

P.96~P.9

基本事項

- 求めた標本平均 \bar{X} から母平均 m の真の値がどのような範囲にあるか推測することを _____
といい,

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で表される母平均 m の範囲を、母平均 m に対する _____ という。ただし σ は母標準偏差, n は標本の大きさとする。

- 実際の推定では,
 - 既知の値 → 標本平均 \bar{X} , 標本の標準偏差 s
 - 未知の値 → 母平均 m , 母標準偏差 σ
 である場合が多く、母平均 m のみ未知数である場合は少ない。
- 実は、標本数 n が大きいとき、母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 s を用いてよいことが知られている。
(説明は今回はしない。)

♣ 母平均の推定

全体課題 (練習 32)

大量に生産されたある製品の中から、100 個を無作為抽出して長さを測ったところ、平均値 103.4cm、標準偏差 1.5cm であった。この製品の平均の長さ m cm に対して、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

解答 _____

♠ エキスパート A 「面積 0.95 となる場所は?」

目標 A

正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う標本平均 \bar{X} について、平均からの誤差に関して $P(|\bar{X} - m| \leq \alpha) = 0.95$ が成り立つ
ような α を求め、「 $1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 」の正体を式変形をたどりながら説明することができる。

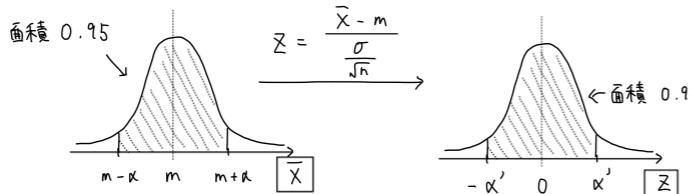
課題

- 考える不等式は

$$|\bar{X} - m| \leq \alpha \iff m - \alpha \leq \bar{X} \leq m + \alpha$$

と変形できるから、

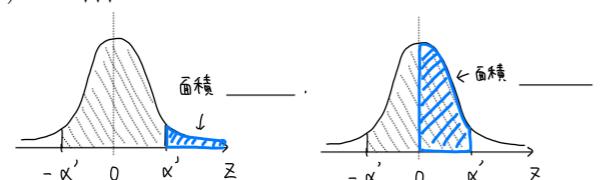
- 考える確率は左図の網掛け部分 ↓↓↓(軸のラベルに注意)。



- $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ より、 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおくと、 $Z \sim N(0, 1)$ 。

- これを用いて、左図の面積の代わりに右図の面積を考える(軸のラベルに注意)↑↑↑。

- 内側の面積が 0.95 ということは、右端片側の面積は【 0.05 / 0.025 】で、内側右半分の面積は【 0.45 (=0.5-0.05) / 0.475 (=0.5-0.025) 】↓↓↓



- したがって、正規分布表を読み取れば、図の α' の値は $\alpha' = \underline{\hspace{2cm}}$

- \bar{X} に戻すと、

$$\begin{aligned} Z = 1.96 &\iff \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1.96 \\ &\iff \bar{X} - m = 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

- したがって求める誤差許容度 α の値は、 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

- これより、面積 0.95 となる範囲は

$$|\bar{X} - m| \leq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- この式を母平均 m について整理すると信頼区間の不等式を得る ↓↓↓。

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

♠ エキスパート B 「信頼度 95% の意味」

目標 B

「信頼度 95%」の意味を明確に理解し、「投げ縄」を例に説明することができる。

課題

次の動画を見て大事だと思った箇所をメモせよ。



[メモ]

まとめ

信頼度 95% の信頼区間とは、

【この区間の中に本当の母平均が含まれている確率は 95% / 100 回抽出すればそのうち 95 回は母平均を含んでいる】

のような区間のことである。