Introduction：「狭い」は強い，「広い」は必要

前回は「矢印」で必要・十分を判定しましたが，今回は「集合の大きさ」で判定します。

- 「東京に住んでいる (p)」
- 「日本に住んでいる (q)」

集合で考えると，**「東京」は「日本」の中にすっぽり入っています。**

$$\text{東京 } (P) \subset \text{ 日本 } (Q)$$

このとき，「東京にいれば（狭い条件），日本にいると言い切るのに**十分**」であり，「東京にいるためには，まず日本という広い範囲にいることが**必要**」と言えます。

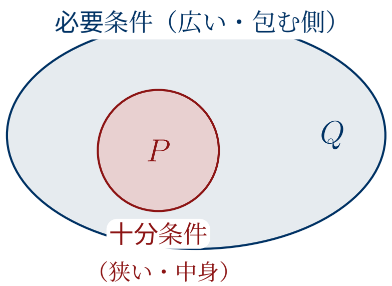
集合の包含関係と必要・十分

条件 p, q を満たす集合をそれぞれ P, Q とする。

$$\boldsymbol{P \subset Q} \iff p \implies q \text{ が真}$$

このとき，

p （中身・小）は q の 十分条件
q （外側・大）は p の 必要条件



例題 1：不等式の包含関係

条件 $p : 1 < x < 2$，条件 $q : 0 < x < 5$ について，p は q であるための何条件か。

考え方: 数直線を書いて，どちらが「中身」でどちらが「外側」かを確認します。p の範囲 $(1, 2)$ は，q の範囲 $(0, 5)$ の中にすっぽり入っています。

$$P \subset Q$$

よって，p（小さい方）は**十分条件**です。（逆に q は p であるための必要条件です）

Memo / Answer

例題 2：倍数の関係

条件 $p : x$ は 4 の倍数，条件 $q : x$ は 2 の倍数 について，p は q であるための何条件か。

考え方: 集合の要素を書き出してみましょう。$P = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ $Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ P の数字はすべて Q に含まれています（$P \subset Q$）。「4 の倍数なら（厳しい条件），2 の倍数と言い切るのに**十分**」です。

Memo / Answer

Topic：図形の定義と包含関係

図形の問題も集合で考えるとクリアになります。「特殊な（条件がきつい）図形」ほど，集合としては小さく（中身に）なります。

- **平行四辺形**：向かい合う辺が平行。
- **長方形**：平行四辺形 ＋「角がすべて 90 度」。
- **正方形**：長方形 ＋「辺がすべて等しい」。

$$\text{正方形} \subset \text{長方形} \subset \text{平行四辺形}$$

例題 3：図形の条件

四角形について，次の空欄に適する言葉を入れよ。「長方形であることは，平行四辺形であるための □ 条件である」

考え方: 「長方形」と「平行四辺形」，どちらが特殊で（狭くて），どちらが広いでしょうか？ 長方形は平行四辺形の一種（中身）です。

$$\text{長方形} \subset \text{平行四辺形}$$

主語は「長方形（中身）」なので，**十分条件**です。（逆に，平行四辺形であるためには，長方形である必要はありません。もっと緩い条件でいいのです）

Memo / Answer

必要十分条件（同値）と集合

p と q が必要十分条件であるとき，集合ではどうなるか？

$$p \iff q \quad \iff \quad \boldsymbol{P = Q}$$

2 つの集合が完全に一致するとき（包含関係が両向きに成り立つとき），必要十分条件となります。

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 不等式と集合

実数 x について，次の条件 p は q であるための何条件か。「必要」「十分」「必要十分」「なし」から選べ。

(1) $p: 2 < x < 3, \quad q: 0 < x < 5$

(2) $p: x > 0, \quad q: x > 1$

練習 A2: 倍数と集合

自然数 n について，次の条件 p は q であるための何条件か。

(1) $p: n$ は 6 の倍数，　$q: n$ は 3 の倍数

(2) $p: n$ は 12 の倍数，　$q: n$ は 4 の倍数かつ 3 の倍数

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 図形の集合関係

四角形 $ABCD$ について，次の条件 p は q であるための何条件か。

(1) p: 四角形 $ABCD$ は正方形である。
　q: 四角形 $ABCD$ はひし形である。

(2) p: $\angle A = 90^\circ$
　q: 四角形 $ABCD$ は長方形である。

練習 B2: 定数の決定

条件 $p: |x| < 2$，条件 $q: |x| < a \ (a > 0)$ とする。

(1) p が q であるための**十分条件**となるような a の範囲を求めよ。

(2) p が q であるための**必要条件**となるような a の範囲を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $P=(2,3)$，$Q=(0,5)$。$P \subset Q$ （P が中身）である。よって，p は q の 十分 条件。

(2) $P=\{x \mid x>0\}$，$Q=\{x \mid x>1\}$。$Q \subset P$ （Q が中身，P が外側）である。主語 p は外側（広い方）なので，必要 条件。

A2

(1) 6 の倍数 $\{6,12,\dots\}$ は，3 の倍数 $\{3,6,9,12,\dots\}$ に含まれる。$P \subset Q$。よって，p は q の 十分 条件。

(2) p: 12 の倍数 $\{12,24,\dots\}$ q: 4 かつ 3 の倍数 $\to$ 12 の倍数 $\{12,24,\dots\}$ 集合が完全に一致する ($P=Q$)。よって，必要十分 条件。

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) 正方形は，ひし形（4 辺が等しい）に「角が 90 度」という条件を加えたもの。つまり，正方形 $\subset$ ひし形。主語は正方形（中身）なので，十分 条件。

(2) $\angle A=90^\circ$ だけでは，他の角が何度かわからない（ただの四角形かもしれない）。長方形ならば必ず $\angle A=90^\circ$ である。つまり，長方形 $\subset \{\angle A=90^\circ\}$。主語 p は広い方（外側）なので，必要 条件。

B2 $P=\{x \mid -2<x<2\}$ $Q=\{x \mid -a<x<a\}$

(1) p が十分条件 $\iff$ $P \subset Q$ P が Q の中に入ればよい。Q の幅の方が広ければよいので，$2 \leqq a$。答え：$\boldsymbol{a \geqq 2}$

(2) p が必要条件 $\iff$ $Q \subset P$ Q が P の中に入ればよい。Q の幅の方が狭ければよいので，$a \leqq 2$。ただし $a>0$ なので，答え：$\boldsymbol{0<a \leqq 2}$