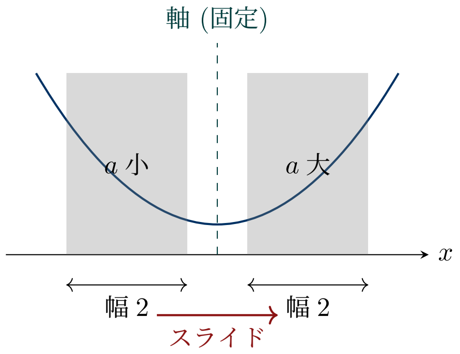
Introduction：スライドする窓

今回は，関数（グラフ）は止まっていて，定義域（x の範囲）が動くパターンを考えます。例：$a \leqq x \leqq a+2$ これは，幅 2 の窓枠が，変数 a の変化とともに右へスライドしていくイメージです。



相対的な位置関係は「軸移動」と同じですが，条件を a の不等式で表す計算に注意が必要です。

区間移動の最小値（下に凸）

軸が区間 $a \leqq x \leqq a+2$ の「左・中・右」のどこにあるかで分けます。軸を $x = p$ とします。
不等式の作り方（重要）：

- **軸が区間の右外にあるとき**（区間はまだ左にある）
  右端 $a+2 < p \iff a < p-2$
- **軸が区間の中にあるとき**
  $a \leqq p \leqq a+2$
  – 左側：$a \leqq p$
  – 右側：$p \leqq a+2 \iff a \geqq p-2$
  合わせて $\longrightarrow p-2 \leqq a \leqq p$
- **軸が区間の左外にあるとき**（区間はもう右に行った）
  左端 $p < a \iff a > p$

例題 1：区間移動と最小値

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 4x + 3 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

準備:

- 平方完成：$y = (x-2)^2 - 1 \to$ 軸は $x = 2$
- 区間幅：2

軸 2 が区間の「右・中・左」に来るような a の範囲を考えます。

- 軸が右外：$a+2 < 2 \iff a < 0$
- 軸が中：$a \leqq 2 \leqq a+2 \iff 0 \leqq a \leqq 2$
- 軸が左外：$2 < a$

Memo / Answer

区間移動の最大値（下に凸）

「区間の中央」と「軸」の比較です。区間 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央は,

$$\frac{a+(a+2)}{2} = a+1$$

です。これが軸 p より左か右かで判定します。

- **中央が軸より左**（$a+1 < p \iff a < p-1$）
  区間は左寄り → 左端 a が遠い → $x=a$ で最大
- **中央が軸と一致**（$a+1 = p \iff a = p-1$）
  両端 $x=a, a+2$ で最大
- **中央が軸より右**（$a+1 > p \iff a > p-1$）
  区間は右寄り → 右端 $a+2$ が遠い → $x=a+2$ で最大

例題 2：区間移動と最大値

a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値を求めよ。

準備: 軸は $x=2$。区間の中央は $a+1$。

- 中央 < 軸：$a+1<2 \iff a<1$
- 中央 = 軸：$a+1=2 \iff a=1$
- 中央 > 軸：$a+1>2 \iff a>1$

Memo / Answer

まとめ：動く定義域の攻略法

- **最小値** → 軸が定義域に含まれるか？
  不等式：$a \leqq$ 軸 $\leqq a+$ 幅 を解く。
- **最大値** → 定義域の中央はどこか？
  比較：中央 $= a + \frac{\text{幅}}{2}$ と 軸の大小比較。

例題 3：幅が変わる場合

a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1 \quad (a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

区間の幅が 1 に変わりました。中央は $a+0.5$ です。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

記述式の解答を作成せよ。

練習 A1: 最小値

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2x + 3 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

練習 A2: 最大値

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2x + 3 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 総合問題

a は定数とする。関数 $y = -x^2 + 4x \quad (a \leqq x \leqq a+1)$ について，

(1) 最大値を求めよ。

(2) 最小値を求めよ。

練習 B2: 係数決定

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 4x + 1 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値が 6 となるような a の値を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $y=(x-1)^2+2$。軸は $x=1$。区間は $a \leqq x \leqq a+2$（幅 2）。軸が区間内にある条件は $a \leqq 1 \leqq a+2 \iff -1 \leqq a \leqq 1$。

(i) $a<-1$ **のとき**（軸が区間より右）

右端 $x=a+2$ で最小値 $(a+2-1)^2+2=\boldsymbol{(a+1)^2+2}$

(ii) $-1 \leqq a \leqq 1$ **のとき**（軸が区間内）

$x=1$ で最小値 $\mathbf{2}$

(iii) $1<a$ **のとき**（軸が区間より左）

左端 $x=a$ で最小値 $\boldsymbol{(a-1)^2+2}$

A2 軸は $x=1$。区間の中央は $a+1$。中央と軸の比較：$a+1$ vs $1 \iff a$ vs 0。

(i) $a<0$ **のとき**（中央が軸より左）

区間は左寄り → 左端 $x=a$ が軸に近い → 遠いのは右端。

（※下に凸なので遠い方が最大）

$x=a$ で最大値 $\boldsymbol{(a-1)^2+2\ldots}$**訂正：** $a<0$ のとき中央 $a+1<1$（軸）。

軸より左に中央がある → 区間全体が左寄り → 左端 a が遠い。

よって $x=a$ で最大値 $\boldsymbol{(a-1)^2+2}$

(ii) $a=0$ **のとき**

$x=0,2$ で最大値 $1^2+2=\mathbf{3}$

(iii) $a>0$ **のとき**（中央が軸より右）

区間は右寄り → 右端 $x=a+2$ が遠い。

$x=a+2$ で最大値 $\boldsymbol{(a+1)^2+2}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $y=-(x-2)^2+4$。軸 $x=2$。上に凸。区間 $a \leqq x \leqq a+1$（幅 1）。

(1) **最大値**（上に凸なので頂点に近い方が最大）

軸が区間内にある条件：$a \leqq 2 \leqq a+1 \iff 1 \leqq a \leqq 2$。

- $a<1$ のとき（軸が右外）：右端 $x=a+1$ で最大値 $-(a+1-2)^2+4=\boldsymbol{-(a-1)^2+4}$
- $1 \leqq a \leqq 2$ のとき（軸が中）：頂点 $x=2$ で最大値 $\mathbf{4}$
- $2<a$ のとき（軸が左外）：左端 $x=a$ で最大値 $\boldsymbol{-(a-2)^2+4}$

(2) **最小値**（上に凸なので頂点から遠い方が最小）

区間中央 $a+0.5$ と軸 2 の比較。$a+0.5=2 \iff a=1.5$。

- $a<1.5$ のとき（中央が左）：遠いのは左端 $x=a$。
  最小値 $\boldsymbol{-(a-2)^2+4}$
- $a=1.5$ のとき：両端 $x=1.5, 2.5$ で最小値 $-(1.5-2)^2+4=\mathbf{3.75}$
- $1.5<a$ のとき（中央が右）：遠いのは右端 $x=a+1$。
  最小値 $\boldsymbol{-(a-1)^2+4}$

B2 $y=(x-2)^2-3$。軸 $x=2$。幅 2。最大値 $M(a)$ は A2 と同様に場合分け。中央 $a+1$ vs 2。$a=1$ が境界。

(i) $a<1$ のとき：最大値 $(a-2)^2-3=6 \implies (a-2)^2=9 \implies a-2=\pm3$

$a=5,-1$。$a<1$ より $\boldsymbol{a=-1}$

(ii) $a=1$ のとき：最大値 $(1-2)^2-3=-2 \neq 6$。

(iii) $a>1$ のとき：最大値 $(a+2-2)^2-3=a^2-3=6 \implies a^2=9$

$a=\pm3$。$a>1$ より $\boldsymbol{a=3}$

以上より，$\boldsymbol{a=-1,3}$