Introduction：迷子にならないための地図

文字がたくさんある式（例：$x^2+xy+x+2y-2$）を見ると，「どこから手をつければいいの？」と迷ってしまいます。そんなときは，闇雲に公式を探すのではなく，以下の**「黄金ルール」**に従って式を整理しましょう。

因数分解の黄金ルール

(1) **次数の低い文字について整理する！**
- 次数が低い文字を「主役」にして，降べきの順に並べる。
- 残りの文字はすべて「係数（数字）」として扱う。

(2) **次数が同じなら，どれか 1 つの文字について整理する！**
- 一般的に x や a など，アルファベット順の早い文字で整理すると見やすい。

例題 1：次数の異なる文字

次の式を因数分解せよ。

$$x^2+xy+x+2y-2$$

考え方:

- x について見ると → 2 次式 (x^2)
- y について見ると → **1 次式** (y)

次数が低いのは y です。y について整理（y でくくる）しましょう。

$$(y\text{ の係数})y+(y\text{ がない部分})$$

Memo / Answer

例題 2：次数が同じ文字（たすき掛けの応用）

次の式を因数分解せよ。

$$x^2+3xy+2y^2-3x-5y+2$$

考え方: x も y も 2 次式です。どちらで整理しても良いですが，x で整理してみましょう。

$$x^2+(3y-3)x+(2y^2-5y+2)$$

こう見ると，「x の 2 次方程式」に見えませんか？ **定数項部分** $(2y^2-5y+2)$ **を因数分解**してから，全体で**たすき掛け**を行います。

Memo / Answer

複 2 次式（ふくにじしき）: x^4 と x^2 の式

ax^4+bx^2+c の形の式を複 2 次式といいます。解法は 2 パターンあります。

複 2 次式の解法パターン

(1) **素直な置換**：$x^2=A$ と置くとうまくいくタイプ

$$例：x^4-3x^2+2 \xrightarrow{x^2=A} A^2-3A+2$$

(2) **無理やり「2 乗引く 2 乗」**：因数分解できないタイプ

$$例：x^4+4 \quad \to \quad (x^2+2)^2-(2x)^2$$

真ん中の項を調整して $(\quad)^2-(\quad)^2$ の形を作ります。

例題 3：複 2 次式

次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-13x^2+36

(2) x^4+4

解説: (1) $x^2=A$ と置いてみましょう。(2) $x^2=A$ と置くと A^2+4 となり，これ以上できません。そこで，x^4+4 に何かを足して「**完全平方式** $(x^2+2)^2$」を作ります。勝手に足した分は，後ろで引きます。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 次数の低い文字で整理

次の式を因数分解せよ。

$$x^2 + 2xy - 3x - 6y$$

練習 A2: 次数が同じ文字

次の式を因数分解せよ。

$$x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6$$

練習 A3: 複 2 次式（基本）

次の式を因数分解せよ。

$$x^4 - 5x^2 + 4$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: たすき掛けの応用

次の式を因数分解せよ。

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x - y - 6$$

練習 B2: 複 2 次式（応用）

次の式を因数分解せよ。

$$x^4 + 64$$

練習 B3: 組み合わせの工夫

次の式を因数分解せよ。

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 x は 2 次，y は 1 次。y について整理する。

$$与式 = (2x-6)y + (x^2-3x)$$

共通因数を見つけてくくりだす。

$$= 2(x-3)y + x(x-3)$$

$(x-3)$ が共通因数。

$$= (x-3)(2y+x) = \boldsymbol{(x-3)(x+2y)}$$

A2 x について整理する。

$$x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)$$

定数項部分をたすき掛け。$6y^2-13y+6=(2y-3)(3y-2)$

$$x^2+(y+1)x-(2y-3)(3y-2)$$

全体でたすき掛け。掛けてマイナスなので，どちらかにマイナスをつける。足して $y+1$ になるには？

$$\begin{array}{ccc} 1 & -(2y-3) & \to -2y+3 \\ 1 & 3y-2 & \to 3y-2 \\ \hline & & y+1 \end{array}$$

よって，$\boldsymbol{(x-2y+3)(x+3y-2)}$

A3 $x^2=A$ と置く。

$$A^2-5A+4=(A-1)(A-4)$$

元に戻して，

$$(x^2-1)(x^2-4)$$

さらに因数分解できることを忘れない！

$$\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 x について整理。

$$2x^2+(5y+4)x+(2y^2-y-6)$$

定数項を因数分解：$2y^2-y-6=(2y+3)(y-2)$

$$2x^2+(5y+4)x+(2y+3)(y-2)$$

全体でたすき掛け。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2y+3 & \to 4y+6 \\ 2 & y-2 & \to y-2 \\ \hline & & 5y+4 \end{array}$$

よって，$(x+2y+3)(2x+y-2)$ 答え：$\boldsymbol{(x+2y+3)(2x+y-2)}$

B2 x^4+64 は $(x^2+8)^2$ に近い。

$$(x^2+8)^2=x^4+16x^2+64$$

余分な $16x^2$ を引く。

$$\begin{aligned} 与式 &= (x^2+8)^2-16x^2 \\ &= (x^2+8)^2-(4x)^2 \end{aligned}$$

2 乗引く 2 乗の公式を利用。

$$= (x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$$

降べきの順に整理。

$$\boldsymbol{(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)}$$

B3 第 1 回でやった「共通部分を作る展開」をしてから因数分解。

$$\begin{aligned} &(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)-24 \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24 \end{aligned}$$

$x^2+5x=A$ と置く。

$$\begin{aligned} (A+4)(A+6)-24 &= A^2+10A+24-24 = A^2+10A \\ &= A(A+10) \end{aligned}$$

元に戻す。

$$\begin{aligned} &(x^2+5x)(x^2+5x+10) \\ &= \boldsymbol{x(x+5)(x^2+5x+10)} \end{aligned}$$