1. 複素数の範囲での因数分解

「解く」ことと「因数分解」は同じ

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると，

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解できる．これを利用すれば，実数の範囲では因数分解できなかった式も，**複素数の範囲**まで拡張すれば，必ず 1 次式の積に分解できる．

例題 1（複素数の範囲での因数分解）

次の式を，複素数の範囲で因数分解せよ．

(1) x^2+4

(2) x^2-2x+4

Memo / Answer

2. 1 の 3 乗根 ω

3 乗して 1 になる数

方程式 $x^3=1$ の解を求めよう． $x^3-1=0 \iff (x-1)(x^2+x+1)=0$ よって解は $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. このうち，虚数解の一つを $\boldsymbol{\omega}$ (オメガ) と表す．

最強の性質 2 選

ω は $x^3=1$ の解であり，$x^2+x+1=0$ の解でもあるため，次の等式が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{\omega^3=1}$　(次数下げに使える！)

(2) $\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$　(3 項の和は 0！)

例題 2（ω の計算）

1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) ω^5

(2) $\omega^4+\omega^2+1$

Memo / Answer

2. 3 数を解とする方程式

逆の発想

3 つの数 α, β, γ を解にもつ 3 次方程式の一つは，

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

展開すると，

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

つまり，**「和」「2 つずつの積の和」「積」**が分かれば方程式を作れる．

例題 2（方程式の作成）

3 次方程式 $x^3+2x^2+x+3=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$ を解とする 3 次方程式を作れ．ただし，x^3 の係数は 1 とする．

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1（複素数の範囲で因数分解）

次の式を, 複素数の範囲で因数分解せよ.

(1) x^2+9

(2) x^2-4x+5

(3) $2x^2+2x+1$ (係数 2 を忘れないように!)

Memo / Answer

練習 A2（ω の基本）

1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とするとき, 次の式の値を求めよ.

(1) ω^{100}

(2) $\omega^6+\omega^3+1$

Memo / Answer

練習 B1（ω の応用）

1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とするとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $\omega + \dfrac{1}{\omega}$

(2) $(\omega + 1)^{10}$

Hint

(2) カッコの中身 $\omega + 1$ を, 性質 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を使って書き換えてみよう. $(\omega + 1 = -\omega^2)$

Memo / Answer

練習 B2（高次方程式の理論）

実数係数の 4 次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が, 虚数解 $1 + i$ と $2 - i$ をもつとき, 残りの解を求めよ.

Memo / Answer