年　　組　　番　氏名

Introduction：原点からの距離

絶対値記号 $|x|$ を「プラスにする記号」とだけ覚えていると，不等式で苦戦します。これからは，次のようにイメージしてください。

$|x|$ とは，数直線上で原点 O から点 x までの「距離」である。

- $|3| = 3 \to$ 原点から右に 3 離れている。
- $|-3| = 3 \to$ 原点から左に 3 離れている。

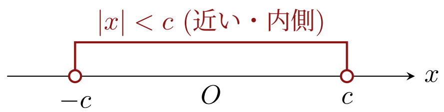
絶対値を含む方程式・不等式（基本パターン）

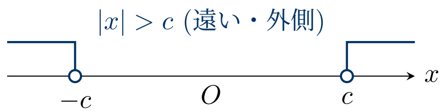
$c > 0$（正の定数）のとき，以下の公式が成り立ちます。

(1) **方程式** $|x| = c$
- 意味：原点からの距離が c である点。
- 解：$\boldsymbol{x = \pm c}$

(2) **不等式** $|x| < c$
- 意味：原点からの距離が c **より近い（内側）**。
- 解：$\boldsymbol{-c < x < c}$

(3) **不等式** $|x| > c$
- 意味：原点からの距離が c **より遠い（外側）**。
- 解：$\boldsymbol{x < -c, \quad c < x}$





例題 1：基本パターンの計算

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x| = 5$
(2) $|x| < 3$
(3) $|x| \geqq 4$

考え方: 数直線をイメージして解きましょう。(3) は「距離が 4 以上（遠い）」なので，-4 より左と 4 より右です。

Memo / Answer

例題 2：中身が式の場合

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x-2|=3$
(2) $|x+1| \leqq 4$
(3) $|2x-1|>5$

手順: 中身をひとまとめ（カタマリ）と考えます。$X=x-2$ などと置くとわかりやすいです。

- $|X|=3 \implies X=\pm 3$
- あとは X を元の式に戻して x を求めます。

Memo / Answer

Topic：2 点間の距離としての絶対値

数直線上で，$|a-b|$ は **「点 a と点 b の距離」** を表します。これを知っていると，計算しなくても答えが見えることがあります。

- $|x-2|=3$
  - 意味：「点 x と 点 2 の距離が 3」
  - 2 から右へ 3 進むと 5。左へ 3 進むと -1。
  - 答え：$x=-1, 5$
- $|x-1|<2$
  - 意味：「点 x と 点 1 の距離が 2 より近い」
  - 1 を中心に半径 2 の範囲内。
  - $1-2<x<1+2 \implies -1<x<3$

この考え方は，数 II や数 III でも非常に役に立ちます。

例題 3：距離の利用

不等式 $|x+2|<3$ を，距離の考え方を用いて解け。

ヒント: $x+2$ は $x-(-2)$ と変形できます。つまり，「点 x と 点 $\boldsymbol{-2}$ との距離が 3 未満」という意味です。数直線を書いて，-2 から左右に 3 ずつ進んだ範囲を求めましょう。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 基本計算

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x| = 7$
(2) $|x| \leqq 2$
(3) $|x| > 5$

練習 A2: カタマリの利用

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x - 3| = 4$
(2) $|x + 2| < 5$
(3) $|3x - 1| \geqq 2$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 連立不等式への応用

次の不等式を解け。

$$2 < |x + 1| < 4$$

練習 B2: 定数の決定

不等式 $|x - 2| < a$ の解が $-1 < x < 5$ となるとき，定数 a の値を求めよ。

練習 B3: 距離の考え方

$|x - 1| = |x - 5|$ を満たす x の値を，計算せずに「距離の意味」を考えて求めよ。（ヒント：点 1 と点 5 から等距離にある点は？）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $\boldsymbol{x = \pm 7}$

(2) 原点からの距離が 2 以下（近い）。$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 2}$

(3) 原点からの距離が 5 より大きい（遠い）。$\boldsymbol{x < -5,\quad 5 < x}$

A2

(1) $x - 3 = \pm 4$

- $x - 3 = 4 \implies x = 7$
- $x - 3 = -4 \implies x = -1$

よって，$\boldsymbol{x = -1, 7}$

(2) $-5 < x + 2 < 5$ 全体から 2 を引いて，$\boldsymbol{-7 < x < 3}$

(3) $3x - 1 \leqq -2,\quad 2 \leqq 3x - 1$

- $3x \leqq -1 \implies x \leqq -\frac{1}{3}$
- $3 \leqq 3x \implies 1 \leqq x$

よって，$\boldsymbol{x \leqq -\frac{1}{3},\quad 1 \leqq x}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 距離の考え方で解くのが早い。$|x+1|$ は「点 x と点 -1 の距離」。これが 2 より大きく 4 より小さい。

- 点 -1 から右に 2 ～ 4 進む：$1 < x < 3$
- 点 -1 から左に 2 ～ 4 進む：$-5 < x < -3$

よって，$\boldsymbol{-5 < x < -3,\quad 1 < x < 3}$

（別解：連立不等式として解く）$\begin{cases} |x+1| > 2 \\ |x+1| < 4 \end{cases}$ を解いて共通範囲をとる。

B2 $|x-2| < a$ の解は，$-a < x - 2 < a$ 全体に 2 を足して，$2 - a < x < 2 + a$ これが $-1 < x < 5$ と一致すればよい。

$$2 - a = -1 \quad \text{かつ} \quad 2 + a = 5$$

どちらを解いても，$\boldsymbol{a = 3}$

B3 $|x-1|$ は「点 1 からの距離」，$|x-5|$ は「点 5 からの距離」。これらが等しいということは，x は 1 と 5 の中点にある。

$$x = \frac{1+5}{2} = \boldsymbol{3}$$