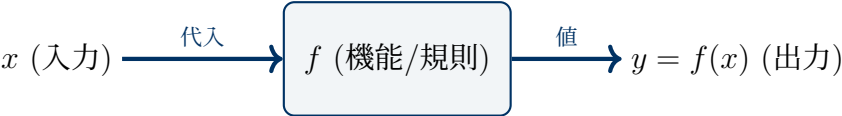


Introduction：関数とは何か

中学校までは「 $x$  の値を決めると  $y$  の値がただ 1 つ決まるとき、 $y$  は  $x$  の関数である」と学びました。  
高校数学では、これをもう少し抽象的に捉え、箱（ブラックボックス）のイメージで理解します。



function（機能・関数）の頭文字をとって  
 $f(x)$  や  $g(x)$  などの記号で表す

$y$  が  $x$  の関数であることを、 $y = f(x)$  と書きます。 $f(x)$  という記号は、「 $x$  の式」そのものを表すと同時に、代入の操作も表します。

例題 1：関数の値

関数  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  について、次の値を求めよ。

- (1)  $f(2)$
- (2)  $f(-1)$
- (3)  $f(a + 1)$

Memo / Answer

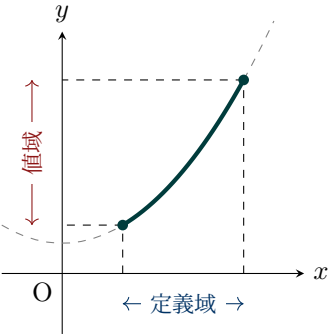
定義域と値域

関数  $y = f(x)$  において、変数のとりうる範囲を次のように呼びます。

用語の定義

- 定義域 (Domain)：入力変数  $x$  のとりうる値の範囲。
- 値域 (Range)：出力変数  $y$  のとりうる値の範囲（グラフの縦の範囲）。

グラフを用いて値域を考えると、定義域に対応するグラフを実線で、それ以外を点線で描き、「一番高いところ（最大値）」と「一番低いところ（最小値）」を探します。



例題 2：グラフと値域

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ。

(1)  $y = -2x + 4 \quad (1 \leq x < 4)$

(2)  $y = x^2 \quad (-2 \leq x \leq 1)$

**Point:** 端点を含む場合 ( $\leq, \geq$ ) は黒丸 ●，含まない場合 ( $<, >$ ) は白丸 ○ で描く。

Memo / Answer

例題 3：値域からの決定（逆問題）

関数  $y = ax + b \quad (1 \leq x \leq 3)$  の値域が  $0 \leq y \leq 4$  となるような定数  $a, b$  の値を求めよ。ただし  $a < 0$  とする。

Memo / Answer

発展：最大値・最小値とは

値域の中で，最も大きい値を最大値，最も小さい値を最小値といいます。ただし，白丸（端点を含まない）が最大・最小の位置に来る場合は，「最大値（最小値）なし」と答えます。

例： $1 \leq y < 5$  のとき

- 最小値は 1
- 最大値は なし (4.999... となり特定できないため)

A 問題：基礎の定着

以下の問いに答えよ。

練習 A1: 関数の値

$f(x) = -x^2 + 2x - 5$  のとき、次の値を求めよ。

- (1)  $f(0)$
- (2)  $f(-3)$
- (3)  $f(a - 1)$

練習 A2: 1 次関数の値域

次の関数の値域を求めよ。また、最大値・最小値があれば答えよ。

$y = 3x - 2 \quad (-1 \leq x < 2)$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

グラフを描いて考えること。

練習 B1: 2 次関数の値域

関数  $y = -2x^2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$  の値域を求めよ。また、最大値・最小値があれば答えよ。

練習 B2: 定義域の決定

関数  $y = x^2$  の定義域が  $a \leq x \leq a + 2$  であるとき、値域の最大値が 9 となるような正の定数  $a$  の値を求めよ。

Memo / Answer

## A 問題：解答

## Memo / Answer

A1

$$(1) f(0) = -0^2 + 2(0) - 5 = -5$$

$$(2) f(-3) = -(-3)^2 + 2(-3) - 5 = -9 - 6 - 5 = -20$$

$$\begin{aligned} (3) f(a-1) &= -(a-1)^2 + 2(a-1) - 5 \\ &= -(a^2 - 2a + 1) + 2a - 2 - 5 \\ &= -a^2 + 2a - 1 + 2a - 7 \\ &= -a^2 + 4a - 8 \end{aligned}$$

A2  $y = 3x - 2$  は右上がりの直線。

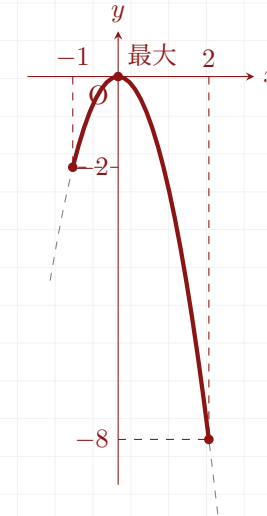
- $x = -1$  のとき,  $y = 3(-1) - 2 = -5$
- $x = 2$  のとき,  $y = 3(2) - 2 = 4$

グラフより, 値域は  $-5 \leq y < 4$ 最大値：なし ( $y < 4$  のため)最小値： $-5$ 

## B 問題：解答

## Memo / Answer

B1  $y = -2x^2$  は上に凸 (山なり) の放物線。頂点は原点  $(0, 0)$ 。定義域  $-1 \leq x \leq 2$  におけるグラフを描く。



$x = 0$  で最大値  $0$ ,  $x = 2$  で最小値  $-8$  をとる。よって, 値域は  $-8 \leq y \leq 0$

B2  $y = x^2$  は下に凸で,  $y$  軸対称。区間の幅は  $2$  で一定。 $a > 0$  より区間  $a \leq x \leq a+2$  はすべて  $y$  軸の右側にある。よって,  $y = x^2$  はこの区間で単調に増加する。

最大値をとるのは, 原点から最も遠い  $x = a+2$  のときである。

$$(a+2)^2 = 9$$

$a+2 > 2$  ( $a > 0$  より) なので,  $a+2 = 3$  のみ適する。よって,  $a = 1$