1. 点の存在範囲（三角形と四面体）

平面ベクトルのとき，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ において $s + t \leqq 1$ $(s, t \geqq 0)$ ならば「三角形の内部」を表した。空間では変数が 3 つに増えるが，考え方は全く同じである。

係数の和と存在範囲

4 点 $\mathrm{O}(\vec{0}), \mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする四面体 OABC がある。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$$

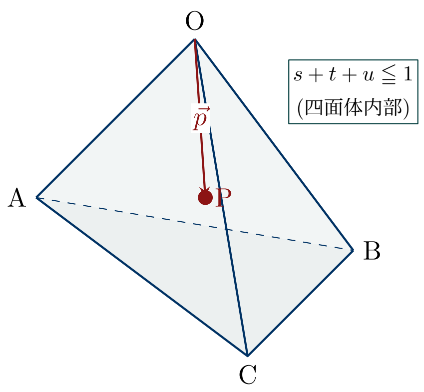
において，以下の条件を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の存在範囲は：

(1) **平面上（三角形の周および内部）**

$$s + t + u = 1 \implies \triangle\mathrm{ABC} \text{ の周および内部}$$

(2) **立体の内部（四面体の周および内部）**

$$s + t + u \leqq 1 \implies \text{四面体 OABC の周および内部}$$



例題 1

四面体 OABC において，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とする。次の条件を満たす点 P の存在範囲を答えよ。

(1) $s + t + u = 1, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$
(2) $s + t + u \leqq 1, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$

Memo / Answer

2. 係数調整のテクニック

$s + t + u = 1$ や $s + t + u \leqq 1$ の形を作り出すために，係数を変形する。

$$2s + 3t + u \leqq 1 \iff 2s \cdot \frac{\vec{a}}{2} + \dots$$

と考えることで，新しい基底ベクトル（頂点）が見えてくる。

例題 2

四面体 OABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。実数 s, t, u が $2s + 3t + u \leqq 1, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

Memo / Answer

3. 変数が独立して動く場合

s, t, u が互いに影響せず，独立して動く場合（例：$0 \leqq s \leqq 1$），領域は平行四辺形の拡張として**平行六面体**になる。

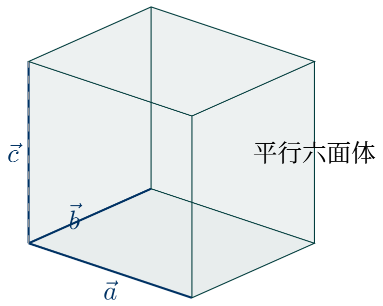
平行六面体の領域

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

において

$$0 \leqq s \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 1, \quad 0 \leqq u \leqq 1$$

を満たす点 P の存在範囲は，3 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で張られる**平行六面体の周および内部**である。



例題 3

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ において，$0 \leqq s \leqq 2$，$0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq u \leqq 3$ のとき，点 P の存在範囲の体積 V を求めよ。ただし四面体 OABC の体積を V_0 とする。

Memo / Answer

4. まとめ：空間ベクトルの地図

- **直線**：$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ (1 変数)
- **平面**：$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$ (2 変数) または $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ (法線)
- **球面**：$|\vec{p} - \vec{c}| = r$ (距離一定)
- **領域**：$s + t + u \leqq 1$ (内部)

式を見ただけで「どんな図形か」が浮かぶようになるまで復習しよう。

年　　組　　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。s, t, u が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $s+t+u=2, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$

(2) $s+t+u \leqq 2, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$

練習 A2

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ において，$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$，$1 \leqq u \leqq 2$ を満たす点 P の存在範囲はどのような図形か。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。実数 s, t, u が $s+2t+3u \leqq 1, \quad s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲はどのような立体か。また，その体積は四面体 OABC の体積の何倍か。

練習 B2

四面体 OABC の体積を V とする。点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表され，$s+t+u \leqq 1$，$s \geqq 0, t \geqq 0, u \geqq 0$ の範囲にあるとき，四面体 PABC の体積の最大値を求めよ。(ヒント: P がどこにあるとき体積が最大になるか図形的に考える)

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

$s+t+u=2$ (および $\leqq 2$)

Memo / Answer

両辺を 2 で割って右辺を 1 にする。$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}+\frac{u}{2}=1$ $\vec{\mathrm{OP}}=s\vec{\mathrm{OA}}+t\vec{\mathrm{OB}}+u\vec{\mathrm{OC}}=\frac{s}{2}(2\vec{\mathrm{OA}})+\frac{t}{2}(2\vec{\mathrm{OB}})+\frac{u}{2}(2\vec{\mathrm{OC}})$ $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ をそれぞれ半直線 $\mathrm{OA},\mathrm{OB},\mathrm{OC}$ 上の $2\mathrm{OA},2\mathrm{OB},2\mathrm{OC}$ となる点とする。$s'=s/2, t'=t/2, u'=u/2$ とおけば $s'+t'+u'=1$。(1) 平面 $\mathrm{A'B'C'}$ すなわち $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の周および内部。(2) 四面体 $\mathrm{OA'B'C'}$ の周および内部。

練習 A2

$0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1,\ 1\leqq u\leqq 2$

Memo / Answer

s,t は $0\sim 1$ で全範囲動く。u は $1\sim 2$。これは，基底 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で作られる平行六面体を，$\vec{c}$ 方向に $+1$ 倍分だけ平行移動させたもの。具体的には，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1+u')\vec{c}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u'\vec{c})+\vec{c}$ $(0\leqq u'\leqq 1)$ よって，平行六面体 OADB – CEGF をベクトル $\vec{c}$ だけ平行移動した立体の内部。

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

$s+2t+3u\leqq 1$

Memo / Answer

変形式：$s\vec{\mathrm{OA}}+(2t)\frac{\vec{\mathrm{OA}}}{2}+(3u)\frac{\vec{\mathrm{OC}}}{3}$ $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$,　$\mathrm{B}'=$ 線分 OB の中点,　$\mathrm{C}'=$ 線分 OC を 1 : 2 に内分する点 とする。求める領域は，四面体 $\mathrm{OA'B'C'}$ の周および内部。
体積比：四面体の体積比は，3 辺の長さの比の積に等しい（頂角 O を共有するため）。
$V'=\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OC}}V=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}V=\frac{1}{6}V$ 答 $\frac{1}{6}$ 倍

練習 B2

四面体 PABC の体積の最大値

Memo / Answer

底面を △ABC と固定して考える。体積が最大になるのは，高さが最大のとき。すなわち，点 P が平面 ABC から最も離れた位置にあるときである。点 P の存在範囲は 四面体 OABC の内部である。平面 ABC から最も遠い点は，原点 O である。このとき，四面体 PABC は OABC そのものになる。よって最大値は V。
(補足：もし P が「$s+t+u\leqq 2$」などの範囲なら，O の反対側に広がるため，頂点 $2\vec{a}$ などが候補になる) 今回の条件 $s+t+u\leqq 1$ では，P は O と平面 ABC の間にしか存在しない。よって $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ のとき最大。答 V