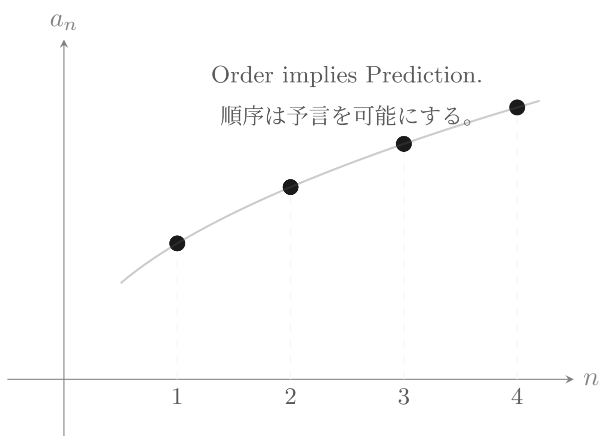
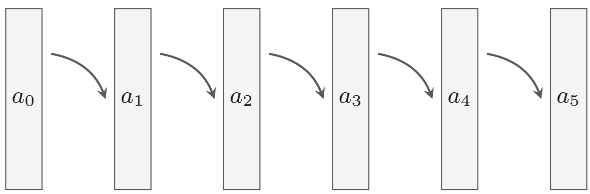
HIGH SCHOOL MATHEMATICS B

数列

The Rhythm of Numbers



Class: 2年 ______ 組　**Name:** ________________________



"The music of mathematics is played not on a continuous string,

but on distinct keys struck in time."

数学の音楽は、連続した弦の上ではなく、

一つずつ叩かれる鍵盤の上で奏でられる。

目次

第 1 回　並ぶ数の意思 —— 数列と一般項

Prologue： トランプの予言

昼休み、友人が机の上でトランプを並べている。スペードのカードが、左から順に $1, 4, 7, 10$ と置かれている。

友人　「ねえ、この次に来るカード、何か当ててみてよ」

私　「えっと、次は 13（キング）だね」

友人　「正解。じゃあさ、そのさらに隣は？」

私　「16……ってカードはないから、また 3 に戻るとか？」

友人　「いや、数字だけで考えてみてよ。16、19、22……って続くでしょ？　まるで未来が決まっているみたいだよね」

私は友人が並べたカードの列を見つめる。ただの紙切れのはずなのに、そこには「次」を強制する見えない力が働いている。

私　（……確かに。たった 4 枚のカードを見せられただけで、僕はまだ見ぬ 5 枚目、6 枚目の数字を確信してしまった。この『確信』の正体は何だろう？）

いつの間にか背後に立っていた先生が、友人の手からカードを一枚抜き取った。

先生　「その確信こそが、今日学ぶ**数列**の本質です。バラバラに見える数も、ある規則（ルール）の下に整列したとき、未来を予言する力を持ちます」

私　「未来を予言、ですか。ちょっと大げさな気もしますけど」

先生　「いいえ、数学において『規則を見抜く』ことは『無限の彼方を知る』ことと同義ですよ。さあ、まずは名前をつけてあげましょう」

1.1　住所と住人（項の定義）

先生は黒板に、箱のような図を描き始めた。箱の下には番号が振られ、中には数字が入っている。

1	4	7	10	$\cdots$	a_n
第 1 項 (a_1)	第 2 項 (a_2)	第 3 項 (a_3)	第 4 項 (a_4)		第 n 項 (一般項)

先生　「数が一列に並んだものを**数列**と呼びます。そして、それぞれの数を**項（こう）**と呼びます。一番目は第 1 項（初項)、二番目は第 2 項……という具合です」

定義：数列と項

数を順序よく並べたもの：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

- 数列全体を $\{a_n\}$ と書くことがある。
- 小さな数字（添え字）は「順番（住所)」を表し、 a そのものは「値（住人)」を表す。

友人　「住所と住人か。a_3 って言われたら、『3 番地の家に住んでいる人（数字)』ってことだね」

私　「さっきのトランプで言えば、$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7$ ってことか」

私　（一見当たり前に見えるけど、この『添え字 n』の存在が大きいな。ただの数字の集まりじゃなくて、『何番目か』という情報がセットになっている）

1.2　未来への関数（一般項）

先生　「さて、ここからが本番です。先ほど君たちは『次は 13 だ』と即答しましたね。では、**100 番目の数**はいくつですか？」

私　「えっ、100 番目……。全部書き出すのは無理だよ」

友人　「待って、規則があるはずだよね。3 ずつ増えてるから……」

友人はノートに計算を書き始める。

友人　「1 番目が 1。2 番目が $1+3$。3 番目が $1+3+3$……。つまり、番号より 1 回少なく 3 を足せばいいんだ！」

私　「なるほど。じゃあ 100 番目は、$1+3\times 99$ ってこと？」

先生　「その通り。では、それを文字 n を使って表現してみましょう」

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

先生　「この式 $a_n = 3n-2$ を、数列の**一般項**と呼びます。これさえあれば、もはや順番に数える必要はありません。n に好きな番号を代入するだけで、瞬時にその場所の数字が分かるのです」

定義：一般項 (General Term)

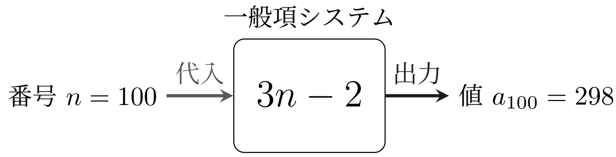
第 n 項 a_n を、n の式で表したもの。

$$a_n = f(n)$$

これは「番号 n を入れると、値 a_n が出てくる**関数**」とみなせる。

私　「関数……。そうか、$y = 3x - 2$ と同じなんだ。ただ x が整数しか入らないだけで」

友人　「タイムマシンみたいだね。一般項さえ分かれば、未来（$n = 1000$）でも過去（$n=1$）でも、どこへでもワープできる」



並べる手間を省き、
計算で値を特定する

Check： 規則を見抜く

問題

次の数列の一般項 a_n を推測せよ。

1. $2, 4, 8, 16, 32, \dots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
3. $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

友人　「(1) は簡単だね。2 倍ずつ増えてるから…… 2 の n 乗かな？」

私　「$n = 1$ のとき $2^1 = 2$、$n = 2$ のとき $2^2 = 4$……うん、合ってる。$a_n = 2^n$ だ」

友人　「(2) は分数の形だね。分子は $1, 2, 3 \dots$ だから n そのまま。分母はそれより 1 大きいから……」

私　「$n + 1$ だね。だから $a_n = \frac{n}{n+1}$」

私　「(3) がちょっと厄介だな。符号が交互に入れ替わってる」

先生　「そういうときは、-1 の累乗を考えると良いですよ」

友人　「あ、そっか。$(-1)^1 = -1$、$(-1)^2 = 1$ だから、そのまま $a_n = (-1)^n$ でいいんだ！」

1.3　同じ歩幅で歩く（等差数列）

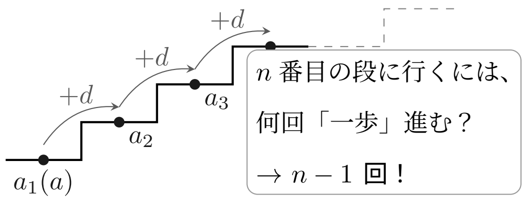
先生　「では、最も基本的な数列のパターンから詳しく見ていきましょう。先ほどのトランプの例のように、『一定の数ずつ増えていく（減っていく）』数列です」

定義：等差数列 (Arithmetic Sequence)

隣り合う項の差が一定である数列。その差を**公差（こうさ）**という。

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (一定)$$

先生　「初項を a、公差を d とします。階段を登るイメージを持ってください。1 段目 (a) からスタートして、1 歩ごとに d ずつ高さが増していきます」



私　「さっき友人が言っていた『1 回少なく足す』っていうのがポイントですね」

友人　「うん。スタート地点には既に立っているわけだから、移動回数は項数より 1 個減るんだよね」

公式：等差数列の一般項

初項 a, 公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

先生　「この $(n-1)$ の意味を忘れないでください。『間隔（インターバル）の数』は、常に『植木の数』より 1 つ少ない。植木算の原理ですね」

例題

初項 5, 公差 3 の等差数列の一般項を求めよ。また、第 10 項を求めよ。

私　「公式に当てはめるだけだね」

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3$$

友人　「展開して整理すると……」

$$a_n = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

私　「これが一般項。で、第 10 項は $n = 10$ を代入して……」

$$a_{10} = 3 \times 10 + 2 = 32$$

私　（検算してみよう。$5, 8, 11, 14 \ldots$ と 3 ずつ増える。10 回くらいなら指折り数えても……うん、確かに 32 になりそうだ。公式は正しい）

1.4 平均の美学（等差中項）

先生 「最後に、等差数列の持つ美しい性質を紹介しましょう。$2, 5, 8$ という並びを見て、何か気づきませんか？」

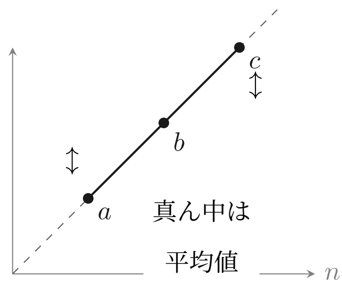
友人 「えっと……両端の 2 と 8 を足すと 10。真ん中の 5 のちょうど 2 倍だ」

先生 「その通り。等差数列において、連続する 3 つの項 a, b, c があるとき、真ん中の b は両隣の**平均**になっています」

$$b = \frac{a+c}{2} \iff 2b = a + c$$

私 「グラフにしてみると分かりやすいかも。等差数列って $y = dn + k$ みたいな 1 次関数だから、点は直線上に並ぶよね」

友人 「そっか。直線なら、真ん中の点はちょうど中点になるはずだもんね」



Epilogue： リズムを感じる

チャイムが鳴り、授業が終わった。黒板には $a_n = a + (n-1)d$ という式が残されている。

友人 「最初はただの数字の羅列だったのに、一般項が分かると、急にコントロールできる『道具』に見えてきたよ」

私 「うん。100 番目だろうが 1 億番目だろうが、もう怖くないね。僕たちは未来を知るための数式（コード）を手に入れたんだ」

先生 「良い感触です。今日は『足し算のリズム（等差数列）』を学びましたが、世界にはもっと急激に変化するリズムもあります。次回は、掛け算で増えていく世界——**等比数列**——について学びましょう」

私はノートを閉じた。整然と並ぶ数字たちの足音が、少しだけ心地よく聞こえた気がした。

To be continued in Lecture 2...

第 2 回　倍々ゲームの衝撃 —— 等比数列

Prologue： 月までの距離

放課後の教室で、友人がルーズリーフの紙を半分に折り続けている。1 回、2 回、3 回……。やがて紙は分厚くなり、7 回目あたりで友人は手を止めた。

友人　「くそっ、やっぱり無理か。これ以上は硬くて折れないや」

私　「何してるの？　力試し？」

友人　「いや、ネットで見たんだよ。『紙を 42 回折ると、厚さが月に届く』って噂。まさかそんなわけないと思ってさ」

私は薄っぺらい紙を見つめる。厚さはせいぜい 0.1 ミリメートルだ。それを何回か折っただけで、38 万キロメートル彼方の月に届くなんて、直感に反しすぎる。

私　（……0.1 ミリが月に？　さすがにそれは都市伝説じゃないかな。足し算なら、0.1 を 42 回足しても 4.2 ミリにしかならないし）

先生が通りかかり、面白そうに私たちの手元を覗き込んだ。

先生　「人間の直感は『足し算』には強いですが、『掛け算』の爆発力には鈍感なものです。倍、また倍と増えていくリズムは、ある地点を超えると想像を絶するスピードで世界を駆け上がります。今日はその恐ろしくも魅力的な**等比数列**の世界へ踏み込みましょう」

2.1　倍率というルール（等比数列の定義）

先生は黒板に $1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ という数列を書いた。紙を折ったときの「枚数」の変化だ。

先生　「隣り合う項の比が一定である数列を、**等比数列**と呼びます。その一定の比率を**公比（こうひ）**と言います」

定義：等比数列 (Geometric Sequence)

隣り合う項の比が一定である数列。

$$a_{n+1} \div a_n = r \quad (\text{一定})$$

または、次々と一定の数 r（公比）を掛けていく数列。

$$a_{n+1} = a_n \times r$$

友人　「さっきの紙の話なら、初項が 1 で、公比が 2 ってことだね。毎回 2 倍になっていく」

私　「単純なルールだね。でも、これが月に届くほどの威力を持つの？」

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \qquad \cdots$$

一定の倍率で変化する

2.2 指数の翼（一般項）

先生　「では、一般項を作ってみましょう。初項 a、公比 r の数列において、n 番目の項はどう表せますか？」

友人はノートに書き出しながら考える。

友人　「2 番目は $a \times r$。3 番目は $a \times r \times r$ つまり ar^2。4 番目は ar^3……」

私　「等差数列のときと同じだね。n 番目に行くには、『一歩』を $n-1$ 回進めばいい。今回はその『一歩』が掛け算になっただけだ」

公式：等比数列の一般項

初項 a, 公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

先生　「そう、回数はやはり $n-1$ です。では、先ほどの『紙を 42 回折る』計算をしてみましょうか。紙の厚さを初項 0.1mm とし、折った後の厚さを考えます。42 回折るとは、第 43 項（r を 42 回掛けた状態）のことですね」

$$0.1 \times 2^{42} \text{ (mm)}$$

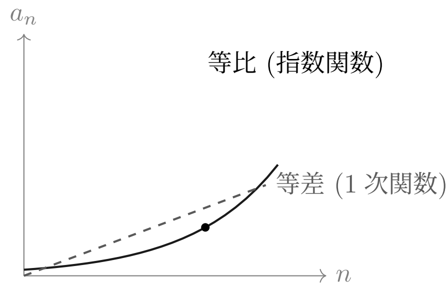
私　「2^{10} がだいたい 1000 (10^3) だから……」

友人　「2^{40} は $(2^{10})^4$ だから、およそ 10^{12} (1 兆) 倍！？　0.1mm の 1 兆倍って……」

$$0.1 \times 10^{12} \text{ mm} = 10^{11} \text{ mm} = 10^8 \text{ m} = 10^5 \text{ km}$$

私　「10 万キロメートル……！　いや、2^{42} だからもっといくか。本当に月に届くレベルだ」

先生　「正確には約 44 万キロメートルになります。月の距離（約 38 万キロ）を余裕で超えますね。これが**指数関数の増加**です。最初は緩やかでも、ある点から壁のように垂直に立ち上がる。それが等比数列の正体です」



Check： 計算の練習

問題

第 2 項が 6, 第 5 項が 162 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

私　「等差なら引き算で『差』を出したけど、等比なら割り算で『比』を出せばいいのかな」

友人　「そうだね。第 2 項から第 5 項まで、あと 3 回ジャンプしてるから……」

$$a_5 \div a_2 = \frac{ar^4}{ar^1} = r^3$$

$$162 \div 6 = 27$$

私　「$r^3 = 27$。3 回掛けて 27 になる数は…… 3 だ。公比 $r = 3$」

友人　「あとは第 2 項に戻ればいいね。$ar = 6$ だから、$a \times 3 = 6$ で、初項 $a = 2$ だ」

2.3 幾何的なバランス（等比中項）

先生　「等差数列には『真ん中は平均（相加平均)』という性質がありました。では、等比数列 $2, 6, 18$ の真ん中 6 は、両端の 2 と 18 に対してどんな関係にあるでしょうか？」

友人　「足してもダメだね。$2 + 18 = 20$ だし。……あ、掛けてみたら？　$2 \times 18 = 36$」

私　「36 は、真ん中の 6 の 2 乗だ！　つまり、ルートを取ったものになってる」

先生　「その通り。等比数列の連続する 3 項 a, b, c において、真ん中の項の 2 乗は両端の積に等しくなります」

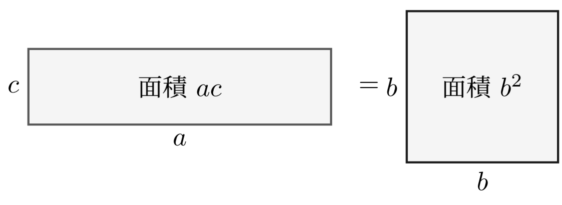
定義：等比中項

a, b, c が等比数列であるとき（$b \neq 0$)、

$$b^2 = ac \quad \left(\text{または } |b| = \sqrt{ac}\right)$$

この b を等比中項と呼び、これは a と c の**幾何平均（相乗平均）**にあたる。

先生　「これを図形でイメージしてみましょう。長方形と、それと同じ面積の正方形の関係です」



私　「なるほど。『足して 2 で割る』のが長さの平均なら、『掛けてルートを取る』のは面積的なバランスを取る平均なんだね」

友人　「だから『幾何』平均って言うのか。図形っぽいもんね」

Epilogue： 積み重ねる意思

授業の終わり、先生はチョークの粉を払いながら言った。

先生　「足し算の等差数列、掛け算の等比数列。この二つが数列の基本リズムです。未来を予言する力（一般項）は手に入れました。……では、もし『過去から今までの全て』を積み上げたら、一体どれくらいの量になるのか？」

私　「積み上げる……つまり、全部足すってことですか？」

先生　「そうです。これを**数列の和**と呼びます。次回は、天才少年ガウスも魅了された『足し算の魔法』について学びましょう」

友人がニヤリと笑う。

友人　「一般項が未来へのワープなら、和は歴史の総決算だね。面白そうだ」

私は手元の紙を見つめた。ただ折るだけで月に届くほどの爆発力を秘めた数たち。もしこれらを全て足し合わせたら、どんな巨大な数が生まれるのだろうか。

To be continued in Lecture 3...

第 3 回　積み上げる歴史 —— 等差数列の和

Prologue： 少年と石板

放課後の教室。友人が電卓を片手に、ノートに書かれた数字と格闘している。「1+2+3+4+...」どうやら、1 から 100 までの数字を全部足そうとしているらしい。

私　「何してるの？　暇なの？」

友人　「いや、単なる好奇心だよ。全部足したらいくつになるのかなって。……でも、これ結構しんどいな。今やっと 30 まで来たけど、打ち間違いそうで怖い」

私は友人の肩越しにノートを覗く。地道な足し算は、単純だが根気がいる。そこに先生が現れ、黒板に「$1 + 2 + \cdots + 100$」と書きながら口を開いた。

先生　「その計算、もし 10 歳の少年が『数秒』で解いたと言ったら信じますか？」

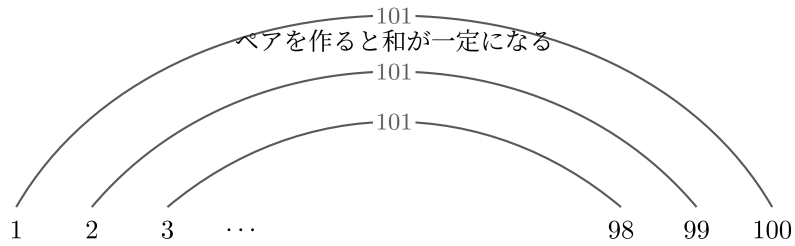
友人　「数秒？　無理だよ、入力するだけで 1 分はかかるのに」

先生　「18 世紀のドイツに実在した天才、カール・フリードリヒ・ガウスの逸話です。彼は先生が出したこの問題を、石板に答えだけを書くことで瞬殺しました。彼は『順番通りに足す』ことをやめたのです」

3.1　虹の架け橋（ガウスの方法）

先生　「ガウス少年が見た景色を再現してみましょう。1 から 100 までを一直線に並べます。そして、先頭と末尾を虹のように結んでみてください」

先生はチョークで 1 と 100、2 と 99 を曲線で結んだ。



全部で 100 個の数字 $\rightarrow$ 50 組のペア

友人　「あ！　$1 + 100 = 101$、$2 + 99 = 101$……全部 101 になってる！」

私　「なるほど。バラバラの数字を足すんじゃなくて、定数（101）のセットを作ったんだ」

先生　「そうです。数字は全部で 100 個。ペアにすると 50 組できますね。したがって……」

$$101 \times 50 = 5050$$

私　（すごい……。地道な足し算が、たった一回の掛け算に変わってしまった。視点を変えるだけで、計算の手間が劇的に減るんだ）

3.2 逆転の発想（和の公式）

先生　「では、これを一般的な等差数列に拡張しましょう。初項 a、末項 l (last)、項数 n の数列の和 S_n を考えます」

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l$$

先生　「ガウスのようにペアを作ってもいいですが、項数 n が奇数だと真ん中が余って少し面倒です。そこで、もっと機械的な方法を使います。**『同じものを逆順にして足す』**のです」

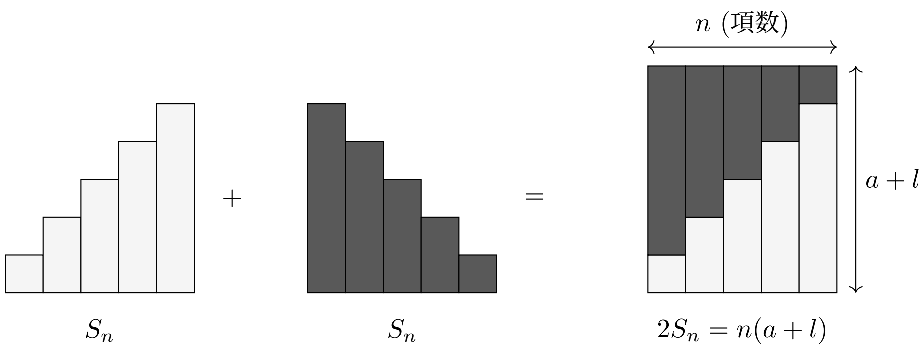
先生は黒板に、数列を 2 段にして書いた。下段は順序をひっくり返してある。

$$\begin{array}{rccccccccc}
S_n = & a & + & (a+d) & +\cdots+ & (l-d) & + & l & \\
S_n = & l & + & (l-d) & +\cdots+ & (a+d) & + & a & \\
\hline
2S_n = & (a+l) & + & (a+l) & +\cdots+ & (a+l) & + & (a+l) & (+)
\end{array}$$

$$\underbrace{(a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)}_{n \text{ 個の } (a+l)}$$

友人　「うわ、全部 $(a+l)$ になった！　上と下の凹凸がぴったりハマる感じだね」

私　「テトリスみたいだ。階段状のブロックに、逆向きの階段を重ねると、きれいな長方形になるイメージか」



先生　「その通り。長方形の面積は $n(a+l)$ ですが、これは求めたい S_n を 2 つ重ねたものです。だから最後は半分にするのを忘れずに」

公式：等差数列の和 (1)

初項 a, 末項 l, 項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

（意味：$\frac{1}{2} \times$ 項数 $\times$ (最初 $+$ 最後)）

3.3 末項が見えないとき

私　「でも先生、末項 l が分からないときはどうするんですか？　『100 項目まで足せ』って言われても、100 項目の数字 (a_{100}) を計算するのが面倒です」

先生　「良い質問です。前回やった**一般項の公式**を覚えていますか？」

友人　「えっと、$a_n = a + (n-1)d$ だよね。これが末項 l の正体だ」

先生　「そうです。さっきの和の公式の l の部分に、この式を代入してしまいましょう」

$$S_n = \frac{1}{2}n\{a + \underbrace{(a + (n-1)d)}_{l}\}$$

公式：等差数列の和 (2)

初項 a, 公差 d, 項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

友人　「式がちょっと長くなったけど、やってることは『末項を a と d で書き換えた』だけなんだね」

私　「最初と最後が分かっているなら (1)、公差しか分からないなら (2)。状況によって使い分ければいいわけか」

Check： 積み上げてみよう

問題

(1) 初項 3, 末項 31, 項数 8 の等差数列の和を求めよ。

(2) 初項 5, 公差 4 の等差数列の、初項から第 20 項までの和を求めよ。

友人　「(1) は末項が見えてるから、ガウスの方法（公式 1）だね」

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times (3 + 31) = 4 \times 34 = 136$$

私　「(2) は末項が書いてない。第 20 項を計算してもいいけど、公式 (2) にそのまま入れたほうが速そうだ」

私　「項数 $n = 20$ だから……」

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 20 \times \{2 \times 5 + (20 - 1) \times 4\} \\ &= 10 \times \{10 + 19 \times 4\} \\ &= 10 \times \{10 + 76\} = 10 \times 86 = 860 \end{aligned}$$

友人　「19×4 の計算、$(20 - 1) \times 4 = 80 - 4 = 76$ って考えると楽だね」

先生　「その感覚、素晴らしいですね。計算の工夫は数学の醍醐味の一つです」

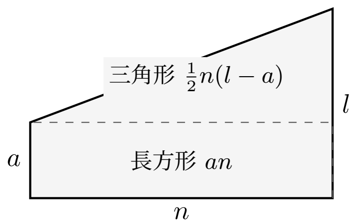
Epilogue： 台形の面積

授業の終わりに、先生は黒板に描いた「階段の図」を指差した。

先生　「今日の公式 $S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$。これ、何かの面積公式に似ていませんか？」

私　「$\frac{1}{2} \times$ (上底 $+$ 下底) $\times$ 高さ ……あ、**台形だ！**」

先生　「その通り。等差数列の和は、グラフにすると台形の面積になります。初項 a が上底、末項 l が下底、項数 n が高さに対応しているのです」



項数 n を「幅（高さ）」と見ると
まさに台形の面積公式！

友人　「数字の話だと思ってたのに、最後は図形の話になっちゃったね」

私　「数と図形は繋がっているんだな。バラバラに見える数字たちも、積み上げればきれいな形（台形）になる」

先生はニッコリと笑った。

先生　「足し算の次は掛け算です。等比数列を積み上げると、どんな形になると思いますか？　直線（台形）ではなく、もっと急激に空へ伸びる曲線が現れるはずです。次回は、その爆発的な和の世界へご案内しましょう」

To be continued in Lecture 4...

第 4 回　増殖する富と借金 —— 等比数列の和

Prologue：友人の提案

「ねえ、いい取引を思いついたんだけど」

昼休み、友人がニヤニヤしながら私の机にやってきた。手には電卓を持っている。

友人　「僕が君に、毎日お金をあげる。初日は 1 円、2 日目は 2 円、3 日目は 4 円……って感じで、毎日 2 倍にしていくんだ。期間は 1 ヶ月（30 日）」

私　「へえ、太っ腹だね。で、裏は何？」

友人　「その代わり、君は最初に『参加費』として **1 億円** を僕に払う。どう？ 1 円スタートのお小遣いなんて微々たるものだし、1 億円もらえるなら僕の勝ちに見えるけど」

私は直感的に警戒する。前回「指数関数の爆発」を見たばかりだ。1 円、2 円、4 円……と倍々で増えていくお金を 30 日間もらい続けたら、その**合計金額**はいくらになるのか？

私　「ちょっと待って。その合計、計算させて。$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ を 30 個足せばいいんだよね」

友人　「どうぞどうぞ。でも電卓で 30 回足すのは大変だよ？」

そこに先生が現れ、黒板に数式を書き始めた。

先生　「その勝負、受けてはいけませんよ。破産するのは君の方です。等比数列の和を計算するには、真面目に足し算をする必要はありません。もっとズル賢い**『ズラして消す』**方法があるのです」

4.1　敵を知る（和の定義）

先生　「まずは敵の正体をはっきりさせましょう。初項 a、公比 r、項数 n の等比数列の和 S_n は、次のように書けます」

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

私　「今回のケースだと、初項 $a = 1$、公比 $r = 2$、項数 $n = 30$ ですね。最後は r^{29} になるはず」

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{29}$$

友人　「これ、等差数列みたいに『逆順にして足す』のはダメなの？」

先生　「残念ながら、逆順にしてもペアの和は一定になりません。等比数列には、等比数列専用の必殺技が必要です。……ヒントは『公比 r を掛ける』ことです」

どうやって計算する？

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

これに r を掛けてみると……？

4.2 必殺のズラし（公式の導出）

先生 「元の和 S_n と、全体を r 倍した rS_n を並べて書いてみましょう。ただし、そのまま書くのではなく、**ひとつ右にズラして書くのがコツです**」

先生は黒板に 2 つの式を並べた。

$$\begin{array}{rcccccc} S_n = & a & \cancel{+ar} & \cancel{+ar^2} & +\cdots+ & \cancel{ar^{n-1}} & \\ rS_n = & & \cancel{ar} & \cancel{+ar^2} & +\cdots+ & \cancel{ar^{n-1}} & +ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a & & \cdots\cdots\cdots & & & -ar^n \end{array} \quad (-)$$

真ん中がごっそり消える！

友人 「うわっ！　上と下で同じ項が斜めに揃ってる。引き算したら、真ん中が全部消えちゃった」

私 「生き残ったのは、最初の『a』と、最後の『$-ar^n$』だけ……。なんて鮮やかな消去法なんだ」

先生 「まるで魔法でしょう？　あとは式を整理するだけです」

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

先生 「ここから S_n を求めたいので、$1-r$ で割れば完成です。ただし、$r \neq 1$ のときですね」

公式：等比数列の和 $(r \neq 1)$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{または} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

- $r < 1$ のときは左の式（分母がプラスになる）
- $r > 1$ のときは右の式（分母がプラスになる）

を使うと計算しやすい。

私　「ちなみに先生、$r = 1$ のときは？」

友人　「あ、それなら公式いらないよ。$a, a, a \ldots$ って同じ数が並ぶだけだから、$S_n = na$ だね」

4.3　1 億円の行方

先生　「では、最初の友人の提案に戻りましょう。初項 $a = 1$、公比 $r = 2$、項数 $n = 30$ の和です」

私　「$r = 2 > 1$ だから、右側の公式を使います」

$$S_{30} = \frac{1 \times (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1$$

友人　「$2^{30} - 1$ 円か。……で、これいくらなの？　指数だとピンとこないんだけど」

私　「$2^{10} \approx 1000$ (千) だったよね。ということは」

$$\begin{aligned} 2^{10} &\approx 10^3 \quad (\text{千}) \\ 2^{20} &\approx 10^6 \quad (\text{百万}) \\ 2^{30} &\approx 10^9 \quad (\text{十億}) \end{aligned}$$

私　「だいたい 10 億円くらいだ！」

友人　「じゅ、10 億！？　参加費 1 億円払っても、9 億円も損するところだった……」

先生　「正確には $2^{30} = 1,073,741,824$ です。約 10 億 7 千万円ですね。倍々ゲームの和は、最後の項が全体の約半分を占めるほどの急成長を見せるのです」

Check： 計算練習

問題

(1) 初項 3, 公比 2, 項数 5 の等比数列の和を求めよ。

(2) 初項 1, 公比 1/2 の等比数列の、初項から第 n 項までの和を求めよ。

友人　「(1) は $r = 2$ だから、$r - 1$ の方の公式だね」

$$S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 3(32 - 1) = 3 \times 31 = 93$$

私　「(2) は $r = 1/2$ だから、$1 - r$ の方の公式を使おう」

$$S_n = \frac{1\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}$$

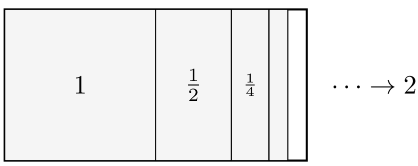
私　「分母の 1/2 で割るってことは、全体を 2 倍するってことだから……」

$$S_n = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

先生　「正解です。ちなみに (2) の結果、n をものすごく大きくするとどうなると思いますか？」

友人　「$(1/2)^n$ はどんどん小さくなって 0 に近づくから…… S_n は 2 に近づく？」

先生　「その通り。無限に足しても、ある壁（この場合は 2）を超えられない。これは『無限等比級数』という、数学 III で学ぶ深いテーマに繋がります」



面積 $= 2$

Epilogue： 記号の力

友人は「危なかったあ」と言いながら電卓をしまった。

友人　「『ズラして引く』だけで、10 億なんて数字が一瞬で出ちゃうんだね。数式って魔法の杖みたいだ」

私　「でも、まだ計算式の書き方が面倒くさいよ。『$a + ar + \cdots + ar^{n-1}$』って書くのが長いし」

先生が黒板の隅に、見慣れない記号を大きく書いた。

先生　「おや、良いことに気づきましたね。数学者は怠け者なので、その『足し算の長ったらしい記述』を圧縮する記号を発明しました。次回は、その記号 Σ（シグマ）の使い方を学びましょう」

友人　「シグマ……。なんか強そうな名前だね」

私　「怠け者のための記号か。僕たちにぴったりかもね」

私たちは笑いながら教室を後にした。夕焼けの空の下、私の頭の中では、まだ見ぬ記号 Σ が不思議な形をして踊っていた。

To be continued in Lecture 5...

第 5 回　怠け者のための記号 —— Σ（シグマ）の定義

Prologue： 記述の限界

「$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$」友人がノートに長々と数式を書いている。途中で手が疲れたのか、ペンを放り出した。

友人　「ああもう！　面倒くさいな。なんで数学って、こんなに何度も何度もプラスを書かなきゃいけないの？　もっとこう、パッと一文字で書けないわけ？」

私　「S_{100} って書けばいいじゃない」

友人　「それだと中身が分からないじゃん。『何の数列を』『どこからどこまで』足すのか、一目で分かるけど短い書き方が欲しいんだよ」

私　（贅沢な悩みだな……。でも確かに、項数が n とか $2n$ とか複雑になると、... を使った書き方も怪しくなってくる）

先生が黒板に向かい、ギリシャ文字を一文字、大きく書いた。鋭く尖った、Mを横倒しにしたような形。

先生　「その願い、叶えましょう。数学者もまた、同じことを何回も書くのが大嫌いな人種なのです。彼らが開発した究極の圧縮記号、それが Σ（シグマ）です」

5.1　命令の解読（Σ の定義）

先生　「この記号は、英語の Sum（和）の頭文字 S にあたるギリシャ文字 Σ です。これ単体では意味を持ちませんが、上下と右に『命令』を書き込むことで機能します」

先生は記号の周りに情報を書き足した。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

先生　「これは『k を 1 から n まで変化させながら、a_k を全部足せ』という命令文です」

定義：Σ 記号 (Summation Notation)

数列 $\{a_n\}$ の第 l 項から第 n 項までの和を次のように書く。

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_n$$

- 下 $(k = l)$：スタート地点（初期値）
- 上 (n)：ゴール地点（終了値）
- 右 (a_k)：足すべきもの（一般項）

友人　「なるほど。下から始まって、上まで行くんだね。プログラミングのループ処理みたいだ」

私　「k はカウンター（数を数える変数）ってことか。1, 2, 3... って増えていって、n になったら終了」

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

End: $k = n$ (ここまで)

Rule: a_k (これを足す)

Start: $k = 1$ (ここから)

読み方：「シグマ、k=1 から n まで、a sub k」

私　「ちなみに先生、この変数は k じゃなきゃダメなんですか？」

先生　「いいえ、i でも j でも構いません。ただし、$\sum_{k=1}^{n} a_n$ のように、関係ない文字を使ってしまうと意味が変わるので注意が必要です」

5.2 分配と定数（Σ の性質）

先生　「Σ は単なる『足し算の省略形』ですから、足し算が持っている性質はそのまま受け継ぎます。例えば、分配法則のようなことができます」

性質：Σ の線形性

1. **和の分解：**
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
2. **定数倍のくくり出し：** (c は定数)
$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

友人　「(1) は、混ぜてから足しても、別々に足してから合わせても同じってことだよね」

私　「(2) は、全部に c が掛かってるなら、最後にまとめて c 倍すればいいってことか」

先生　「その通り。ここまでは直感的ですね。では、これはどうでしょう？」

性質：定数の和

c が定数のとき、
$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$
（注意：c ではない！）

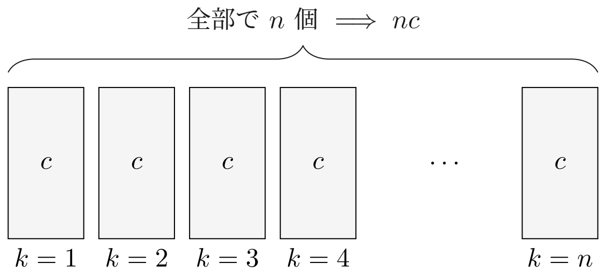
友人　「えっ？　k が入ってないよ。ただの c じゃん」

私　「待てよ、翻訳してみよう。『$k = 1$ のとき c を足せ。$k = 2$ のときも c を足せ……』ってことだから」

$$\underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\ \text{個}} = nc$$

私　「なるほど！　変化しない数字を n 回足すから、$n \times c$ になるんだ」

友人　「うわ、これ引っかかりそう。ついそのまま c って答えちゃいそうだ」



Check： 記号の翻訳

問題

(1) 次の和を Σ を使わずに、各項を書き並べて表せ。

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)$$

(2) 次の和を Σ を用いて表せ。

$$2+5+8+\cdots+29$$

友人　「(1) は、カウンター k を 1 から 4 まで動かせばいいんだね」

- $k=1$ のとき： $2(1)-1=1$
- $k=2$ のとき： $2(2)-1=3$
- $k=3$ のとき： $2(3)-1=5$
- $k=4$ のとき： $2(4)-1=7$

友人　「だから答えは $1+3+5+7$ だ。これ、奇数の和だね」

私　「(2) は逆の作業だ。まず一般項を見つけないと」

私　「$2, 5, 8\ldots$ だから、初項 2、公差 3 の等差数列だね」

$$a_k = 2+(k-1)3 = 3k-1$$

私　「次に、ゴール（末項）が何番目か調べよう」

$$3n-1=29 \implies 3n=30 \implies n=10$$

私　「よし、スタートは 1、ゴールは 10、ルールは $3k-1$ だ」

$$答え：\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$$

先生　「完璧です。一般項さえ作れれば、あとはスタートとゴールを指定するだけで、どんな長い足し算も Σ の中に閉じ込めることができます」

Appendix： 0 番目からのスタート

友人　「ねえ先生、スタートはいつも 1 なの？　プログラムだと 0 から数えることも多いけど」

先生　「鋭いですね。数学でも $k = 0$ から始めることはよくあります。その場合、ゴールの数字に注意が必要です」

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

私　「これ、全部で何個足してるんだろう？　1 から n なら n 個だけど……」

友人　「0 の分が増えるから、$n + 1$ 個だね」

先生　「その通り。Σ の上下の数字を見て『何回足すのか（個数)』を瞬時に把握する感覚、とても大切ですよ」

Epilogue： 圧縮された魔導書

黒板には、Σ を使った式がいくつか並んでいる。最初は見慣れない記号に身構えていたけれど、意味が「ただの足し算」だと分かれば怖くない。

私　「要するに Σ って、私たちへの『命令書』なんですね。『ここからここまで、このルールで足せ』っていう」

友人　「うん。で、その命令書を開くと、中からドバーッと数字が溢れ出してくる感じ。圧縮ファイルみたいで便利だね」

先生は片付けをしながら頷いた。

先生　「良い例えです。しかし、圧縮するだけでは片手落ちです。展開せずに、Σ のまま計算して答えが出せたら、もっと楽だと思いませんか？」

私　「Σ のまま計算？　……そんな公式があるんですか？」

先生　「ええ。次回は、この Σ 記号を最強の武器に変える『**自然数の和の公式**』を伝授しましょう。ピラミッドの石の数を、一瞬で数える魔法ですよ」

To be continued in Lecture 6...

Coffee Break: 二次元の森 —— 二重シグマの正体

Episode： シグマの中にシグマ？

休憩時間。友人が参考書の「発展」ページを開いて、眉間に皺を寄せている。

友人　「ねえ、見てよこれ。シグマの横に、もう一個シグマがいるんだけど……。見間違いかな？」

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

私　「うわ、本当だ。二重シグマ……。記号が二つ並ぶと、急に威圧感が増すね」

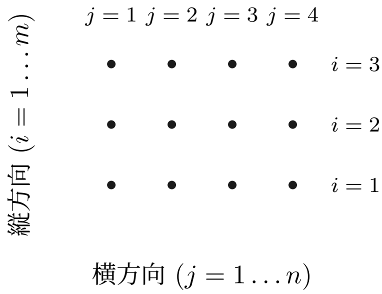
友人　「これってどう計算するの？　一気にやるの？　それとも順番があるの？」

先生がコーヒーカップを片手にやってきて、私たちの机に置かれた方眼紙を指差した。

先生　「慌てることはありません。それは単なる『**二次元の足し算**』です。君たちは普段、ものの数を数えるとき、無意識にこの『二重シグマ』を使っているんですよ」

視点の切り替え： スキャンの方角

先生　「例えば、この長方形の領域に並んだ点（格子点）の数を数えたいとします。縦に m 個、横に n 個並んでいます」



先生　「この点を全部足し合わせる方法は、大きく分けて二通りあります。**『横に見てから縦に足す』**か、**『縦に見てから横に足す』**かです」

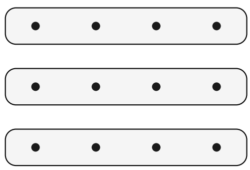
Method A： 横一列をまとめてから、縦に積む

先生　「まず、ある『行（i)』を固定して、横方向（j）に全部足してしまいます」

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i\text{ 行目の合計})$$

先生　「そして、その『行の合計』を、縦方向（i）に積み上げるのです」

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$$

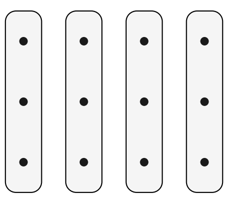


$$\sum_{i=1}^{m}\left(\text{横の和}\right)$$

Method B： 縦一列をまとめてから、横に並べる

先生　「逆に、先に縦方向（i）を足してしまってから、それを横（j）に足しても結果は同じですね」

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$



$$\sum_{j=1}^{n}\left(\text{縦の和}\right)$$

私　「なるほど。カッコの中（内側のシグマ）を先に計算して、その結果を外側のシグマで足す。順番が変わるだけで、やってることは総当たり戦なんだ」

友人　「長方形ならどっちでも良さそうだけど……形が複雑になったら？」

先生　「良い勘をしています。領域が三角形だったりすると、『縦に切るか、横に切るか』で計算の難易度が劇的に変わることがあります。二重シグマを見たら『**計算しやすい方向からスキャンする**』。これが鉄則ですよ」

まとめ：二重シグマの心構え

- **内側から外側へ**：内側の Σ をひとつの「塊（数字）」として処理する。
- **変数の区別**：内側の Σ が k についての和なら、それ以外の文字（i や n）は**定数扱い**にして外に出せる。

第 6 回　ピラミッドの石の数 —— 自然数の和と公式

Prologue： 記号はただの箱？

「$\sum_{k=1}^{100} k$」
友人がノートに書いた数式を指でつついている。

友人　「ねえ、この記号（シグマ）ってさ、結局『足し算しろ』っていう命令文だよね？」

私　「うん。$1+2+\cdots+100$ を短く書いただけだね」

友人　「じゃあさ、実際に答えを出すには、結局ガウスの方法（台形の面積）を使わないといけないじゃん。Σ は記述を短くするだけで、計算を楽にしてくれるわけじゃないの？」

確かにそうだ。記号はあくまで「箱」であって、計算するのは人間だ。そこに先生が現れ、チョークを手に取った。

先生　「いいえ、Σ はただの箱ではありません。この記号の真価は、中身を『**公式**』に置き換えられる点にあります。箱の中身をブラックボックス化して、計算結果だけを吐き出す装置に変えてしまいましょう」

6.1　1 乗の和（直線の公式）

先生　「まずは復習です。1 から n までの自然数の和。これは等差数列の和の公式そのものですね」

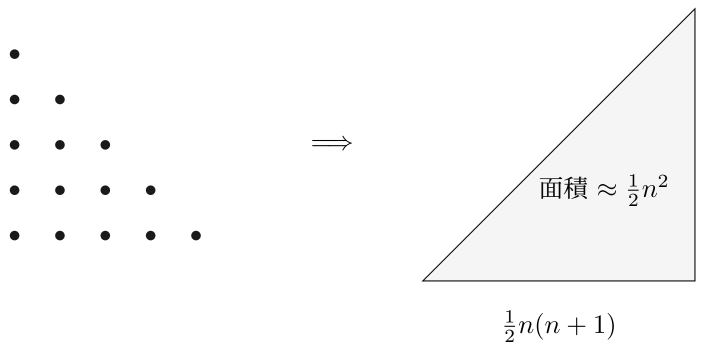
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$$

私　「初項 1、末項 n、項数 n だから……」

公式：自然数の和 (Σk)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

先生　「図形で言えば、底辺 n、高さ n の階段状の三角形の面積（正確には長方形の半分）です。ここまでは簡単ですね」



6.2　2 乗の和（次元の上昇）

先生　「では、次はこれです。ピラミッドのように石を積み上げたとき、石の総数はいくつになるでしょう？」

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

友人　「$1 + 4 + 9 + 16 \ldots$ か。等差数列でも等比数列でもないね」

私　「公式も使えないし、ガウスみたいにひっくり返してもペアが作れないよ」

先生は黒板に不思議な恒等式を書いた。

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

友人　「えっ？　急に **3 乗**？　今、2 乗の話をしてるんだよね？」

先生　「ここが数学の魔法です。**2 乗の世界（面）を知りたければ、3 乗の世界（立体）の力を借りる**のです。この式の k に 1 から n までを入れて、縦に並べてみましょう」

斜めに消える！

$$\begin{array}{rrcrrr}
k=1: & \cancel{2^3} - 1^3 & = & 3(1^2) & +\,3(1) & +\,1 \\
k=2: & \cancel{3^3} - \cancel{2^3} & = & 3(2^2) & +\,3(2) & +\,1 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
k=n: & (n+1)^3 - n^3 & = & 3(n^2) & +\,3(n) & +\,1 \\
\hline
 & (n+1)^3 - 1^3 & = & 3\sum k^2 & +3\sum k & +n
\end{array} \quad (+)$$

私　「うわ、左辺がドミノ倒しみたいに消えていく！　残ったのは最初と最後だけだ」

友人　「で、右辺に欲しかった $\sum k^2$ が出てきた！　これを求めればいいんだね」

私たちは計算を進める。

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

これを S_n について整理するのは骨が折れる作業だったが、因数分解を駆使して整えると、驚く

ほど綺麗な形が現れた。

公式：2 乗の和 (Σk^2)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

先生　「分母に 6 が出てくるのが特徴です。n と $n+1$、そして『2 倍して 1 足したもの』を掛けて 6 で割る。ピラミッドの石の数は、この魔法の杖で一瞬で数えられます」

6.3 3 乗の和（美しい偶然）

先生 「最後に 3 乗の和です。$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$。導き方はさっきと同じで、今度は『4 乗の力』を借りますが……結果だけ見てもらいましょう」

公式：3 乗の和 (Σk^3)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

友人 「あれ？　この中身って…… Σk の公式じゃない？」

私 「本当だ！　つまり、$\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$ ってこと？　嘘みたいに綺麗だ」

先生 「不思議ですよね。3 次元の立法体を積み上げていくと、なぜか『直線の和の 2 乗』と一致する。これは数学の中でも特に美しい偶然（あるいは必然）の一つです」

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$$

$\longleftrightarrow$ 一致！

Check： 武器の手入れ

問題

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2 + 3k)$$

私 「よし、公式を使って解いてみよう。まず線形性でバラバラにする」

$$\sum k^2 + 3\sum k$$

友人　　「$n = 10$ を公式に入れればいいね」

- $\sum k^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times (20+1) = \frac{1}{6} \times 110 \times 21$
- $\sum k = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$

私　　「$\frac{1}{6} \times 110 \times 21 = 55 \times 7 = 385$ だね」

$$\text{与式} = 385 + 3 \times 55 = 385 + 165 = 550$$

友人　　「できた！　地道に足したら日が暮れる計算が、数行で終わったよ」

Epilogue： 道具箱の充実

黒板には 3 つの公式が並んでいる。

- $\sum k = \frac{1}{2}n(n+1)$
- $\sum k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $\sum k^3 = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$

私　「Σ はただの記述ルールじゃなくて、この公式たちを引き出すための『鍵』だったんですね」

先生　「その通り。この鍵があれば、どんな多項式の和でも計算できます。しかし……世の中にはこの公式が通用しない数列も存在します」

先生は少し声を落として続けた。

先生　「もし、隣り合う項の差が一定でなかったら？　等比数列でもなかったら？　そんな『掴みどころのない数列』に出会ったら、どうしますか？」

友人　「えっ、そんなのあるの？　お手上げだよ」

先生　「いいえ。数列の変化（差）に注目するのです。次回は、変化の裏側を見る『階差数列』について学びましょう」

私は筆箱にペンを戻した。手に入れたばかりの「公式」という武器。でも、数学の奥地には、まだこれだけでは倒せない怪物が潜んでいるらしい。

To be continued in Lecture 7...

第 7 回　変化の変化を見る —— 階差数列

Prologue： 壊れたリズム

「$2, 3, 6, 11, 18, 29, \ldots$」黒板に書かれた数列を前に、友人が腕組みをしている。

友人　「うーん、全然わからない。等差数列なら差が一定のはずだし、等比なら倍率が一定のはずだよね。でもこれは……」

私　「差を計算してみようか。$3-2=1$、$6-3=3$、$11-6=5$……。バラバラだね」

友人　「倍率も変だよ。1.5 倍、2 倍、1.8 倍……。規則性なんてないんじゃない？」

私たちは途方に暮れた。今まで習った「等差」「等比」という武器が、この数列には全く通用しない。まるで暗号だ。

先生　「諦めるのはまだ早いですよ。君たちは今、数列の『値』だけを見て悩んでいますが、もっと大切なものを見落としています。それは『**変化の仕方**』です」

私　「変化の仕方？　さっき差を計算しましたけど、バラバラでしたよ」

先生　「本当にバラバラでしたか？　もう一度、その『差』たちを並べて、じっと見つめてごらんなさい」

7.1　数列の裏側（階差数列の定義）

私は言われた通り、隣り合う項の引き算（差）を書き出してみた。

元の数列 $\{a_n\}$2:　3　6　11　18　29　$\cdots$

差の数列 $\{b_n\}$:　1　3　5　7　11　$\cdots$

差の数列 $\{b_n\}$ を見ると……

$1, 3, 5, 7, 11 \ldots$

あれ？　これって**奇数の列**（等差数列）だ！

友人　「あっ！　下の段に規則があったんだ！　$1, 3, 5, 7 \ldots$ って増えてる」

私　「本当だ。元の数列 $\{a_n\}$ は複雑に見えたけど、その変化のリズム $\{b_n\}$ は単純な等差数列だったんだね」

先生　「その通り。このように、元の数列の『隣り合う項の差』で作られた新しい数列を、**階差数列（かいさすうれつ）**と呼びます」

定義：階差数列

数列 $\{a_n\}$ に対して、

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ を、$\{a_n\}$ の階差数列という。（意味：a_n の「変化のスピード」を表す数列）

7.2　階段を登る（一般項の公式）

友人　「裏の規則（b_n）が分かったのはいいけど、知りたいのは表の数列（a_n）の正体だよ。どうやって戻せばいいの？」

先生　「階段をイメージしてください。a_1 はスタート地点（1 階の床）の高さ。$b_1, b_2, b_3 \ldots$ はそれぞれの『段差の高さ』です。n 階に行くにはどうしますか？」

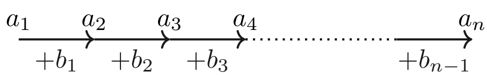
私　「1 階からスタートして、段差を次々と登っていけばいい……つまり、足していけばいいんだ」

$$a_n = (\text{スタート}) + (\text{段差の合計})$$

私は図を描いて確認する。a_2 に行くには、a_1 に b_1 を足す。a_3 に行くには、a_1 に b_1 と b_2 を足す。a_n に行くには……？

ゴール a_n に着くには、

スタート a_1 に b_1 から $\mathbf{b_{n-1}}$ まで足す



友人　「ちょっと待って。a_n だから b_n まで足すんじゃないの？」

私　「いや、植木算だよ。n 番目の地点に行くための『間隔』は $n-1$ 個しかない。だから足すのは b_{n-1} までだ」

先生　「正解です。その『$n-1$』が非常に重要です。ここで前回学んだ Σ が役に立ちますよ」

> **公式：階差数列を利用した一般項**
>
> $n \geqq 2$ のとき、
>
> $$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
>
> （意味：現在の高さ ＝ 初期の高さ ＋ 変化の積み重ね）

先生　「ただし、注意点が一つ。この Σ の天井は $n-1$ です。もし $n=1$ だと『1 から 0 まで足せ』という命令になり、壊れてしまいます。だからこの公式は、$n \geqq 2$ という条件付きでしか使えないのです」

7.3 謎の数列の正体

私　「よし、さっきの数列で計算してみよう。$a_1 = 2$。階差数列 b_k は奇数だから $2k-1$ だったね（初項 1、公差 2 の等差数列)」

$$b_k = 1 + (k-1)2 = 2k - 1$$

私　「これを公式に代入する。$n \geqq 2$ として……」

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

友人　「Σ の計算だ。線形性でバラして……」

$$= 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

私　「ここで公式を使うけど、上が n じゃなくて $n-1$ だから気をつけないと」

- $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$
- $\sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1 \quad$ (1 を $n-1$ 回足す)

私　「これを代入して整理するよ」

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) \\ &= 2 + (n^2 - n) - n + 1 \\ &= n^2 - 2n + 3 \end{aligned}$$

友人　「出た！　$a_n = n^2 - 2n + 3$ だ」

先生　「まだ終わりではありません。その式は $n \geqq 2$ の世界で導かれたものです。$n = 1$ でも正しいか、最後に確認（検問）をする必要があります」

私　「えっと、$n = 1$ を代入すると…… $1^2 - 2(1) + 3 = 2$。初項 a_1 は……あ、ちゃんと 2 だ！　一致しました」

解答の記述手順

1. 階差数列 b_n を求める。
2. $n \geqq 2$ のとき、公式 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を計算する。
3. $n = 1$ のときも成り立つか確認する。（「$n = 1$ とすると $a_1 = \ldots$ となり成り立つ」と書く）

Check： 隠れた規則を探せ

問題

次の数列の一般項を求めよ。

$$1, 2, 5, 14, 41, \dots$$

友人　「まずは差を取ろう」

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+9} 14 \xrightarrow{+27} 41$$

友人　「階差数列 b_n は $1, 3, 9, 27 \dots$。これ、3 倍ずつ増えてるから**等比数列**だ！」

私　「初項 1、公比 3 の等比数列だね。一般項は $b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$」

私　「よし、公式発動。$n \geqq 2$ のとき……」

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

友人　「等比数列の和の公式だね。公比 $r = 3$、項数は…… $n-1$ 個だ」

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} \\ &= \frac{2 + 3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \end{aligned}$$

私　「最後に $n = 1$ チェック。$\frac{3^0+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$。初項と一致！　これで完璧だ」

Epilogue： 多層的な世界

先生　「どうですか？　一見デタラメに見える数列も、皮を一枚剥いで『変化』を見ることで、美しい構造が見えてきましたね」

私　「はい。なんだか探偵になった気分です。表面上の数字（a_n）に騙されず、裏の動機（b_n）を探るというか」

友人　「でも先生、もし階差数列を取っても規則が見つからなかったらどうするの？」

先生　「良い質問です。そのときは、さらにもう一度差を取ります。**第 2 階差数列**です。世の中の現象は、速度（変化）だけでなく、加速度（変化の変化）まで見て初めて理解できることが多いのですよ」

私はノートの数列を見つめ直した。数字たちは、ただ並んでいるのではない。お互いの距離感（差）によって、密接に結びつき、秩序を作っているのだ。

先生　「さて、これで一般項を求める技術は一通り揃いました。次回からは、もっとパズル的な計算の世界——『**いろいろな数列の和**』に入ります。分数を分解したり、打ち消し合ったり……計算の爽快感が味わえる分野ですよ」

To be continued in Lecture 8...

第 8 回　打ち消し合う運命 —— いろいろな数列の和

Prologue： 結合の拒絶

$$「\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{100\cdot 101}」$$

友人がノートに長い分数の式を書いている。

友人　「これ、全部足せって問題なんだけどさ。分数の足し算ってことは、通分しなきゃいけないよね？」

私　「えっ、分母を全部掛け合わせるの？　100 の階乗みたいな数になるよ。計算機でもパンクしそう」

友人は頭を抱えた。

友人　「だよね。でも、これ以外に分数を足す方法なんて……」

そこに先生が現れ、友人のペンを取り上げた。

先生　「君たちは仲が良すぎますね。すぐに数字同士を『くっつけよう（通分）』とする。しかし、この問題を解く鍵は逆です。『**仲を引き裂く**』のです」

私　「引き裂く？」

先生　「ええ。くっついている積を、引き算の形に分解する。すると、驚くべき『**打ち消し合い（キャンセル）**』が始まります」

8.1　崩壊の連鎖（部分分数分解）

先生　「まず、一つの項だけに注目しましょう。$\frac{1}{k(k+1)}$ です。これを『$\frac{1}{k}$ と $\frac{1}{k+1}$ の引き算』に変形できないか試してみてください」

私　「引き算……通分の逆をやるってことかな」

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$$

友人　「あ、戻った！　すごい、本当にイコールだ」

先生　「これを**部分分数分解**と呼びます。積の形を差の形に分解するテクニックです。さて、これを元の式に適用して書き並べてごらんなさい」

私たちは言われた通り、すべての項を引き算の形に書き換えて並べてみた。

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$$

私　「……あれ？　これ、隣同士を見てみて」

友人　「$-\frac{1}{2}$ と $+\frac{1}{2}$ がある。ここ、消えるね。その隣の $-\frac{1}{3}$ と $+\frac{1}{3}$ も……」

$$S = 1 \cancel{- \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \quad \cancel{- \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} \quad \cancel{- \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}} \quad - \frac{1}{101}$$

ドミノ倒しのように

中間がすべて消滅する！

私　「すごい……！　最初と最後しか残らない」

$$S = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

先生　「これが『打ち消し合い』の魔力です。どんなに項数が多くても、中間はすべて対消滅し、最初と最後だけが生き残る。計算の世界における一種のショーですね」

テクニック：部分分数分解

分母が積の形なら、差の形に分解して打ち消し合いを狙う。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

※ 分母の差が 1 でない場合（例：$k(k+2)$）は、係数補正が必要。

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

8.2 姿を変えた打ち消し合い

友人 「じゃあ、ルートが入ってる場合はどうなるの？　たとえばこれ」

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

私 「分母にルートがある……。これじゃ引き算の形に見えないね」

先生 「分母にルートがあるとき、君たちがいつもやる操作は何ですか？」

私 「有理化です」

私はノートで計算してみる。分母と分子に $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ を掛ける。

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

友人 「あ！　引き算の形になった！　これも打ち消し合いができるパターンだ」

$$\begin{aligned} S &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= -1+\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

先生 「その通り。一見すると関係なさそうな式でも、『差の形（$f(k+1)-f(k)$）』を作り出せれば、同じ運命（キャンセル）を辿るのです」

8.3 混ざり合った数列（等差×等比）

先生 「さて、次は打ち消し合いませんが、綺麗に計算できるパターンです。等差数列と等比数列が掛け算された数列の和です」

問題

次の和 S を求めよ。

$$S = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n$$

友人　「左側は $1, 2, 3\ldots$ で等差数列。右側は $2, 2^2, 2^3\ldots$ で等比数列。二つが合体してるね」

私　「$\Sigma k\cdot 2^k$ か……。公式はないよね？」

先生　「公式はありませんが、**『等比数列の和』を求めたときの技**を思い出してください。公比 r を掛けて、どうしましたか？」

私　「ズラして……引きました！」

$$
\begin{array}{rcccccc}
S = & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +3\cdot 2^3 & +\cdots+ & n\cdot 2^n & \\
2S = & & 1\cdot 2^2 & +2\cdot 2^3 & +\cdots+ & (n-1)2^n & +n\cdot 2^{n+1} \\
\hline
-S = & 2 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^3 & +\cdots+ & +1\cdot 2^n & -n\cdot 2^{n+1}
\end{array}
\quad (-)
$$

ここが等比数列の和になる！

私　「引き算すると、係数が全部 1 に揃った！　真ん中の部分が、純粋な等比数列の和になってます」

友人　「でも、最後の $-n \cdot 2^{n+1}$ だけは仲間外れだね。忘れないようにしないと」

私たちは慎重に計算を進める。

$$\begin{aligned} -S &= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n \cdot 2^{n+1} \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} \\ &= 2(2^n - 1) - n \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 - n)2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

私　「最後に両辺を -1 倍して、S に戻せば……」

$$S = (n - 1)2^{n+1} + 2$$

先生　「正解です。項がズレて係数が揃うこの感覚、パズルがハマるようで気持ちいいでしょう？」

解法：（等差）×（等比）の和

$$S_n - rS_n$$

を計算することで、等比数列の和に帰着させる。

- ポイント 1：項をひとつ右にズラして書く。
- ポイント 2：引き算すると、等差数列の公差（通常は 1）が係数として現れる。
- ポイント 3：最後の項（はみ出した項）の符号に注意する。

Check： 崩壊を見届けよ

問題

次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

友人　「部分分数分解だね。差が 2 だから、係数調整が必要かな？」

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

私　「これを書き並べてみよう。係数の 1/2 は最後に掛けるとして……」

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

友人　「あれ？　隣同士じゃ消えないよ。$-1/3$ と消えるのは、一つ飛ばした先の $+1/3$ だ」

私　「そうか、差が 2 だから『2 つ先』と打ち消し合うんだ。ということは……」

先生　「生き残るのは、最初の 2 つと、最後の 2 つですね」

$$S = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

私　（なるほど。隣と消えるとは限らない。生き残りのパターンも色々あるんだな）

Epilogue： 混沌の中の秩序

計算を終え、黒板を見ると、最初はあんなに複雑だった式が、シンプルな答えに収束していた。

私 「最初は手も足も出ないと思いましたけど、うまく分解したりズラしたりすれば、ちゃんと道が開けるんですね」

友人 「ドミノ倒しみたいに消えていくのが爽快だったよ。数学の問題で『スッキリする』なんて初めてかも」

先生 「混沌として見える数列も、適切な視点（分解やズラし）を与えれば、自ずと秩序ある姿を見せてくれます。それが数列の面白さです」

先生は時計を見た。

先生 「さて、ここまでは『一列に並んだ数』を扱ってきました。しかし、数は時に群れをなして現れます。次回は、グループ分けされた数の迷宮——『**群数列**』に挑みましょう」

友人 「群れ……？　住所がもっと複雑になりそうだね」

私たちは、綺麗に消えた数式の余韻に浸りながら、次の迷宮への準備を始めた。

To be continued in Lecture 9...

第 9 回　群れをなす数たち —— 群数列

Prologue： 句読点のない世界

$$「1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, \ldots」$$

黒板に、数字が延々と書かれている。

友人　「目が回りそう。増えたと思ったらまた 1 に戻るし、全然規則的じゃないよ」

私　「でも、なんとなくリズムは感じるよね。1 が出るたびにリセットされてるような……」

先生が赤いチョークを持ち、数字の間に縦線を引いていった。

$$1 \mid 1, 2 \mid 1, 2, 3 \mid 1, 2, 3, 4 \mid 1, \ldots$$

先生　「長い文章も、句読点がないと読みづらいものです。しかし、こうして区切り線（スラッシュ）を入れて『グループ』を作れば、構造が一気に見えてきます」

友人　「あ！　第 1 グループは 1 個、第 2 グループは 2 個……って、個数が増えてるんだ」

私　（なるほど。ただの一列の行列じゃなくて、小隊ごとの行進だったんだ）

先生　「今日は、この『群れ』をなす数列の中で、迷子にならずに目的地（第 100 項など）へたどり着くための『**地図の読み方**』を学びましょう」

9.1　住所の特定（群と番号）

先生　「群数列を解く最大の鍵は、『**通し番号**』と『**住所**』の変換です」

定義：群数列の住所数列全体をある規則で区切ったとき、

- **第 k 群**：k 番目のグループ
- **第 k 群の m 番目**：グループ内での順番

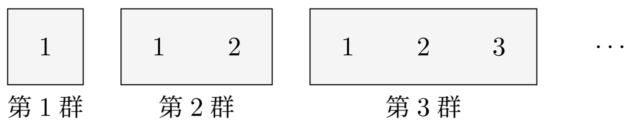
この「住所（k 群の m 番目)」が分かれば、その項の値も分かることが多い。

先生　「例えば、さっきの数列で『第 100 項』が知りたいとします。しかし、いきなり 100 番目の値を当てるのは難しい。そこで、まず考えるべきは……」

私　「その 100 番目の項が、『**第何群の何番目か**』ですね」

先生　「その通り。大きな地図で『何丁目』かを探し、そのあとで『何番地』かを探すのです」

第 100 項はどこ？
→ まず「何群に入ってるか」を探す



9.2 ゲートを数える（個数の累積）

先生　「第 k 群にたどり着くためには、その手前にある『**第 $k-1$ 群までの全ての項**』を通過しなければなりません。ここが検問所（ゲート）です」

探索の手順

1. 第 k 群に含まれる**項数**を調べる。（例：k 個）
2. 第 $k-1$ 群までの**総項数（個数の和）**を計算する。

$$N_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1}(\text{第 } i \text{ 群の個数})$$

3. 不等式 $N_{k-1} < 100 \leqq N_k$ を満たす k を見つける。

友人　「えっと、今回の例だと、第 k 群には k 個の数字が入ってるよね」

私　「じゃあ、第 $k-1$ 群までの総数は、自然数の和だ」

$$N_{k-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{1}{2}(k-1)k$$

私　「これが 100 の手前になるような k を探せばいいんだね」

友人　「適当に当てはめてみよう。$k = 10$ だと $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$。全然足りない」

私　「もっと大きく。$k = 14$ だと $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$。おっ、近い！」

友人　「次は $k = 15$。$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 = 105$。超えた！」

先生　「見つかりましたね。第 14 群の終わりで 91 人通過。第 15 群の終わりで 105 人通過。ということは、100 番目の人は……」

二人　「**第 15 群**の中にいる！」

私　「91 番目の次から第 15 群が始まるから、100 番目は……」

$$100 - 91 = 9$$

私　「第 15 群の 9 番目だ！」

友人　「この数列は $1, 2, 3 \ldots$ って並んでるから、9 番目の数字はそのまま 9 だね」

答え：　9

先生　「素晴らしい。住所さえ特定できれば、値を見つけるのは簡単です。群数列は『迷路』ではなく、単なる『住所検索』の問題なんですよ」

9.3 分母という名の屋根

先生　「では、少しレベルアップしましょう。分数の群数列です」

> 問題
>
> $$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2}, \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3},\ \frac{1}{4}, \cdots$$
>
> (1) 第 100 項を求めよ。
>
> (2) 初項から第 100 項までの和を求めよ。

友人　「区切り線が見えるよ。分母が変わるタイミングだね」

$$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \mid \frac{1}{4}, \cdots$$

私　「第 k 群は、分母が k で、分子が $1 \sim k$ まで並んでる。個数は k 個だ」

友人　「個数のルールはさっきと全く同じだね。ってことは、第 100 項は……」

私　「さっきの計算が使える！　**第 14 群の 9 番目**だ」

友人　「第 14 群ってことは、分母は 14 だよね？　で、分子は 9 番目だから……」

$$\text{答え：}\quad \frac{9}{14}$$

先生　「早いですね。では (2) の『和』はどうでしょう？　100 個全部足すのですか？」

私　「いえ、群ごとにまとめて足したほうが楽そうです」

私　（作戦：第 1 群から第 13 群までは『群ごと』に合計する。そして、半端な第 14 群（9 個分）だけ個別に足す）

- **第 k 群の和** (S_k)：分母は k で一定。分子は $1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$。

$$S_k = \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{k+1}{2}$$

友人　「うわ、きれいになった！　第 k 群の合計は $\frac{k+1}{2}$ なんだ」

私　「じゃあ、まず第 1 群から第 13 群までの合計を出そう」

$$\sum_{k=1}^{13}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{13}k+\sum_{k=1}^{13}1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14+13\right)=\frac{1}{2}(91+13)=\frac{104}{2}=52$$

私　「次に、第 14 群の途中（9 番目）までを足す。分母は 14、分子は 1 ～ 9 の和」

$$\text{半端分}=\frac{1+2+\cdots+9}{14}=\frac{45}{14}$$

私　「合わせて……」

$$52+\frac{45}{14}=\frac{728+45}{14}=\frac{773}{14}$$

先生　「完璧です。『群ごとの和』という新しい数列を作って、それをさらに足し合わせる。二段構えの計算力が身についていますね」

Epilogue： 迷子にならないための地図

問題を解き終えると、黒板の数字の羅列が、整然としたマンションの部屋番号のように見えてきた。

私　　「群数列って、結局は『整理整頓』の問題なんですね。どこで区切るか、その区切りの中に何個あるか。それさえ分かれば怖くない」

友人　「最初は迷路だと思ったけど、住所（k 群の m 番目）さえ特定できれば、あとは一本道だったね」

先生　「その通り。複雑な現象も、適切な『区切り』を入れることで理解可能になります。これは数学に限らず、あらゆる問題解決に通じる知恵ですよ」

先生は黒板を消しながら、次のテーマを予告した。

先生　「さて、これまで私たちは『一般項』という神の視点（n を入れれば値が出る）を使ってきました。しかし、自然界の法則はもっと局所的です。『今の状態から、次がどうなるか』。次回は、隣り合う項の関係性――**漸化式（ぜんかしき）**の世界へ足を踏み入れましょう」

私　　（隣り合う関係……ドミノ倒しみたいなものかな？）

私はノートの「区切り線」を指でなぞった。この線一本が、混沌とした世界に秩序を与えてくれたのだ。

To be continued in Lecture 10...

第 10 回　隣り合う関係 —— 漸化式の基本

Prologue： ローカル・ルール

「次の数字は何？」

友人がノートの隅に数字を書き込んでいく。

$1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

私　「えっと…… 63 かな。全部 $2^n - 1$ になってるよね」

友人　「正解。でもさ、僕は『$2^n - 1$』なんて難しいこと考えてなかったよ。単に『2 倍して 1 足す』を繰り返してただけ」

私　「2 倍して 1 足す？」

友人　「うん。$1 \times 2 + 1 = 3$、$3 \times 2 + 1 = 7$、$7 \times 2 + 1 = 15$……。前のやつを使って次を決める。こっちの方が簡単じゃない？」

先生が黒板の前に立ち、友人の言葉に頷いた。

先生　「良い直感です。これまでの私たちは『n 番目は何か？』といきなり遠くの未来（一般項）を求めていました。これは言わば『**神の視点**』です」

先生　「しかし、自然界の法則はもっと局所的です。細胞が分裂するとき、バクテリアが増えるとき、彼らは『100 代目の子孫』のことなど考えていません。ただ『今の自分』から『次の自分』を作っているだけです。今日はこの『**アリの視点（ローカル・ルール)**』を数式にしてみましょう」

10.1　ドミノ倒しの設計図（漸化式の定義）

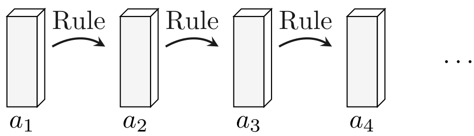
先生　「隣り合う項 a_n と a_{n+1} の関係を表した等式を**漸化式**（ぜんかしき）と呼びます。例えば、友人のルールを式にするとこうなります」

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

私　「『次の項』＝『今の項』$\times 2 + 1$。確かに、関係性がそのまま式になってますね」

先生　「しかし、ルールだけでは数列は決まりません。『2 倍して 1 足せ』と言われても、最初が 1 なのか 100 なのかで、全く違う未来になりますからね」

> **定義：数列の決定条件**数列を特定するためには、以下の 2 つが必要である。
>
> 1. **初項** a_1 （スタート地点）
> 2. **漸化式** $a_{n+1} = f(a_n)$ （次へ進むルール）
>
> これは「ドミノ倒し」において、「最初の 1 枚を倒すこと」と「前の 1 枚が倒れたら次も倒れる並び方」に対応する。



スタート (a_1) とルール (漸化式) があれば、
自動的にすべてのドミノが倒れる

10.2 知っている形への翻訳

先生　「では、今まで習った数列を『漸化式』という言葉で翻訳し直してみましょう」

Pattern A： 等差数列

友人　「等差数列は『一定の数を足す』だから……」

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (\text{次は、今に } d \text{ を足したもの})$$

友人　「もしくは、差が一定ってことで $a_{n+1} - a_n = d$ とも書けるね」

Pattern B： 等比数列

私　「等比数列は『一定の数を掛ける』だから……」

$$a_{n+1} = ra_n \quad (\text{次は、今の } r \text{ 倍})$$

Pattern C： 階差数列の利用

先生　「では、これはどうでしょう？　足す数が一定ではなく、変化する場合です」

$$a_{n+1} = a_n + n$$

私　「最初は +1、次は +2……と、足す数が増えていく。これって**階差数列**が n ってことですよね」

基本パターンの漸化式

- **等差型**：$a_{n+1} = a_n + d \to$ 一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- **等比型**：$a_{n+1} = ra_n \to$ 一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$
- **階差型**：$a_{n+1} = a_n + f(n) \to$ 一般項 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

先生　「漸化式を解く（一般項を求める）コツは、この**基本 3 パターン**のどれかに帰着させることです。形をよく見て、どのタイプか見抜く力が問われます」

Check： 型を見抜く

問題

次の漸化式で定められる数列の一般項を求めよ。

1. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - 2$
2. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 1$

友人　「(1) はシンプルだね。『次は今のから 2 引け』ってことは、公差 -2 の等差数列だ」

$$a_n = 3 + (n-1)(-2) = -2n + 5$$

私　「(2) は、足してるもの $(2n-1)$ が定数じゃない。n によって変わるから……階差型だ！」

私　「$b_n = 2n - 1$ と考えると、公式が使える。$n \geqq 2$ のとき……」

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

友人　「奇数の和だね。さっきやった $\sum$ の計算だ」

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$
$$= 1 + (n^2 - n) - n + 1 = n^2 - 2n + 2$$

私　「最後に $n = 1$ チェック。$1^2 - 2 + 2 = 1$。初項 OK！」

10.3 混ざり合ったルール

先生　「では、冒頭で友人が作ったこのルールはどうでしょう？」

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

私　「うーん、2 倍してるから等比っぽいけど、1 を足してるから等差っぽくもある。混ざってますね」

友人　「もし +1 がなければ等比数列（2^n 系）だし、×2 がなければ等差数列（n 系）なんだけど……」

先生　「この『**等差 × 等比**』型（$a_{n+1} = pa_n + q$）は、漸化式の中で最も重要な形です。そのままでは解けませんが、ある『**魔法の数**』を引くことで、きれいな等比数列に変身させることができます」

私　「魔法の数？」

先生　「ヒントは『**不動点**』です。もし仮に、a_{n+1} も a_n も変化しなくなって、ある値 α に落ち着いたとしたら……？」

$$\alpha = 2\alpha + 1$$

先生　「この方程式を解くと、$\alpha = -1$ ですね。この -1 が、数列を解く鍵になるのです」

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n + 1} \qquad \text{解けない……}$$

$$\Big\downarrow \text{変形}$$

$$\boxed{(a_{n+1} + 1) = 2(a_n + 1)} \qquad \text{解ける！}$$

「+1」という塊（かたまり）で見ると、
ただの「公比 2 の等比数列」に見える！

私　「あ！　カッコの中をひとまとまりの数列 $A_n = a_n + 1$ だと思えば……」

$$A_{n+1} = 2A_n$$

私　「これ、ただの等比数列だ！」

友人　「すごい。邪魔だった $+1$ を、カッコの中に吸い込んで消しちゃったんだ」

Epilogue： ルールの連鎖

チャイムが鳴る。

先生 「漸化式の面白さはここにあります。複雑に見えるルールも、適切な『視点の変換（変形）』を行うことで、単純な『等比数列』や『等差数列』に帰着できるのです」

私 「さっきの α を使った変形、もっと詳しく知りたいです。どうやってあの式を見つけたんですか？」

先生 「ふふ、それは次回のお楽しみ。次回は、漸化式を解くための最強の道具——『特性方程式（とくせいほうていしき）』についてじっくり語りましょう。数列が目指す『終着点』の話ですよ」

私はノートに書かれた $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を見つめる。最初はただの「計算手順」に見えた式が、今は「数列の運命を決める遺伝子」のように見えてきた。隣から隣へ、バトンを渡すように数は続いていく。

To be continued in Lecture 11...

第 11 回　不動点を探せ —— 特性方程式

Prologue： 終着駅の噂

放課後の教室で、友人が前回のノートを見返している。$a_{n+1} = 2a_n + 1$ という漸化式を変形するために、先生は「$\alpha = -1$」という謎の数字を持ち出した。

友人　「ねえ、この α って数字、一体どこから湧いてきたんだろう？　先生は『変化しなくなる点』って言ってたけど」

私　「変化しなくなる……つまり、次の項に行っても値が変わらないってことかな？」

$$a_{n+1} = a_n = \cdots = \text{定数}$$

私　「もしそんな場所があるなら、漸化式の a_{n+1} と a_n を両方ともその数字（α）に置き換えちゃえばいいんじゃない？」

そこへ先生が現れ、私のノートを指差した。

先生　「素晴らしい着眼点です。数列が永遠に変化しなくなる場所、それが『**不動点（ふどうてん）**』です。漸化式を解く鍵は、まさにその『終着駅』を探すことから始まるのです」

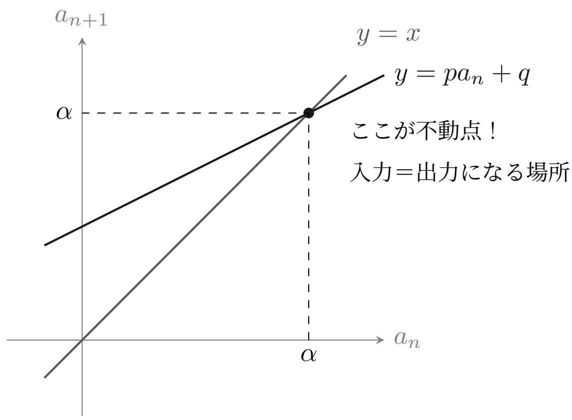
11.1　交点という名の運命（特性方程式）

先生　「漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ において、a_{n+1} と a_n をともに α と置いた方程式を作ります」

> **定義：特性方程式 (Characteristic Equation)**
>
> 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ に対して、
>
> $$\alpha = p\alpha + q$$

という方程式を特性方程式と呼ぶ。この解 α は、数列の変換における**不動点**を表す。

先生　「これをグラフで見てみましょう。$y = px + q$ という直線と、$y = x$ という直線の交点が、まさに α です」



友人　「なるほど。入力（a_n）と出力（a_{n+1}）が一致する場所だね。ここに来たら、もう数列は動かないんだ」

11.2 中心をズラす変形

先生　「さて、ここからが魔法です。元の漸化式と、特性方程式を並べて引き算をしてみましょう」

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} = & pa_n + q \\ (-) & \alpha = & p\alpha + q \\ \hline & a_{n+1} - \alpha = & p(a_n - \alpha) \end{array}$$

q が消えた！

友人　「うわっ、本当に消えた。q がなくなって、p でくくられた形になったね」

私　「これって……**等比数列**の形じゃないですか？」

$$\text{塊}_{n+1} = p \times \text{塊}_n$$

先生　「その通り。数列 $\{a_n\}$ そのものは等比数列ではありませんが、『α からの距離（ズレ）』である数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、公比 p の等比数列になるのです」

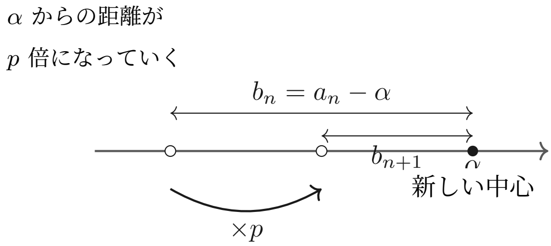
解法の視点：平行移動

世界（座標軸）の中心を原点 0 から不動点 α にズラして考える。

$$b_n = a_n - \alpha$$

と置けば、複雑な漸化式は単純な等比数列 $b_{n+1} = pb_n$ に生まれ変わる。

私　「なるほど。邪魔な $+q$ は、世界の中心がズレているせいで見えていた『ノイズ』だったんだ。中心 α から見れば、世界は単純な倍々ゲーム（p 倍）に過ぎないんだ」



α からの距離が
p 倍になっていく
$b_n = a_n - \alpha$
b_{n+1}
α
新しい中心
$\times p$

11.3　魔法の実践

問題

次の漸化式を解け。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$$

友人　「よし、手順通りやってみよう。まずは不動点 α を探す」

私　「特性方程式だね。a_{n+1} と a_n を α に変えて……」

$$\alpha = 3\alpha - 4$$

私　「これを解くと…… $-2\alpha = -4$ だから、$\alpha = 2$ だ」

友人　「よし、じゃあ元の式から辺々引いて変形するよ」

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

私　「ここで、$b_n = a_n - 2$ と置こう。すると $b_{n+1} = 3b_n$ だ」

友人　「初項 b_1 も計算しなきゃ。$b_1 = a_1 - 2 = 2 - 2 = 0$……あれ？」

私　「えっ、0？　初項が 0 で公比が 3 ってことは……」

$$b_n = 0 \times 3^{n-1} = 0$$

私　「ずっと 0 だ。ってことは、$a_n - 2 = 0$ だから、$a_n = 2$」

先生　「おや、偶然にも初項が不動点 α と一致してしまったようですね。不動点からスタートしたら、数列はどうなると言いましたか？」

友人　「あ、そうか！　『動かない』んだ。だからずっと 2 のまま。計算ミスかと思ったよ」

問題 (Revenge)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$$

（初項だけ変えてみた）

私　「今度は初項が 1 だ。$\alpha = 2$ は変わらないから、変形後の式は同じ」

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

私　「新しい初項は、$b_1 = a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$」

友人　「数列 $\{a_n - 2\}$ は、初項 -1、公比 3 の等比数列だね」

$$a_n - 2 = -1 \cdot 3^{n-1}$$

私　「最後に -2 を移項して、a_n に戻す」

$$a_n = -3^{n-1} + 2$$

友人　「できた！　特性方程式を使えば、どんな漸化式も等比数列に持ち込めるね」

Epilogue： 収束と発散

計算を終え、私たちはグラフを見直した。

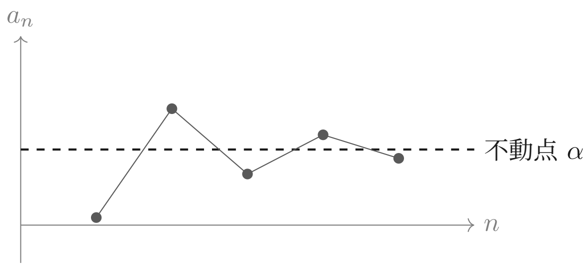
先生　「先ほどの問題では、公比 $p=3$ でした。これは不動点 α からの距離が、ステップごとに 3 倍に拡大されることを意味します」

私　「どんどん α から離れていくんですね」

先生　「そうです。逆に、もし $|p|<1$ だったらどうなるでしょう？　例えば $p=0.5$ なら？」

友人　「距離が半分になっていく……つまり、どんどん α に近づいていく？」

先生　「その通り。そのとき、数列は不動点 α に**収束**します。どんな場所からスタートしても、最終的には一つの運命（α）に吸い寄せられていくのです」



振動しながら α に近づく ($p=-0.6$)

私　「不動点……。数式の世界のブラックホールみたいですね」

先生　「ふふ、面白い例えです。さて、これで $a_{n+1}=pa_n+q$ 型はマスターしました。しかし、もし式がもっと複雑だったら？　例えば、分数の形をしていたり、3 つの項が関係していたら？」

友人　「ええっ、まだ変なのが出てくるの？」

先生　「安心してください。原理は同じです。『知っている形（等差・等比）』にどうやって帰着させるか。次回は、より発展的なな『**複数の漸化式**』と『**確率と漸化式**』について学びます。」

私はノートを閉じた。不動点 α。それは、動き続ける数列が見る「永遠の夢」なのかもしれない。

To be continued in Lecture 12...

第 12 回　絡み合う運命 —— 連立・確率漸化式

Prologue： 二人のリズム

体育の授業で「二人三脚」の練習をしている生徒たちを、教室の窓から友人と眺めている。二人の足が紐で結ばれ、互いに影響し合いながら進んでいる。

友人　「片方が転ぶと、もう片方も引っ張られてバランスを崩すね。自分のペースだけで走れないから大変そうだ」

私　「そうだね。僕（a_n）の次の歩幅が、君（b_n）の動きによって決まる。逆に、君の動きも僕の影響を受ける。……これって、数式で書くとどうなるんだろう？」

先生が後ろから声をかけた。

先生　「良い着眼点です。単独で動く数列については前回まででマスターしました。しかし、世界には『互いに影響し合う数列』も存在します。今日は、その絡み合った糸を解きほぐす方法を学びましょう」

12.1　混ざり合う数列（連立漸化式）

先生は黒板に、2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の関係式を書いた。

例題

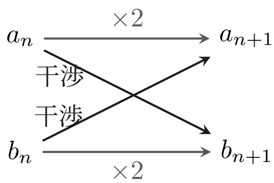
次の条件で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \qquad (a_1 = 1,\ b_1 = 3)$$

私　「うわ、混ざってる。a_{n+1} を決めるのに b_n が必要で、b_{n+1} には a_n が必要だ。これじゃ、いつもの等比数列の形に持ち込めないよ」

友人　「係数を見てみて。a も b も対称的だよね。足したり引いたりしたら、きれいになるんじゃない？」

先生　「その通り。絡まった糸を解くコツは、**『和』と『差』のペア**を作ることです。二人のリズムが揃う瞬間（和）と、ズレる瞬間（差）に注目するのです」



お互いが影響し合うため
単独では解けない

12.2 Solve： 和と差で分離せよ

友人　「まずは辺々を足してみよう」

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= (2a_n + b_n) + (a_n + 2b_n) \\ &= 3a_n + 3b_n \\ &= 3(a_n + b_n) \end{aligned}$$

私　「あ！　カッコの中身が揃った！　$a_n + b_n$ を一つの塊（X_n）だと見れば……」

友人　「$X_{n+1} = 3X_n$。公比 3 の等比数列だね！」

先生　「初項も忘れずに計算してくださいね」

私　「$X_1 = a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$。だから……」

$$a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ①$$

友人　「次は引き算だ」

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= (2a_n + b_n) - (a_n + 2b_n) \\ &= a_n - b_n \end{aligned}$$

私　「えっと、変化なし？　係数が 1 ってことか」

友人　「初項は $a_1 - b_1 = 1 - 3 = -2$。公比 1 の等比数列（ずっと同じ値）だから……」

$$a_n - b_n = -2 \quad \cdots ②$$

先生　「素晴らしい。これで a_n と b_n の『和』と『差』が分かりました。あとは連立方程式を解くように、この二つから a_n, b_n を救出するだけです」

私　「① と ② を足して 2 で割れば a_n が出る！」

$$2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2 \implies a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

私　「引いて 2 で割れば b_n だ」

$$2b_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 2 \implies b_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

解法：対称型の連立漸化式

係数が対称的な場合、

- **辺々を加える** → 数列 $\{a_n + b_n\}$ の漸化式を作る
- **辺々を引く** → 数列 $\{a_n - b_n\}$ の漸化式を作る

この 2 本を解いて、最後に連立して a_n, b_n を求める。

12.3 確率という名の霧

先生　「次は、少し趣向を変えましょう。未来が一つに決まらない、『**確率**』の世界です」

問題（ランダム・ウォーク）

点 P は、数直線上の点 A(0) と点 B(1) を行き来する。

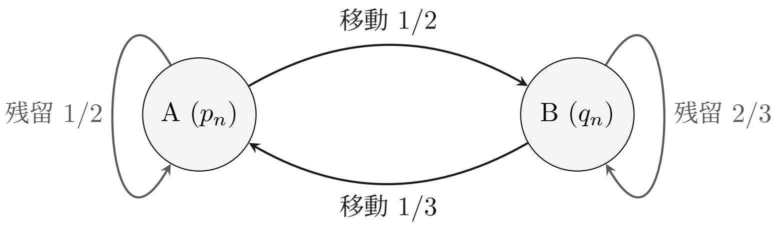
- 点 A にいるとき：1/2 の確率で A に留まり、1/2 の確率で B へ移動する。
- 点 B にいるとき：1/3 の確率で A へ移動し、2/3 の確率で B に留まる。

n 秒後に点 P が点 A にいる確率を p_n、点 B にいる確率を q_n とする。p_{n+1} を p_n で表せ。

友人　「うわ、ややこしそう。サイコロ振って移動するみたいな感じ？」

私　「n 回目の結果が分からないのに、$n+1$ 回目のことなんて分かるのかな？」

先生　「個々の動き（ミクロ）は予測不能ですが、確率の分布（マクロ）には厳密なルールがあります。図を描いて整理してみましょう」



次、A にいるのは誰？

先生　「$n+1$ 秒後に A にいる（確率 p_{n+1}）のは、どんなルートを辿った人たちですか？」

私　「えっと、二通りあります」

1. n 秒後に A にいて、そのまま A に残った人（確率 $p_n \times \frac{1}{2}$）
2. n 秒後に B にいて、A に移動してきた人（確率 $q_n \times \frac{1}{3}$）

友人　「これを足せばいいんだね」

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

私　「でも先生、これじゃ p_n と q_n が混ざったままです。さっきみたいに連立方程式を解くんですか？」

先生　「いえ、もっと強力な武器があります。確率は『全体で 1』になるという鉄の掟です」

確率の保存則

全事象の確率は常に 1 である。

$$p_n + q_n = 1 \iff q_n = 1 - p_n$$

これを使えば、文字を 1 種類に減らすことができる。

私　「なるほど！　q_n を $1 - p_n$ に書き換えちゃえばいいんだ」

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) \\
&= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\
&= \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

友人　「あ！　これ、第 11 回でやった『特性方程式』を使うタイプだ！」

私　「$a_{n+1} = pa_n + q$ 型だね。不動点 α を探せば解けるやつだ」

Solve： 確率の収束

私　　「最後まで計算してみよう。特性方程式は $\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{3}$」

$$\frac{5}{6}\alpha = \frac{1}{3} \implies \alpha = \frac{2}{5}$$

友人　　「じゃあ、式変形は $p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}(p_n - \frac{2}{5})$ だね」

私　　「初項 p_0 は……問題文に『最初は A にいる』とは書いてないけど、普通は A スタート ($p_0 = 1$) かな？」

先生　　「そう仮定しましょう。$p_0 = 1$ ならば、数列 $\{p_n - \frac{2}{5}\}$ は初項 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$、公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列です」

$$p_n - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Epilogue： 混沌の中の秩序

計算を終え、得られた式を眺める。

友人　　「ねえ、この式、n をものすごく大きくするとどうなる？」

私　　「$(1/6)^n$ はどんどん小さくなって消えちゃうね。残るのは…… $2/5$ だ」

友人　　「つまり、ずっと時間が経つと、A にいる確率は 40% に落ち着くってことか」

先生　　「その通り。これを**定常状態（または極限分布）**と言います。個々の粒子はランダムに動いていても、全体として見れば、ある決まった比率に収束していく。それが確率漸化式の示す世界観です」

私　　「不動点 $\alpha = 2/5$ が、最終的なゴール地点だったんですね」

私は窓の外の体育の授業に目を戻す。二人三脚で転びそうだったペアも、いつの間にか息を合わせ、一定のリズムで走り出していた。絡み合った運命も、時間をかければ一つの調和（収束）に辿り着くのかもしれない。

To be continued in Lecture 13...

第 13 回　過去との対話 —— 隣接三項間漸化式

Prologue：階段の登り方

放課後、階段の踊り場で友人と話している。友人は階段を「1 段飛ばし」で軽快に駆け上がってきた。

友人　「ふう。ねえ、この階段を登る方法って何通りあると思う？」

私　「えっ？　登り方？」

友人　「うん。一度に『1 段』登るか、『2 段』登るか（1 段飛ばし）を選べるとするじゃん。10 段目まで行くパターンの総数だよ」

私は少し考えてみる。1 段目に行くには「1 歩」の 1 通り。2 段目に行くには「1+1」か「2」の 2 通り。3 段目に行くには……？

先生　「面白い問題ですね。それは有名な**フィボナッチ数列**のモデルですよ」

先生が上の階から顔を出した。

先生　「n 段目にたどり着く直前、君はどこにいましたか？」

友人　「えっと、1 段登って来たなら $n-1$ 段目だし、2 段登って来たなら $n-2$ 段目です」

先生　「そう。つまり、n 段目への行き方は、『$n-1$ 段目までの行き方』と『$n-2$ 段目までの行き方』の**合計**になるのです」

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \iff a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

私　「あ！　式の中に項が 3 つ出てきた。a_{n+2} を決めるには、直前の a_{n+1} だけじゃなくて、もっと昔の a_n も必要なんだ」

13.1　理想の形（変形のゴール）

先生　「さて、この $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ という形。項が 3 つもあると扱いづらいですね。私たちが得意なのは、どんな形でしたか？」

私　「やっぱり、公比 r の**等比数列**です。『次は、今の r 倍』っていう形なら解けます」

先生　「ならば、無理やりその形を作りましょう。この複雑な式を、次のように変形することを目指します」

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

友人　「ん？　どういうこと？」

私　「カッコの中を見てごらん。$a_{n+1} - \alpha a_n$ を『ひと塊の数列 b_n』だと思えば……」

$$\underbrace{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}}_{b_{n+1}} = \beta\,\underbrace{(a_{n+1} - \alpha a_n)}_{b_n}$$

私　「$b_{n+1} = \beta b_n$ ……あ！　等比数列になった！」

先生　「その通り。項が 3 つあっても、適切な α で束ねてしまえば、単純な等比数列の問題に帰着できるのです。では、そのような都合の良い α, β は存在するのでしょうか？」

$$\begin{tikzcd} a_n \arrow[rr, bend left, "3\text{つだと複雑だが……}"] & a_{n+1} \arrow[r] & a_{n+2} \end{tikzcd}$$

$$\overbrace{b_n}^{a_{n+1} - \alpha a_n} \xrightarrow{\times \beta} b_{n+1}\ \text{塊で見れば等比数列！}$$

13.2 必然の 2 次方程式

先生　「目標の式を展開して、元の漸化式と比べてみましょう」

私はノートに計算書き出し、友人がそれを覗き込む。

目標の形：

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

移項して整理すると……

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots ①$$

元の漸化式：

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad \cdots ②$$

友人　「①と②が同じ式になればいいんだから……係数を比較しよう」

- a_{n+1} の係数： $\alpha + \beta = p$
- a_n の係数： $-\alpha\beta = q \iff \alpha\beta = -q$

私　「足して p、掛けて $-q$ になる 2 つの数 α, β を見つければいいんだね」

先生　「和と積が分かっている 2 つの数。これを見つける方法といえば？」

友人　「2 次方程式だ！　解と係数の関係の逆！」

先生　「正解です。つまり α, β は、次の 2 次方程式の解として求まります」

特性方程式の導出

漸化式 $a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n = 0$ を解くための α, β は、

$$x^2 - px - q = 0$$

の 2 つの解である。これを**特性方程式**と呼ぶ。

私　　「なるほど……。前回は $x = px + q$ という 1 次方程式だったけど、今回は項が一つ増えたから x^2 になって 2 次方程式になったんだ。次数が上がるのは必然だったんですね」

13.3　Solve： 挟み撃ちにする

例題

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の一般項を求めよ。

友人　　「まずは特性方程式を作ろう。$a_{n+2} \to x^2,\ a_{n+1} \to x,\ a_n \to 1$ と置き換えて……」

$$x^2 = 5x - 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$$

私　　「$(x-2)(x-3) = 0$ だから、解は $x = 2, 3$。これが α, β だ」

先生　　「解が 2 つあるということは、$\alpha = 2, \beta = 3$ としてもいいし、逆に $\alpha = 3, \beta = 2$ としてもいいということです。つまり、**2 通りの等比数列**が作れます」

- パターン **A** $(\alpha = 2, \beta = 3)$：

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$$

　数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は、初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 = 2$、公比 3 の等比数列。

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ①$$

- パターン **B** $(\alpha = 3, \beta = 2)$：

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$$

　数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は、初項 $a_2 - 3a_1 = 4 - 3 = 1$、公比 2 の等比数列。

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \cdots ②$$

私　　「あとはこの連立方程式 ①, ② から a_n を救出するだけだね」

友人　「① から ② を引けば、a_{n+1} が消えるよ！」

$$(a_{n+1} - 2a_n) - (a_{n+1} - 3a_n) = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

先生　「完璧です。2 つの異なる視点（公比 3 の世界と公比 2 の世界）で挟み撃ちにすることで、数列の正体を暴くことができました」

13.4　視点が一つしかないとき（重解）

友人　「ねえ先生、もし特性方程式が $(x-3)^2=0$ みたいに重解だったらどうするの？ α も β も 3 になっちゃうよ」

先生　「良い質問です。その場合、作れる式は 1 本だけになりますね」

例題（重解）

$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n \iff x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0$

私　「解は $x=3$ だけ。変形式はこうなります」

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

友人　「これを解くと…… $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 3 の等比数列だから」

$$a_{n+1}-3a_n=c\cdot 3^{n-1} \quad (c \text{ は定数})$$

私　「ここから引く相手（もう 1 本の式）がない……。どうすればいいの？」

先生　「この式をよく見てください。$a_{n+1}=3a_n+(3 \text{ の累乗})$ の形をしています。これは前回扱った……？」

私　「あ！　『等差×等比』型だ！　両辺を 3^{n+1} で割れば解けるやつですね」

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{c}{9} \quad (\text{定数})$$

先生　「その通り。重解の場合は、等差数列の形に持ち込むことで解決できます。道が一本しかなくても、工夫次第でゴールにはたどり着けるのです」

Epilogue： フィボナッチの正体

先生　「最後に、冒頭のフィボナッチ数列に戻りましょう。$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$。特性方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ です」

友人　「これ、解の公式を使わないと解けないね」

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

先生　「きれいな整数ではありませんが、解法は全く同じです。この 2 つの解 α, β を使って一般項を作ると、次のようになります」

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

私　「うわ、ルートだらけ……。でも、これ計算するとちゃんと整数（$1, 1, 2, 3, 5 \ldots$）になるんですよね？　不思議だ」

先生　「ええ。そしてこの $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は**黄金比**と呼ばれる特別な数です。階段の登り方という素朴な問題の背後に、最も美しい比率が隠れていたのです」

私はノートを見つめる。「等比数列の形にしたい」という単純な動機から始まった変形が、2 次方程式を生み出し、ついには黄金比へと繋がった。過去（直前の項）との対話が、豊かな数理の世界を広げている。

先生　「さて、これで漸化式の応用は一通り網羅しました。次回からは、これまで『推測』で済ませてきた公式たちが『本当に正しいのか』を証明する、論理の旅へ出かけましょう」

To be continued in Lecture 14...

第 14 回　無限を倒す論理 ―― 数学的帰納法（等式）

Prologue：本当に合ってる？

放課後の教室。友人が電卓を叩きながら、以前のノート（第 6 回：自然数の和）を見返している。

友人　「ねえ、$\sum k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ って公式、本当に $n = 10000$ でも成り立つのかな？」

私　「えっ？　先生が導出してくれたし、大丈夫でしょ」

友人　「でもさ、あの時は『3 乗の展開式』を使ってドミノ倒しみたいに消したけど、もし途中で何か変なことが起きてたら？　$n = 1, 2, 3$ くらいまでは確かめたけど、無限にある自然数のすべてで正しいなんて、どうやって言い切れるの？」

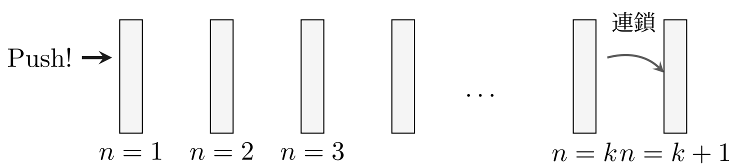
友人の疑いはもっともだ。私たちはいくつかの例を見て「規則性」を感じ取ったが、それはまだ「推測」の域を出ないのかもしれない。

先生がやってきて、黒板にドミノの絵を描き始めた。

先生　「良い疑いです。科学は実験事実から法則を導きますが、数学は『**証明**』によって永遠の真理を確定させます。今日は、無限に続く階段を一気に登り切るための最強の論理――**数学的帰納法**を授けましょう」

14.1　ドミノ倒しの原理

先生　「無限個ある命題（$n = 1, 2, 3, \ldots$）をすべて証明するには、一生かかっても時間が足りません。そこで、自動的に証明が進む『仕組み』を作ります」



先生　「ドミノをすべて倒すために必要な条件は何ですか？」

私　「まずは、最初の一枚を倒すこと」

友人　「あとは、前のドミノが倒れたら、必ず次も倒れるように並べておくことだね」

先生　「その通り。その 2 つさえ保証できれば、指一本触れなくても、勝手に無限の彼方まで倒れていきます」

数学的帰納法の仕組み命題 $P(n)$ がすべての自然数 n で成り立つことを示すには、次の 2 ステップを証明すればよい。

1. **Base Step**：$n = 1$ のとき成り立つことを示す。（最初の着火）
2. **Inductive Step**：$n = k$ のとき成り立つと**仮定**すると、$n = k + 1$ のときも成り立つことを示す。（連鎖の保証）

14.2 論理の構築（等式の証明）

先生　「では、最も基本的な公式で練習してみましょう」

> **例題**
>
> すべての自然数 n について、次の等式が成り立つことを証明せよ。
>
> $$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

私　「よし、手順通りやってみます」

Step 1： $n=1$ の確認

私　「左辺は 1 だけ。右辺は $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$。一致しました！」

先生　「これで最初のドミノは倒れました」

Step 2： $n=k$ を仮定して $n=k+1$ を導く

先生　「ここが正念場です。$n=k$ のとき成り立つと**仮定**します。つまり、手元には次の『魔法のカード』があると思ってください」

$$\text{仮定：}\quad 1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)\qquad\cdots(\star)$$

友人　「このカードを使って、何を示せばいいの？」

先生　「ゴールを見失わないようにしましょう。示したいのは、$n=k+1$ のときの式です」

$$\text{ゴール：}\quad 1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

私　「左辺を変形して、ゴールの右辺にたどり着けばいいんですね。左辺には 1 から k までの和が含まれてるから……あ、さっきの『魔法のカード $(\star)$』が使える！」

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\underbrace{1+2+\cdots+k}_{\text{仮定より } \frac{1}{2}k(k+1)}) + (k+1) \\
&= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)
\end{aligned}
$$

友人　「共通因数 $(k+1)$ があるね。くくってみよう」

$$
\begin{aligned}
&= (k+1)\left\{\frac{1}{2}k+1\right\} \\
&= (k+1)\cdot\frac{k+2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \quad (= \text{右辺})
\end{aligned}
$$

私　「できた！　ゴールの形になった！」

先生　「これで連鎖が繋がりました。k 番目が正しければ、自動的に $k+1$ 番目も正しい。そして 1 番目は正しいので……すべてのドミノが倒れます」

14.3 漸化式の一般項を証明する

友人　「これ、漸化式を解いたあとの検算にも使えそうだね。推測した一般項が合ってるかどうか」

先生　「良い使い方です。以前扱った $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(a_1 = 1)$ を思い出してください。一般項は $a_n = 2^n - 1$ でしたね。これを証明してみましょう」

> **問題**
>
> $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ で定義される数列に対し、すべての自然数 n で $a_n = 2^n - 1$ が成り立つことを証明せよ。

私　「(I) $n = 1$ のとき。左辺 $a_1 = 1$。右辺 $2^1 - 1 = 1$。OK」

私　「(II) $n = k$ のとき、$a_k = 2^k - 1$ が成り立つと仮定する。これを使って、a_{k+1} を計算して、$2^{k+1} - 1$ になれば勝ちだ」

友人　「漸化式 $a_{k+1} = 2a_k + 1$ を使えば、a_k を代入できるよ」

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 1 \quad (\text{漸化式のルール}) \\ &= 2(2^k - 1) + 1 \quad (\text{仮定を代入}) \\ &= 2 \cdot 2^k - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

友人　「うわ、あっさり証明できた。ゴール（$n = k + 1$ の形）に一直線だ」

> **証明のコツ**
>
> - **仮定を使う瞬間**を意識する。（どこで a_k を代入するか？）
> - **ゴールの形**を先にメモしておく。（何を目指して式変形するか？）
> - $n = k + 1$ の変形で、漸化式のルールと仮定を組み合わせる。

Check： 奇数の和

練習

$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ を数学的帰納法で証明せよ。

友人　「(I) $n=1$ のとき。左辺 $2(1)-1=1$。右辺 $1^2=1$。よし」

私　「(II) $n=k$ のとき、$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2$ と仮定する」

友人　「$n=k+1$ のとき、左辺はどうなる？」

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\left\{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right\}+\{2(k+1)-1\}$$

私　「シグマの最後の項（$k+1$ 番目）を分離するのがコツだね。カッコの中は仮定より k^2 だから……」

$$=k^2+(2k+2-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

私　「右辺の $(k+1)^2$ と一致した！　証明完了！」

Epilogue： 有限の力で無限を掴む

証明を書き終えると、ノートには厳密な論理の鎖が繋がっていた。

友人　「なんか不思議な気分。$n = 100$ とか $n = 1$ 億 を直接計算したわけじゃないのに、絶対に合ってるって確信できるんだもん」

私　「『次も倒れる』というルールさえ証明できれば、あとは自動的に無限の彼方まで届く。人間の有限な寿命で、無限を支配する唯一の方法かもしれないね」

先生が満足そうに頷いた。

先生　「その通り。数学的帰納法は、人類が手にした『無限へのはしご』です。今回は等式（=）を扱いましたが、次回はこのはしごを使って、よりデリケートな関係――**不等式**の証明に挑みます。ドミノが倒れるだけでなく、倒れる強さや大きさの比較をするような話ですよ」

私はペンを置いた。目の前の数式が、無限に続くドミノの列に見えた。最初の一押しは、もう終わっている。あとは音を立てて倒れていくだけだ。

To be continued in Lecture 13...

第 15 回　「もしも」の正体 —— k の任意性

Prologue：砂上の楼閣？

放課後、友人が深刻な顔でノートを睨んでいる。前回習った数学的帰納法のページだ。

友人　「ねえ、やっぱり納得いかないよ。『$n = k$ のとき成り立つと**仮定**する』ってやつ」

私　「え？　ドミノ倒しのルールでしょ？　仮定して次を示す、っていう」

友人　「でもさ、もしその仮定した k が、実は間違ってたらどうするの？　嘘を前提にして証明を進めたら、結論も嘘になっちゃうんじゃない？　何かこう、砂の上に城を建ててるみたいで不安なんだよ」

友人の言葉に、私も少し不安になる。確かに私たちは、$n = k$ が本当に正しいかどうかを確認しないまま、さっさと $n = k+1$ の話に進んでしまった。もしドミノの途中に「絶対に倒れない石」が混ざっていたら、そこで連鎖は止まってしまうのではないか？

先生が教室に入ってきた。

先生　「なるほど。それは数学的帰納法を学ぶ人が必ず一度は陥る、とても良い悩みです。君たちは今、ドミノの『個体』を見ている。しかし、帰納法で見なければならないのは、ドミノそのものではなく『**ドミノ間の空間**』なのです」

15.1　特定の k か、任意の k か

先生　「まず、友人の疑問を整理しましょう。君が心配しているのは、『特定の k（例えば $k = 5$）が間違っていたらどうするか』ということですね？」

友人　「うん。もし 5 番目が倒れなかったら、6 番目も倒れないかもしれない」

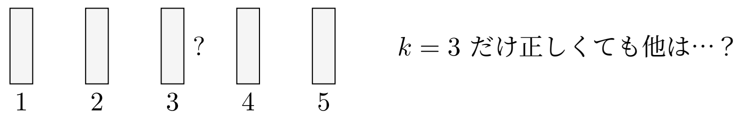
先生　「数学的帰納法のステップ 2（Inductive Step）で証明しているのは、特定の番号のことではありません。私たちは k を『**任意に固定**』して議論しているのです」

「任意に固定する」とは？

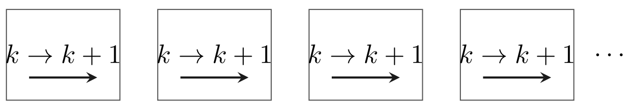
特定の数字（5 や 100）を指定するのではなく、「無条件に選び出した自然数 k」として文字のまま扱うこと。これは「数直線上にある**どの場所を切り取っても**」という意味になる。

先生　「私が証明したいのは、『5 番目が倒れる』という事実ではありません。**『もし手前 (k) が倒れるなら、必ず次 ($k+1$) も倒れる』という因果関係**です。この関係性が、すべての場所（任意の k）で成立していることを保証するのがステップ 2 なのです」

誤ったイメージ（特定の場所だけ心配）



正しいイメージ



どこを切り取っても、
「次へ伝播する機能」が備わっている

15.2 約束を守るということ

私　「でも先生、やっぱり『仮定』が嘘だったら……という不安は消えません。嘘から出た真（まこと）なんて信じられません」

先生　「では、日常の例で考えてみましょう。私が君たちにこう約束したとします」

約束：「もし明日晴れたら、君たちにアイスを奢るよ」 $(P(k) \implies P(k+1))$

先生　「さて、次の日に雨が降りました。私はアイスを奢りませんでした。私は嘘つきでしょうか？　約束を破りましたか？」

友人　「うーん……晴れてないんだから、奢らなくても嘘じゃないよね。約束は守られてる」

先生　「その通り。数学における『ならば（ $\implies$ ）』も同じです。前提条件（晴れる／$P(k)$ が真）が満たされない場合、結論がどうあれ、**因果関係そのものは真**とみなされます」

含意命題 $A \implies B$ の真偽

- A が真で B も真 $\to$ **OK**（真）
- A が真なのに B が偽 $\to$ **NG**（偽）（ここだけが裏切り！）
- A が偽の場合 $\to$ B が何であれ **OK**（真）

先生　「帰納法のステップ 2 で証明しているのは、『$P(k)$ が真かどうか』ではありません。『もし $P(k)$ が真だと仮定したとき、**裏切ることなく** $P(k+1)$ も真になるか』という**約束の堅さ**だけをチェックしているのです」

私　「なるほど……。実際に晴れるか（$P(k)$ が正しいか）どうかは気にしてないんだ。ただ『約束を守るシステムになっているか』だけを検査してるんですね」

先生　「そうです。そして、実際に『晴れた（$n=1$ が真)』という事実がステップ 1 からやってきた瞬間、このシステムが作動して、ドミノが倒れ始めるのです」

15.3　任意だからこそ、全て OK

友人　「じゃあ、『k を任意に固定する』っていうのは、『どの番号のドミノも、ちゃんと約束を守るいい子だよ』って確認する作業なんだね」

先生　「その通りです。k は特別なナンバーではありません。変数 n の中の『ある任意の一箇所』を指すプレースホルダー（代役）に過ぎません」

先生　「k という文字を使うことで、私たちは特定の数字の呪縛から逃れ、すべての場所における『隣同士の関係』を一挙に記述できるのです」

ブラックボックス（帰納法のエンジン）

入力：k 番目が倒れた

↓

処理：数式の変形

↓

出力：$k+1$ 番目も倒れた！

Check： 言葉の選び方

先生 「理解を深めるために、証明の書き出しを見直してみましょう。よくある間違いと、正しい書き方です」

Bad Example

「$n = 5$ のとき成り立つと仮定すると……」

$\rightarrow$ これでは $n = 5 \rightarrow 6$ しか言えない。無限には届かない。

Good Example

「$n = k$ のとき成り立つと仮定する（k は任意の自然数）」

$\rightarrow k$ が何であっても（任意性）、論理が通じることを示す。その結果、この論理は $k = 1$ でも $k = 100$ でも適用可能になる。

私 「『任意の自然数』って書くと、特定の一つのように聞こえますけど、文脈としては『どれか一つ（どれでもいい）』って意味なんですね」

先生 「そうです。英語では *"Let $n = k$ be an arbitrary natural number"* と言います。直訳すれば『任意の自然数 k をとる』。こちらの方が誤解が少ないかもしれませんね」

15.4 スタート地点の自由

友人 「ねえ、もし k が任意ならさ、スタート地点が $n = 1$ じゃなくてもいいんじゃない？」

先生 「おっ、素晴らしい気づきです！　実は帰納法は、$n = 1$ から始まるとは限りません」

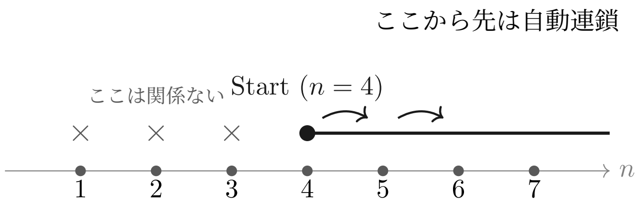
変則的なスタート

命題が「$n \geqq 4$ で成り立つ」場合：

1. **Base Step**：$n = 4$ で成り立つことを示す。
2. **Inductive Step**：$n = k$ $(k \geqq 4)$ で仮定して $k + 1$ を示す。

先生　「仕組み（ステップ 2）は『任意の場所での伝播』を保証しているので、最初の着火点（ステップ 1）をどこに置いても、そこから先はすべて倒れます」

私　「なるほど……。エンジン（論理）は同じで、キーを回す場所を変えるだけなんだ。k の任意性が保証されているからこそ、どこからでもスタートできるんですね」



Epilogue： 強固な橋

教室の窓から夕日が差し込む。黒板には「k（任意）」という文字が輝いている。

友人　「やっと分かったよ。僕たちが作ってたのは、特定の数字のためのハシゴじゃなくて、どこに置いても機能する『万能の繋ぎ目』だったんだね」

私　「うん。そしてその繋ぎ目が完璧だからこそ、最初の一個を倒すだけで、無限の彼方までドミノが倒れていくんだ」

先生はニッコリと笑った。

先生　「その通りです。数学的帰納法の本質は、個々の事実確認ではなく、『**構造の完全性』の証明**なのです。この論理の美しさが分かれば、もう怖いものはありません」

先生は片付けをしながら、次回の予告をした。

先生　「さて、論理のエンジンは完成しました。次回は、この強力なエンジンを使って、等式よりも少しデリケートな世界——**不等式の証明**に挑みましょう。ドミノが単に倒れるだけでなく、『前のドミノより勢いよく倒れる』ことを示すような、繊細な議論ですよ」

私はノートを閉じた。「仮定」という言葉への不安はもうない。それは不確かな砂上の楼閣ではなく、無限を渡るための最も強固な橋なのだ。

To be continued in Lecture 14...

第 16 回　広がる格差 —— 数学的帰納法（不等式）

Prologue： 緩やかな絆

「$A = B$」黒板に書かれた等式を見ながら、友人が呟く。

友人　「等式ってさ、窮屈だよね。左と右がピッタリ同じじゃなきゃいけない。一本の細いロープの上を歩いてるみたいだ」

私　「確かに。少しでもズレたら『偽』になっちゃうもんね」

友人　「でも世の中、そんなにピッタリなことばかりじゃないよ。『こっちの方が大きい』とか『少なくともこれくらいある』とか、もっと緩やかな関係の方が多い気がする」

先生が教室に入ってきて、不等号「>」を書き加えた。

先生　「その通り。等式が『レールの上を走る電車』なら、不等式は『広い道路を走る車』です。多少の幅（ズレ）は許容されますが、その分、運転には別のテクニックが必要になります。今日は、帰納法を使ってこの『**大小関係**』を証明してみましょう」

16.1　3 段論法の踏み台

先生　「等式の証明は一本道でした。$A = B$ を仮定して、式変形していけば自然とゴールにたどり着きましたね。しかし、不等式はそうはいきません」

不等式証明の構造

目標：$A > C$ を示したい。仮定：$A > B$ は分かっている（ドミノの仮定)。

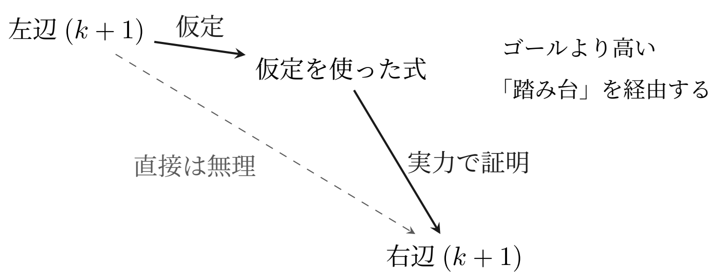
証明の流れ：

1. $A > B$ （仮定を利用して、A より小さい B を見つける）
2. $B > C$ （その B が、ゴール C よりも大きいことを示す）
3. よって $A > C$ （結論）

この B を「踏み台（中間地点）」として利用する。

私　「なるほど。等式なら $A = B = C$ って繋がるけど、不等式だと直接 A と C を比べるのが難しいから、間に B を挟むんだ」

先生　「そうです。『仮定を使って出てきたもの（B)』が、『目標のもの（C)』より大きいことを、引き算（$B - C > 0$）で示す。ここが腕の見せ所です」



16.2 指数の加速

先生 「では、具体的な問題で見てみましょう。2^n と n^2、どちらが早く大きくなると思いますか？」

友人 「$n = 2$ なら 4 と 4 で互角。$n = 3$ なら 8 と 9 で負ける……。でも指数関数だし、最終的には 2^n が勝ちそうだね」

先生 「その通り。実は $n = 5$ 以降、指数関数は二次関数を置き去りにします」

例題

$n \geqq 5$ であるすべての自然数 n について、次の不等式を証明せよ。

$$2^n > n^2$$

私 「あ、スタート地点が $n = 1$ じゃない。前回やった『変則スタート』ですね」

Step 1： スタート地点の確認

私 「(I) $n = 5$ のとき。左辺 $2^5 = 32$。右辺 $5^2 = 25$。$32 > 25$ だから成り立つ！」

Step 2： 踏み台を作る

先生 「(II) $k \geqq 5$ として、$2^k > k^2$ が成り立つと仮定します。目指すゴールは？」

友人 「$n = k + 1$ のときだから…… $2^{k+1} > (k + 1)^2$ だね」

私 「よし、左辺 2^{k+1} からスタートしよう」

$$\begin{aligned} \text{左辺} = 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot k^2 \quad (\text{仮定 } 2^k > k^2 \text{ を使用}) \end{aligned}$$

私 「これで踏み台 $2k^2$ ができた。あとは、この踏み台がゴール $(k + 1)^2$ より高いことを示せばいい」

$$\text{示すべきこと：}\quad 2k^2 > (k+1)^2$$

友人　「どっちが大きいか調べるには、引き算だね」

$$\begin{aligned}(\text{踏み台}) - (\text{ゴール}) &= 2k^2 - (k+1)^2 \\ &= 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 1\end{aligned}$$

私　「この $k^2 - 2k - 1$ がプラスになるかな？　$k \geqq 5$ だから……」

先生　「平方完成すると見やすいですよ」

$$= (k-1)^2 - 1 - 1 = (k-1)^2 - 2$$

友人　「$k \geqq 5$ なら、$k - 1 \geqq 4$。2 乗したら 16 以上。$16 - 2 = 14$ だから余裕でプラスだ！」

$$(k-1)^2 - 2 > 0 \quad (\because k \geqq 5)$$

私　「証明できた！　『踏み台』＞『ゴール』が言えたから、最初と最後をつなげば $2^{k+1} > (k+1)^2$ だ」

16.3 評価の精度

先生　「素晴らしい手際です。不等式の証明では、この『**差をとって正であることを示す**』パートがハイライトになります」

友人　「でも先生、さっきの計算、$2k^2$ と $(k+1)^2$ の差がかなり開いてましたよね。もっとギリギリの勝負だったらどうするんですか？」

先生　「良い質問です。実は、仮定の使い方や式変形の仕方によって、『踏み台の高さ』は変わります。上手な踏み台を作らないと、ゴールに届かない（証明できない）こともあります」

注意：評価の緩さ

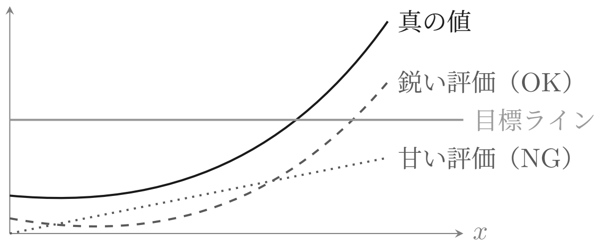
目標：$A > 100$

- 良い評価：$A > 120$ と言えた $\to$ $120 > 100$ なので OK。
- 悪い評価：$A > 50$ としか言えなかった $\to$ $50 < 100$ なので、証明失敗（A が本当は 100 より大きくても、論理が弱くて示せない）。

不等式では、**「大きすぎず、小さすぎない」適切な踏み台**を作るセンスが問われる。

私　「なるほど。あまり雑に『小さいもの』で置き換えちゃうと、ゴールより下回っちゃうかもしれないんだ」

先生　「はい。これを『**評価が甘い**』と言います。逆に、ギリギリを攻めるのを『評価が厳しい（鋭い)』と言います。解析学という分野は、この『いかに鋭く評価するか』を競う職人芸の世界なんですよ」



目標を超えることを示したいが、
低すぎる評価式では届かない

Epilogue： 離散の世界の果てへ

授業が終わり、私たちは窓の外を眺めた。校庭のフェンスが、等間隔に並ぶ格子模様を作っている。

私　「帰納法って、結局は $1, 2, 3 \ldots$ っていう『飛び飛びの数（整数)』を支配するための道具だったんだね」

友人　「うん。連続したグラフとは違う、一歩一歩の積み重ねの力強さを感じたよ」

先生が片付けをしながら話しかけてきた。

先生　「その『飛び飛びの点』、数学では**格子点（こうしてん）**と呼びます。整数だけが住むことのできる離散的な世界です」

私　「格子点……。方眼紙の交点みたいなものですか？」

先生　「そうです。さて、この物語も次で最後です。最終回は、その格子点の数を数え上げる問題——そして、あの忌まわしき『二つのシグマ』との決着をつけましょう」

友人　「二つのシグマって……第 5 回の Coffee Break でやった『二重シグマ』？」

先生　「ええ。あの時は直感的に扱いましたが、最後は厳密に、そして美しく解き明かします。整数の森を歩く準備をしておいてくださいね」

私はノートを閉じた。ドミノ倒しで無限を駆け上がった私たちは、最後に整数の森へと足を踏み入れる。そこにはどんな景色が待っているのだろうか。

To be continued in the Final Lecture...

第 17 回　整数の森 —— 格子点と二重シグマ

Prologue： 星を数える夜

最終回の授業。窓の外はすでに暗く、街の灯りが点々と輝いている。友人が窓ガラスに映るその光を指でなぞっていた。

友人　「ねえ、夜景ってさ、遠くから見ると光の帯（連続）に見えるけど、よく見ると一つ一つの家の明かり（離散）なんだよね」

私　「急に詩人だね。でも、数学も同じかも。数直線を遠目で見れば実数全体に見えるけど、拡大すればそこには『整数』という飛び飛びの点がある」

先生が静かに教室に入ってきた。手には方眼紙のようなグリッドが描かれたパネルを持っている。

先生　「その通り。私たちが学んできた『数列』は、まさにその飛び飛びの点——**自然数**の上に定義された世界でした。旅の最後は、この星々（整数点）を数え上げる技術、**『格子点（こうしてん）』**の数え方で締めくくりましょう」

17.1　スライスして数える

先生は黒板に xy 平面を描き、その上に三角形の領域を示した。

> **問題**
>
> 次の不等式を満たす正の整数 (x, y) の組（格子点）の個数を求めよ。
>
> $$x \geqq 1, \quad y \geqq 1, \quad x + y \leqq n$$

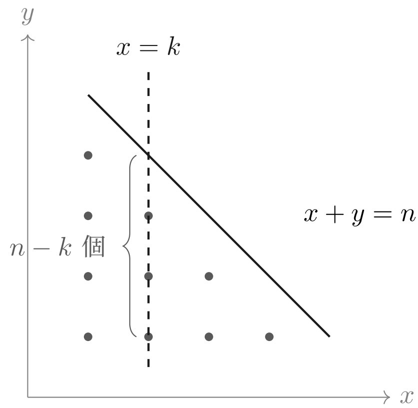
友人　「三角形の中にある点の数を数えるんだね。$n = 5$ くらいで書いてみようか」

友人が黒板の隅に点を打つ。$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$ …… $(2,1), (2,2), (2,3)$ ……バラバラに数えると混乱しそうだ。

先生　「散らばった星を数えるときの鉄則は、『一方を固定（スライス）する』ことです。例えば、$x = k$ （縦のライン）の上に、点はいくつありますか？」

私　「$x = k$ を固定すると……条件式は $k + y \leqq n$ つまり $y \leqq n - k$ になります」

私　「y は 1 以上だから、$1, 2, \ldots, n - k$ の $n - k$ 個 です」



縦に切って数え、
それを足し合わせる

先生　「その通り。あとは、その『縦一列の個数』を、可能な k の範囲で足し合わせればいいのです」

友人　「x は最小で 1。最大は…… $y = 1$ のときだから $x = n - 1$ か」

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)$$

私　「これ、等差数列の和だね。$k = 1$ のとき $n - 1$ 個、$k = n - 1$ のとき 1 個」

$$\text{合計} = \frac{1}{2} \times (\text{項数 } n - 1) \times \{(n - 1) + 1\} = \frac{1}{2} n(n - 1)$$

先生　「正解です。これは図形的に見れば、正方形（$n \times n$）の半分より少し少ない……という直感とも合いますね」

17.2 二重シグマの完全攻略

先生　「さて、この『スライスして足す』という操作。式で書くとこうなります」

$$\sum_x \left(\sum_y 1 \right)$$

先生　「内側の $\sum$ が『縦一列のカウント』、外側の $\sum$ が『総仕上げ』です。これこそが、以前少しだけ触れた**二重シグマ**の正体です」

> **問題**
>
> 次の計算をせよ。
>
> $$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j$$

友人　「出た。Coffee Break のときは『縦読み・横読み』で遊んだけど、今回はガチ計算だね」

私　「まずは定義通り、内側から計算してみよう」

Method 1： 内側から崩す（王道）

私　「内側は $\sum_{j=1}^{i} j$。これは 1 から i までの和だから、公式通り $\frac{1}{2}i(i+1)$ だ」

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2}i(i+1) \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i)$$

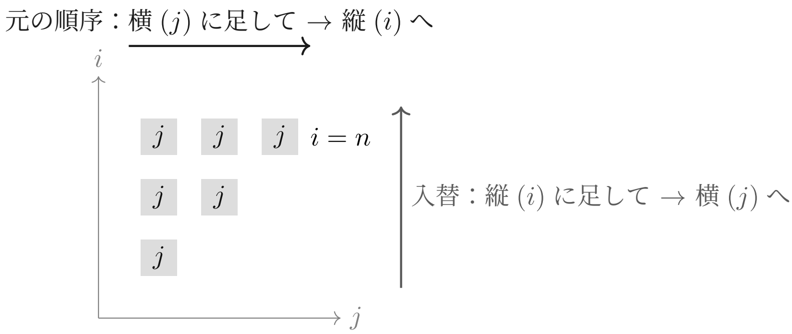
友人　「あとはいつもの公式だね」

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\sum i^2 + \sum i\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right\} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\left\{\frac{2n+1}{3} + 1\right\} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\cdot\frac{2n+4}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

私　「計算大変だったけど、答えは綺麗になった！　連続する 3 整数の積÷ 6 か」

Method 2： 順序交換（フビニの魔法）

先生　「計算力も素晴らしい。でも、格子点のイメージを使えば、もっとエレガントに解けるかもしれませんよ。和の順序を入れ替えてみましょう」



先生　「各格子点 (j, i) にある値 j を足す問題です。縦方向（i）を先に足すとどうなりますか？」

私　「縦に見ると…… j は固定されてる。i はどこからどこまで？」

友人　「図を見ると、スタートは対角線 $(i = j)$ で、ゴールは天井 $(i = n)$ だね」

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} j\right)$$

私　「内側の $\sum$ は、定数 j を足すだけだ！　回数は $n - j + 1$ 回」

$$\text{内側} = j \times (n - j + 1)$$

友人　「うわ、シグマが消えた！　あとはこれを j で足すだけ？」

$$S = \sum_{j=1}^{n}(nj - j^2 + j) = (n+1)\sum j - \sum j^2$$

私　「これなら計算が少し楽かも。……やってることは同じはずなのに、視点を変えるだけで景色が変わるんだな」

17.3 最後の試練

先生　「では、最後の問題です。格子点と領域、そして数列の知識を総動員してください」

Final Problem

n を自然数とする。領域 $D : x \geqq 0, y \geqq 0, 2x + y \leqq 2n$ に含まれる格子点 (x, y) の総数を求めよ。

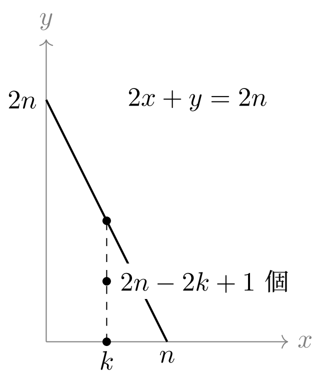
友人　「$2x + y \leqq 2n$ か。傾きが急な三角形だね」

私　「スライスする方向が大事そうだ。y を固定するか、x を固定するか」

- 案 **A**：$y = k$ で切る $2x \leqq 2n - k \implies x \leqq n - k/2$。$k$ が奇数か偶数かで場合分けが必要になりそう……。面倒だ。
- 案 **B**：$x = k$ で切る $y \leqq 2n - 2k$。これは単純な偶数だ！

私　「x で切ろう！　$x = k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ を固定すると、y の個数は？」

友人　「0 から $2n - 2k$ までだから…… $2n - 2k + 1$ 個だね」



私　「よし、これを $k = 0$ から $k = n$ まで足せばいい」

$$N = \sum_{k=0}^{n} (2n - 2k + 1)$$

友人　「$k=0$ からスタートだね。項数は $n+1$ 個あることに注意しなきゃ」

$$
\begin{aligned}
N &= (2n+1)\sum_{k=0}^{n} 1 - 2\sum_{k=0}^{n} k \\
&= (2n+1)(n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= (n+1)\{(2n+1)-n\} \\
&= (n+1)(n+1) = (n+1)^2
\end{aligned}
$$

私　「答えは $(n+1)^2$！　……えっ、こんなきれいな形になるの？」

先生　「美しいでしょう？　実はこの三角形、うまいこと変形してつなぎ合わせると、正方形になるんですよ」

Epilogue： 無限への旅立ち

計算を終え、私たちは顔を上げた。黒板一面に書かれた数式。それは私たちがこの半年間で積み上げてきた足跡そのものだった。

先生　「これにて、『数列』の講義はすべて終了です。最初は $1, 2, 3 \dots$ と指折り数えていただけの君たちが、今では n 次元や無限の世界を、数式という翼で自由に飛び回れるようになりました」

友人　「最初は記号だらけで怖かったけど、今は Σ も a_n も、友達みたいに見えるよ。……いや、ちょっと手のかかる友達かな」

私　「一つ一つの数は離れていても、背後にある『規則』という糸で繋がっている。その糸が見えるようになった気がします」

先生はニッコリと笑い、最後の言葉を贈った。

先生　「その『見えない糸』を見る力こそが、数学です。この先、微積分という『連続』の世界に行っても、確率という『不確実』の世界に行っても、ここで培った論理と直感は必ず君たちの道しるべになります。……良い旅を！」

チャイムが鳴り響く。私たちはノートを閉じ、顔を見合わせた。整数の森を抜けた先には、まだ見ぬ数学の平原が広がっている。さあ、次のページをめくりに行こう。

Fin.

SEQUENCE COMPLETE

The path of integers leads to infinity.