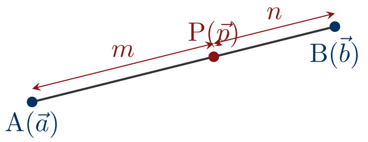
1. 線分の内分・外分

数直線 (1 次元)，平面 (2 次元) で学んだ分点の公式は，空間 (3 次元) でも全く同じ形で成立する。z 座標の成分計算が増えるだけである。



$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

分点の位置ベクトルと座標

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について

(1) **内分点** $\mathrm{P}(\vec{p})$ $(m:n$ に内分)

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

(2) **外分点** $\mathrm{Q}(\vec{q})$ $(m:n$ に外分)

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

(3) **中点** $\mathrm{M}(\vec{m})$ $(1:1$ に内分)

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

座標で計算する場合は，これを x, y, z 各成分ごとに行えばよい。

例題 1

2 点 $\mathrm{A}(1,3,4)$, $\mathrm{B}(4,0,-2)$ について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点 P

(2) 線分 AB を $2:3$ に外分する点 Q

Memo / Answer

2. 三角形の重心

空間内に三角形があっても，その重心の定義は変わらない。3 点の平均（足して 3 で割る）である。

三角形の重心

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

座標：$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

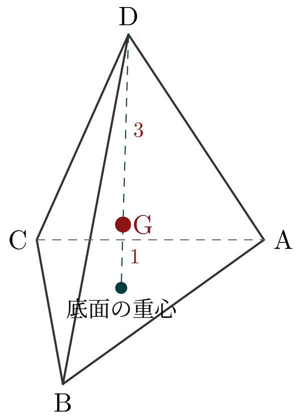
例題 2

3 点 $\mathrm{A}(2,1,5)$, $\mathrm{B}(-4,2,1)$, $\mathrm{C}(5,-3,0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の座標を求めよ。

Memo / Answer

3. 四面体の重心

三角形（2 次元）の重心が「3 つの頂点の平均」であったのと同様に，四面体（3 次元）の重心は**「4 つの頂点の平均」**として定義される。



四面体の重心

4 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c}), \mathrm{D}(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD の重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

幾何的な位置関係：
重心 G は，頂点 D と，底面 $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G' を結ぶ線分 DG' を $3:1$ に内分する点である。

例題 3

4 点 $\mathrm{A}(2,0,0)$, $\mathrm{B}(0,4,0)$, $\mathrm{C}(0,0,6)$, $\mathrm{D}(2,4,2)$ を頂点とする四面体 ABCD の重心 G の座標を求めよ。

Memo / Answer

例題 4

四面体 ABCD の重心を G とする。等式

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$$

が成り立つことを示せ。

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

2 点 $\mathrm{A}(3,-1,4)$, $\mathrm{B}(1,5,-2)$ について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB の中点 M
(2) 線分 AB を $3:1$ に内分する点 P
(3) 線分 AB を $2:1$ に外分する点 Q

練習 A2

4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(4,1,2)$, $\mathrm{B}(-2,3,5)$, $\mathrm{C}(2,-4,1)$ を頂点とする四面体 OABC の重心 G の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

2 点 $\mathrm{A}(1,a,-1)$, $\mathrm{B}(3,2,b)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点が $\mathrm{P}(c,4,3)$ であるとき，定数 a,b,c の値を求めよ。

練習 B2

平行四辺形 ABCD の 3 つの頂点が $\mathrm{A}(1,1,2)$, $\mathrm{B}(2,4,3)$, $\mathrm{C}(5,2,5)$ である。

(1) 第 4 の頂点 D の座標を求めよ。
(2) 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を M とし，空間内の点 $\mathrm{P}(3,3,6)$ をとる。線分 PM を $2:1$ に内分する点 G の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

A$(3,-1,4)$, B$(1,5,-2)$

Memo / Answer

(1) 中点 M

$\left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{4+(-2)}{2}\right) = (2,2,1)$

答 M$(2,2,1)$

(2) $3:1$ に内分する点 P

$\left(\dfrac{1\cdot 3+3\cdot 1}{3+1}, \dfrac{1\cdot(-1)+3\cdot 5}{3+1}, \dfrac{1\cdot 4+3\cdot(-2)}{3+1}\right)$

$= \left(\dfrac{6}{4}, \dfrac{14}{4}, \dfrac{-2}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

答 P$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$

(3) $2:1$ に外分する点 Q

$\left(\dfrac{-1\cdot 3+2\cdot 1}{2-1}, \dfrac{-1\cdot(-1)+2\cdot 5}{2-1}, \dfrac{-1\cdot 4+2\cdot(-2)}{2-1}\right)$

$= (-1, 11, -8)$

答 Q$(-1,11,-8)$

練習 A2

O$(0,0,0)$, A$(4,1,2)$, B$(-2,3,5)$, C$(2,-4,1)$ の重心 G

Memo / Answer

4 点の平均を計算する。

$x = \dfrac{0+4+(-2)+2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

$y = \dfrac{0+1+3+(-4)}{4} = \dfrac{0}{4} = 0$

$z = \dfrac{0+2+5+1}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

答 G$(1,0,2)$

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

A$(1,a,-1)$, B$(3,2,b)$ を $2:1$ に内分する点が P$(c,4,3)$

Memo / Answer

内分点の公式より P の座標は

$\left(\dfrac{1\cdot 1+2\cdot 3}{2+1}, \dfrac{1\cdot a+2\cdot 2}{2+1}, \dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot b}{2+1}\right) = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{a+4}{3}, \dfrac{2b-1}{3}\right)$

これが $(c,4,3)$ と一致するから，成分比較して

$c = \dfrac{7}{3}$

$\dfrac{a+4}{3} = 4 \implies a+4 = 12 \implies a = 8$

$\dfrac{2b-1}{3} = 3 \implies 2b-1 = 9 \implies 2b = 10 \implies b = 5$

答 $a = 8, b = 5, c = \frac{7}{3}$

練習 B2

(1) 平行四辺形 ABCD の頂点 D

(2) 対角線の交点 M と P から，PM を $2:1$ に内分する点 G

Memo / Answer

(1)

対角線 AC の中点と BD の中点は一致する。

AC の中点：$\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{1+2}{2}, \dfrac{2+5}{2}\right) = \left(3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

D(x,y,z) とすると BD の中点は $\left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{4+y}{2}, \dfrac{3+z}{2}\right)$

比較して，$2+x = 6 \Rightarrow x = 4, 4+y = 3 \Rightarrow y = -1, 3+z = 7 \Rightarrow z = 4$

答 D$(4,-1,4)$

(2)

対角線の交点 M は，先ほど求めた中点なので

M$\left(3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

点 P$(3,3,6)$ と M を結ぶ線分 PM を $2:1$ に内分する点 G は

$\vec{g} = \dfrac{1\vec{p}+2\vec{m}}{2+1} = \dfrac{1}{3}\vec{p} + \dfrac{2}{3}\vec{m}$

$x = \dfrac{1}{3}(3) + \dfrac{2}{3}(3) = 1+2 = 3$

$y = \dfrac{1}{3}(3) + \dfrac{2}{3}(\dfrac{3}{2}) = 1+1 = 2$

$z = \dfrac{1}{3}(6) + \dfrac{2}{3}(\dfrac{7}{2}) = 2 + \dfrac{7}{3} = \dfrac{13}{3}$

答 G$\left(3, 2, \dfrac{13}{3}\right)$