

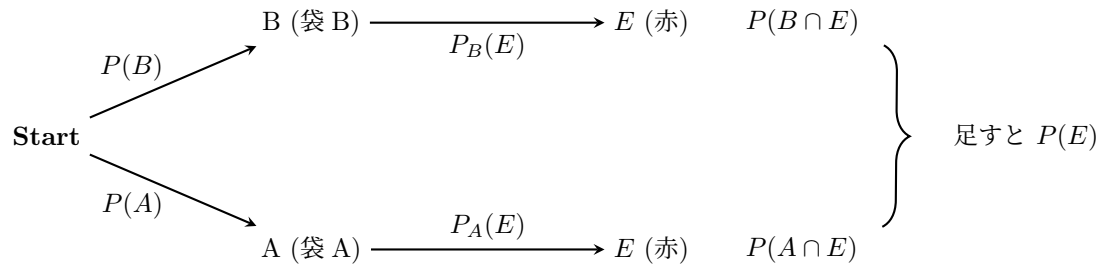
1. 時間の流れと確率 (木の図)

事象が連鎖して起こる場合、木の図 (Tree Diagram) を描くと状況が整理しやすくなります。特に「袋を選んでから玉を取り出す」ような多段階の試行で有効です。

全確率の公式

事象 E が、互いに排反な事象 A, B のいずれかを經由して起こるとき、

$$\begin{aligned} P(E) &= \underbrace{P(A \cap E)}_{A \text{ 經由}} + \underbrace{P(B \cap E)}_{B \text{ 經由}} \\ &= P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) \end{aligned}$$



例題 1. 袋と玉の確率

袋 A には赤玉 3 個と白玉 2 個、袋 B には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている。1 個のさいころを投げて、3 の倍数の目が出たら袋 A を、それ以外の目が出たら袋 B を選び、その中から玉を 1 個取り出す。

- (1) 3 の倍数の目が出て、かつ赤玉が出る確率.
- (2) 赤玉が出る確率.

Memo / Answer

2. 原因の確率 (ベイズの定理)

「赤玉が出た」という結果がわかっているとき、それが「袋 A から出たものか、袋 B から出たものか」という原因を確率的に推測します。

原因の確率

結果として事象 E が起こったとき、その原因が A であった確率は、

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{A \text{ 經由で } E \text{ が起こる確率}}{\text{とにかく } E \text{ が起こる確率 (全体)}} \end{aligned}$$

例題 2. 原因の確率 (袋の推測)

例題 1 の設定において、取り出した玉が赤玉であったとき、それが袋 A から取り出されたものである確率を求めよ。

Memo / Answer

3. 不良品の発生確率

工場での製品検査などは，原因の確率の典型的な応用例です．

例題 3. 工場の機械

ある工場には機械 A と機械 B があり，製品全体の 60% を A が，40% を B が作っている．また，不良品の発生率は A が 2%，B が 3% である．この工場の製品から無作為に 1 個を取り出したとき，

- (1) それが不良品である確率を求めよ．
- (2) 不良品であったとき，それが機械 A で作られたものである確率を求めよ．

Memo / Answer

4. 情報の信頼度 (嘘つき問題)

「嘘をつく確率」が決まっている人が発言したとき，その内容が本当である確率を求めます．事象が「起こる/起こらない」の 2 択（コインや紅白の玉）である場合が最も基本的です．

例題 4. 嘘つき問題

A 君は 80% の確率で本当のことを言い，20% の確率で嘘をつく．A 君がコインを 1 枚投げ，結果を見て「表が出た」と言った．このとき，実際に表が出ている確率を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト A（基本）

練習 1：袋と玉

袋 A には白玉 3 個，赤玉 2 個が入っており，袋 B には白玉 2 個，赤玉 4 個が入っている．まずコインを投げて，表が出たら袋 A を，裏が出たら袋 B を選び，そこから玉を 1 個取り出す．

- (1) 白玉が出る確率を求めよ．
- (2) 白玉が出たとき，それが袋 A から取り出されたものである確率を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 2：病気の検査

ある病気に感染している人は全体の 1% である．この病気の検査キットは，感染している人を正しく陽性と判定する確率が 99%，感染していない人を誤って陽性と判定する確率が 2% である．ある人が検査を受けたところ，陽性と判定された．この人が実際に感染している確率を求めよ．

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

事象の整理：

- A : 袋 A を選ぶ ($1/2$), B : 袋 B を選ぶ ($1/2$)
- W : 白玉が出る

(1) 白玉が出る確率 $P(W)$

$$\begin{aligned}
 P(W) &= P(A \cap W) + P(B \cap W) \\
 &= P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \\
 &= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

(2) 白玉が出たとき, 袋 A である確率 $P_W(A)$

$$\begin{aligned}
 P_W(A) &= \frac{P(A \cap W)}{P(W)} \\
 &= \frac{3/10}{7/15} = \frac{3}{10} \times \frac{15}{7} = \frac{9}{14}
 \end{aligned}$$

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

2

事象 X : 感染している, 事象 Y : 陽性と判定される. 与えられた確率:

- $P(X) = 0.01$ (感染率)
- $P(\bar{X}) = 0.99$ (非感染率)
- $P_X(Y) = 0.99$ (感度: 感染者を陽性とする)
- $P_{\bar{X}}(Y) = 0.02$ (偽陽性: 非感染者を陽性とする)

求める確率は $P_Y(X)$. まず, 陽性と判定される全確率 $P(Y)$ を求める.

$$\begin{aligned}
 P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\bar{X} \cap Y) \\
 &= P(X)P_X(Y) + P(\bar{X})P_{\bar{X}}(Y) \\
 &= 0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.02 \\
 &= 0.0099 + 0.0198 = 0.0297
 \end{aligned}$$

よって,

$$P_Y(X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.0099}{0.0297} = \frac{99}{297} = \frac{1}{3}$$

(※陽性と出ても, 実際に感染している確率は 33% 程度しかない)