1. 関数の最大値・最小値

ポイント：端点と極値を比べる

定義域（区間）のある関数の最大値・最小値を求める手順：

(1) 導関数 $f'(x)$ を求め，増減表を作る．
(2) 区間の**両端の値**と，区間内にある**極値**を書き込む．
(3) それらの y 座標（関数の値）を比較する．
- 一番大きい値 → **最大値**
- 一番小さい値 → **最小値**

注意：極大値が最大値になるとは限らない！

例題 1：区間のある最大・最小

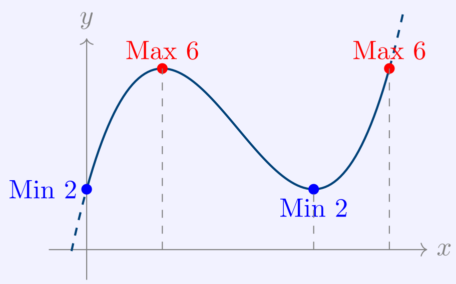
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ の最大値・最小値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ $f'(x) = 0$ とすると $x = 1, 3$
区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における増減表は以下の通り．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	6	↘	2	↗	6

表より，y 座標を比較して $x = 1, 4$ のとき 最大値 6,　$x = 0, 3$ のとき 最小値 2

グラフ概形



練習 次

の関数の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$$

Memo / Answer

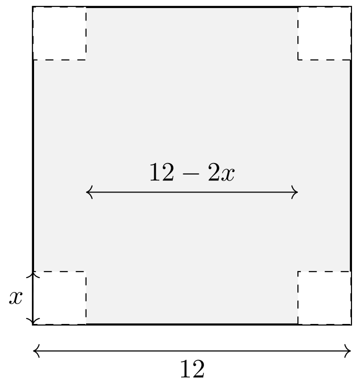
2. 文章題への応用

考え方：変数の決定と定義域

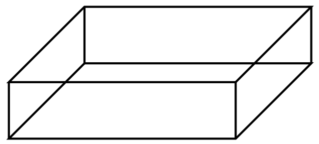
(1) 変化する量を文字（x など）でおく．
(2) **定義域（x のとりうる値の範囲）**を必ず確認する．
（例：辺の長さは正 $\to x > 0$ など）
(3) 最大にしたい量を x の関数で表し，増減を調べる．

例題 2：箱の容積の最大化

1 辺が 12cm の正方形の厚紙がある．この四隅から，1 辺の長さが $x$cm の正方形を切り取り，ふたのない直方体の箱を作る．箱の容積 y を最大にする x の値を求めよ．



図：展開図



図：完成した箱

Memo / Answer

3. 方程式の実数解の個数

ポイント：グラフと x 軸の交点を見る

方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数は，グラフ $y = f(x)$ と x 軸（直線 $y = 0$）の**共有点の個数**と一致する．

- 極大値 > 0 かつ 極小値 $< 0 \to$ **3 個**（山が上で谷が下）
- 極値のどちらかが $0 \to$ **2 個**（接する）
- 極大値・極小値が同符号 $\to$ **1 個**

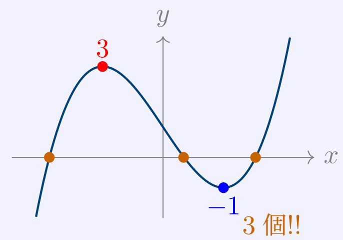
例題 3：実数解の個数

3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ $f'(x) = 0$ とすると $x = -1, 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

極大値は $3(>0)$，極小値は $-1(<0)$ である．グラフは x 軸と **3 点** で交わる．



よって，実数解の個数は **3 個**

確認テスト

練習 A：最大値・最小値

次の関数の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 4)$$

Memo / Answer

練習 B：解の個数

方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

Memo / Answer