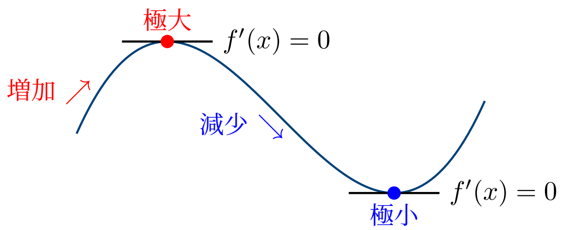
年　　組　　番　氏名

1. 導関数の符号と関数の増減

解説：接線の傾きで動きがわかる

導関数 $f'(x)$ は「接線の傾き」を表す．

- 接線の傾きがプラス ($f'(x) > 0$) → グラフは**右上がり（増加）**
- 接線の傾きがマイナス ($f'(x) < 0$) → グラフは**右下がり（減少）**



ある区間で常に，

- $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ はその区間で**増加**する．
- $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ はその区間で**減少**する．

2. 増減表

解説：グラフの設計図

関数の増加・減少の様子を表にまとめたものを**増減表**という．3 次関数のグラフを描くための設計図になる．

増減表の作り方

(1) $f'(x)$ を求めて，$f'(x) = 0$ となる x の値を求める．
(2) 求めた x の値を表の 1 行目に書き込む．
(3) 各区間での $f'(x)$ の符号（$+, -$）を調べる．
(4) 矢印（$\nearrow, \searrow$）と，$f(x)$ の値を書き込む．

例題 1：増減表を書く

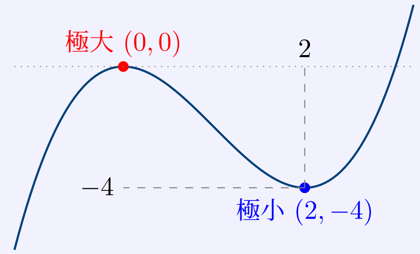
$f(x) = x^3 - 3x^2$ の増減を調べよ．

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ であるから，$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって，$x \leqq 0, 2 \leqq x$ で増加し，$0 \leqq x \leqq 2$ で減少する．

グラフ概形



練習 1

次の関数の増減を調べよ．

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Memo / Answer

3. 極大・極小

用語：山の頂上と谷の底

- **極大値**：増加から減少に移る点の $f(x)$ の値（山の頂上）
- **極小値**：減少から増加に移る点の $f(x)$ の値（谷の底）

これらを合わせて**極値**という．

例題 2：極値を求めてグラフを描く

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ の極値を求め，グラフを描け．

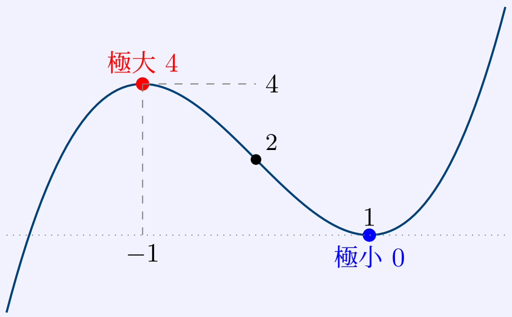
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ $f'(x) = 0$ とすると $x = -1, 1$

増減表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

極値 $x = -1$ で極大値 4,　 $x = 1$ で極小値 0 をとる．

グラフ（y 切片 $f(0) = 2$ も通る）



練習 1

次の関数の極値を求めグラフを描け．.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$$

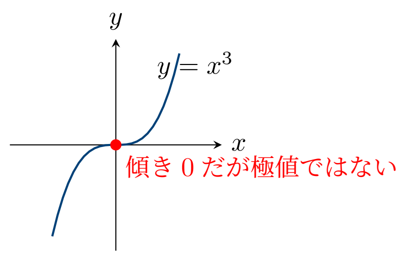
Memo / Answer

注意：$f'(a) = 0$ なら必ず極値になる？

答え：ならない！

例えば，$y = x^3$ を見てみよう．

$y' = 3x^2$ なので，$x = 0$ のとき $y' = 0$（傾き 0）になる．しかし，グラフを見ると...



$x = 0$ の前後で符号を調べると，

- $x < 0$ のとき $y' = 3x^2 > 0$（増加）
- $x > 0$ のとき $y' = 3x^2 > 0$（増加）

ずっと「増加 → 増加」なので，山にも谷にもなっていない！

教訓： $f'(a) = 0$ だけでなく，**その前後で符号が変わるかを増減表で必ずチェック**しよう．

確認テスト

今回のポイント

- $f'(x) > 0 \iff$ 増加，　$f'(x) < 0 \iff$ 減少
- $f'(x) = 0$ となる x を境目にして，符号が変わる．
- 増減表を書けば，グラフの概形（山と谷）がわかる．

練習 A：増減表の作成

次の関数の増減表を書き，極値を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
(2) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

Memo / Answer

練習 B：グラフの描画

次の関数の極値を求め，そのグラフを描け．

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 2$
(2) $y = -2x^3 + 6x$

Memo / Answer