年　組　番　氏名

1. 高次方程式の解き方

基本戦略：因数分解して次数を下げる

3 次以上の方程式を**高次方程式**という．解の公式が存在しない (あるいは複雑すぎる) ため，基本的には**因数定理**を用いて因数分解し，1 次式や 2 次式の積の形にもちこんで解く．

> 手順
>
> (1) $P(x) = 0$ となる x の値 (k) を見つける．
>
> (2) $P(x)$ を $x - k$ で割り算し，$(x - k)(2\text{ 次式}) = 0$ にする．
>
> (3) 2 次方程式を解く (因数分解 or 解の公式)．

割り算は「筆算」で十分！

教科書等では「組立除法」という計算テクニックが紹介されることがあるが，**これは必須ではない**．通常の**筆算による割り算**の方が，「今何をしているか」が明確であり，ミスをした際の確認もしやすい．堂々と筆算を使おう．

例題 1（3 次方程式）

3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = 0$ を解け．

Memo / Answer

1. $P(1) = 1 - 4 + 8 - 5 = 0$ なので，$x - 1$ を因数にもつ．
2. 筆算で割り算を行う (右図)．
   商は $x^2 - 3x + 5$．
3. $(x - 1)(x^2 - 3x + 5) = 0$
   $x = 1$，または $x^2 - 3x + 5 = 0$
   解の公式より
   $x = 1,\ \dfrac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{2-2}
x - 1 \big) & x^3 - 4x^2 + 8x - 5 \\
 & x^3 - x^2 \\ \cline{2-2}
 & - 3x^2 + 8x \\
 & - 3x^2 + 3x \\ \cline{2-2}
 & \phantom{x^3 - 3x^2 +{}} 5x - 5 \\
 & \phantom{x^3 - 3x^2 +{}} 5x - 5 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{x^3 - 3x^2 + 5x - {}} 0
\end{array}
$$

練習 1

次の 3 次方程式を解け．

(1) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

(2) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

2. 置き換えを利用する形

複二次式 $ax^4 + bx^2 + c = 0$

x^4 と x^2 だけが登場する式は, $\boldsymbol{X = x^2}$ と置き換えることで 2 次方程式に帰着できる. ただし, X が求まった後, $x = \pm\sqrt{X}$ で x に戻すことを忘れないこと.

例題 2（複二次方程式）

次の方程式を解け.

(1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
(2) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Memo / Answer

Note: 重解の扱い

$(x-1)^2(x+2) = 0$ のように因数分解された場合, 解は $x = 1$ (2 重解), $x = -2$ となる. 3 次方程式だからといって必ずしも異なる 3 つの解をもつとは限らない.

年　組　番　氏名

確認テスト

練習 A1（因数定理と筆算）

次の方程式を解け．

(1) $x^3-3x^2+4=0$
(2) $x^3+x^2-17x+15=0$

練習 A2（複二次式）

次の方程式を解け．

(1) $x^4-5x^2+4=0$
(2) $x^4-16=0$

Memo / Answer

練習 B1（虚数解をもつ高次方程式）

$x^3-1=0$ を解け．また，その虚数解の一つを ω（オメガ）とするとき，$\omega^2+\omega+1$ の値を求めよ．

Hint

因数分解公式 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ を利用する．

練習 B2（係数決定）

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が $x=1$ と $x=2$ を解にもつとき，定数 a,b の値と，残りの解を求めよ．

Memo / Answer