1. 準備①：塊（カタマリ）の微分・積分

通常，数学 II では $(x-1)^2$ などを積分する場合，一度展開してから計算する．しかし. 以下の性質を知っていると計算が劇的に楽になる．

法則の発見

次の関数を展開してから微分し.，結果を因数分解せよ．

(1) $y=(x-1)^2 \to y'=2(x-1)$
(2) $y=(x-2)^3 \to y'=3(x-2)^2$

【結論】 展開しなくても.，肩の数字が降りてくる！

$$\{(x-\alpha)^n\}'=n(x-\alpha)^{n-1}$$

塊（カタマリ）の積分公式

微分と逆の操作をすることで.，以下の積分公式が成り立つ.（証明はみなさんにお任せします．）

$$\int (x-\alpha)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$$

例題

(1) $\displaystyle\int (x-2)^2\,dx$
(2) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2\,dx$

Memo / Answer

2. 準備②：因数定理と交点

因数定理の確認

方程式 $f(x)=0$ が解 $x=\alpha$ をもつ $\iff$ $f(x)$ は $(x-\alpha)$ を因数にもつ

「差の関数」の正体

放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が，2 点 $x=\alpha,\beta$ で交わっているとする．このとき，2 つの関数の差 $\boldsymbol{f(x)-g(x)}$ はどのような形になるだろうか？

- 交点では「高さが同じ」なので，

$$f(\alpha)-g(\alpha)=0,\quad f(\beta)-g(\beta)=0$$

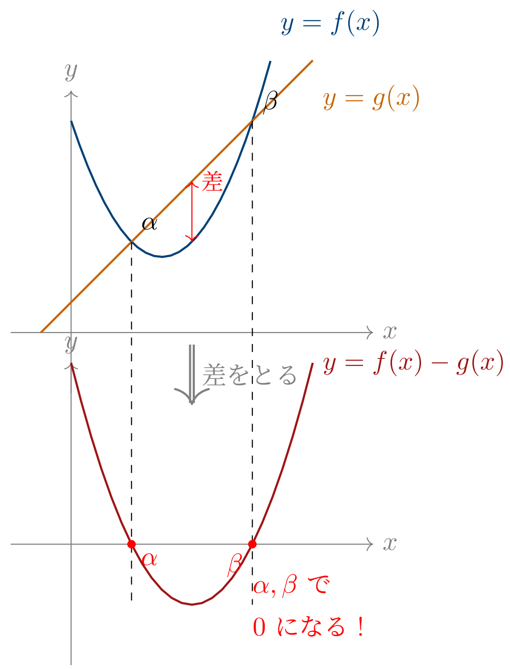
　つまり，差の関数 $f(x)-g(x)$ は $x=\alpha,\beta$ を解にもつ．
- すなわち

$$f(x)-g(x) \text{ は } (x-\alpha) \text{ と } (x-\beta) \text{ を因数にもつ．}$$

- 結論　$f(x)$ の x^2 の係数を a とすると

$$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

　と因数分解できる！
- 図形的な意味は以下の通りである．



3. 魔法の公式「$\frac{1}{6}$ 公式」

積分の特別公式

放物線と直線で囲まれた部分の面積を，**「交点の座標」**だけで一発で求める公式がある．

定理：1/6 公式

$\alpha < \beta$ とするとき，以下の定積分計算が成り立つ．

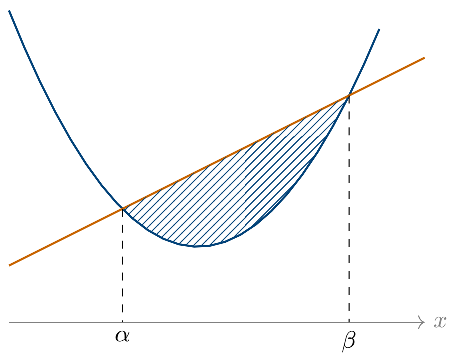
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

特に，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線が 2 点 $x = \alpha, \beta$ で交わるとき，これらで囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

で求められる．

グラフの様子は以下の通りである．



例題 1：威力を体感せよ

放物線 $y = x^2 - 3$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答

(1) **交点を求める**：$x^2 - 3 = 2x \iff x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x+1)(x-3) = 0$ より交点は $x = -1, 3$.

(2) **公式を使う**：$\alpha = -1, \beta = 3$，放物線の係数 $a = 1$ なので，

$$\begin{aligned} S &= \frac{|1|}{6}\{3-(-1)\}^3 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 4^3 = \frac{64}{6} = \mathbf{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

普通に $\int_{-1}^{3}\{2x-(x^2-3)\}dx$ を計算するより圧倒的に速い！

4. なぜ使えるのか？（証明）

この公式の証明には，鮮やかな式変形のテクニックが使われている．丸暗記ではなく，この**「導出の流れ（エッセンス）」**を理解しよう．

Step 1：因数分解

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ の交点が α, β であるとき，差の式は必ず因数分解できる．

$$(\text{直線}) - (\text{放物線}) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$$

よって，面積 S は次の定積分で表される（$a > 0$ とする）．

$$S = \int_\alpha^\beta -a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

係数 $-a$ を外に出すと，目標の形が見えてくる．

$$S = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

Step 2：式変形の工夫（最重要！）

普通に展開して $\int(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)dx$ を計算するのは大変である．そこで，次のような**「無理やり $x-\alpha$ を作る」**変形を行う．

$$\boxed{x - \beta = (x-\alpha) - (\beta-\alpha)}$$

これを用いて，被積分関数を変形する．

$$\begin{aligned} (x-\alpha)(\boldsymbol{x-\beta}) &= (x-\alpha)\{(\boldsymbol{x-\alpha}) - (\boldsymbol{\beta-\alpha})\} \\ &= (x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha) \end{aligned}$$

Point： 定数 $(\beta-\alpha)$ を塊として扱う！

年　組　番　氏名

Step 3：積分計算

変形した式を積分する．$\int (x-\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}$ を利用すると楽．

$$I = \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\, dx$$

$$= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} - (\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

- **代入（上端 β）：**

$$\frac{(\beta-\alpha)^3}{3} - (\beta-\alpha)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

- **代入（下端 α）：**$(\alpha-\alpha)=0$ なので，すべて 0 になる！（これが狙い）

Step 4：結論

係数をまとめて計算する．

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

より，定積分部分の値は

$$I = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となる．

最後に，最初に外に出しておいた $-a$ を掛ければ，面積公式の完成である．

$$S = -a \times \left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

まとめ

この証明の流れ（特に $x-\alpha$ の塊を作る変形）は，2 つの放物線や，接線と囲む面積（$\frac{1}{12}$ 公式や $\frac{1}{3}$ 公式）の証明でも全く同じように使える．「結果」だけでなく「過程」を知っておくと，応用が利くようになる．

次回予告：この最強の武器を使って，入試頻出の面積問題を次々と攻略する（計算演習回）．

Proof