1. 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，実際に解を求めなくても，**解の和** $\boldsymbol{\alpha+\beta}$ と **解の積** $\boldsymbol{\alpha\beta}$ は係数 a,b,c だけで計算できる．

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α,β とすると，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例題 1（基本計算）

2 次方程式 $2x^2-6x+5=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha+\beta$　　(2) $\alpha\beta$

Memo / Answer

＜証明の概略＞

解が α,β である方程式は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表せる．展開すると $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ となり，もとの式 $ax^2+bx+c=0$ と係数を比較して導かれる．

2. 対称式の値

文字 α,β を入れ替えても値が変わらない式を**対称式**という．すべての対称式は，基本対称式 $\boldsymbol{\alpha+\beta}$ と $\boldsymbol{\alpha\beta}$ のみで表すことができる．

よく使う変形公式

- $\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$
- $\boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}$　（通分する）

例題 2（対称式の利用）

2 次方程式 $x^2+3x+4=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

Memo / Answer

3. 2 数を解とする方程式を作る

和と積さえ分かれば方程式は復元できる！ 2 数 α, β を解にもつ 2 次方程式の一つは $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ である.

例題 3（方程式の作成）

次の 2 数を解とする 2 次方程式を一つ作れ.

(1) $3, -5$
(2) $1+2i, \quad 1-2i$

Memo / Answer

確認テスト（基本）

練習 A1（基本計算）

次の 2 次方程式の 2 つの解 α, β の和と積を求めよ．

(1) $x^2 - 4x - 2 = 0$

(2) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

練習 A2（対称式の値 1）

2 次方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$

Memo / Answer

確認テスト（応用）

練習 B1（対称式の値 2：3 乗の和）

2 次方程式 $x^2 + 2x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

$$\alpha^3 + \beta^3$$

(Hint: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ または $(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$)

練習 B2（少し複雑な対称式）

2 次方程式 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

Memo / Answer

確認テスト (基本) [解答]

練習 A1（基本計算）

次の 2 次方程式の 2 つの解 α, β の和と積を求めよ．

(1) $x^2 - 4x - 2 = 0$

(2) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

練習 A2（対称式の値 1）

2 次方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$

Memo / Answer

A1

解と係数の関係 $\alpha + \beta = -b/a,\ \alpha\beta = c/a$ より

(1) $\alpha + \beta = -\dfrac{-4}{1} = \mathbf{4}, \quad \alpha\beta = \mathbf{-2}$

(2) $\alpha + \beta = -\dfrac{2}{3} = \mathbf{-\dfrac{2}{3}}, \quad \alpha\beta = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

A2

$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 3$ である．

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \cdot 3 = 25 - 6 = \mathbf{19}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \mathbf{\dfrac{5}{3}}$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 3 - 5 + 1 = \mathbf{-1}$

確認テスト (応用) [解答]

練習 B1（対称式の値 2：3 乗の和）

2 次方程式 $x^2 + 2x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

$$\alpha^3 + \beta^3$$

練習 B2（少し複雑な対称式）

2 次方程式 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

Memo / Answer

B1

$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 4$ である．

3 乗の展開公式変形を利用すると，

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-2)^3 - 3 \cdot 4 \cdot (-2) \\ &= -8 + 24 = \mathbf{16} \end{aligned}$$

(別解) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ を用いてもよい．

B2

$\alpha + \beta = -\dfrac{-4}{2} = 2, \quad \alpha\beta = \dfrac{1}{2}$ である．

与式を通分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4 - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = \mathbf{6} \end{aligned}$$