1. 「一直線上にある」を式にする

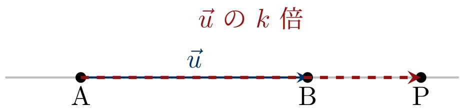
ベクトルの強みは，「3 点が一直線上にある（共線）」という幾何学的な状態を，シンプルな等式で表現できる点にある．

共線条件（基本形）

2 点 A, B が異なるとき，点 P が直線 AB 上にあるための必要十分条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる実数 k が存在することである．



向きが同じ（または逆）で
びよーんと伸ばせば一致する → 実数倍

これは「平行条件 $\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$」において，始点を A に共有させたものと同じである．

2. 位置ベクトルと係数の和

始点を任意の点 O（原点）とした場合どうなるか．$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を書き換えてみる．

$$\vec{p} - \vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}$$

ここで $1-k = s, k = t$ とおくと，$s + t = 1$ となる．

共線条件（係数の和が 1）

点 P が直線 AB 上にある $\iff$

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad かつ \quad s + t = 1$$

例題 1（基本確認）

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ とする．点 P は直線 AB 上にあるか確認せよ．

解答: 係数の和を確認する．$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$．よって，点 P は直線 AB 上にある．(具体的には 2 : 1 に内分する点)

3. 図形の証明問題

「3 点 A, B, C が一直線上にあることを示せ」と言われたら，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる実数 k を見つければよい（始点はどこでもよい）．

例題 2 三角形と共線条件

△OAB において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$. このとき，O, P, Q は一直線上にあることを示せ．

4. 「係数の和が 1」の応用

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ において，点 P が直線 AB 上にある条件は $s + t = 1$ である．これを利用して，未知の係数を決定することができる．

例題 3 (交点の位置ベクトル・導入)

△OAB において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を C，辺 OB を $2:3$ に内分する点を D とする．線分 AD と BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．

(1) 点 P は直線 AD 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\vec{a} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表せる．これを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(2) 点 P は直線 BC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\vec{b}$ と表せる．これを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(3) $\vec{a}, \vec{b}$ の一次独立性を用いて s, t を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を決定せよ．

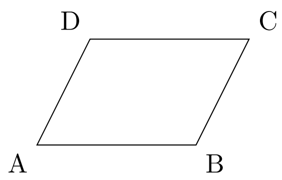
次回予告

この「2 通りで表して係数比較」が，ベクトルにおける交点計算の必勝パターンである．

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (一直線上にある条件)

平行四辺形 ABCD において, 辺 BC の中点を E, 辺 CD の中点を F とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ で表し, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との間に共線関係があるか（一直線上にあるか）調べよ.



Memo / Answer

練習 A2 (係数の和)

△ABC と点 P について,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つ. 点 P が直線 BC 上にあるとき, 実数 k の値を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (一直線の証明)

△OAB において, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする. 辺 OA を $3:2$ に内分する点を C, 辺 OB を $3:1$ に内分する点を D とする. 線分 BC と AD の交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ.
(ヒント: P は BC 上 $\to \vec{p} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$ ...)

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

Memo / Answer

A1 解答:
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$: E は BC の中点なので $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{1}{2}\vec{d}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$: F は CD の中点なので $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \frac{1}{2}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b} + \vec{d}$.
$\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{3}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. これは A, E, F が一直線という意味ではない. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となる k は存在しないため, A, C, E は一直線上にはない. (図を見れば明らか) **補足:** 問題の意図としては「計算練習」です. もし A, E, F が一直線上にあるなら $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となるはずですが, $\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b} = k(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d})$ 係数比較すると $1 = k/2, 1/2 = k \implies k = 2, k = 1/2$ (矛盾). よって一直線上にはありません.

Memo / Answer

A2 解答:
点 P が直線 BC 上にある条件は, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数の和が 1 になることである. (始点 A が基準になっているため)

$$\frac{1}{4} + k = 1$$
$$\therefore \quad k = \frac{3}{4}$$

確認: $\vec{p} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} = \frac{1\vec{b}+3\vec{c}}{4}$. これは線分 BC を $3:1$ に内分する点である.

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:
条件より $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{5}\vec{a}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3}{4}\vec{b}$.
(1) 点 P は線分 BC 上にあるので, $s : (1-s)$ に内分すると考える.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-s)\vec{b} + \frac{3}{5}s\vec{a} \quad \cdots (1)$$

(2) 点 P は線分 AD 上にあるので, $t : (1-t)$ に内分すると考える.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \quad \cdots (2)$$

(3) 係数比較 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}s = 1-t \\ 1-s = \frac{3}{4}t \end{cases}$$

第 2 式より $s = 1 - \frac{3}{4}t$. これを第 1 式へ代入. $\frac{3}{5}(1 - \frac{3}{4}t) = 1 - t$
$12(1 - \frac{3}{4}t) = 20(1-t)$ (両辺 20 倍)
$12 - 9t = 20 - 20t \implies 11t = 8 \implies t = \frac{8}{11}$.
(2) へ代入して: $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1 - \frac{8}{11})\vec{a} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11}\vec{b} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}$
答え: $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}$