1. 2 つの放物線で囲まれた面積

前回,「放物線と直線」で囲まれた面積は $\frac{1}{6}$ 公式で求まることを学んだ．実は,**「2 つの放物線」**で囲まれた面積も，ほぼ同じ公式で計算できる．

係数が合体する

2 つの放物線 $y = \boldsymbol{a}x^2 + \dots$ と $y = \boldsymbol{a'}x^2 + \dots$ の交点を α, β とする．差をとった関数 $(ax^2 + \dots) - (a'x^2 + \dots)$ の x^2 の係数は

$$a - a'$$

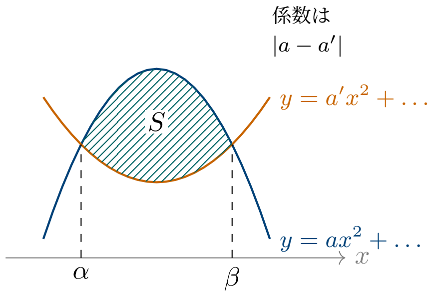
となる．よって，積分計算の結果は係数が $|a - a'|$ に変わるだけである．

定理：1/6 公式（2 つの放物線 Ver.）

2 つの放物線 $y = ax^2 + \dots$ と $y = a'x^2 + \dots$ で囲まれた部分の面積 S は，交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると

$$S = \frac{|a - a'|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

係数は「2 次の係数の差（の絶対値）」になる．



例題 1

2 つの放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ と $y = -x^2 + 4x - 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

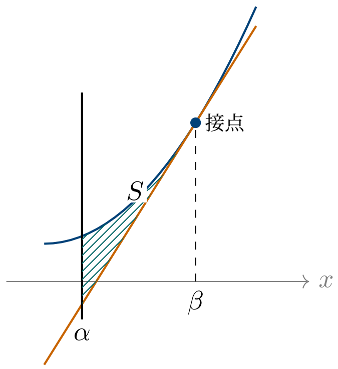
Memo / Answer

2. 応用：接線と縦線（1/3 公式）

1/6 公式の証明で使った「$(x-\beta) = (x-\alpha) - (\beta-\alpha)$ と変形する技」を使えば，他のパターンも公式化できる．

接線と重解

放物線 $y = ax^2 + \dots$ 上の点 $x = \beta$ における接線 ℓ と，直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積 S を考えたい．



このとき，(放物線) − (接線) は，$x = \beta$ で接する（重解をもつ）ので

$$a(x-\beta)^2$$

と因数分解できる．これを積分すると，以下の公式が得られる．

定理：1/3 公式

放物線と接線，および縦線 $x = \alpha$ で囲まれた面積は

$$S = \frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

例題 2

放物線 $y = x^2 + 1$ と，点 $(1, 2)$ における接線，および y 軸 $(x = 0)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

Memo / Answer

3. 確認テスト

特訓しよう!

- 交わる (Cross) → 分母は 6
- 接する (Touch) → 分母は 3

係数 a や区間の幅 $(\beta-\alpha)^3$ は共通である．図形の形を見て使い分けよう．

練習 1：1/6 公式

放物線 $y=x^2-3x$ と 直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

Memo:

- 交点を求める．
- 公式に代入する．

Memo / Answer

練習 2：1/3 公式

放物線 $y=-x^2+2$ 上の点 $(1,1)$ における接線を ℓ とする．この放物線と接線 ℓ，および 直線 $x=-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

Memo / Answer