年　組　番　氏名

Introduction：世界が 3 つに分かれる

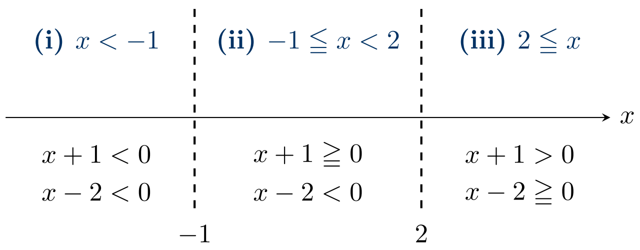
今回は，$|x+1|+|x-2|=5$ のように絶対値が 2 つある問題を扱います。「中身が 0 になる瞬間」が 2 回あるので，数直線は 3 つのエリアに分割されます。手間はかかりますが，1 つずつ丁寧に処理すれば必ず解けます。

複数の絶対値の処理チャート

方程式 $|A|+|B|=\dots$ を解く手順：

(1) **境界線を探す**：中身が 0 になる x の値をすべて見つける。
(2) **区間を分ける**：数直線を境界線で分割する。
(3) **各区間で解く**：符号を決定して絶対値を外し，解き，吟味する。

例：$|x+1|$ と $|x-2|$ の場合境界値は $x=-1$ と $x=2$ です。



- (i) 両方マイナスで外す
- (ii) 片方プラス，片方マイナスで外す
- (iii) 両方プラスで外す

例題 1：絶対値 2 つの方程式

方程式 $|x+1|+|x-2|=5$ を解け。

手順: 境界値 $-1, 2$ で場合分けします。
(i) $\boldsymbol{x<-1}$ のとき両方の中身が負です。マイナスをつけて外します。

$$-(x+1)-(x-2)=5$$

解いて，吟味します。
(ii) $\boldsymbol{-1 \leqq x < 2}$ のとき $x+1$ は正，$x-2$ は負です。

$$(x+1)-(x-2)=5$$

(iii) $\boldsymbol{2 \leqq x}$ のとき両方正です。そのまま外します。

$$(x+1)+(x-2)=5$$

Memo / Answer

例題 2：絶対値 2 つの不等式

不等式 $|x|+|x-2|<4$ を解け。

考え方: 境界値は 0 と 2 です。方程式と同様に 3 つの区間に分けて解き，それぞれの共通範囲を求め，最後に合体させます。

(i) $\boldsymbol{x<0}$ のとき（両方負）

$$-x-(x-2)<4$$

(ii) $\boldsymbol{0 \leqq x<2}$ のとき（左正・右負）

$$x-(x-2)<4$$

※これは $2<4$ となり「常に成り立つ」パターンです！

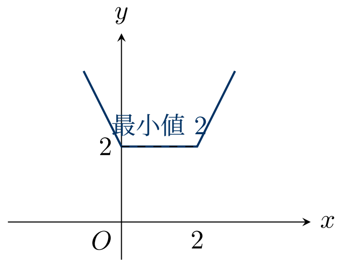
(iii) $\boldsymbol{2 \leqq x}$ のとき（両方正）

$$x+(x-2)<4$$

Memo / Answer

Topic：グラフで見る絶対値

$y=|x|+|x-2|$ のグラフを描くと，下図のような「バスタブ型（底がある形）」になります。方程式 $|x|+|x-2|=k$ の解の個数などを考える際，グラフを使うと一目瞭然になることがあります。



A 問題：基礎の定着

練習 A1: 2 つの絶対値（方程式）

方程式 $|x| + |x-4| = 6$ を解け。

練習 A2: 2 つの絶対値（不等式）

不等式 $|x+2| + |x-1| \leqq 5$ を解け。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 区間内で常に成り立つ場合

方程式 $|x+1| + |x-1| = 2$ を解け。

練習 B2: 絶対値の入れ子

方程式 $||x|-1| = 3$ を解け。（ヒント：外側から順に外すか，グラフをイメージする）

練習 B3: 3 つの絶対値（発展）

方程式 $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 6$ を解け。（ヒント：境界値は $1, 2, 3$。区間は 4 つになる）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 境界値は $0, 4$。(i) $x < 0$ のとき $-x - (x-4) = 6 \implies -2x = 2 \implies x = -1$ これは $x < 0$ を満たす。（適）
(ii) $0 \leqq x < 4$ のとき $x - (x-4) = 6 \implies 4 = 6$ これは成り立たない（解なし）。
(iii) $4 \leqq x$ のとき $x + (x-4) = 6 \implies 2x = 10 \implies x = 5$ これは $4 \leqq x$ を満たす。（適）
よって，$\boldsymbol{x = -1, 5}$

A2 境界値は $-2, 1$。(i) $x < -2$ のとき $-(x+2) - (x-1) \leqq 5 \implies -2x - 1 \leqq 5 \implies -2x \leqq 6 \implies x \geqq -3$ 前提との共通範囲は $-3 \leqq x < -2$。
(ii) $-2 \leqq x < 1$ のとき $(x+2) - (x-1) \leqq 5 \implies 3 \leqq 5$ これは常に成り立つ。よって，この区間すべてが解。$-2 \leqq x < 1$。
(iii) $1 \leqq x$ のとき $(x+2) + (x-1) \leqq 5 \implies 2x + 1 \leqq 5 \implies 2x \leqq 4 \implies x \leqq 2$ 前提との共通範囲は $1 \leqq x \leqq 2$。
(i)〜(iii) を合わせると，すべてつながる。$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq 2}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 境界値は $-1, 1$。(i) $x < -1$ のとき：$-2x = 2 \implies x = -1$（範囲外，不適）(ii) $-1 \leqq x < 1$ のとき：$(x+1) - (x-1) = 2 \implies 2 = 2$ これは常に成り立つ。よって，区間全体 $\boldsymbol{-1 \leqq x < 1}$ が解。(iii) $1 \leqq x$ のとき：$2x = 2 \implies x = 1$（適）
(ii) と (iii) を合わせると，$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1}$（※グラフで考えると，底の部分が $y = 2$ と重なる）

B2 外側の絶対値から外す。$||x| - 1| = 3 \iff |x| - 1 = \pm 3$

- $|x| - 1 = 3 \implies |x| = 4 \implies x = \pm 4$
- $|x| - 1 = -3 \implies |x| = -2$ 絶対値が負になることはないため，こちらは解なし。

よって，$\boldsymbol{x = \pm 4}$

B3 (i) $x < 1$: $-3x + 6 = 6 \implies x = 0$ (適) (ii) $1 \leqq x < 2$: $-x + 4 = 6 \implies x = -2$ (不適) (iii) $2 \leqq x < 3$: $x = 6$ (不適) (iv) $3 \leqq x$: $3x - 6 = 6 \implies 3x = 12 \implies x = 4$ (適)
よって，$\boldsymbol{x = 0, 4}$