年　組　番　氏名

Introduction：総当たり戦で挑む

「区間 $0 < x < 2$ に**少なくとも 1 つ**の実数解をもつ」とは，次の 2 つのパターンのどちらかが起きている状態です。

- **パターン A**：区間内に解が **1** つだけある。（もう 1 つは区間の外にある）
- **パターン B**：区間内に解が **2** つともある。（重解含む）

この 2 つを別々に計算し，最後に合わせる（和集合をとる）のが最も確実な解法です。

「少なくとも 1 つの解」の攻略チャート

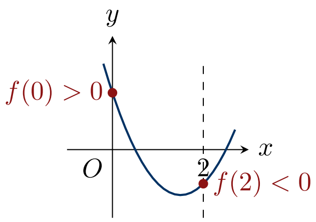
方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < 2$ に少なくとも 1 つの解をもつ条件：

(i) 1 つの解が区間内にあり，他方が区間外にある場合

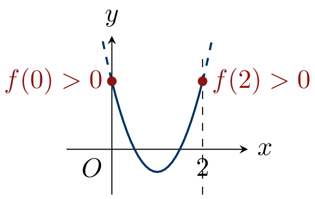
- グラフが区間の両端 $x = 0, 2$ の間を「またぐ」。
- 条件：$f(0)$ と $f(2)$ **が異符号** $\iff$ $f(0)f(2) < 0$
- ※片方が端点を通る場合（$f(0) = 0$ など）は個別にチェック。

(ii) 2 つの解がともに区間内にある場合

- 第 18 回で学んだ「3 点セット」
- 条件：$D \geqq 0$ かつ $0 <$ 軸 < 2 かつ $f(0) > 0, f(2) > 0$



(i) 1 個だけ区間内



(ii) 2 個とも区間内

例題 1：1 個だけ区間内にある場合

2 次方程式 $x^2 - ax + a - 1 = 0$ が $0 < x < 2$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ヒント: 端点 $f(0)$ と $f(2)$ の符号が逆になればよい。

$$f(0)f(2) < 0$$

※端点を通る場合（$f(0) = 0$ や $f(2) = 0$）は，実際に解を求めて題意を満たすか確認する。

Memo / Answer

例題 2：少なくとも 1 つの解（総合）

2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ が $0 < x < 3$ の範囲に**少なくとも 1 つ**の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

手順: $f(x) = x^2 - 2ax + 4$ とおく。
(i) 区間内に 1 つ，区間外に 1 つ $f(0)$ と $f(3)$ が異符号 $\iff$ $f(0)f(3) < 0$ $f(0) = 4 > 0$ なので，$f(3) < 0$ であればよい。
(ii) 区間内に 2 つともある

- $D/4 \geqq 0$
- $0 <$ 軸 < 3
- $f(0) > 0$ かつ $f(3) > 0$

最後に (i) と (ii) の範囲を合わせる。

Memo / Answer

別解：補集合の利用

「少なくとも 1 つの解をもつ」の否定（余事象）は，**「区間内に解をまったくもたない」**です。

- $x \leqq 0$ に 2 つの解がある
- $3 \leqq x$ に 2 つの解がある
- 実数解そのものがない（$D < 0$）

これらを求めて，全体から除く方法もありますが，計算量はあまり変わりません。まずは直接法（場合分け）をマスターしましょう。

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 1 個だけ区間内

2 次方程式 $x^2 - ax + 2a - 5 = 0$ が $1 < x < 4$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。（重解の場合や，端点を通る場合は考えなくてよい）

練習 A2: 2 個とも区間内

2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ が $0 < x < 3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 少なくとも 1 つの解

2 次方程式 $x^2 - 2ax - a + 2 = 0$ が $0 < x < 2$ の範囲に**少なくとも 1 つ**の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 B2: 解の配置の総仕上げ

2 次方程式 $x^2 - (a+1)x + a = 0$ について，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲に実数解をまたないような定数 a の値の範囲を求めよ。（ヒント：因数分解できることに気づくと早い）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $f(x)=x^2-ax+2a-5$ とおく。区間 $1<x<4$ の両端で異符号になればよい。

$$f(1)f(4)<0$$

$f(1)=1-a+2a-5=a-4$ $f(4)=16-4a+2a-5=-2a+11$ よって，

$$(a-4)(-2a+11)<0$$

両辺に -1 をかけて不等号を逆にする（忘れやすい！）。

$$(a-4)(2a-11)>0$$

$$\therefore \boldsymbol{a<4,\quad \frac{11}{2}<a}$$

A2 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおく。

- $D/4>0 \implies a^2-(a+2)>0 \implies (a-2)(a+1)>0$
  $\to a<-1,\quad 2<a \ldots$①
- $0<$ 軸 $<3 \implies 0<a<3 \ldots$②
- $f(0)>0 \implies a+2>0 \implies a>-2\ldots$③
- $f(3)>0 \implies 9-6a+a+2>0 \implies -5a+11>0 \implies a<\frac{11}{5}\ldots$④

共通範囲をとる。①, ② より $2<a<3$。これと ③, ④ ($\frac{11}{5}=2.2$) を合わせると, $\boldsymbol{2<a<\frac{11}{5}}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $f(x)=x^2-2ax-a+2$ とおく。
(i) **1 つだけ区間内** ($f(0)f(2)<0$) $f(0)=-a+2$ $f(2)=4-4a-a+2=-5a+6$ $(-a+2)(-5a+6)<0 \implies (a-2)(5a-6)<0\ \therefore \frac{6}{5}<a<2\ldots$① ※ $a=2$ のとき $x^2-4x=0\to x=0,4$ (区間外) ※ $a=6/5$ のとき $x^2-2.4x+0.8=0\to D>0, f(0)>0, f(2)=0$ (区間外)
(ii) **2 つとも区間内**

- $D/4\geqq 0 \implies a^2-(-a+2)\geqq 0 \implies (a+2)(a-1)\geqq 0$
  $\to a\leqq -2,\quad 1\leqq a$
- $0<a<2$
- $f(0)=-a+2>0\to a<2$
- $f(2)=-5a+6>0\to a<\frac{6}{5}$

共通範囲は $1\leqq a<\frac{6}{5}\ldots$②
(i), (ii) を合わせると，途中の $6/5$ がつながる。$\boldsymbol{1\leqq a<2}$

B2 方程式は $(x-1)(x-a)=0$ と因数分解できる。解は $x=1,a$ である。「$0\leqq x\leqq 2$ に解をもたない」条件を考える。しかし，解の一つは $x=1$ であり，**これは常に区間 $0\leqq x\leqq 2$ に含まれている**。どうあがいても $x=1$ という解が区間内に存在するため，「解をもたない」という状況は起こり得ない。よって，**解なし（そのような a は存在しない）**。
（※ グラフで考えても，$f(1)=0$ なので必ず x 軸と交わる）