1. 不動点を探せ

次の漸化式はどう解けばいいだろうか.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

等比数列（×2）のようで, 等差数列（+1）のようでもある. この「混ざった漸化式」を解く鍵は, 数列が変化しなくなる点, すなわち**不動点 (ふどうてん)** を見つけることにある.

もし仮に, $a_{n+1} = a_n = \alpha$ となる値が存在するなら,

$$\alpha = 2\alpha + 1$$

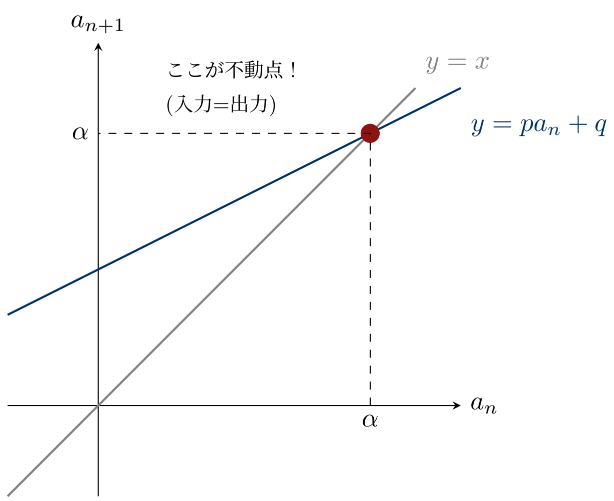
これを解くと $\alpha = -1$. これが数列の「中心」になる (詳しくは 2. をみよ).

特性方程式 (Characteristic Equation)

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ に対して, a_{n+1} と a_n を α に置き換えた方程式

$$\alpha = p\alpha + q$$

を**特性方程式**という. この解 α は, グラフ $y = x$ と $y = px + q$ の交点（不動点）を表す.



2. 等比数列への帰着（平行移動）

求めた α をどう使うか. 元の式と並べて引き算をしてみよう.

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & pa_n + q \\ -) & \alpha & = & p\alpha + q \\ \hline & a_{n+1} - \alpha & = & p(a_n - \alpha) \end{array}$$

邪魔だった定数項 q が消えた！ ここで $b_n = a_n - \alpha$ と置くと,

$$b_{n+1} = pb_n$$

となり, 単純な**「公比 p の等比数列」**に変身する.

3. 解法の実践

例題 1 (等差 × 等比型)

次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$$

Memo / Answer

年　組　番　氏名

4. 分数や負の数の場合

公比 p が分数や負の数でも手順は全く同じである.

例題 2 (収束する数列)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

Memo / Answer

極限の話 (参考)

例題 2 の結果で $n \to \infty$ とすると, $(1/2)^{n-1} \to 0$ なので, a_n は 2 に近づく. これはこの漸化式の不動点 $\alpha = 2$ に他ならない.

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (基本計算)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$$

Memo / Answer

練習 A2 (負の係数)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -2a_n + 6$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (分数係数)

次の数列の一般項を求めよ.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$$

Memo / Answer

練習 B2 (不動点の確認)

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 6$ において, (1) 不動点 α を求めよ. (2) 初項が $a_1 = 3$ のとき, 一般項 a_n はどうなるか.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ を解く．$-2\alpha = -4 \implies \alpha = 2$.
漸化式は $a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる．数列 $\{a_n - 2\}$ は,

- 初項: $a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$
- 公比: 3

の等比数列である．

$$a_n - 2 = -1 \cdot 3^{n-1}$$
$$a_n = 2 - 3^{n-1}$$

例題 2 解答

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$ を解く．$\frac{1}{2}\alpha = 1 \implies \alpha = 2$.
変形すると $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$．数列 $\{a_n - 2\}$ は,

- 初項: $a_1 - 2 = 4 - 2 = 2$
- 公比: $\frac{1}{2}$

の等比数列である．

$$a_n - 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (= 2 + \frac{1}{2^{n-2}})$$

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

$\alpha = 2\alpha + 3 \implies \alpha = -3$. $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$．数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $2 + 3 = 5$, 公比 2 の等比数列．$a_n + 3 = 5 \cdot 2^{n-1}$．**答え: $\boldsymbol{a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3}$**.

練習 A2 解答

$\alpha = -2\alpha + 6 \implies 3\alpha = 6 \implies \alpha = 2$. $a_{n+1} - 2 = -2(a_n - 2)$．数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $1 - 2 = -1$, 公比 -2 の等比数列．$a_n - 2 = -1 \cdot (-2)^{n-1}$．**答え: $\boldsymbol{a_n = 2 - (-2)^{n-1}}$**.

練習 B1 解答

$\alpha = 3\alpha + 2 \implies -2\alpha = 2 \implies \alpha = -1$. $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$．数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $0 + 1 = 1$, 公比 3 の等比数列．$a_n + 1 = 1 \cdot 3^{n-1}$．**答え: $\boldsymbol{a_n = 3^{n-1} - 1}$**.

練習 B2 解答

(1) $\alpha = 3\alpha - 6 \implies 2\alpha = 6 \implies$ **$\boldsymbol{\alpha = 3}$**.
(2) $a_{n+1} - 3 = 3(a_n - 3)$．数列 $\{a_n - 3\}$ の初項は $a_1 - 3 = 3 - 3 = 0$．初項が 0 なので, 公比を掛けてもずっと 0 のままである．$a_n - 3 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$．**答え: $\boldsymbol{a_n = 3}$** (ずっと 3 のまま動かない)．※これが不動点の意味である．