1. 証明の作法

等式 $A = B$ を証明する 3 つの方法

「等しい」ことを論理的に説明するには, 主に以下の 3 つのアプローチがある.

(1) **一方変形型**: 複雑な方の辺を変形して, 他方の辺を導く.

$$A = \cdots = \cdots = B$$

(2) **両辺変形型**: 左辺と右辺をそれぞれ変形し, 同じ式になることを示す.

$$A = \cdots = C, \quad B = \cdots = C \quad \therefore A = B$$

(3) **引き算型**: $A - B$ を計算し, 0 になることを示す.

$$A - B = \cdots = 0 \quad \therefore A = B$$

【超重要】 示したいしきを先に書いてはいけない!! 例えば「$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を示せ」という問題の解答の 1 行目に,

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

と書いたら 0 点である.

例題 1（等式の証明・基本）

次の等式を証明せよ.

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Proof

2. 条件付きの等式の証明

文字を減らす

「$a + b + c = 0$ のとき」のような条件がある場合, それを利用して**文字を消去**し, 変数を減らして証明するのが基本である.

$$a + b + c = 0 \iff c = -(a+b)$$

これを代入して c を消去すれば, a, b だけの式になり計算しやすくなる.

例題 2（条件付き等式）

$a + b + c = 0$ のとき, 次の等式を証明せよ.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Proof

3. 比例式

「$= k$」とおく

比例式 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ の証明は，値を k とおいて

$$a = bk, \quad c = dk$$

と表し，文字を b, d, k に統一して計算する．

例題 3（比例式の証明）

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$ を証明せよ．

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1（恒等式の証明）

次の等式を証明せよ.

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

Proof

練習 A2（条件付き等式）

$a+b+c=0$ のとき, 次の等式を証明せよ.

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$$

Hint

$a+b=-c,\quad b+c=-a,\quad c+a=-b$ と変形して代入すると早い.

Proof

練習 B1（比例式）

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$$

Proof

練習 B2（少なくとも 1 つは…）

$x+y+z=a,\quad a(xy+yz+zx)=xyz$ が成り立つとき，x, y, z のうち少なくとも 1 つは a であることを証明せよ．

方針

「少なくとも 1 つは a」 $\Longleftrightarrow$ 「$(x-a)(y-a)(z-a)=0$」この式の左辺を展開し，条件式を代入して 0 になることを示せばよい．

Proof