年　　組　　番　氏名

Introduction：方程式とグラフの関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くことは，グラフで考えると何をしていることになるでしょうか？
右辺の 0 を y と見ると，

$$\begin{cases} y = ax^2+bx+c & (\text{放物線}) \\ y = 0 & (x\ \text{軸}) \end{cases}$$

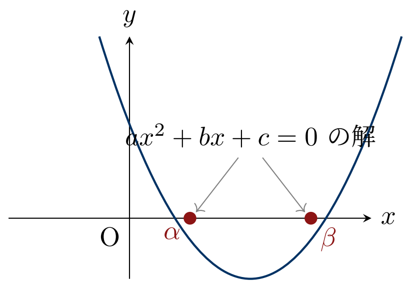
の連立方程式を解くことと同じです。つまり，**「グラフと x 軸がぶつかる点の x 座標」**を求めているのです。

2 次関数のグラフと x 軸の共有点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の実数解である。



例題 1：共有点の座標

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

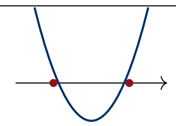
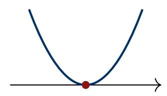
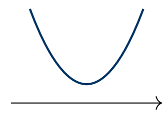
(1) $y=x^2-4x+3$
(2) $y=x^2-2x-1$

ヒント： $y=0$ を代入して，2 次方程式を解く。(1) は因数分解，(2) は解の公式を利用する。

Memo / Answer

判別式 D と共有点の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号で，グラフと x 軸の共有点の個数がわかる。(詳しくは次回学ぶ。)

$D>0$	$D=0$	$D<0$
		
異なる 2 点で交わる (実数解 2 個)	**1 点で接する** (実数解 1 個・重解)	**共有点をもたない** (実数解 0 個)

年　組　番　氏名

偶数公式の利用

x の係数が偶数（$2b'$）のときは，$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ を利用すると計算が楽になります。符号の条件（$> 0, = 0, < 0$）は D と全く同じです。

例題 2：共有点の個数

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = x^2 + 5x + 7$
(2) $y = 2x^2 - 6x + 3$
(3) $y = 4x^2 + 12x + 9$

Memo / Answer

例題 3：定数 k の決定

2 次関数 $y = x^2 - 4x + k$ のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解法: 「異なる 2 点で交わる」 $\iff$ 「$D > 0$」判別式 D（または $\frac{D}{4}$）を計算し，不等式を解く。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 共有点の座標

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 + 3x - 10$
(2) $y = 2x^2 + 3x - 1$

練習 A2: 共有点の個数

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 5$
(2) $y = 9x^2 - 6x + 1$
(3) $y = -2x^2 + 4x + 1$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

判別式 D を用いた逆算問題。

練習 B1: 接する条件

2 次関数 $y = x^2 + 3x + k$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

練習 B2: 共有点の個数の場合分け

2 次関数 $y = x^2 + 2x - a + 1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか調べよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $x^2+3x-10=0$ を解く。

$(x+5)(x-2)=0 \quad \therefore x=-5,2$

よって，共有点は $\boldsymbol{(-5,0),(2,0)}$

(2) $2x^2+3x-1=0$ を解く。因数分解できないので解の公式。

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

よって，共有点は $\boldsymbol{(\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4},0)}$

A2

(1) $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=9-20=-11<0$

よって，**0 個**

(2) $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=9-9=0$

よって，**1 個**

(3) $\frac{D}{4}=2^2-(-2)\cdot1=4+2=6>0$

よって，**2 個**

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 x 軸に接する条件は $D=0$。

$$D=3^2-4\cdot1\cdot k=9-4k$$

$$9-4k=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4k=9 \quad \therefore k=\frac{9}{4}$$

このときの方程式は $x^2+3x+\frac{9}{4}=0$。

$$(x+\frac{3}{2})^2=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$$

よって，接点の座標は $\boldsymbol{(-\frac{3}{2},0)}$

B2 判別式を計算する。

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-a+1)=1+a-1=a$$

D の符号によって場合分けをする。

- $\frac{D}{4}>0$ すなわち $\boldsymbol{a>0}$ のとき，**2 個**
- $\frac{D}{4}=0$ すなわち $\boldsymbol{a=0}$ のとき，**1 個**
- $\frac{D}{4}<0$ すなわち $\boldsymbol{a<0}$ のとき，**0 個**