1. 嘘から出た真？

数学的帰納法の Step 2 では「$n = k$ のとき成り立つと**仮定**する」という操作を行う．

- 「もしその仮定が間違っていたらどうするの？」
- 「嘘を前提にして証明しても意味がないのでは？」

このような疑問を持つかもしれない．しかし，Step 2 で証明しているのは「$P(k)$ が正しいこと」ではない．

約束を守るシステム

Step 2 で証明しているのは，以下の**「因果関係」**である．

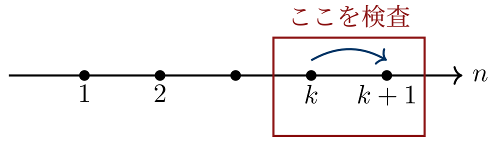
「もし手前のドミノが倒れたら $\Longrightarrow$ **必ず**次も倒れる」

日常の例で言えば**「明日晴れたら，アイスを奢るよ」**という約束と同じ．

- 明日雨が降った（前提が満たされない）場合，アイスを奢らなくても「約束を破った（嘘をついた）」ことにはならない．
- 帰納法は，この**「約束が守られているか（システムが正常か）」**だけを検査している．

2. 「任意の k」とは？

「$n = k$ のとき」の k は，特定の数字（例えば 5 や 100）のことではない．数直線上の**「どの場所を切り取っても」**通用する，代表選手としての k である．



結論:

- Step 2 は「どの場所でも連鎖機能が働いていること」を保証する．
- Step 1 は「最初のスイッチを押す」こと．

この 2 つが揃って初めて，ドミノは無限に倒れ続ける．

証明の書き出し

記述の際は以下の言葉を意識しよう．

- × 「$n = 5$ のとき成り立つと仮定すると...」
  (これでは $5 \to 6$ しか言えない)
- ◯ 「$n = k$ のとき成り立つと仮定すると...」
  (k は任意の自然数を表す文字)

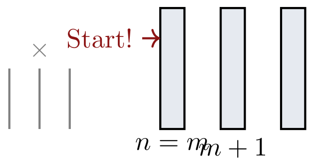
3. 途中から倒すドミノ

命題によっては「$n \geqq 4$ で成り立つ」といった場合がある．この場合，スタート地点を変えるだけで，仕組みは同じである．

スタート地点が m の場合

$n \geqq m$ であるすべての自然数について証明するには:

(1) **[I]** $\boldsymbol{n = m}$ のとき成り立つことを示す．
(2) **[II]** $\boldsymbol{n = k}$ $(k \geqq m)$ のとき成り立つと仮定し，$n = k + 1$ を示す．



例題 1 (変則スタートの不等式)

$n \geqq 3$ であるすべての自然数 n について，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > 2n + 1$$

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

確認テスト (A: 等式の復習)

練習 A1 (和の公式)

すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 変則スタート)

練習 B1 (倍数の証明)

$n \geqq 2$ であるすべての自然数 n について, $3^n > 3n+1$ が成り立つことを証明せよ.

- スタートは $n=2$.
- 不等式の証明では $A > B$ (仮定利用) $> C$ (目標) の 3 段論法を使う.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

(I) $n=3$ のとき左辺 $=2^3=8$. 右辺 $=2(3)+1=7$. $8>7$ より成り立つ.
(II) $k \geqq 3$ として, $n=k$ のとき成り立つ, すなわち

$$2^k > 2k+1 \quad \cdots ①$$

と仮定する. $n=k+1$ のとき,

$$\text{左辺} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

仮定①より $2^k > 2k+1$ なので,

$$2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2$$

ここで, 目標（右辺）は $2(k+1)+1=2k+3$. 「今あるもの $(4k+2)$」が「目標 $(2k+3)$」より大きいことを示せばよい.

$$(4k+2)-(2k+3)=2k-1$$

$k \geqq 3$ なので $2k-1>0$. ゆえに $4k+2>2k+3$.
よって $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ となり, $n=k+1$ も成り立つ.
(I), (II) より, $n \geqq 3$ であるすべての自然数 n で成り立つ.

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(I) $n=1$ のとき左辺 $1 \cdot 2 = 2$. 右辺 $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$. 成立.
(II) $n=k$ のとき成立すると仮定する.

$$1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad \cdots ①$$

$n=k+1$ のとき, 左辺は

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1)}_{①} + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\
&= (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right) \\
&= (k+1)(k+2) \cdot \frac{k+3}{3} \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)
\end{aligned}$$

これは右辺の n に $k+1$ を代入したものと一致する. よって $n=k+1$ も成立. (I), (II) よりすべての自然数 n で成立.

練習 B1 解答

(I) $n=2$ のとき左辺 $3^2=9$. 右辺 $3(2)+1=7$. $9>7$ より成立.
(II) $k \geqq 2$ として $3^k > 3k+1$ を仮定する. $n=k+1$ のとき

$$\text{左辺} = 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3(3k+1) = 9k+3$$

目標である右辺 $3(k+1)+1=3k+4$ との差をとると

$$(9k+3)-(3k+4)=6k-1$$

$k \geqq 2$ より $6k-1>0$. よって $9k+3>3k+4$ となり,

$$3^{k+1} > 3(k+1)+1$$

が成り立つ.
(I), (II) より, $n \geqq 2$ のすべての自然数で成立.