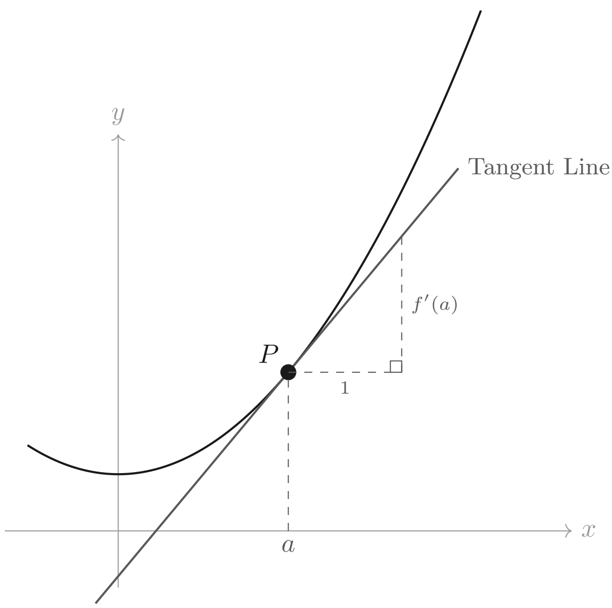
High School Mathematics II

微分積分学の物語

From Limits to the Grand Finale



Class: 2 年 ______ 組 **Name:** ________________________

目次

第 1 回　極限概念の形成

1.1　Prologue：アキレスの憂鬱

放課後の数学準備室．西日が古びた黒板をオレンジ色に染めている．先生はコーヒーカップを片手に，窓の外を眺めていた．

先生　「……永遠に辿り着けない場所があるとしたら，君はどうする？」

私が部屋に入ると，先生は振り返りもせずにそう言った．

私　「また哲学ですか？ 先生.」

先生　「いや，数学の話だよ．例えば，君がこの部屋の『壁』に向かって歩くとしよう．ただし，少し奇妙なルールがある.」

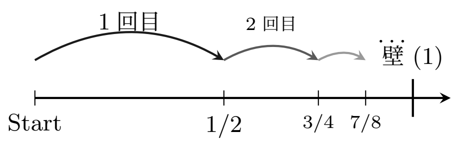
先生は黒板に向き直り，一本の数直線を引いた．右端には「壁 (1)」，左端には「スタート (0).」と書かれている．

先生　「**『残りの距離の半分だけ進んで，そこで止まる』**．これを繰り返すんだ.」

私　「半分だけ進む……ですか.」

先生　「そう．1 回目で，壁までの距離 1 の半分，1/2 まで進む．そこで一度停止．次は，残り半分の距離を進む．これを繰り返すとどうなる？」

私は鞄を机に置き，ノートを開いて図を描き始めた．



友人　「失礼しまーす．……あれ，何の計算？」

部活終わりの友人が顔を出した．

私　「壁に向かって『残りの半分』ずつ進むシミュレーションだよ．A，これ，壁に辿り着くと思う？」

友人　「え？ そりゃ着くでしょ．だって，目の前にあるんだし．どんどん近づいてるじゃん」

先生　「直感的にはそう思いますよね．では，実際に計算して確かめてみましょうか.」

先生はチョークを走らせた．

- 1 回目：進んだ距離 $= \frac{1}{2}$
- 2 回目：残りは $\frac{1}{2}$ だから，その半分 $\frac{1}{4}$ 進む．合計 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- 3 回目：残りは $\frac{1}{4}$ だから，その半分 $\frac{1}{8}$ 進む．合計 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

先生　「n 回進んだときの位置を a_n とすると，式はどうなりますか？」

私　「分母は $2, 4, 8 \ldots$ と増えていくから 2^n．分子はそれより 1 小さい数だから……．」

一般項の導出

n 回目の到達地点 a_n は，以下の式で表される．

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

先生　「素晴らしい．では質問です．この操作を『**無限回**』繰り返したとき，君たちは壁に触れることができますか？」

教室に沈黙が落ちた．

友人　「……あれ？ 数式を見ると，変な感じがする．n がどんなに大きな数でも，例えば 1 億回やっても，$\frac{1}{2^{100000000}}$ だけ隙間が残るよね？」

私　「うん．どんなに近づいても，式には常に『マイナス $\frac{1}{2^n}$』がついている．だから論理的には，**永遠に壁の手前にいる**ことになる」

先生　「その通り．これが，古代ギリシャの哲学者ゼノンが指摘した『アキレスと亀』や『二分法』のパラドックスです．有限の手続きを積み重ねるだけでは，決して超えられない壁がある．微積分学とは，この壁を乗り越えるための学問なのです．」

Thinking Time:

「限りなく近づく」ことと「到達する」ことは同じだろうか？数学の世界では，この 2 つを厳密に区別する必要がある．ゼノンのパラドックスは，「無限の時間をかけなければ到達できない」ことを示唆しているが，現実に私たちは壁に触れることができる．このギャップはどこから来るのだろう？

1.2 数の深淵：有理数という名の牢獄

先生 「壁の話は一旦置いておいて，『数』の世界の壁を見てみましょう．$\sqrt{2}$ という数を知っていますね？」

友人 「ひとよひとよに…… 1.41421356... ですよね．無理数だから，分数にはできない．」

先生 「そうです．無理数とは『分数の比で表せない数』のこと．しかし，もし分数の形の中に，さらに分数を入れ込むことを許せば，その姿に迫ることができます．」

先生は黒板に奇妙な式変形を書き始めた．

$\sqrt{2}$ の連分数展開

$\sqrt{2}$ の整数部分は 1 なので，$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$ と書ける．右辺の $(\sqrt{2} - 1)$ を無理やり分母に持っていくと，

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

これを使うと，

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

という等式ができる．

私 「先生，これじゃ右辺にまた $\sqrt{2}$ が出てきて，堂々巡りじゃないですか？」

先生 「ふふ，そこが面白いところです．右辺の $\sqrt{2}$ に，また自分自身の式 $\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$ を代入してみなさい．」

私は半信半疑でノートに書き込んだ．

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

私 「……あ，また右下に $\sqrt{2}$ が出てきた．これ，永遠に代入し続けられますね．」

先生 「やってみましょう．」

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

友人　「うわ，何これ！ 分数が無限に入れ子になってる．きれいだけど，ちょっと怖い…….」

先生　「これが**連分数展開**です．この無限に続く階段を，途中でバサッと断ち切ってみましょう．そうすれば，計算可能な『有理数』になります．」

私たちは，階段を降りる深さを変えて計算してみることにした．

- 1 段目でストップ：1
- 2 段目でストップ：$1 + \frac{1}{2} = 1.5$
- 3 段目でストップ：$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = 1.4$
- 4 段目でストップ：$1 + \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} \approx 1.4166...$

私　「すごい…….だんだん $\sqrt{2}(= 1.4142...)$ に近づいてる．振動しながら，真の値に向かって収束していく感じだ．」

先生　「しかし，ここでも『壁』は存在します．どんなに深く階段を降りても，有限回で止める限り，それは有理数です．決して無理数 $\sqrt{2}$ そのものにはなれません．」

先生　「式の最後に，必ず $\frac{1}{\cdots+\sqrt{2}}$ という『切れ端』が残るからです．私たちは有理数の世界という牢獄から，計算だけでは脱出できないのです．」

先生の補足：
このように，有限回の計算では「真の値」には到達できません．しかし，「回数を増やせば，誤差をいくらでも小さくできる」という性質は重要です．この性質こそが，後に定義する「極限」の正体なのです．

1.3 面積の牢獄：どうしても埋まらない隙間

先生 「数に続いて，次は『図形』の壁です．放物線 $y = x^2$ の下側の面積を求めたいと思います．」

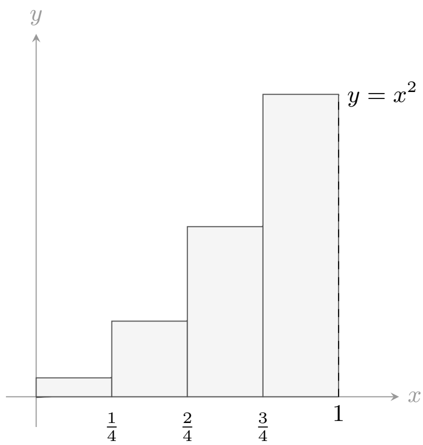
先生は黒板に放物線を描き，0 から 1 までの区間を指さした．

友人 「曲線で囲まれた面積なんて，円以外に公式ありましたっけ？」

先生 「ありません．人類が面積を正確に計算できるのは，基本的には『長方形』だけです．なら，どうしますか？」

私 「長方形で埋め尽くして近似する……ですか？」

先生 「その通り．これを**区分求積法**と言います．実際にやってみましょう．区間 $[0, 1]$ を 4 等分します．」



先生 「幅はすべて 1/4．高さは, 各区間の右端での関数の値, つまり $(1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2, (4/4)^2$ です．合計してみましょう．」

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\
&= \frac{1}{64}(1 + 4 + 9 + 16) = \frac{30}{64} = 0.46875
\end{aligned}
$$

私 「えっと，三角形の面積だと考えると $1 \times 1 \div 2 = 0.5$ だから，それより少し小さいくらい……妥当な値に見えます．」

友人　「でも先生，図を見ると，長方形の角（カド）が放物線より飛び出してますよね．これじゃ正確な面積じゃないです．」

先生　「その通り．このギザギザした『はみ出し』こそが誤差です．では，分割数を n に増やして，長方形を限りなく細くしたらどうなるでしょうか？」

私たちは一般の n での式を立てることにした．

区分求積法の一般式

幅は $1/n$．k 番目の長方形の高さは $(k/n)^2$．総和 S_n は，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

先生　「ここで，数学 B で習った公式 $\sum k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を使ってみましょう．」

私　「式が出ました．これを整理すると…….」

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

先生　「よくできました．さて，この式を見て何か感じませんか？」

友人　「あ！ ここにも $1/n$ がある！ さっきの壁の問題と同じだ．」

私　「そうか…….n を 1 億，1 兆と増やしていけば，$1/n$ は限りなく 0 に近づく．でも，決して 0 にはならない．つまり，長方形のギザギザは，顕微鏡で見れば永遠に残っているんだ．」

ここでも私たちは，「無限の壁」に阻まれた．どんなに精密に計算しても，有限の手続きである限り，真の面積との間には埋まらない溝がある．

1.4 Conclusion：跳躍する勇気

教室に重たい沈黙が流れた．「壁に辿り着けない」「$\sqrt{2}$ になれない」「面積と一致しない」．3 つの問題は，すべて同じ壁に突き当たっていた．

私 「先生，結局数学って，こういう『近似』で満足するしかないんですか？ 厳密な真理を追究するものだと思っていたのに.」

先生は優しく微笑み，黒板の「壁」の文字を消した．そして，その場所に新しく大きな文字を書いた．

Limit / みなす

先生 「古代の人々も，そのもどかしさに苦しみました．しかし，近代の数学者たちは，ある『**決断**』を下すことでこの壁を突破したのです.」

友人 「決断？.」

先生 「ええ．確かに，プロセス（過程）を見れば誤差は消えません．しかし，そのプロセスが『**指し示している先**』は，ただ一つに定まっていますよね？」

先生は区分求積法の式を指さした．

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

先生 「n が大きくなれば，$1/n$ は 0 に近づく．すると，式全体はどうなる？」

私 「えっと…… $\frac{1}{6} \times 1 \times 2$ だから，$\frac{1}{3}$ に近づきます.」

先生 「そう．値はフラフラしているわけじゃない．確実に 1/3 という一点を目指している．ならば…….」

先生の声に力がこもる．

先生 「ならば，私たちはその『行き着く先』を，この数列の**極限値（Limit）と定義し，値は一致したとみなす**．そう決めたのです.」

極限（Limit）の定義

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n の値がある一定の値 α に限りなく近づくならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書き，α をこの数列の**極限値**という．

私　「『みなす』……ですか．実際に辿り着けるかどうかではなく，目的地がどこかを宣言してしまうんですね.」

先生　「その通り！ これは**『動き（プロセス）』から『存在（値）』への跳躍**です．無限に続く階段を一段ずつ降りるのではなく，『この階段はどこに繋がっているか』を空から見下ろして答える．それが極限の視点なのです.」

先生は黒板に，今日の結論となる式を書いた.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

先生　「この lim という記号を使った瞬間，私たちは『永遠の近似』という呪縛から解き放たれました．ギザギザの長方形の面積の行き着く先として，滑らかな曲線の面積を 1/3 と確定させたのです.」

友人　「なんか……ずるいような，でもすごいような．無限を飼いならしたってこと？」

先生　「いい表現ですね．無限を有限の式で制御する．それがこれから学ぶ『微分積分学』の正体です.」

1.5 Epilogue：次なる謎へ

チャイムが鳴り，放課後の補習が終わった.

先生　「今日は『無限』の概念を掴んでもらいました．次回は，この強力な武器 lim を使って，これまで計算不能だった『不定形』の謎に挑みます.」

私　「不定形？」

先生　「ええ．例えば $0 \div 0$ のような，数が崩壊する場所です．そこにも，数学的な意味を見出すことができるんですよ.」

私はノートを閉じた．決して届かない壁．無限に続く分数．ギザギザの面積．それらは「行き止まり」ではなく，新しい世界への入り口だったのだ．夕焼けに染まる教室で，黒板の lim の文字が，どこか誇らしげに光って見えた.

To be continued in Lecture 02...

第 2 回　極限の計算

2.1　Prologue：計算不能の穴

先生　「前回，私たちは『極限（Limit)』という武器を手に入れました．これを使えば，今までタブーとされていた領域に踏み込むことができます.」

先生は黒板に簡単な分数関数を書いた.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

先生　「この関数の x を限りなく 2 に近づけたとき, 値はどうなるでしょうか？ つまり, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ を求めなさい.」

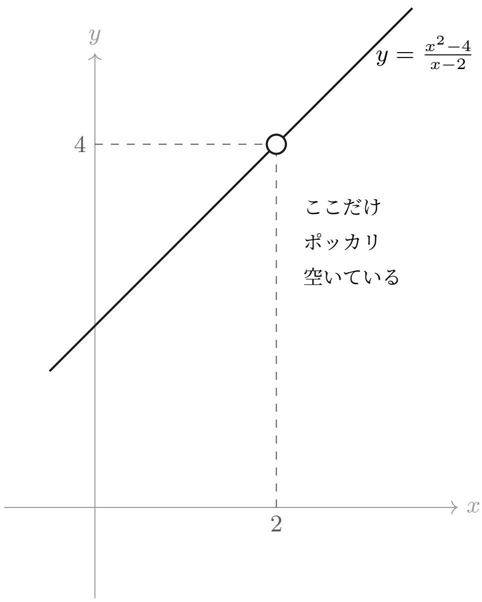
友人　「簡単ですよ．x に 2 を代入すればいいんでしょ？」

A は自信満々に計算を始めたが，すぐに手が止まった.

友人　「あれ……？ 分母が $2 - 2 = 0$，分子も $2^2 - 4 = 0$．$\frac{0}{0}$ になっちゃった.」

私　「0 で割ることはできません．これ，計算不能（エラー）じゃないんですか？」

先生　「そう，単純に代入すると値が定まらない．これを数学では『**不定形**』と呼びます．しかし，グラフを描いてみると，その正体が見えてきます.」



2.2 犯人は「ゼロ要素」

先生 「グラフを見ると，$x=2$ の地点だけ穴が開いていますが，その前後の道筋は明らかに $y=4$ という地点を目指していますね.」

私 「確かに．でも，式でどうやってその 4 を出せばいいんでしょう？」

先生 「極限の定義を思い出してください．$x \to 2$ というのは，『x は 2 に限りなく近づくが，2 **そのものではない**』という意味でしたね.」

私 「あ！ ということは，$x \neq 2$ だから，$x-2$ は 0 じゃない！」

先生 「その通り．0 でなければ，割り算（約分）ができます．式を変形してみましょう.」

私はノートに計算過程を書き込んだ.

不定形の解消（0/0 の場合）

分子を因数分解して，0 になる原因（犯人）を突き止める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2) \quad (\because x-2\neq 0 \text{ なので約分可能})\end{aligned}$$

ここで初めて $x=2$ を代入する（ような操作をする）.

$$= 2+2=4$$

友人 「なるほど！ $(x-2)$ という『0 になる犯人』が分母と分子に隠れてたんだ．それを約分して消しちゃえば，ただの代入問題になるんだね.」

先生 「正解です．一見計算不能に見える $\frac{0}{0}$ の中には，実は確定した値が埋もれている．極限操作とは，その埋もれた宝石を掘り出す作業なのです.」

2.3 無限の彼方へ

先生　「もう一つ，重要な不定形があります．$\frac{\infty}{\infty}$ の形です．」

先生は次の式を書いた．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{2x^2-5}$$

私　「分母も分子も，無限に大きくなります．無限 ÷ 無限…… 1 ですか？」

先生　「いいえ．どちらの『勢い』が強いかで勝負が決まります．この場合は，最も影響力の強い『最高次の項』で分母・分子を割るのが定石です．」

不定形の解消（∞/∞ の場合）

分母の最高次の項（ここでは x^2）で，分母・分子を割る．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{2x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}$$

ここで $x\to\infty$ とすると，$\frac{1}{x}$ や $\frac{1}{x^2}$ は 0 に収束する．

$$=\frac{3+0+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

先生　「ゴミのような小さな項は無視されて，最高次の係数の比（3/2）だけが残る．これが極限の世界の力関係です．」

2.4 次なる戦いの準備

先生 「さて，不定形の計算に慣れたところで，次回に向けて少し変わった計算練習をしておきましょう．」

先生は「微分の準備」と題して，文字だらけの式を書き出した．

Target Question: 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

友人 「うわ，数字がない．a とか h とか……．$h \to 0$ だから代入すると，分母は 0．分子は $(a+0)^2 - a^2 = 0$．また 0/0 だ．」

私 「文字になってもやることは同じはず．分子を展開して，『犯人』h を約分すればいいんだ．」

私は慎重に式変形を行った．

$$\begin{aligned}(\text{分子}) &= (a^2 + 2ah + h^2) - a^2 = 2ah + h^2 \\ &= h(2a+h) \quad \leftarrow h \text{ でくくる！}\end{aligned}$$

私 「よし，これで分母の h と約分できます！」

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2a+h)$$

先生 「最後はどうなりますか？」

私 「h が 0 になるので……答えは $2a$ です！」

先生 「完璧です．実は君たちは今，数学史上で最も偉大な発見の一つ，『導関数』の計算を自分の手で行いました．」

友人 「え？ ただの文字式の計算でしたけど…….」

2.5 Epilogue：静かなる革命

授業が終わり，ノートを見返す．「計算不能」だと思っていた式が，少し見方を変えるだけで明確な答えを語りだす．0 という「無」と，∞ という「無限」．両極端な概念を飼いならす技術を手に入れた私たちは，いよいよ変化そのものを捉える「微分」の世界へと足を踏み入れることになる．

To be continued in Lecture 03...

第 3 回　定積分の定義

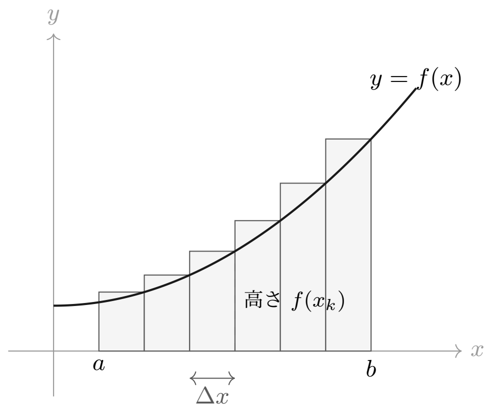
3.1　Prologue：滲んだ設計図

先生　「前回までは『極限』という概念を使って，曖昧なものを確定させる練習をしてきました．今回は，その集大成として『**面積**』を定義します．」

先生は黒板に，前回も見たような「長方形で埋め尽くされたグラフ」を描いた．

友人　「またこれですか？ ギザギザのやつ．」

先生　「ええ．でも今日は，これを『数式』として書き下してみましょう．古代の数学者が遺した，面積を求めるための設計図です．」



私　「えっと，長方形一個の面積は『縦 × 横』だから，$f(x_k) \times \Delta x$ ですよね．それを全部足すから……シグマを使うんですか？」

先生　「その通り．区間 $[a, b]$ を n 等分して，その和の極限をとる．式で書くとこうなります．」

区分求積法（面積の定義式）

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

- $f(x_k)$：長方形の**高さ**
- Δx：長方形の**幅**（$= \frac{b-a}{n}$）
- $\sum$：それらをすべて**足し合わせる**
- $\lim$：分割数を**無限**に増やす

3.2　記号の革命：ライプニッツの魔法

友人　「うげぇ……．記号が多すぎて目がチカチカします．毎回こんなの書くんですか？」

先生　「ふふ，当時の数学者たちもそう思いました．そこで登場するのが，記号の魔術師ライプニッツです．彼はこの複雑な式を，驚くほど直感的な記号に翻訳しました．」

先生は黒板の式のパーツを，チョークで囲みながら書き換えていく．

- $\lim_{n\to\infty}\sum$（Summation：和）の頭文字 $\mathbf{S}$ を，縦に引き伸ばして $\int$ に．
- 幅 Δx（Difference：差）を，限りなく微小な幅 dx に．

先生　「すると，こうなります．」

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}$$

私　「えっ，これだけですか？ ずいぶんスッキリしましたね．」

先生　「はい．しかし，ただの省略形ではありません．この記号には『**高さ $f(x)$，幅 dx の微小な長方形を，区間 a から b まで無数に足し合わせる**』という意味が込められているのです．」

インテグラルの解剖図

記号の意味を言葉で捉えよう．

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{高さ}}\ \underbrace{dx}_{\text{微小な幅}}$$

つまり，$\int$ の後ろには必ず**「長方形の面積（タテ $\times$ ヨコ）」**の形が来ている．

友人　「なるほど．『インテグラル』って，ただの飾りじゃなくて『Sum（足せ！）』って意味だったんだ．」

先生　「その通り．英語の Integral には『積算する』『統合する』という意味があります．バラバラの長方形を統合して，一つの面積にするイメージですね．」

3.3　定積分の計算（予告編）

先生　「さて，記号の意味がわかったところで，計算の話をしましょう．実はこの定積分，まともに区分求積法（シグマ計算）で解くと大変ですが，ある『裏技』を使うと一瞬で解けます．」

私　「裏技？」

先生　「詳しくは次回話しますが，とりあえず計算ルールだけ教えましょう．記号 $[\quad]$ を使います．」

定積分の計算ルール

関数 $f(x)$ の「微分する前の形（原始関数）」を $F(x)$ とすると，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

手順：

1. $x^n \to \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ にする（次数を上げて割る）．
2. 上の数字を代入したものから，下の数字を代入したものを引く．

先生　「例として，$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を計算してみましょう．第 1 回で苦労して求めた『放物線の面積』です．」

私　「えっと，ルール通りにやると……．」

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right) \\ &= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

私　「……えっ？ これだけでいいんですか？ あの長い $\lim\sum$ の計算は何だったの？」

友人　「うわ，答え 1/3 になった！ 一瞬じゃん！」

先生　「驚きですよね．この『微分の逆演算』と『面積』が繋がっているという事実こそが，微積分学の基本定理と呼ばれる大発見なのです．」

3.4 Epilogue：記号に宿る物語

授業の終わり，先生は黒板の $\int$ の記号を指でなぞった.

先生 「数学の記号は，ただ数式を短くするためのものではありません．そこには先人たちの『世界をどう捉えたか』という思想が宿っています.」

先生 「$\sum$（飛び飛びの和）が，極限の橋を渡って $\int$（滑らかな和）に進化する．この記号を見るたびに，無限個の長方形がひしめき合って，美しい曲線を作り出している様子を想像してください.」

私はノートに大きくインテグラルを書いた．S を引き伸ばしたその形は，確かに「無限の足し算」を象徴する優雅な姿をしていた.

次回の予告：
いよいよ「微分」の核心へ．止まっている写真ではなく，動いている動画として世界を捉えるための道具.「平均変化率」から「瞬間の速度」への跳躍を目撃せよ.

To be continued in Lecture 04...

第 4 回　平均変化率と導関数

4.1　Prologue：曲がった坂道の傾き

先生　「前回は面積（積分）の話をしましたが，今回はいよいよ『微分』の核心に迫ります．テーマは『**変化**』です.」

先生は黒板に，うねったジェットコースターのような曲線を描いた.

先生　「この坂道の『傾き』を知りたいのですが，直線と違って，場所によって傾きが常に変化していますね．ある一点，例えば $x = 1$ の地点での傾きをどうやって求めればいいでしょうか？」

友人　「分度器で測る……とか？」

私　「でも，数学的に計算したいんですよね．直線の傾きなら『$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$』で出せますけど，点は 1 個しかないから，増加量も何もないような…….」

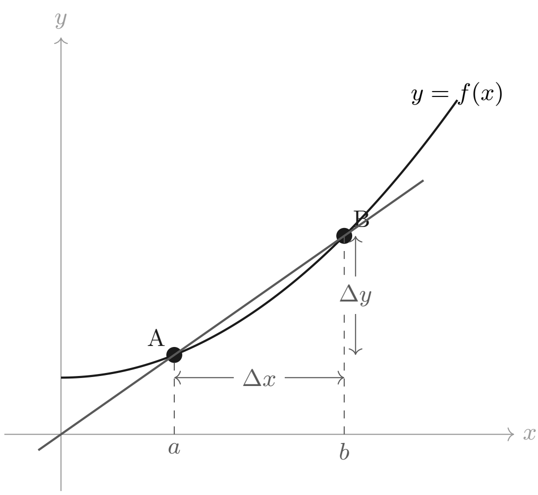
先生　「その通り．傾きを求めるには，最低でも **2 つの点**が必要です．1 点しか情報がないのに傾きを求めようとするなんて，矛盾していると思いませんか？」

私　「言われてみれば……．1 点だけじゃ，線が引けません.」

先生　「そこで，数学者たちはズルい方法を考えました．『**偽物の点**』をもう一つ作るのです.」

4.2　Step 1：平均変化率（2 点の傾き）

先生は，x 座標が a である点 A の少し右側に，もう一つ点 B を取った.



先生　「本当は点 A での傾きが知りたいのですが，とりあえず少し離れた点 B との間で直線を引いてみます．この直線の傾きを『**平均変化率**』と呼びます．」

平均変化率（2 点間の傾き）

x の値が a から b まで変化するとき，

$$\text{傾き} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ここで，幅 $b-a$ を h と置くと，

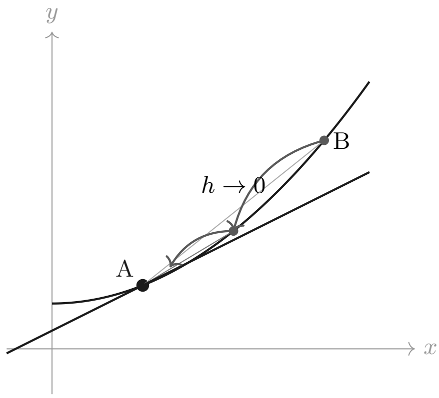
$$\text{傾き} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4.3 Step 2：極限への跳躍

私 「でも先生，これじゃ点 A での本当の傾きとはズレてますよね？」

先生 「そうです．今は幅 h が広いので，かなり大雑把な値です．では，この幅 h をどんどん狭くしていったらどうなりますか？」

先生は図の中で，点 B を点 A に向かって滑らせていった．



先生 「点 B が点 A に限りなく近づくとき，2 点を通る直線は，点 A における『**接線**』に近づいていきます．」

友人 「あ，2 点間の傾きが，いつの間にか 1 点の傾きに化けた！」

先生 「これこそが微分の魔法です．第 2 回で練習した極限計算を使って，この『瞬間の傾き』を式で定義しましょう．」

微分係数（接線の傾き）

平均変化率の式で，幅 h を限りなく 0 に近づけた値．

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

これを関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**という．

式の意味を読み解く：

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ はただの「傾き」．これに $\lim\limits_{h \to 0}$ をつけることで，「2 点の距離をゼロにする．」という命令を加えている．つまり**「限りなく近い 2 点の間の傾き」**を計算しているのだ．

4.4 Step 3：導関数の計算

先生　「では実際に，$f(x) = x^2$ という放物線の傾きを求めてみましょう．第 2 回で練習した計算がここで活きてきます.」

私　「えっと，公式の a を x に変えて，$h \to 0$ の極限をとるんですね.」

私は黒板に出て計算を始めた.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \quad (h \text{ で約分！}) \\
&= \lim_{h \to 0} (2x+h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

先生　「正解です．$f(x) = x^2$ を微分すると $f'(x) = 2x$ になりました．これは何を意味していると思いますか？」

友人　「答えが数じゃなくて，式 $(2x)$ になっちゃいましたね.」

先生　「それが便利なんです．この $2x$ という式は，『**好きな場所の傾きを教えてくれるマシン**』なんですよ.」

- $x = 1$ のときの傾きは？ $\to 2 \times 1 = 2$
- $x = 3$ のときの傾きは？ $\to 2 \times 3 = 6$
- $x = -5$ のときの傾きは？ $\to 2 \times (-5) = -10$

先生　「いちいち極限計算をしなくても，x を代入するだけで一瞬で傾きがわかる．この便利な関数のことを『**導関数（derivative)**』と呼びます.」

4.5 Epilogue：万能の道具

先生　「今日，私たちは『曲がった線の一点における傾き』という，捉えどころのないものを完全に数値化することに成功しました.」

私　「2 つの点を近づけていく極限……．第 1 回でやった『壁に近づく』話が，こんな形で役立つとは思いませんでした.」

先生　「数学は積み重ねです．さて，毎回この lim の計算をするのは大変ですよね？ 次回は，もっと簡単に，一瞬で導関数を求める『魔法の公式』を授けましょう．」

私はノートに $y = x^2$ のグラフと，それに接する直線を書き込んだ．静止画のグラフが，微分という視点を通すことで，動き出しそうな躍動感を帯びて見えた．

To be continued in Lecture 05...

第 5 回　導関数の性質と計算

5.1　Prologue：怠惰のための苦労

先生　「前回，私たちは導関数 $f'(x)$ を定義しました．定義式を覚えていますか？」

先生は黒板にあの長い式を書いた．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

友人　「覚えてますけど……正直，毎回この計算をするのは面倒です．展開して，約分して，h を 0 にして…….」

先生　「その通り．数学者は基本的に『怠け者』です．面倒な単純作業を繰り返すのは大嫌いなのです.」

私　「えっ，そうなんですか？」

先生　「はい．だからこそ，彼らは最初に死ぬほど苦労して『**公式**』を作ります．一度証明してしまえば，あとは公式に当てはめるだけで楽ができるからです.」

先生はニヤリと笑った.

先生　「今日は，先人たちが遺した『怠けるための最強ツール』を伝授しましょう.」

5.2　Tool 1：魔法の公式

先生　「まず，最も基本的な関数 x^n の微分についてです．前回 x^2 を微分したら $2x$ になりましたね．では，x^3 ならどうなるでしょう？」

私　「えっと，定義に従って計算してみます…….」

定義による計算（x^3 の場合）

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\ &= 3x^2\end{aligned}$$

友人　「うわ，長い！ x^{10} とかになったら絶対やりたくない！」

先生　「そうですね．でも，結果だけを見てください．x^3 が $3x^2$ になりました．前回は x^2 が $2x$（つまり $2x^1$）になりました．何か法則が見えませんか？」

私　「あ……！ 肩に乗っている数字が前に降りてきて，次数が 1 つ減っている？」

先生　「大正解．それが微分の基本公式です．」

微分の基本公式

n が自然数のとき，

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

覚え方： 肩の数字を前に下ろし，次数を 1 つ減らす．

友人　「え，これだけでいいんですか？ じゃあ x^{10} の微分は…….」

先生　「$10x^9$ です．一瞬ですね．」

私　「すごい…….あんなに大変だった極限計算が，ただの数字遊びになりました．」

5.3 Tool 2：線形性（バラして計算）

先生　「次は，もっと複雑な式 $3x^2 + 4x - 5$ みたいなものを微分する方法です．これも定義に戻る必要はありません．微分には素晴らしい性質があるからです.」

導関数の性質（線形性）

1. **定数倍：** 数字は外に出せる.
   $\{kf(x)\}' = kf'(x)$
2. **和・差：** 足し算・引き算はバラバラに微分できる.
   $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
3. **定数項：** x がついていない数字は消える.
   $(c)' = 0$

先生　「この性質を使えば，どんなに長い多項式でも，項ごとに分解して各個撃破できます.」

友人　「じゃあ，$y = 3x^2 + 4x - 5$ を微分してみます！」

- $3x^2$ の部分は $\to 3 \times (2x) = 6x$
- $4x$ の部分は $\to 4 \times (1) = 4$
- -5 の部分は $\to 0$ （定数は変化しないから消える！）

友人　「合わせると…… $y' = 6x + 4$ ですか？」

先生　「完璧です．慣れれば見た瞬間に答えが書けるようになりますよ.」

5.4 Practice：瞬殺テクニック

先生　「では，少し練習してみましょう．次の関数を微分してください．」

> **練習問題**
> (1) $y = 5x^3 - 2x^2 + x + 10$
> (2) $y = (x+1)(x-2)$

私　「(1) は順番にやるだけですね．$5 \times 3x^2$ で $15x^2$．$-2 \times 2x$ で $-4x$．x は $1x^1$ だから微分すると 1．10 は消える．答えは $y' = 15x^2 - 4x + 1$ です．」

先生　「正解．(2) はどうしますか？」

友人　「えっと，積の形になってますけど……バラバラに微分して掛けるとか？」

先生　「おっと，それは罠です！ $(fg)' = f'g'$ とはなりません．今の段階では，**一度展開してから**微分するのが安全です．」

友人　「なるほど．まずは展開して…… $y = x^2 - x - 2$．これを微分すると…… $y' = 2x - 1$ だ！」

5.5 Epilogue：巨人の肩に乗って

授業の終わり，先生は満足そうに黒板を消した.

先生 「今日みなさんは，ニュートンやライプニッツが苦労して発見した法則を，わずか数十分で使いこなせるようになりました．これが『巨人の肩に乗る』ということです.」

私 「定義式を使ってコツコツ計算するのも達成感がありましたけど，公式でスパッと解けるのは快感ですね.」

先生 「その感覚が大切です．道具は使いこなしてこそ意味があります．次回は，この強力な道具を使って，接線の傾きだけでなく，グラフの形そのものを暴いていきましょう.」

私はペンのキャップを閉じた．難解に見えた数式が，今は単純なパーツの組み合わせに見える．微分の視力を手に入れたことで，世界の解像度が少し上がった気がした.

To be continued in Lecture 06...

第 6 回　微分と導関数

6.1　Prologue：顕微鏡で見る世界

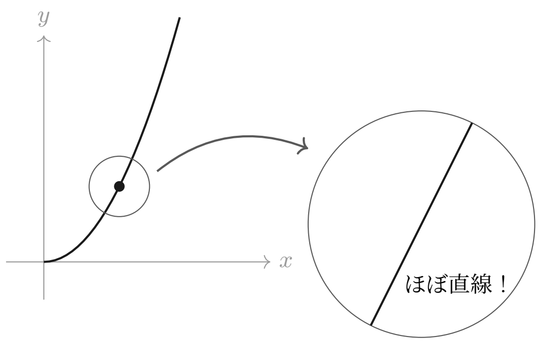
先生　「前回，私たちは『導関数』という計算ツールを手に入れました．$y = f(x)$ を微分して $x = a$ を代入すれば，その点での『傾き』が出る．ここまではいいですね？」

私　「はい．公式を使えば計算は楽勝です．」

先生　「では，少し視点を変えましょう．ここに $y = x^2$ の放物線があります．このグラフ上の点 $(1, 1)$ 付近を，超高性能な顕微鏡で 100 万倍に拡大したら，どう見えると思いますか？」

友人　「えっと……曲線だから，やっぱり曲がってるんじゃないですか？」

先生　「いいえ．実は，拡大すればするほど，曲線は『**直線**』に見えてくるのです．」

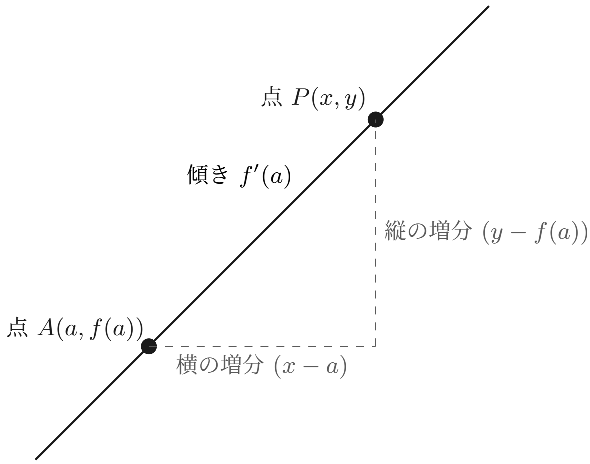


先生　「この『拡大すると直線に見える』という性質こそが，微分の本質です．そして，その直線の正体こそが『**接線**』なのです．」

6.2　接線の公式を作る

先生　「では，この直線の式を作ってみましょう．中学校で習った『比例』の考え方がそのまま使えます．」

先生は拡大図を模式化して黒板に描いた．



先生　「傾きが m の直線というのは，『横に 1 進むと縦に m 進む』ということですよね．では，横に $(x - a)$ 進んだら，縦にどれだけ進みますか？」

私　「えっと，比例だから…… m 倍すればいい．つまり $m(x - a)$ です．」

先生　「その通り！ 図を見てください．『縦の増分』は $y - f(a)$ ですね．これが『傾き × 横の増分』と等しくなるはずです．」

私は式を組み立てた．

$$y - f(a) = \underbrace{f'(a)}_{\text{傾き}} \times \underbrace{(x - a)}_{\text{横の増分}}$$

先生　「完成です．これが教科書に載っている『接線の方程式』です．難しい公式に見えますが，実は『**縦のズレ ＝ 傾き × 横のズレ**』という，当たり前の比例関係を表しているだけなんですよ．」

接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は，

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

6.3 ライプニッツの記号：dy と dx

友人　「先生，微分の記号で $\frac{dy}{dx}$ ってあるじゃないですか．あれって分数なんですか？」

先生　「いい質問ですね．多くの教科書では『分数のように見えるが，分数ではない（記号である）』と書かれています．しかし，ライプニッツがこの記号を作ったときは，明確に『**分数**』として考えていました．」

先生は先ほどの図に書き込みを入れた．

- 横の微小な増分 $(x-a)$ を dx と置く．
- そのとき，接線上での縦の増分を dy と置く．

先生　「さっきの接線の公式を，この記号で書き換えてみましょう．」

$$dy = f'(a) \times dx$$

先生　「この式の両辺を dx で割ると？」

私　「$\dfrac{dy}{dx} = f'(a)$ ……あ！ 微分の記号が出てきた！」

> **記号の翻訳：**
> $\dfrac{dy}{dx}$ という記号は，**「接線の上では，縦の変化量 dy と 横の変化量 dx の比が $f'(x)$ である．」**という事実をそのまま表している．だから，分数のように約分したり払ったりしても（形式的には）辻褄が合うのだ．

6.4 Epilogue：世界を線形で近似する

先生　「曲線は扱いにくい．でも，超拡大してしまえば『直線』として扱える．これが微分の最大のメリットです.」

先生　「複雑な変動をする株価も，惑星の軌道も，一瞬一瞬を切り取ればただの直線（線形）です．難しい問題を，簡単な『比例』の問題にすり替えて解く．それが微分の極意なのです.」

友人　「なんだか，微分がただの『掛け算』に見えてきました.」

先生　「その感覚で OK です．次回は，この接線の公式を使って，曲線の外側から接線を引くという応用問題に挑戦しましょう.」

To be continued in Lecture 07...

第 7 回　接線の方程式

7.1　Prologue：未来を予測する線

先生　「前回，私たちは『接線の方程式』を手に入れました．これはただの公式ではなく，曲線の未来を予測する線でもあります．」

先生は黒板に公式を大きく書いた．

接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線は，

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

意味： (縦のズレ) = (傾き) × (横のズレ)

友人　「公式は覚えました．傾き $f'(a)$ を求めて，通る点 $(a, f(a))$ を代入するだけですよね．」

先生　「そうです．では，ウォーミングアップとして基本的な問題を解いてみましょう．」

例題 1：曲線上の点における接線

$y = x^2 - 3x$ 上の点 $(1, -2)$ における接線の方程式を求めよ．

私　「まず微分します．$y' = 2x - 3$ です．」

友人　「で，$x = 1$ のときの傾きだから…… $2(1) - 3 = -1$．これが m だ．」

私　「通る点は $(1, -2)$ だから，公式に入れると…….」

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -1(x - 1) \\ y + 2 &= -x + 1 \\ y &= -x - 1 \end{aligned}$$

先生　「正解です．これは『接点がわかっている』場合の基本動作です．しかし，世の中の問題はそう単純ではありません．」

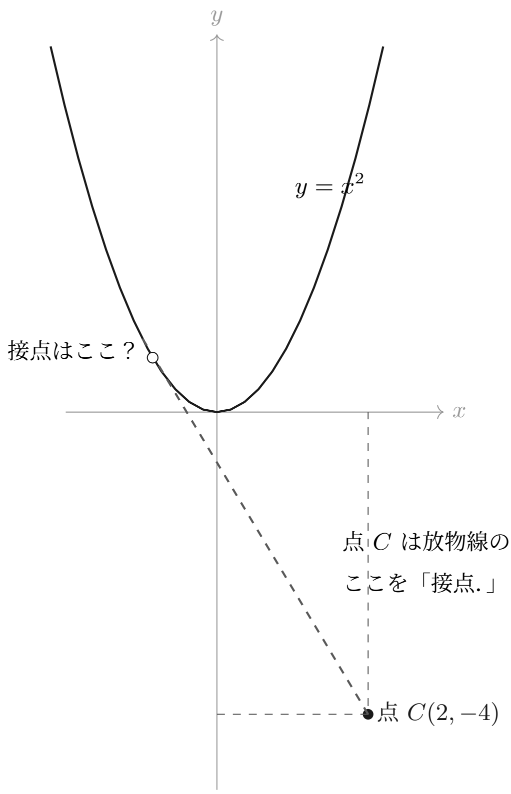
7.2　Topic 1：外から引く接線

先生　「次の問題を見てください．これが今回のメインテーマです．」

> **例題 2：曲線外の点から引いた接線**
> 点 $C(2,-4)$ から，放物線 $y=x^2$ に引いた接線の方程式を求めよ．

友人　「えっと，さっきと同じように……微分して $y'=2x$．ここに $x=2$ を代入して傾き 4．通る点は $(2,-4)$ だから…….」

先生　「ストップ！ それは致命的なミスです．問題文をよく読んでください．『点 $(2,-4)$ **における**接線』ではありません．『点 $(2,-4)$ **から引いた**接線』です．」



私　「あ，本当だ．$x=2$ を $y=x^2$ に代入しても 4 になるはずなのに，点 C の y 座標は -4 です．この点はグラフの外にあるんですね．」

先生　「その通り．接線を引くためには『接点』の情報が不可欠です．でも，問題文には書いていない．どうしますか？」

私　「うーん……．わからないなら，自分で文字で置くしかないですか？」

先生　「それが数学の定石です．『**接点** (t, t^2) **と置く**』．すべてはここから始まります．」

私たちは，未知の接点を t を使って表し，方程式を立ててみることにした．

1. 接点を $T(t, t^2)$ と設定する．
2. 傾きは $y' = 2x$ より $2t$.
3. 接線の方程式を作る（仮の姿）．

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

4. 整理すると $\boldsymbol{y = 2tx - t^2}$.

友人　「式はできたけど，t が残ったままですよ？」

先生　「この直線が，どこを通ればいいんでしたっけ？」

友人　「あ，点 $C(2, -4)$ から引いたんだから，そこを通るはず！」

先生　「そうです．仮の式に $(2, -4)$ を代入すれば，t についての方程式になります．解いてみましょう．」

$$\begin{aligned} -4 &= 2t(2) - t^2 \\ -4 &= 4t - t^2 \\ t^2 - 4t - 4 &= 0 \end{aligned}$$

私　「解の公式を使って…… $t = 2 \pm 2\sqrt{2}$ ですか？」

先生　「正解です．t が 2 つ出たということは，接線が 2 本引けることを意味しています．あとはこの t をさっきの式 $y = 2tx - t^2$ に戻せば完成です．」

教訓：名付けの魔法

接点がわからないときは，迷わず $(t, f(t))$ と置くこと．「わからないものを文字で置く．」勇気が，解決への糸口になる．

7.3 Topic 2：接するということ

先生 「最後に，3 次関数と接線の関係について面白い話をしましょう．$y = x^3 - 2x^2$ という曲線に，接線 $y = x - 2$ を引いたとします．」

先生 「接点以外の交点を求めたいとき，普通に連立方程式を解きますよね？」

$$x^3 - 2x^2 = x - 2$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

友人 「うへぇ，3 次方程式だ．因数分解できるかな…….」

先生 「実は，計算しなくても因数がわかります．『接する』ということは，その点でグラフが重なっているということ．つまり…….」

接点と重解の法則
$x = a$ で接しているなら，連立した式は必ず

$$(x - a)^2$$

という因数を持つ（a は重解になる）．

私 「えっ，2 乗で割れることが確定してるんですか？」

先生 「はい．だから因数分解は一瞬で終わります．残りの因数を見つけるだけですから．」

7.4 Epilogue：接線のその先へ

授業が終わり，私はノートのグラフを眺めた．点 (t, t^2) と名付けただけで，見えなかった接線が浮かび上がってきた．そして「接する.」という現象が，数式の上では「2 乗の因数を持つ.」という形ではっきりと刻印されている．

先生 「接線が引けるようになれば，次はグラフの『増減』を詳しく調べることができます．次回は，いよいよグラフの全貌を描き出しますよ.」

To be continued in Lecture 08...

第 8 回　関数の増減

8.1　Prologue：暗闇の中の探検者

放課後の図書室．先生は分厚い本を閉じ，静かに語り始めた．

先生　「私たちは今，暗闇の中で未知の関数のグラフの上を歩いている探検家だと想像してください．」

私　「暗闇……ですか．つまり，グラフの全体像が見えない状態ですね．」

先生　「そうです．一寸先は闇．足元のことしか分かりません．しかし，私たちは『微分』というライトを持っています．足元の傾き $f'(x)$ を照らすことで，この地形が登り坂なのか，下り坂なのかを知ることができるのです．」

友人　「なるほど．傾きがプラスなら登ってるし，マイナスなら下ってる．」

先生　「その通り．そして，最も重要なのは『一瞬だけ平らになる場所』を見つけることです．そこが，山の頂上（ピーク）か，谷の底（ボトム）かもしれないからです．」

8.2 Topic 1：符号という羅針盤

先生は黒板に，シンプルな不等式を書いた．

導関数の符号とグラフの動き

区間内のすべての x において

- $f'(x) > 0$ ならば，グラフは**右上がり（増加）**
- $f'(x) < 0$ ならば，グラフは**右下がり（減少）**
- $f'(x) = 0$ ならば，グラフは**水平（変化なし）**

私　「当たり前のように見えますが，これはすごいことですよね．たった一つの式 $f'(x)$ の符号を調べるだけで，グラフの未来が予測できるなんて．」

先生　「ええ．微分の威力は『局所（ここ)』の情報から『大局（全体)』の振る舞いを決定できる点にあります．では，実際に $y = x^3 - 3x$ という関数の地形を調査してみましょう．」

まずは微分して，導関数という羅針盤を手に入れる．

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

先生　「この羅針盤 y' が指し示す『ゼロ』の地点はどこですか？」

友人　「$x = 1$ と $x = -1$ です！ ここで傾きがゼロ，つまり平坦になるんですね．」

先生　「そうです．では，その情報を一枚の地図にまとめましょう．数学ではこれを『**増減表**』と呼びます．」

8.3 Topic 2：増減表という地図

私たちは，慎重に表の枠線を引いた．上段に x の値．中段に導関数 y' の符号．下段に関数 y の動き．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	**2**	$\searrow$	**-2**	$\nearrow$

私　「$x < -1$ のときは，$y' = 3(負)(負)$ だからプラス．だからグラフは登り坂（$\nearrow$)．」

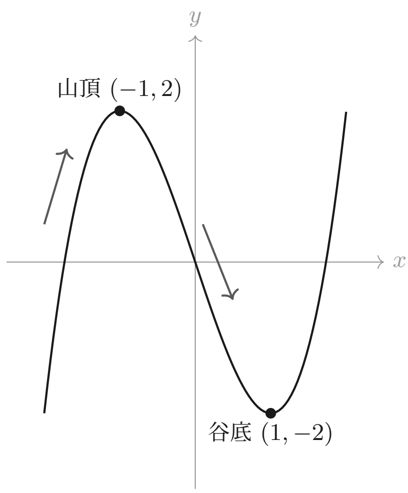
友人　「$-1 < x < 1$ の間は，$y' = 3(負)(正)$ だからマイナス．今度は下り坂（$\searrow$）だ．」

先生　「そして $x > 1$ で再びプラスに戻る．この表を見ると，グラフの『呼吸』が聞こえてきませんか？」

私　「呼吸……？」

先生　「登って，止まって，下って，また止まって，登る．このリズムです．」

先生は黒板に滑らかな曲線を描いた．増減表の矢印が，そのまま曲線の形になって現れる．



8.4 Topic 3：極大と極小

先生　「この『山頂』と『谷底』には特別な名前があります.」

極値（Local Extrema）

- 増加から減少に転じる点（山頂）を**極大値**という.
- 減少から増加に転じる点（谷底）を**極小値**という.

友人　「先生，質問です．極大値って『最大値』とは違うんですか？ 図を見ると，もっと右の方にいけば，山頂より高い場所がありますけど.」

先生　「鋭いですね．極大値とはあくまで『**近所の中で一番高い**』という意味です．世界一高いとは限りません.」

私　「Local（局所的）なボス，ということですね.」

先生　「その通り．しかし，グラフ全体の形を知る上では，最大値よりもこの『折り返し地点』の方がはるかに重要なのです.」

8.5 Epilogue：見えない形を見る

私　「不思議ですね．元の式 $y = x^3 - 3x$ をじっと見ていても，こんな波打つ形は想像できませんでした．でも，微分して y' の符号を見た瞬間に，霧が晴れるように形が浮かび上がった.」

先生　「それが解析学の視点です．静止しているものを直接見るのではなく，その『**変化の仕方**』を見ることで，本質をあぶり出す．増減表は，関数のレントゲン写真のようなものかもしれませんね.」

先生は窓の外を指さした.

先生　「さあ，グラフの描き方はマスターしました．次回は，このグラフを使って『方程式の解の個数』や『最大・最小問題』という，より実践的な謎解きに挑みましょう.」

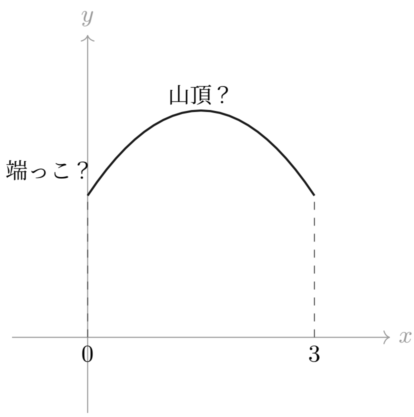
To be continued in Lecture 09...

第 9 回　最大・最小と方程式

9.1　Prologue：最も高い場所を探せ

先生　「前回，私たちは増減表という地図を手に入れました．今回はこれを使って，グラフ上の『最も高い場所』を探しに行きます．」

先生は黒板に区切られた領域を描いた．



先生　「区間 $0 \leqq x \leqq 3$ における，この関数の最大値を知りたいとします．候補になるのはどこでしょう？」

友人　「そりゃあ，一番盛り上がってる『極大値』の場所じゃないですか？」

私　「でも，もしグラフがずっと右上がりだったら，右端が一番高くなる可能性もありますよね．」

先生　「その通り．最大値・最小値の候補は，以下の 3 箇所に絞られます．」

最大・最小の候補者リスト

1. **極大値**（山の頂上）
2. **極小値**（谷の底）
3. **区間の両端**（スタート地点とゴール地点）

これら全ての y 座標を比較し，一番大きいものが最大値，一番小さいものが最小値となる．

9.2 Topic 1：最大値・最小値の計算

先生　「では，実際に調べてみましょう．関数は $y = -x^3 + 3x^2$，区間は $-1 \leqq x \leqq 4$ とします．」

私たちは慣れた手つきで微分し，増減表を作った．

$$y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$y' = 0$ となるのは $x = 0, 2$.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	**4**	$\searrow$	**0**	$\nearrow$	**4**	$\searrow$	**-16**

友人　「えっと，候補の値を全部計算すると…….」

- 左端 $(x = -1)$：$y = 1 + 3 = 4$
- 極小 $(x = 0)$：$y = 0$
- 極大 $(x = 2)$：$y = -8 + 12 = 4$
- 右端 $(x = 4)$：$y = -64 + 48 = -16$

私　「あ，最大値が 2 箇所あります．$x = -1$ と $x = 2$ のとき，どっちも 4 です．」

先生　「その場合は『最大値は 4 $(x = -1, 2$ のとき$)$』と答えます．グラフを描くと，ちょうど同じ高さの山が 2 つあるイメージですね．」

9.3 Topic 2：方程式への応用

先生 「次は，視点を変えて『方程式』の話をします．3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の実数解はいくつあるでしょうか？」

友人 「因数分解……は無理そうですね．解の公式も知りません.」

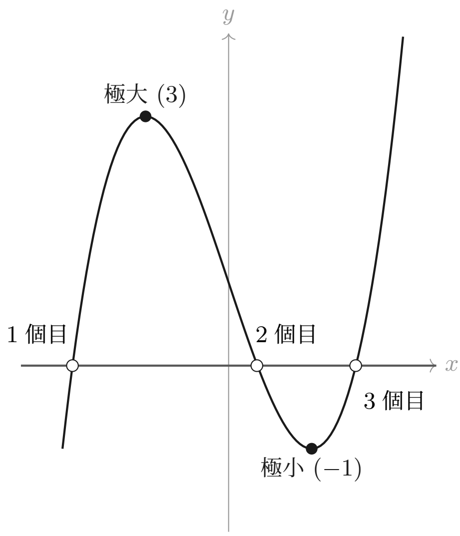
先生 「解そのものを求めるのは難しい．でも『**個数**』だけなら，グラフを使えば一瞬で分かります.」

方程式の解 $\iff$ **グラフの交点**
方程式 $f(x) = 0$ の解の個数は，
グラフ $y = f(x)$ と x 軸 $(y = 0)$ の**共有点の個数**と一致する．

先生 「左辺を $y = x^3 - 3x + 1$ と置いて，グラフを描いてみましょう．増減表を作るとこうなります．」

- 極大値 $(x = -1)$：$y = 3$ (プラスの高さ)
- 極小値 $(x = 1)$：$y = -1$ (マイナスの高さ)

先生 「山頂が地上（$y > 0$）にあって，谷底が地下（$y < 0$）にある．このグラフは x 軸を何回またぐでしょうか？」



私 「山から谷へ行く途中で 1 回，谷からまた登るときに 1 回，あと山に登る前にも 1 回……合計 3 回またぎます！」

先生 「正解．つまり，この方程式の実数解は **3 個**です．計算で解けなくても，グラフの形（増減）さえ分かれば，解の存在を保証できるのです．」

9.4 Epilogue：解析学の勝利

先生 「最大値を探すことも，解の個数を数えることも，すべては『グラフの形』を知ることに帰着します．そしてグラフの形を教えてくれるのは？」

二人 「微分（増減表）！」

先生 「その通り．これで微分の章は完結です．次回からは，いよいよ微分の逆演算，**『積分』**の世界へ旅立ちます．そこで私たちは，失われた情報を復元する魔法に出会うことになります．」

To be continued in Lecture 10...

第 10 回　微分積分学の基本定理

10.1　Prologue：魔法の鍵を探して

先生　「前回，私たちは『解の個数』を知るために微分を使いました．今回からは，いよいよ『**積分（面積）**』の本格的な計算に入ります．」

友人　「面積かぁ……．第 3 回でやった『区分求積法』ですよね？ 長方形を無限個作って足すやつ．あれ，計算が大変すぎてトラウマなんですけど．」

先生　「ええ，$\lim \sum$ の計算は苦行です．古代の数学者たちも，面積を求めるたびにこの苦行に耐えていました．」

先生は黒板に，前回までの流れと，今回の目標を書いた．

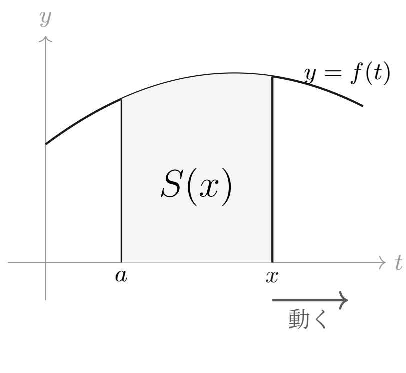
- **微分：** 接線の傾きを一瞬で出す「導関数．」という魔法がある．（公式 $x^n \to nx^{n-1}$）
- **積分：** 面積を出すには，地道に足し算するしかない……？

先生　「もし，積分にも『一瞬で面積を出せる魔法』があったらどうしますか？ しかもその魔法は，君たちがすでに持っている道具と深く関係しているとしたら．」

10.2　Topic 1：面積関数 $S(x)$

先生　「魔法を作るために，新しい関数を定義します．名付けて『**面積関数** $S(x)$』です．」

先生はグラフを描いた．スタート地点を a とし，ゴール地点を x（変数）とする．

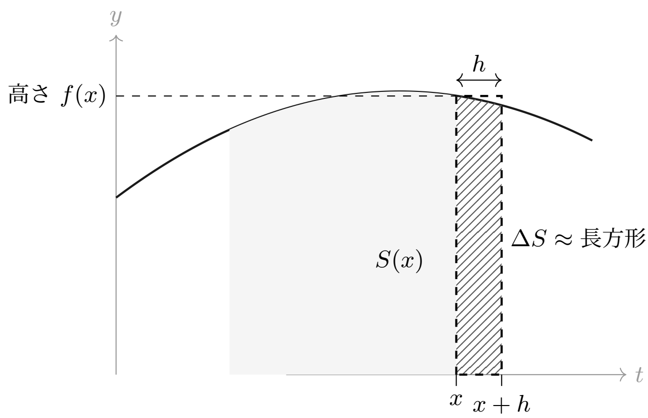


私　「x が右に動けば，面積 $S(x)$ も増えていく……．確かに S は x の関数ですね．」

先生　「では，この $S(x)$ の『変化の割合』を調べてみましょう．つまり，x をほんの少しだけ右にズラしてみるのです．」

10.3 Topic 2：面積の増え方

先生は図に，幅 h の細長い帯を描き加えた．



先生　「x が h だけ増えたとき，面積は ΔS だけ増えます．この薄い帯の部分，何かの形に似ていませんか？」

友人　「長方形……ですかね？ 上がちょっと曲がってるけど，幅 h がすごく狭ければ，ほぼ長方形に見えます．」

先生　「その通り！ 幅 h が極めて小さいとき，この帯は『**高さ $f(x)$，幅 h の長方形**』とみなせます．」

私　「ということは，面積の増え方 ΔS は…….」

$$S(x+h) - S(x) \approx f(x) \times h$$

先生　「この式の両辺を h で割ってみましょう．」

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$$

先生　「さあ，ここで $h \to 0$ の極限をとります．左辺の形，どこかで見たことがありませんか？」

私　「あっ！ これ，『**導関数の定義式**』です！ $S(x)$ を微分した形になってます！」

10.4 Topic 3：衝撃の結末

教室に戦慄が走った．面積 $S(x)$ を微分すると，なんと元のグラフの高さ $f(x)$ に戻るのだ．

微分積分学の基本定理

面積関数 $S(x)$ を微分すると，元の関数 $f(x)$ になる．

$$S'(x) = f(x)$$

言い換えると，**「積分（面積計算）とは，微分の逆演算である．」**．

友人　「えっと，つまりどういうことですか？」

先生　「つまり，面積 $S(x)$ を求めたければ，わざわざ長方形を無限個足す必要はないということです．『**微分して $f(x)$ になる関数（原始関数）**』を見つければ，それがそのまま面積の答えになるのです！」

Before： 面積 = 無限個の長方形の足し算 ($\lim \sum$)
After： 面積 = 微分の逆演算 ($\int$)

先生　「例えば，$y = x^2$ の面積を求めたければ，『微分して x^2 になるもの』を探せばいい.」

私　「微分して次数が下がるんだから，元は x^3 ですか？ ……あ，でも x^3 を微分すると $3x^2$ になっちゃうから，3 で割っておけばいい.」

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

先生　「正解．つまり，面積関数は $S(x) = \frac{1}{3}x^3$ です．第 3 回で苦労して計算した 1/3 という答えが，一瞬で出ましたね.」

10.5　Epilogue：時間を巻き戻す

先生　「微分とは，変化の瞬間を切り取る『分析』の操作でした．対して積分は，積み重なった変化を合計する『蓄積』の操作です.」

先生　「ビデオをコマ送りで見ること（微分）と，コマ切れの写真を連続再生すること（積分）．この 2 つが表裏一体であることに気づいたとき，人類は『変化』を完全に支配する力を得たのです.」

私はノートの端にメモをした．『面積を求めるために，面積を計算しなくていい』．このパラドックスのような真実こそが，数学の持つ最大のショートカットなのだ．

To be continued in Lecture 11...

第 11 回　定積分の計算

11.1　Prologue：パズルの最後のピース

先生　「前回，私たちは衝撃的な事実を発見しました．面積関数 $S(x)$ を微分すると，元の関数 $f(x)$ に戻る．つまり，$S(x)$ は $f(x)$ の**原始関数（微分する前の関数）**の一つだということです.」

先生は黒板に式を書いた.

$$S'(x) = f(x)$$

私　「でも先生，原始関数って無数にありますよね？ 定数 C の分だけズレるから…….」

先生　「その通り．例えば $2x$ の原始関数は x^2 かもしれないし，$x^2 + 100$ かもしれない．私たちが知りたい『面積』をピンポイントで求めるには，この**定数のズレ**を解消しなければなりません.」

11.2　Topic 1：ズレを補正する

先生　「ここで，私たちが自由に使える（具体的な式がわかる）原始関数を一つ選んで，$F(x)$ としましょう．$S(x)$ も原始関数の一つなので，両者の違いは定数だけです.」

$$S(x) = F(x) + C$$

友人　「この C が邪魔なんですよね．どうやって消すんですか？」

先生　「面積の性質を思い出してください．a から a までの面積 $S(a)$ はいくつですか？」

友人　「えっと，幅がゼロだから……面積は 0 です.」

先生　「正解．この『**初期条件** $S(a) = 0$』を使えば，C の正体がわかります.」

私はノートに計算を進めた.

$$S(a) = F(a) + C = 0$$
$$\therefore \quad C = -F(a)$$

私　「あ！ 定数 C は $-F(a)$ でした！ ということは，面積関数 $S(x)$ の正体は…….」

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

先生　「素晴らしい．これでパズルが完成しました．私たちが求めたい『a から b までの面積 $S(b)$』は，この式の x に b を代入するだけで求まります.」

11.3 Topic 2：微積分学の基本定理

先生は黒板の中央に，解析学の頂点とも言える公式を書き記した．

微積分学の基本定理（定積分の計算公式）

関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

意味：

- 面積を求めるのに，無限の足し算は必要ない．
- ただ「原始関数.」に端の値を代入して引くだけでよい．

友人　「うわ，本当に引き算だけで終わっちゃった．あんなに苦労した区分求積法は何だったんだ……．」

先生　「先人たちの苦労のおかげで，私たちは高速道路を走れるのです．では，計算の手順（作法）を確認しましょう．」

計算のために，便利な記号 [　] を導入する．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

計算の 3 ステップ

1. **積分する：** $f(x)$ の次数を上げて $F(x)$ を作る．（積分定数 C は不要なので無視してよい）
2. **代入する：** 上の数字 b を代入したものから，下の数字 a を代入したものを引く．
3. **計算する：** 落ち着いて引き算を実行する．

11.4　Topic 3：実践演習

先生　「では，実際に計算してみましょう．$\int_1^3 2x\,dx$ を求めてください．」

私　「まず，$2x$ の原始関数は x^2 です．これに 3 と 1 を代入して……．」

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 2x\,dx &= \Big[x^2\Big]_1^3 \\
&= 3^2 - 1^2 \\
&= 9 - 1 = \mathbf{8}
\end{aligned}
$$

友人　「速っ！ グラフで考えると，底辺が 2, 上底が 6, 高さ 2 の台形の面積だから…… $(2+6)\times 2\div 2 = 8$．合ってる！」

先生　「もう一問．今度は曲線です．$\int_0^1 (x^2+1)\,dx$.」

私　「x^2 は $\frac{1}{3}x^3$ に，1 は x になります．」

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2+1)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

先生　「完璧です．これで君たちは，どんな複雑な曲線であっても，原始関数さえわかれば面積を求められるようになりました．」

11.5 Epilogue：引き算に込められた意味

授業の終わり，先生は式の中の「引き算」を指差した．

先生　「$F(b)-F(a)$．この単純な引き算は，『ゴール時点の蓄積量』から『スタート時点の蓄積量』を引くことで，その間の変化の総量を求めているとも解釈できます．」

私　「蓄積の差……ですか．」

先生　「ええ．微分が『瞬間の速度』なら，積分は『距離』です．位置情報の差が，移動距離になる．世界はそうやって，微分と積分で記述されているのです．」

次回は，計算の結果が「マイナス」になる奇妙な現象について考えよう．面積がマイナス？ その時，定積分は何を意味しているのだろうか．

To be continued in Lecture 12...

第 12 回　定積分の性質

12.1　Prologue：マイナスの面積？

先生　「前回，定積分計算ができるようになりました．では，ウォーミングアップとして次の計算をしてみましょう．」

先生は黒板にシンプルな式を書いた．

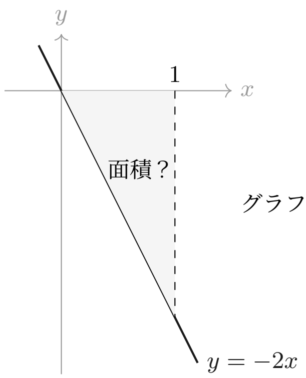
$$\int_0^1 (-2x)\,dx$$

友人　「簡単ですよ．$-2x$ の原始関数は $-x^2$ だから……．」

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-2x)\,dx &= \Big[-x^2\Big]_0^1 \\ &= -1^2 - (-0^2) \\ &= -1\end{aligned}$$

友人　「答えは -1 です……あれ？ 先生, 面積がマイナスになっちゃいました．計算ミスですか？」

先生　「いいえ，計算は完璧です．でも不思議ですよね．面積にマイナスなんてあるはずがない．グラフを描いて確認してみましょう．」



私　「グラフが x 軸より下側にあります．……そうか！ 定積分の定義は『高さ × 幅』の足し算でしたよね．高さ $f(x)$ がマイナスなら，結果もマイナスになるんだ．」

先生　「ご名答．定積分は，ただの面積ではなく**『符号付き面積』**を表すのです．」

定積分と符号

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の値は,

- x 軸より**上**の部分 $\to$ **プラス**の面積
- x 軸より**下**の部分 $\to$ **マイナス**の面積

として計算される.

12.2 Topic 1：本当の面積を求めるには

先生　「では，図形としての『本当の面積 (広さ)』を求めたいときはどうすればいいでしょうか？」

友人　「マイナスになってる部分を，プラスに直せばいいんじゃないですか？ つまり，符号を逆転させる.」

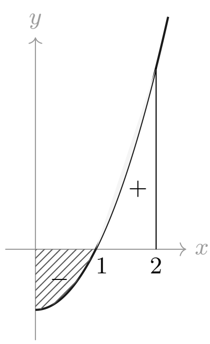
先生　「その通り．グラフが x 軸より下にある区間では，定積分の結果にマイナスを掛けて（あるいは絶対値をとって）補正する必要があります.」

面積計算の鉄則

グラフを描いて，x 軸との上下関係を確認する.

- 上にある区間：そのまま積分 $\int f(x)\,dx$
- 下にある区間：マイナス倍して積分 $\int\{-f(x)\}\,dx$

先生　「例えば，$y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれた部分（$0 \leqq x \leqq 2$）の面積を求めてみましょう.」



私　「$x = 1$ で x 軸と交わります．$0 \sim 1$ までは地下（マイナス），$1 \sim 2$ までは地上（プラス）ですね.」

先生　「なので，計算は途中の 1 で分割します.」

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \underbrace{-(x^2-1)}_{\text{符号反転}}\,dx + \int_1^2 \underbrace{(x^2-1)}_{\text{そのまま}}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2
\end{aligned}
$$

私　「なるほど．面倒だけど，分けて計算すれば『広さ』が出せるんですね.」

12.3　Topic 2：積分のリレー（区間の結合）

先生　「今，自然に『区間を分ける』という操作を行いましたが，これは積分の重要な性質の一つです.」

定積分の性質（区間の結合）

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$a \to b$ への積分と，$b \to c$ への積分を足すと，$a \to c$ への通しの積分になる.

友人　「リレーみたいですね．バトンタッチする場所（b）が同じなら，繋げられるんだ.」

先生　「そうです．逆に，バラバラの区間を一つにまとめることもできます．例えば $\int_1^2 + \int_2^3$ は $\int_1^3$ に合体できます．計算の手間が半分になりますよ.」

12.4　Epilogue：不自由の中の自由

授業が終わり，黒板のグラフを見上げる．「マイナス」という直感に反する結果も，グラフの「上下」という意味を与えれば納得できる．そして，区間を自由に分割したり結合したりできる性質は，複雑な図形を切り刻んで計算するための強力な武器になる予感がした.

先生　「次回は，いよいよ積分の王道,『2 つの曲線で囲まれた面積』を求めます．ここで，あの『上 − 下』の考え方が真価を発揮しますよ.」

To be continued in Lecture 13...

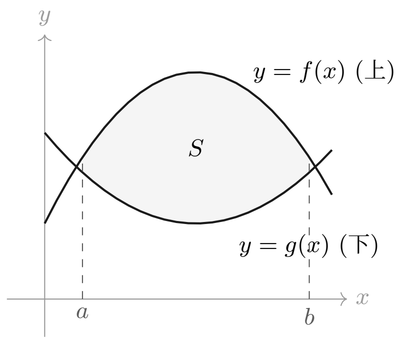
第 13 回　2 曲線間の面積

13.1　Prologue：空中に浮かぶ島

先生　「前回までは，グラフと『地面（x 軸)』の間の面積を求めていました．しかし，現実の世界には地面がない場所もあります.」

先生は黒板に，2 つの曲線が絡み合ってできた，ラグビーボールのような形を描いた.

先生　「放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$．この 2 つに挟まれた部分の面積 S を求めたいとき，どうすればいいでしょうか？」



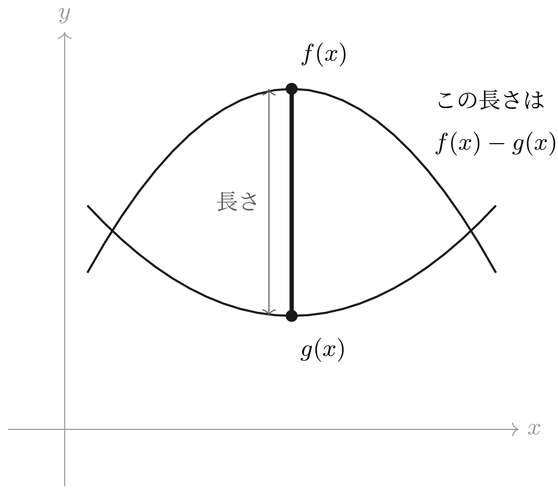
友人　「えっと……上の $f(x)$ の面積から，下の $g(x)$ の面積を引けば，真ん中が残るんじゃないですか？」

私　「引き算……．確かにそうなりそうです．でも，もしグラフが x 軸より下にあったらどうなるんでしょう？ マイナスとか出てきてややこしそう.」

先生　「いいえ，難しく考える必要はありません．積分の原点である『**長方形の足し算**』に戻れば，驚くほどシンプルな答えが見えてきます.」

13.2　Topic 1：上から下を引く

先生は図の中に，1 本の縦線（細い長方形）を描き入れた.



先生　「この細長い長方形の『縦の長さ』はいくつですか？」

私　「上の y 座標から下の y 座標を引けばいいから…… $f(x) - g(x)$ です.」

先生　「そう．グラフが地上にあろうが地下にあろうが，縦の長さは常に『**上** − **下**』で求まります．面積とは，この『長さ』を a から b まで積み重ねたものです.」

2 曲線間の面積公式

2 つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と，直線 $x = a, x = b$ で囲まれた面積 S は，

$$S = \int_a^b \{\underbrace{f(x)}_{\text{上}} - \underbrace{g(x)}_{\text{下}}\}\,dx$$

合言葉： インテグラル，上 引く 下.

友人　「うわ，めっちゃ単純！ x 軸とか関係なく，とにかく上から下を引いて積分すればいいんだ.」

13.3 Topic 2：交点を求めて積分する

先生　「では実践です．放物線 $y = x^2 - 2x$ と 直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めてみましょう.」

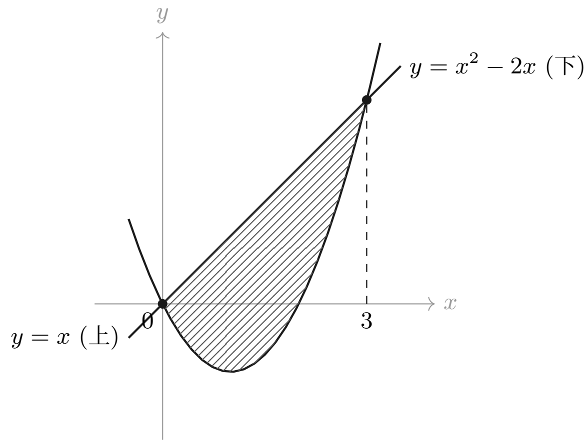
私　「えっと，図を描かないと『どっちが上か』分かりませんね．あと，積分区間（どこからどこまでか）も書いてありません.」

先生　「そこがポイントです．問題文に書いていなければ，『**交点**』がスタートとゴールになります.」

私たちはまず，連立方程式を解いて交点を求めた.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= x \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \qquad \therefore x = 0, 3 \end{aligned}$$

先生　「交点は 0 と 3 です．では，この区間でどちらが上にあるか，簡単なグラフを描いて確認しましょう.」



私　「直線の方が上にあります！ だから式は…….」

$$S = \int_0^3 \{\underbrace{x}_{\text{上}} - \underbrace{(x^2 - 2x)}_{\text{下}}\}\,dx$$

先生　「中身を整理してから積分しましょう.」

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2}\right) - 0 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

友人　「解けました！ グラフさえ描ければ，あとは一本道ですね.」

13.4　Epilogue：形あるものを切り取る

先生　「これで私たちは，座標平面上のあらゆる閉じた図形の面積を計算できるようになりました. どんな複雑な形も，縦に切って『上引く下』を足し合わせればいいのです.」

先生　「次回は，この計算をさらに高速化する『1/6 公式』という裏技を紹介します. 計算の苦行から解放される魔法の公式ですよ.」

To be continued in Lecture 14...

第 14 回　1/6 公式の証明

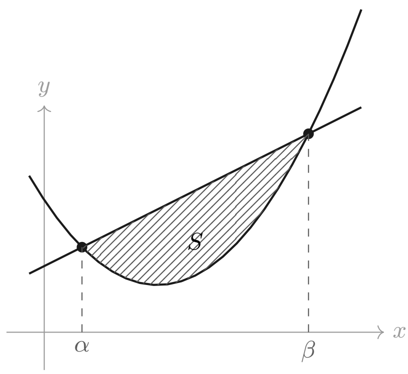
14.1　Prologue：計算のショートカット

先生　「前回，私たちは『上 − 下』を積分することで面積を求めました．しかし，交点を求めて，引き算して，積分して，代入して……計算があまりにも大変だと思いませんか？」

友人　「思います！ 特に分数の計算でいつも間違えます．」

先生　「そこで今回は，放物線と直線の面積を一瞬で求める『**1/6 公式**』を紹介します．これは受験数学における最強の武器の一つです．」

先生は黒板に，放物線と直線が交わる図を描いた．



1/6 公式（面積公式）

放物線 $y = ax^2 + \dots$ と直線が 2 点 α, β $(\alpha < \beta)$ で交わるとき，その囲まれた面積 S は次式で求まる．

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

意味： 積分計算をしなくても，「交点の幅 $(\beta - \alpha)$」と「放物線の太さ a」だけで面積が決まる．

私　「えっ，積分記号 $\int$ がない！？ 本当にこれだけでいいんですか？」

先生　「はい．前回の例題『$y = x^2 - 2x$ と $y = x$（交点 $0, 3$)』で試してみましょう．$a = 1, \alpha = 0, \beta = 3$ です．」

$$S = \frac{|1|}{6}(3 - 0)^3 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

友人　「うわ，前回苦労して出した答えと同じだ！ 秒殺ですね！」

14.2 Topic 1：証明のための準備

先生 「あまりに強力すぎるので，なぜこうなるのか『証明』を知っておく必要があります．鍵となるのは 2 つの道具です．」

道具 1：因数分解の形

交点が α, β ならば，差の式は必ず因数分解できる．

$$(\text{直線}) - (\text{放物線}) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$$

道具 2：塊（カタマリ）の積分

展開せずに積分するテクニック．

$$\int (x-\alpha)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}$$

私 「道具 1 はわかります．交点＝解だから，因数定理ですね．道具 2 は……微分して元に戻るか確かめれば納得できます．」

14.3 Topic 2：鮮やかな証明

先生 「では，証明に行きましょう．面積 S は，α から β までの定積分です．」

$$S = \int_\alpha^\beta -a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

先生 「ここで，普通に展開してはいけません．計算が地獄になります．代わりに，**『無理やり $x-\alpha$ を作る』**という職人芸を使います．」

先生は黒板に，式変形のトリックを書いた．

$$\begin{aligned} x-\beta &= x-\beta \quad (\text{当たり前}) \\ &= x \boldsymbol{- \alpha + \alpha} - \beta \quad (\alpha\text{ を引いて足す}) \\ &= (x-\alpha) - (\beta-\alpha) \end{aligned}$$

先生 「この変形を，積分の中身に代入します．」

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\underbrace{(x-\beta)}_{\text{変形!}}\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx$$

私　「あ！ $(x-\alpha)$ の塊ができました！ これなら道具 2 で積分できます！」

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

先生　「さあ，代入です．まず上端 β を入れます．」

$$\text{上} = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2 = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

先生　「次に下端 α を入れると？」

友人　「$(\alpha-\alpha)$ になるから……全部 0 で消えます！ すごい！」

先生　「最後に，外に出しておいた係数 $-a$ を掛ければ完成です．」

$$S = -a\times\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

14.4 Epilogue：構造を見抜く目

先生　「ただ展開して計算するのではなく，式の『構造』を保ったまま変形する．そうすることで，驚くほど見通しが良くなることがあります.」

私　「$(\beta - \alpha)$ というパーツが最後まで崩れずに残ったのが印象的でした．これが『幅の 3 乗』の正体だったんですね.」

先生　「その通り．この公式は，単なる計算テクニックではなく，放物線という図形の持つ美しい性質そのものなのです.」

To be continued in Lecture 15...

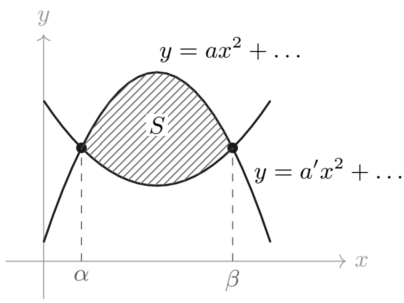
第 15 回　1/6 公式の応用

15.1　Prologue：公式の拡張

先生　「前回，私たちは『放物線と直線』の面積を一発で求める 1/6 公式を手に入れました．今回は，この公式がさらに広い世界で使えることを示しましょう．」

先生は黒板に，2 つの放物線が交わっている図を描いた．

先生　「例えば，これ．2 つの放物線で囲まれた面積です．これも真面目に積分計算する必要があると思いますか？」



私　「形は似てますけど……式が複雑になりそうですね．」

先生　「いいえ．実は，これも『**2 次式 - 2 次式**』ですよね？ 計算すると結局は『2 次式』になります．つまり，構造は前回と全く同じなのです．」

15.2 Topic 1：2 つの放物線

先生　「上の放物線の係数を a，下の放物線の係数を a' とします．引き算した新しい 2 次式の係数はどうなりますか？」

私　「ax^2 から $a'x^2$ を引くから…… $(a-a')x^2$ です.」

先生　「その通り．つまり，放物線の太さ（係数）が変わるだけです．公式はこうなります.」

2 つの放物線の面積公式

2 つの放物線 $y = ax^2 + \ldots$ と $y = a'x^2 + \ldots$ で囲まれた面積 S は，交点の x 座標を α, β とすると，

$$S = \frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ポイント： 係数は「差の絶対値」になる.

友人　「へえ！ 係数を引き算するだけで，あとは同じなんだ.」

先生　「例として，$y = x^2 - 2x + 3$ と $y = -x^2 + 4x - 1$ で囲まれた面積を求めてみましょう.」

私　「まず交点を求めます．連立して…….」

$$x^2 - 2x + 3 = -x^2 + 4x - 1$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \iff 2(x-1)(x-2) = 0$$

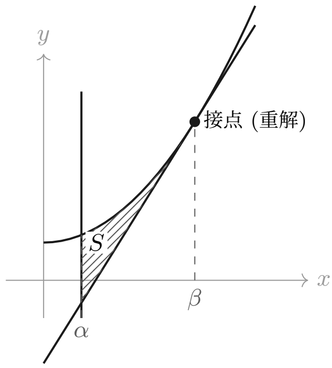
私　「交点は $x = 1, 2$ です．係数は 1 と -1 だから，差は $1-(-1) = 2$.」

$$S = \frac{|2|}{6}(2-1)^3 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

先生　「完璧です．積分記号を一回も書かずに解けましたね.」

15.3 Topic 2：接線と面積（1/3 公式）

先生　「次は少し変わった形です．放物線と，その接線，そして縦の直線（y 軸など）で囲まれた三角形のような部分です．」



先生　「この場合，差の式はどうなるでしょう？ $x = \beta$ で接しているということは……．」

私　「あ，第 7 回でやりました！ 接するなら**重解**だから，$(x-\beta)^2$ で因数分解できるはず！」

$$(\text{放物線}) - (\text{接線}) = a(x-\beta)^2$$

先生　「その通り．これを α から β まで積分します．」

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\beta)^2 \, dx \\ &= \left[\frac{a}{3}(x-\beta)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 0 - \frac{a}{3}(\alpha-\beta)^3 \\ &= \frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3 \quad (\text{符号調整後}) \end{aligned}$$

1/3 公式（接線タイプ）

放物線と接線，および縦線 $x = \alpha$ で囲まれた面積 S は,

$$S = \frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

覚え方： 接する（Touch）ときは分母が **3**（Three）.

15.4 Epilogue：道具箱の整理

先生　「これで面積計算の主要なパターンは網羅しました.」

- 交わる（Cross）とき → **1/6 公式**
- 接する（Touch）とき → **1/3 公式**

先生　「形を見て，どの道具を使うか瞬時に判断する．これが積分計算の極意です．次回はいよいよ最終回．微分と積分の集大成として，少し高度な融合問題に挑戦しましょう.」

To be continued in Lecture 16...

第 16 回　微分・積分の融合と極限

16.1　Prologue：全ての始まりと終わり

先生　「長い旅でしたね．第 1 回で『極限』から始まった私たちの冒険は，微分という山を越え，積分という海を渡り，ついにここまで来ました.」

先生は黒板に一つの放物線 $y = x^2$ を描いた.

先生　「最後は，これまでの知識を総動員しなければ解けない問題に挑戦してもらいます．テーマは『**法線と面積の極限**』です.」

Final Mission

放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ $(a > 0)$ における**法線**を ℓ とする.

1. 法線 ℓ の方程式を求めよ.
2. 放物線 C と法線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
3. 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{S(a)}{a^3}$ を求めよ.

友人　「うわ，盛りだくさんだ．法線って何でしたっけ？」

先生　「接線と**直交する（垂直な）**直線のことです．まずは微分して，接線の傾きを求めることから始めましょう.」

16.2　Step 1：法線の方程式（微分）

私　「$y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$．点 $P(a, a^2)$ での接線の傾きは $2a$ です．」

先生　「では，法線の傾き m は？ 垂直条件『傾きの積が -1』を使います．」

$$2a \times m = -1 \iff m = -\frac{1}{2a}$$

私　「傾きが $-\frac{1}{2a}$ で，点 (a, a^2) を通るから…….」

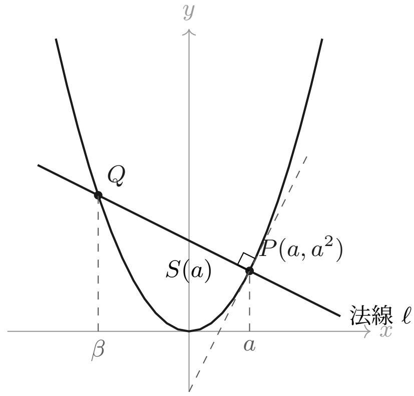
$$\ell : y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$$

整理して，

$$y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

先生　「クリアです．次は，この直線と放物線のもう一つの交点 Q を探しましょう．」

16.3 Step 2：面積の計算（積分）



連立方程式 $x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$ を解く．

$$x^2 + \frac{1}{2a}x - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

友人　「うげっ，解の公式？」

先生　「待って．片方の交点は $x = a$ だと分かっています．つまり $(x - a)$ で因数分解できるはずです．」

私　「あ，そうか！ $(x - a)(x + \Box) = 0$ の形になるはず……定数項を見れば，もう一つの解は $-a - \frac{1}{2a}$ です！」

交点の座標： $\beta = -a - \frac{1}{2a}$，　$\alpha = a$　($\beta < \alpha$ に注意)

先生　「交点が出ました．放物線と直線で囲まれた面積といえば？」

二人　「1/6 公式！」

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{|1|}{6}(\alpha - \beta)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left\{a - \left(-a - \frac{1}{2a}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^3 \end{aligned}$$

16.4 Step 3：極限の彼方へ（リミット）

先生　「いよいよ最後の仕上げです．点 P をどんどん右へ動かして（$a \to \infty$），面積 $S(a)$ と a^3 の比率の極限を求めます．」

$$\lim_{a\to\infty} \frac{S(a)}{a^3} = \lim_{a\to\infty} \frac{\frac{1}{6}(2a + \frac{1}{2a})^3}{a^3}$$

私　「a が無限大にいくとき，分母にある $\frac{1}{2a}$ は 0 に近づいて消えますよね．だから……．」

$$\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{(2a)^3}{a^3} = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$$

先生　「厳密な計算も同じ結果になります．答えは $\mathbf{4/3}$ です．」

16.5 Epilogue：円環の理（ことわり）

計算を終え，私たちは顔を見合わせた．

友人 「なんか感動です．微分して，方程式解いて，積分して，最後に極限．全部使いましたね．」

先生 「ええ．そして気づきましたか？ 最後の極限計算で，私たちは第 1 回の『無限の壁』の向こう側を覗いたのです．」

先生は黒板に最後の図を描いた．a が遥か彼方へ行くと，接線は垂直に近づき，法線は水平に近づく．放物線と「水平な線（$y = a^2$）」で囲まれた面積は，幅が $2a$ になるから，

$$\frac{1}{6}(2a)^3 = \frac{4}{3}a^3$$

計算結果の 4/3 は，この直感と完全に一致している．

Grand Finale
極限から始まった解析学の旅は，変化を捉える「微分」と，蓄積を捉える「積分」を経て，再び「極限」によって未来を予測する力へと昇華された．

先生 「みなさん，お疲れ様でした．これで微分積分学の基礎講義は終了です．しかし，この道具が切り拓く世界は，物理学，工学，経済学と，無限に広がっています．」

先生はチョークを置き，教壇を降りた．

先生 「この『無限を飼いならす力』をポケットに入れて，新しい世界へ旅立ってください．君たちの前にはもう，計算不能な壁など存在しないのですから．」

私たちはノートを閉じた．表紙には「微分積分学」の文字．それは最初，難解な呪文のように見えたが，今は世界を読み解くための，頼もしい相棒のように思えた．

Fin.

Mathematics is the language with which God has written the universe.

— Galileo Galilei

微分積分学講義ノート

2025 年 12 月 21 日 発行