年　　組　　番　氏名

1. 対称型連立漸化式

2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が互いに影響し合う場合.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

係数が対称的 (a, b を入れ替えても同じ形) なときは, **「和」と「差」**を作ることで独立した漸化式に分解できる.

- **和をとる:** $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$
- **差をとる:** $a_{n+1} - b_{n+1} = 1(a_n - b_n)$

これで等比数列の形に持ち込める.

例題 1 (対称型)

次の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad (a_1 = 1,\ b_1 = 3)$$

Memo / Answer

2. 非対称型連立漸化式

係数が対称でない場合, 和や差を作ってもうまくいかないことがある. その場合, **「片方が単独で解ける」**構造になっていないか確認しよう.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = b_n + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

この場合, ②には a_n が含まれていないため, b_n だけで解くことができる. 求めた b_n を①に代入すれば, a_n は**「階差数列型」** ($a_{n+1} = a_n + f(n)$) となり解決する.

例題 2 (非対称型)

次の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = b_n + 2 \end{cases} \quad (a_1 = 1,\ b_1 = 1)$$

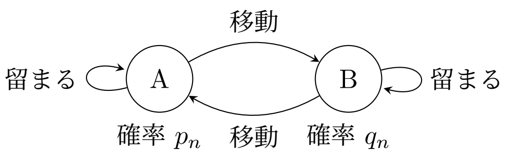
Memo / Answer

3. 確率のバトンタッチ (確率漸化式)

確率の問題で「n 回目の試行」を考えるときは, n 回目の状態から $n+1$ 回目への**遷移 (せんい)** に注目する.

ポイント:

(1) **状態遷移図**を描く.
(2) 図を見て漸化式を立てる ($p_{n+1} = \dots p_n + \dots$).
(3) 全事象の確率の和は 1 ($p_n + q_n = 1$) を利用して文字を減らす.



$n+1$ 回目に A にいるのは,

- n 回目に A にいて, そのまま留まる場合
- n 回目に B にいて, A に移動してくる場合

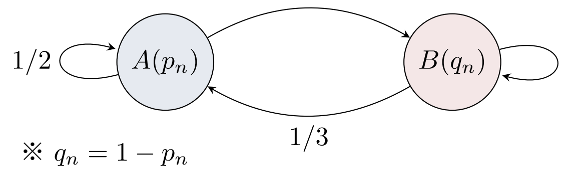
の合計である.

例題 3 (ランダムウォーク)

点 P は数直線の点 A(0) と点 B(1) を行き来する.

- A にいるとき: $\frac{1}{2}$ で A に留まり, $\frac{1}{2}$ で B へ移動.
- B にいるとき: $\frac{1}{3}$ で A へ移動し, $\frac{2}{3}$ で B に留まる.

n 秒後に点 P が A にいる確率を p_n とする. p_{n+1} を p_n で表せ.



※ $q_n = 1 - p_n$

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (連立漸化式)

次の連立漸化式の a_n+b_n と a_n-b_n の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n \end{cases} \quad (a_1=2,\ b_1=4)$$

Memo / Answer

練習 A2 (確率漸化式の立式)

A, B の 2 人がボールを投げ合う. A がボールを持っているとき, 確率 $\frac{1}{3}$ で自分に残し, $\frac{2}{3}$ で B に投げる. B がボールを持っているとき, 確率 $\frac{1}{4}$ で A に投げ, $\frac{3}{4}$ で自分に残す. n 回後に A が持っている確率を p_n とするとき, p_{n+1} を p_n で表せ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (連立漸化式の一般項)

A1 の数列において, a_n と b_n をそれぞれ求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (確率漸化式の一般項)

A2 の設定で, 最初に A がボールを持っていたとする $(p_0=1)$. このとき, 確率 p_n を求めよ.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

(1) 和: $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$. 初項 $1+3=4$, 公比 3 $\Longrightarrow$ $a_n+b_n=4\cdot 3^{n-1}$ ...①
(2) 差: $a_{n+1}-b_{n+1}=1(a_n-b_n)$. 初項 $1-3=-2$, 公比 1 $\Longrightarrow$ $a_n-b_n=-2$ ...②
(3) 連立: ①+② より $2a_n=4\cdot 3^{n-1}-2 \Longrightarrow \boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}-1}$. ①−② より $2b_n=4\cdot 3^{n-1}+2 \Longrightarrow \boldsymbol{b_n=2\cdot 3^{n-1}+1}$.

例題 2 解答

まず b_n を求める. $b_{n+1}=b_n+2$ は等差数列. $b_n=1+(n-1)2=2n-1$.
これを $a_{n+1}=a_n+b_n$ に代入. $a_{n+1}=a_n+(2n-1)$. 階差数列が $2n-1$ なので, $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1) \\ &= 1+n^2-n-n+1=n^2-2n+2 \end{aligned}$$

$n=1$ のとき $1-2+2=1$ (一致). **答:** $\boldsymbol{a_n=n^2-2n+2,\ b_n=2n-1}$.

例題 3 解答

図より A にたどり着くルートは (1) A→A: 確率 1/2 (元の確率 p_n) (2) B→A: 確率 1/3 (元の確率 q_n)
よって $p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n$. $q_n=1-p_n$ を代入して,

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)=\boldsymbol{\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{3}}$$

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(和) $a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$. 初項 $2+4=6$, 公比 4. $\boldsymbol{a_n+b_n=6\cdot 4^{n-1}}$.
(差) $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$. 初項 $2-4=-2$, 公比 2. $\boldsymbol{a_n-b_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n}$.

練習 A2 解答

$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+(1-p_n)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}p_n=\left(\frac{4-3}{12}\right)p_n+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}p_n+\frac{1}{4}}$.

練習 B1 解答

A1 の結果より

$$a_n+b_n=6\cdot 4^{n-1} \quad \cdots①$$
$$a_n-b_n=-2^n \quad \cdots②$$

①+② より $2a_n=6\cdot 4^{n-1}-2^n \Longrightarrow \boldsymbol{a_n=3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1}}$.
①−② より $2b_n=6\cdot 4^{n-1}+2^n \Longrightarrow \boldsymbol{b_n=3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1}}$.

練習 B2 解答

$p_{n+1}=\frac{1}{12}p_n+\frac{1}{4}$. 特性方程式 $\alpha=\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{11}{12}\alpha=\frac{1}{4} \Longrightarrow \alpha=\frac{3}{11}$.
$p_{n+1}-\frac{3}{11}=\frac{1}{12}\left(p_n-\frac{3}{11}\right)$. 初項 $p_0=1$ より, $\{p_n-\frac{3}{11}\}$ の初項は $1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$.
よって $\boldsymbol{p_n=\frac{3}{11}+\frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n}$.