

1. 円順列の原理

回転して重なる並び方を「同じ」とみなす順列を、円順列 (Circular Permutation) といいます。一列に並べる順列との決定的な違いは、「先頭」や「端」が存在しないことです。

円順列の公式と本質

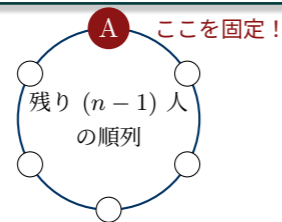
異なる n 個のものを円形に並べる総数は、

$(n - 1)!$

【考え方：1 人固定法】

どこも区別がつかない円卓では、まず「誰か 1 人を座らせて固定」します。すると、その人を基準（目印）として、残りの座席に「右隣」「対面」などの区別が生まれます。

$$\underbrace{1}_{\text{固定}} \times \underbrace{(n - 1)!}_{\text{残りの順列}}$$



例題 1. 円順列の基本

男子 4 人、女子 2 人が丸いテーブルの周りに座るとき、次のような並び方は何通りあるか。

- (1) 6 人の並び方すべて。
- (2) 女子 2 人が隣り合う。
- (3) 女子 2 人が向かい合う。

Memo / Answer

2. 条件付き円順列

「交互に並ぶ」などの条件がある場合も、基本は「1 つ固定して円を直線の順列にする」ことです。

例題 2. 男女交互の円順列

男子 4 人、女子 4 人の計 8 人が円卓に座るとき、男女が交互に並ぶ座り方は何通りあるか。

ヒント：まず男子 1 人を固定して、男子の席を確定させよう。

Memo / Answer

Lecture Note：回転の重複

公式を導くもう一つの考え方は、「とりあえず一列に並べて $(n!)$ 、回転して重なる n 通りで割る」というものです。

$$\frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

単純な問題ならこれでもよいですが、複雑な条件（「向かい合う」等）がつくと、「割り算」の考え方は難しくなります。「1 人固定法」をマスターしましょう。

3. 数珠順列（じゅず順列）

ブレスレットや首飾りのように、裏返して一致するものも同じとみなす順列です。円順列は「回転のみ」ですが、数珠順列は「回転＋裏返し」が可能です。

数珠順列の公式

異なる n 個のものを並べる数珠順列の総数は、
$$\frac{(n-1)!}{2}$$
円順列（回転で重なるものを 1 つにした状態）に対して、さらに「表と裏」の 2 通りが重なるため、2 で割ります。

例題 3. 数珠順列

異なる色の玉が 6 個ある。これらに紐を通して首飾りを作るとき、何通りの首飾りができるか。

Memo / Answer

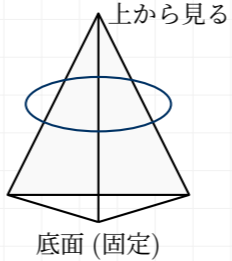
4. 立体の色塗り（正四面体）

「回転して一致するものは同じ」という考え方の応用として、立体の面の塗り分けがあります。正四面体（すべての面が正三角形）は、転がすとどの面も底面にできるため、円順列の考え方が使えます。

例題 4. 正四面体の塗り分け

正四面体の 4 つの面を、赤、青、黄、緑の 4 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

Memo / Answer



5. 重複順列

同じものを「繰り返し選んでもよい」場合の順列です.

重複順列 ${}_n\Pi_r$

異なる n 個のものから、重複を許して r 個選んで 1 列に並べる総数は、
$$n^r$$

- 1 番目の箱 $\rightarrow n$ 通り
- 2 番目の箱 $\rightarrow n$ 通り
- \dots
- r 番目の箱 $\rightarrow n$ 通り

全部掛けて n^r 通りです. 公式を覚えるよりも「どっちが選択権を持っているか」を考えることが重要です.

例題 5. 重複順列の計算

- (1) 3 個の数字 1, 2, 3 を重複を許して使ってできる 4 桁の整数は何個あるか.
- (2) \bigcirc, \times の 2 種類の記号を, 合計 5 個並べる方法は何通りあるか.

Memo / Answer

6. 部分集合と組分け

重複順列の考え方は、「組分け」に応用されます.

例題 6. 部分集合と組分け

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の部分集合の個数を求めよ.
- (2) A の要素を, 2 つの部屋 X, Y に分ける方法は何通りあるか. ただし, 空部屋ができてよい.
- (3) A の要素を, 2 つのグループ X, Y に分ける方法は何通りあるか. ただし, どちらのグループにも少なくとも 1 つは要素が入るものとする.

Memo / Answer

確認テスト A（基本）

練習 1：基本の円順列・数珠順列

異なる色の玉が 5 個ある.

- (1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか.
- (2) これらに紐を通して首飾りを作るとき, 何通りの首飾りができるか.

練習 2：基本の重複順列

4 人の生徒が, A, B, C の 3 つの部屋のいずれかに入る.

- (1) 空き部屋があってもよいとき, 入り方は何通りあるか.
- (2) 1 人も入らない部屋があってはいけないとき, 入り方は何通りあるか. (※応用)

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：条件付き円順列

先生 2 人と生徒 4 人が円卓に座るとき, 次のような座り方は何通りあるか.

- (1) 先生 2 人が向かい合う.
- (2) 先生 2 人が隣り合う.

練習 4：立体の塗り分け

正四角錐（底面が正方形, 側面が 4 つの合同な二等辺三角形）の 5 つの面を, 異なる 5 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか.

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

- (1) 円順列なので $(5 - 1)! = 4! = 24$ 通り.
- (2) 数珠順列なので $24 \div 2 = 12$ 通り.

2

- (1) 「人が部屋を選ぶ」. 4 人の生徒それぞれに A,B,C の 3 通りの選択肢がある.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ (通り)

(※ 4^3 と間違えないこと!)

- (2) (発展) 包除原理の利用

(全体) - (2 部屋のみ使う) - (1 部屋のみ使う) で求める.

- ・ 全体 : 81 通り
 - ・ 1 部屋のみ : 全員 A, 全員 B, 全員 C の 3 通り.
 - ・ 2 部屋のみ (例 : A と B だけ) : $2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$ 通り. (A,B の 2 択から, 全員 A と全員 B を除く) 部屋のペアは (A,B), (B,C), (C,A) の 3 組あるので, $14 \times 3 = 42$ 通り.
- よって, $81 - 3 - 42 = 36$ 通り.

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

- (1) 先生 A を固定する. 向かい合う席は 1 箇所しかないので, 先生 B の席は決まる (1 通り). 残りの 4 席に生徒 4 人を並べるので, $4! = 24$ 通り.
- (2) 先生 2 人を 1 セット (ブロック) とみなす. このセットと生徒 4 人の計 5 つの円順列 $\rightarrow (5 - 1)! = 24$ 通り. セットの中で先生 2 人の並び替え $\rightarrow 2$ 通り. $24 \times 2 = 48$ 通り.

4

正四角錐は, 底面と側面が区別できる (転がしても底面は底面にしかない).

- ・ まず, 底面に塗る色を決める $\rightarrow 5$ 通り.
- ・ 残り 4 色を側面に塗る. 側面は円順列になる.
- ・ $(4 - 1)! = 6$ 通り.

よって,

$5 \times 6 = 30$ (通り)

※正四面体 ($2! = 2$ 通り) との違いに注意. 正四面体は「底面を固定する場所が 1 通り (どこも同じ)」だが, 正四角錐は「底面の色を選ぶ必要がある」.