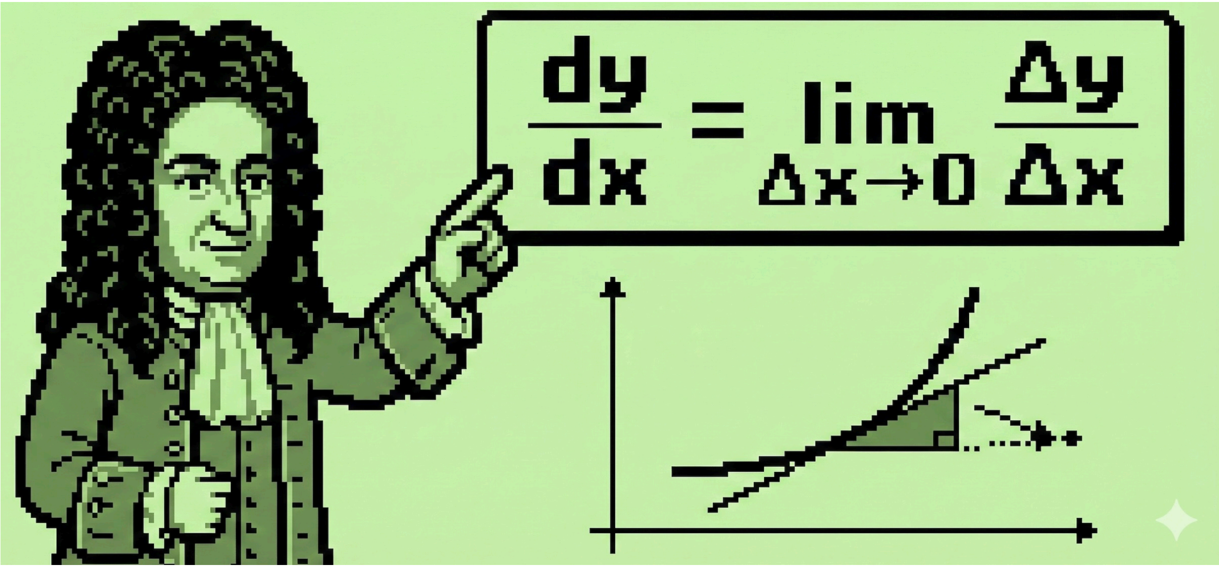
【導入】

教科書には，「導関数」と「微分する」の説明として以下のような文言がある．

教科書 P.187

- 関数 $y=f(x)$ の導関数を $f'(x)$，$\mathbf{y}'$，$\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$，$\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{f(x)}$ などで表すこともある．
- 関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を x で微分する，または単に微分するという．

教科書には「微分する（動詞）」の定義はあっても，「微分 dy（名詞）」そのものの定義は載っていない．
そこで本時の活動では，実際に「微分 dy」を定義することを目標とする．



♣「導関数」と「微分」は違うもの！？

全体課題

「$f(x)=x^3$ の微分は $f'(x)=3x^2$ である」という主張は，数学的に適切どうかを考察し，「微分 dy」を定義せよ．

Memo / Answer

pre：今の自分の考え（予想）

- dy とは一体なにか（$f'(x)$ と同じ？ 違う？）：

post：授業を通しての考え（定義の作成）

私たちが考える「微分 dy」の定義：

関数 $y=f(x)$ において，微分 dy とは，

そのように定義した理由（導関数 $f'(x)$ との違い/定義式の良さ）：

数学IIIで登場する．数学IIIを習わないにしても，数学IIIの考え方は使用するので，その意味で文系諸君にも関係する．

♠ エキスパート A「無限小の歴史を追え.」

目標 A

極限概念が登場する以前の世界において行われていた無限小解析の歴史を知り，「無限小」と「高次の無限小」の意味と簡単な式計算を 2 分で説明できる.

歴史：極限 ($\lim$) が生まれる前の世界

17 世紀，ライプニッツらが微分を発明した頃，現代のような極限操作 $\lim\limits_{h \to 0}$ はまだ確立されていなかった．彼らは以下のような大胆な論理で計算を行っていた.

(1) 変化量 $\Delta x, \Delta y$ を考える.
(2) それを「0 ではないが，大きさが 0 に見える量」＝無限小 (**infinitesimal**) とみなし，記号を $\Delta x \to dx$ に変えて, Δy の代わりの値 dy を得る.
(3) 計算の最後で，**「高次の無限小」を無視する（ゴミとして捨てる）**.

1. $y = x^3$ の微小変化を追う

関数 $y = x^3$ において、x がほんの少しだけ増えて $x + \Delta x$ になったとする。
このとき、y の増分 Δy は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= (x+\Delta x)^3 - x^3 \\ &= (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3 \\ &= 3x^2\Delta x + \mathbf{3x(\Delta x)^2} + \mathbf{(\Delta x)^3}\end{aligned}$$

ここで、第 1 回授業の「極限」の考え方を思い出そう。Δx が非常に小さい数（例えば 0.001）のとき、$(\Delta x)^2$ や $(\Delta x)^3$ はどうなるだろうか。

- $\Delta x =$ ________________
- $(\Delta x)^2 =$ ________________

$(\Delta x)^2$ 以上の項は、Δx に比べて **無視できるほど小さい（高次の無限小）** と考えられる。そこで、これらを「誤差」として切り捨てる (ことにする).

$$\Delta y \approx 3x^2\Delta x$$

この式における Δx を、無限に小さい増分として dx と書き換え、そのときの結果としての増分を dy と書くことにする。

$$dy = 3x^2 dx$$

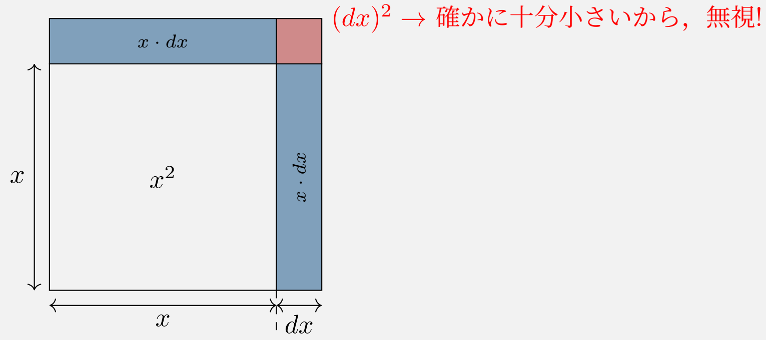
ここで dx の係数が $f'(x)$ になっていることに注意すると，結果として次の等式が成り立っていることが分かる.

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

この関係式を作ることこそが、本来の「**微分 (Differentiation)**」である。

練習 課題：$y = x^2$ でやってみよう

同様の手順で $y = x^2$ の微分 dy を求めよ．図の正方形の面積の変化にも注目せよ.



計算：$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$ ____________________

→ 無限小 d に変えて高次を無視すると：

$$dy = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

まとめ A 班のまとめ

- dy は「y の無限小の増分」である.
- $dy = f'(x)dx$ の式は，実は **「高次の無限小を無視する」** という操作によって得られた.

コラム

$y = f(x) = x^3$ に対して左で獲得した式 $dy = f'(x)dx$ では,

$x = 1$ での微分係数は $f'(1)$ である.

ということになる．これは「微小増分 dx の係数である」という意味から納得できる.

Check!!(2 分で説明する話の流れを自由にまとめよ．)

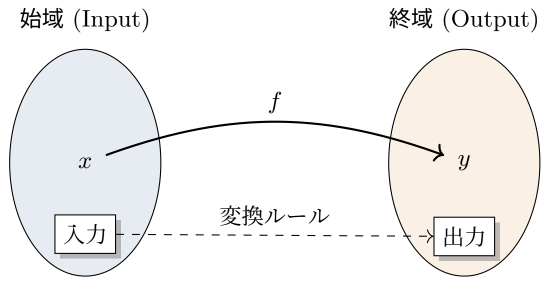
♠ エキスパート B「対応関係を追え.」

目標 B

数学の基本概念である「写像 (しゃぞう)」の意味を理解し，「微分 dy」と「導関数 $f'(x)$」がどのような写像であるかを 2 分で説明できる．

1. 概念：写像（Mapping）とは？

「ある入力に対して，ただ一つの出力を返す装置」のことを数学用語で**写像**という．



例 1：自動販売機

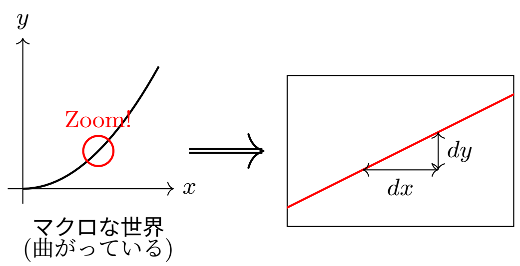
- 入力：お金とボタン → 写像：自販機の機構 → 出力：ジュース

例 2：関数 $y = x^2$

- 入力：3 → 写像：2 乗する → 出力：9

2. 視点：顕微鏡で覗く微分世界（局所的線形化）

曲線 $y = x^2$ などは曲がっているが，ある一点を**「超高性能顕微鏡」**で 1 万倍に拡大して見るとどうなるか？



結論： どんな曲線も，ミクロな視点では**「直線（比例）」**とみなせる．だから，微小量 dx に対して**傾きを掛ける**ことで，y 方向の微小増分が次のように得られる．

$$\boldsymbol{dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{傾き}} \times dx}$$

このようにして得られた y 方向の微小増分 dy を略して**微分** dy という．

3. 構造：役割の異なる 2 つの写像

「導関数」と「微分」は，似ているが役割が違う．$f(x) = x^3$ （傾き $3x^2$）の例で考えよう．

(1) 導関数 $f'(x)$

: **位置** x **を入力してその地点の「傾き** $3x^2$ **を返す」操作**

$$x \longrightarrow 3x^2$$

$\rightarrow \mathbf{f'(x) = 3x^2}$

(2) 微分 dy

:固定された x に対して，x における**変化率** dx を入力として「y 方向の微小増分 $f'(x) \times dx$ を返す」操作

$$dx \longrightarrow 3x^2 \times dx$$

$\rightarrow \mathbf{dy = 3x^2}dx$

まとめ B 班のまとめ：写像としての正体

- 導関数 $f'(x)$ とは，【 x / dx / dy 】を入力として【 y / $f'(x)$ / dx 】を出力する写像である．
- 微分 dy とは，【 x / dx / $f'(x)$ 】を入力として【 $f'(x)$ / dy / $f'(x) \times dx$ 】を出力する写像である．

Check!!(2 分で説明する話の流れを自由にまとめよ．)

♠ エキスパート C「接線の式を発明せよ.」

目標 C

「微分係数 $f'(a)$ が接線の傾きを表す」という事実のみを利用して，接線の方程式を自力で導出し，その式の意味を「微分 dy」の観点から 2 分で説明できる.

1. 中学数学の復習：直線の決定

点 $A(1, 2)$ を通り，傾きが 3 の直線の方程式を求めたい．直線上の任意の点を $P(x, y)$ とすると，変化の割合（傾き）の定義より：

$$\frac{y-2}{x-1} = 3$$

これを変形して：

$$y - 2 = 3(x - 1) \quad (\text{つまり } y = 3x - 1)$$

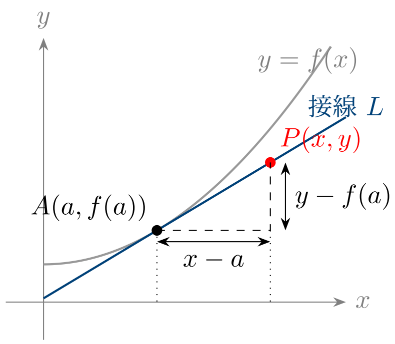
この考え方を使えば，公式を知らなくても接線の式は作れる！

2. 接線の方程式を作ろう

関数 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線を考える.

- 通る点：$A(a, f(a))$
- 傾き：$m = f'(a)$　（← 微分の定義！）

接線上の任意の点 $P(x, y)$ をとるとき，傾きの関係式を作れ.



立式（傾き＝変化の割合）：

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \underline{\qquad\qquad}$$

分母を払って変形すると，接線の公式が得られる.

$$\boxed{\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}}$$

3. 式の解剖：日本語で読むと？

2. で作った式を，図と照らし合わせて「日本語」で読んでみよう.

$$\underbrace{y - f(a)}_{\text{接線での縦の増分}} = \underbrace{f'(a)}_{\text{傾き}} \times \underbrace{(x - a)}_{\text{横の増分}}$$

つまり，この式は難しい公式ではなく，

「接線の上では，縦の増分は横の増分に比例する」

という，当たり前の「比例の性質」を表しているに過ぎない.

4. 記号の「翻訳」：dy とは何だったか

この「増分」を，微分の専用記号（ライプニッツの記法）に書き換えてみよう.

- 横の増分 $(x - a) \longrightarrow dx$ と置く.
- 縦の増分 $(y - f(a)) \longrightarrow dy$ と置く.

すると，接線の公式は次のように書き換わる.

$$dy = f'(a)dx$$

これが教科書には載っていない「微分 dy」の正体である (詳しくはエキスパート A が解説してくれる).

まとめ C 班のまとめ：定義の「良さ」とは？

- 接線の公式は暗記するものではなく，**「傾きの定義（変化の割合）」**から当たり前に導ける.
- $dy = f'(x)dx$ という定義の凄さは，接線の式を【 **比例** $(y = ax)$ / **二次関数** 】と同じ形に見せてくれる点にある.
- つまり微分とは，複雑な曲線を単純な【 **直線** / **円** 】とみなして，計算を楽にするための道具である.

Check!!(2 分で説明する話の流れを自由にまとめよ.)