♣標準偏差の定義

定義 (標準偏差)

分散 $V(X)$ の正の平方根を標準偏差といい，$\sigma(X)$ とかく．
：$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

解釈

分散 $V(X)$ は 2 乗量 (単位が揃ってない．)
→ 標準偏差 $\sigma(X)$ は 1 乗量 (単位揃った!).

練習 8

確率変数 X の確率分布が次の表で与えられるとき，次の値を求めよ．

(1) X の分散　(2)X の標準偏差

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

解答

♣分散と標準偏差の性質

性質 1

$$V(aX+b)=a^2V(X),\quad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).$$

解釈

- 分散は 2 乗量 → a^2 が出てくる．
- 分散は散らばりを表す． → データ全体を $+b$ 平行移動しても散らばり度合いは変わらない．
- 標準偏差は分散の正の平方根 → 絶対値がつく ($|a|$ 倍).

練習 9

1 個のサイコロを投げて出る目を X とすると，

$$E(X)=\frac{7}{2},\ \ V(X)=\frac{35}{12},\ \ \sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}.$$

このとき，次の確率変数の期待値，分散, 標準偏差を求めよ．

(1)$X+4$　(2)$-2X$　(3)$3X-2$

解答

♠分散の平行移動不変性

問

次のゲームの賞金 X の分散を, 工夫して求めよ．

- 確率 1/3 で 1010 円もらえる．
- 確率 1/2 で 990 円もらえる．
- 確率 1/6 で 1020 円もらえる．

解答

- 確率変数 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot 1010+\frac{1}{2}\cdot 990+\frac{1}{6}\cdot 1020$$

となり，計算がちょっと面倒.
- そこで，確率変数の取りうる値それぞれを -1000 平行移動した確率変数 $X-1000$ を考える．
- 確率分布表は以下の通り．

$X-1000$				計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

- よって，確率変数 $X-1000$ の期待値は

$E(X-1000)=$

- したがって，確率変数 $X-1000$ の分散は

$V(X-1000)=$

- そして，分散は平行移動について不変 $V(X-1000)=V(X)$ だから,

$V(X)=$

♣ 復習 (データの標準化)

- 平均値が $\overline{x}$，標準偏差が σ_x であるデータ x に対して，

$$T = 10 \times \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x} + 50$$

で与えられる値 T を，x の偏差値という．

- 例えば，とあるテストにて，

とあるテスト	100 点満点	1000 点満点
平均点 $\overline{x}$	55	550
標準偏差 s_x	20	200
A さんの点数 x	60	600
A さんの偏差		
A さんの偏差値		

- 偏差値とは，平均が____点, 標準偏差が____点になるように調整された数である．

♣ 確率変数の標準化

確率変数 X について，X の期待値を m, 標準偏差を σ とする．このとき，これらを用いて新しい確率変数 Z を

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

で定めることを，確率変数 X を標準化するという．

問

確率変数 X が次の確率分布に従うとする．

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

確率変数 X の期待値と標準偏差をそれぞれ m, σ とする．このとき，$Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ で定義される新しい確率変数 Z について，$E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$ となることを理解せよ．

解答

- Z の確率分布は

Z	$\dfrac{x_1 - m}{\sigma}$	$\dfrac{x_2 - m}{\sigma}$	$\cdots\cdots$	$\dfrac{x_n - m}{\sigma}$	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

- Z の期待値を定義通り計算すると，

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k - m}{\sigma} \right) \times p_k \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{n} (x_k p_k - m p_k) \\
&= \frac{1}{\sigma} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}_{=E(X)} - \frac{m}{\sigma} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k}_{\text{確率の総和は 1}} \\
&= \underbrace{\frac{E(X)}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}}_{m=E(X)\ \text{とおいている}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- 分散は定義通り計算すると面倒なので, 性質 1 を用いて,

$$\underbrace{V(\sigma Z) = \sigma^2 V(Z)}_{2\ \text{乗量}} \tag{1}$$

であり,

$$\begin{aligned}
V(\sigma Z) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma \times \frac{x_k - m}{\sigma} \right)^2 \times p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 \times p_k \\
&= V(X) = \sigma^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

より，式 (1),(2) より，$V(Z) = 1$.