

【数学 B】 授業プリント 2 学期期末範囲 第 12 回 第 2 章 統計的な推測

P.56~P.61

a, b を定数とし、確率変数 X が次の確率分布に従っているとする。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

♣期待値の性質

性質 ($aX + b$ の期待値)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

解釈

$x_1 \sim x_n$ が全て a 倍されたら、期待値も a 倍。全て $+b$ されたら、期待値も $+b$ 。

証明

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= (ax_1 + b) \cdot p_1 + (ax_2 + b) \cdot p_2 + \cdots + (ax_n + b) \cdot p_n \\ &= a \underbrace{(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n)}_{=E(X)} + b \underbrace{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}_{\text{確率の総和は } 1} \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

練習 4

1 個のサイコロを投げて出る目を X とする。 X は確率変数となり、 $E(X) = \frac{7}{2}$ である。次の確率変数の期待値を求めよ。

- (1) $X + 2$ (2) $4X - 1$ (3) $-3X$

解答

定義 (X^2 の期待値)

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n \left(= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k \right).$$

説明

X^2 は X の各値を 2 乗した値たちのこと。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

→

X^2	x_1^2	x_2^2	……	x_n^2	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

練習 5

2 枚の硬貨を同時に投げて表が出る硬貨の枚数を X とするとき、 X^2 の期待値を求めよ。

解答

確率分布

X	0	1	2	計
P				1

→

X^2	0^2	1^2	2^2	計
P				1

♣分散の定義

定義

X の期待値を m であるとする。次で定義される値 $V(X)$ を X の分散と呼ぶ。

$$\begin{aligned}V(X) &= E((X - m)^2) \\&= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n \\&\left(= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k\right)\end{aligned}$$

♠全体課題

全体課題 pre

A と B,2 つのゲームがあり、どちらのゲームも、1 個のサイコロを振って出た目に応じて賞金が決まります。あなたはどちらのゲームに参加しますか。

- ゲーム A
 - 1,2,3 の目:100 円
 - 4 の目:200 円
 - 5,6 の目:300 円

- ゲーム B
 - 1,2,3 の目:0 円
 - 4 の目:100 円
 - 5,6 の目:500 円

解答

全体課題 post

A と B,2 つのゲームがあります。あなたはどちらのゲームに参加しますか。「分散」と「リスク」に言及して解答せよ。

- ゲーム A
 - 1,2,3 の目:100 円
 - 4 の目:200 円
 - 5,6 の目:300 円

- ゲーム B
 - 1,2,3 の目:0 円
 - 4 の目:100 円
 - 5,6 の目:500 円

解答

♠ エキスパート A 「分散とは何か」

目標 A

分散が「散らばり」を表す量であることを理解し、説明できる。

例 -----

次の 2 つのゲームを考えてみよう。

- ゲーム A (安定型)
 - 1 等 (確率 30%):600 円
 - 2 等 (確率 40%):500 円
 - 3 等 (確率 30%):400 円

- ゲーム B (ハイリスク型)
 - 1 等 (確率 5%):5,000 円
 - 2 等 (確率 25%):1,000 円
 - 3 等 (確率 70%):0 円

- ゲーム A,B ともに賞金 X の期待値 $m (= E(X))$ は $m = \underline{\hspace{2cm}}$

- A, B それぞれ表にまとめると,,,

賞金 X_A	確率 P	偏差 $X_A - m$	偏差の 2 乗 $(X_A - m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))
600				
500				
400				
合計	1			
賞金 X_B	確率 P	偏差 $X_B - m$	偏差の 2 乗 $(X_B - m)^2$	分散 ((偏差の 2 乗)×(確率))
5000				
1000				
0				
合計	1			

- より分散が大きいのは、【 A / B 】。

まとめ -----

「偏差」のみでは表現できない「散らばり」度合いを、2 乗を用いて表現したものが分散である。

♠ エキスパート B 「分散と期待値の関係式」

目標 B

関係式 $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ の導出を理解し、活用方法を説明できる。

性質 -----

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

証明

確率変数 X の期待値 $E(X)$ を m とおくと^a、分散の定義から、

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2mx_k + m^2) p_k \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 p_k - 2mx_k p_k + m^2 p_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - \underbrace{2m}_{\text{定数は外に}} \sum_{k=1}^n x_k p_k + \underbrace{m^2}_{\text{定数は外に}} \sum_{k=1}^n p_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m^2 + m^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - m^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

^a $m = E(X)$ とおくということ。 $E(X)$ だと式全体が複雑に見えるから m と書き換えよう、くらいの気分。

説明 -----

- 全体課題のゲーム A,B の期待値はどちらも $\underline{\hspace{2cm}}$. ← 分数
- ところで分散の定義は

$$V(X) = E((X - m)^2) = \underbrace{(x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n}_{\text{それぞれの } m \text{ に分数を代入して計算するのはちょっと面倒}}$$

- そこで、この関係式を利用する。
- 全体課題において、ゲーム A,B それについて、 X^2 の期待値 $E(X_A^2)$, $E(X_B^2)$ は
 $E(X_A^2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $E(X_B^2) = \underline{\hspace{2cm}}$. ← 少しこそ計算が楽そう。