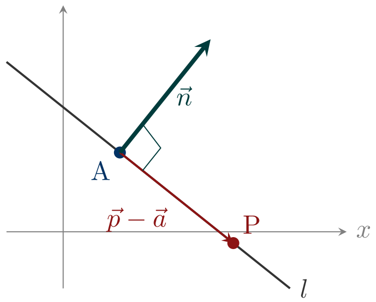
年　組　番　氏名

1. 概念の転換：「這う」から「貫く」へ

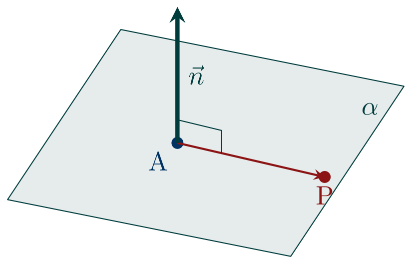
これまで平面を表すには，平面上を這う 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表していた（パラメータ表示）。しかし，平面に**垂直な 1 本のベクトル（法線ベクトル）**を使えば，次元に関わらずシンプルに図形を記述できる。

【2 次元：直線の決定】



$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$

【3 次元：平面の決定】



全く同じ式！

$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$

法線ベクトルと平面の決定

平面 α に垂直な $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ を，平面 α の**法線ベクトル**という。点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ である平面上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は，次の条件を満たす。

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \iff \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$$

この式は，「点 A を始点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，常に $\vec{n}$ と垂直である」ことを意味する。s, t のパラメータを使わずに，平面の方程式を一発で記述できる強力な道具である。

2. 法線ベクトルの求め方

「ある平面に垂直なベクトル」は，その平面上の**1 次独立な 2 つのベクトル**の両方に垂直である。

垂直なベクトルの決定

ベクトル $\vec{n}$ が，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$ の両方に垂直であるとき，$\vec{n}$ はその平面の法線ベクトルとなる。

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = 0 \quad \text{かつ} \quad \vec{n}\cdot\vec{b} = 0$$

例題 1

2 つのベクトル $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{3}$ であるベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

Memo / Answer

3. 平面の方程式

ベクトルの方程式 $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ を成分で計算してみよう。$\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$，$\vec{n}=(a, b, c)$，$\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると

$$(a, b, c)\cdot(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=0$$
$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

これを展開・整理すると， $ax+by+cz+d=0$ の形になる。

座標空間における平面の方程式

点 (x_1, y_1, z_1) を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=(a, b, c)$ である平面の方程式は

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

特に，一般形 $ax+by+cz+d=0$ において，係数 (a, b, c) はその平面の**法線ベクトル**を表す。

例題 2

点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(4, 5, -6)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

4. 3 点を通る平面

これまでの方法（s, t で連立）では計算が大変だった「3 点を通る平面」も，法線ベクトルを使えば見通しよく解ける。

例題 3

3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

参考 A：2 平面のなす角

2 つの平面 α, β のなす角 θ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ は，それぞれの法線ベクトル $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ のなす角と等しい（または補角）。

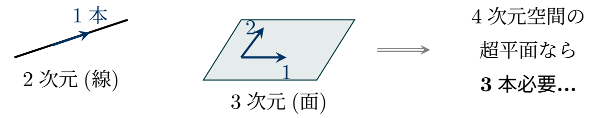
$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

参考 B：接線 (接平面) ではなく法線を使う理由は??

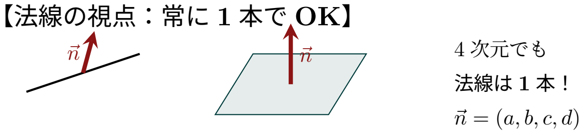
図形を記述するとき，「その面に沿って動く方向（接線・接平面)」に注目するか，「その面を垂直に貫く方向（法線)」に注目するかで、記述の手間が劇的に変わる。

- **接する方向（這う視点）**：次元に依存する（大変）
  2 次元の直線を引くにはベクトルが_____本必要（$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$）。
  3 次元の平面を張るにはベクトルが_____本必要（$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$）。
  もし 4 次元空間で「3 次元的な立体」を表すなら，ベクトルが_____本も必要になる。
  $\Longrightarrow$ **次元が上がるほど，必要なベクトルの数（パラメータ）が増えて式が複雑になる。**
- **法線の方向（貫く視点）**：次元に依存しない（最強）
  2 次元の直線も，3 次元の平面も，垂直なベクトル（法線）はたった_____本で決まる。
  どんなに次元が高くなっても，式は常に $\boldsymbol{\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0}$ の 1 つだけ。

【接する視点：次元と共に増える】



【法線の視点：常に 1 本で OK】



例えば，4 次元空間 (x, y, z, w) における「3 次元的な広がりを持つ超平面」の方程式は，法線ベクトル $\vec{n} = (a, b, c, d)$ を用いて

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) + d(w - w_1) = 0$$

と，あっさり書けてしまう。法線ベクトルとは，次元の壁を超えるための**「拘束条件」**を与えるツールなのである。

年　組　番　氏名

確認テスト A (基本)

練習 A1

点 $(2, -1, 4)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (3, 1, -2)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

練習 A2

次の方程式で表される平面の法線ベクトルを 1 つ答えよ。

(1) $2x - 3y + z - 5 = 0$

(2) $x = 3$

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

3 点 $\mathrm{A}(0, 0, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2, 0)$, $\mathrm{C}(2, 1, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ。

練習 B2

点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$ を通り，直線 $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-2}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

点 $(2, -1, 4)$，法線 $\vec{n} = (3, 1, -2)$

Memo / Answer

求める平面の方程式は $3(x-2)+1(y-(-1))-2(z-4)=0$ $3(x-2)+(y+1)-2(z-4)=0$ 展開して整理すると $3x-6+y+1-2z+8=0$ 答 $3x+y-2z+3=0$

練習 A2

法線ベクトル $\vec{n}$ を求めよ。(1) $2x-3y+z-5=0$ (2) $x=3$ (つまり $1x+0y+0z-3=0$)

Memo / Answer

平面の方程式 $ax+by+cz+d=0$ の係数 (a, b, c) が法線ベクトルとなる。(1) x, y, z の係数を抜き出して答 $\vec{n} = (2, -3, 1)$

(2) x の係数は 1，y, z の係数は 0 であるから答 $\vec{n} = (1, 0, 0)$

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

3 点 $\mathrm{A}(0,0,0), \mathrm{B}(1,2,0), \mathrm{C}(2,1,3)$ を通る平面

Memo / Answer

この平面の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とする。$\vec{n} \perp \vec{\mathrm{AB}}$ かつ $\vec{n} \perp \vec{\mathrm{AC}}$ である。$\vec{\mathrm{AB}} = (1,2,0)$，$\vec{\mathrm{AC}} = (2,1,3)$ 内積が 0 になるので $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{\mathrm{AB}} = a+2b = 0 & \cdots(1) \\ \vec{n}\cdot\vec{\mathrm{AC}} = 2a+b+3c = 0 & \cdots(2) \end{cases}$

(1) より $a=-2b$。これを (2) に代入して $2(-2b)+b+3c=0$ $-3b+3c=0 \implies b=c$ よって $a=-2c, b=c$ となり，$\vec{n} = (-2c, c, c) = c(-2, 1, 1)$ $c=1$ として法線ベクトルを $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ と定める。原点 $\mathrm{A}(0,0,0)$ を通るから $-2(x-0)+1(y-0)+1(z-0)=0$ 答 $-2x+y+z=0$ (または $2x-y-z=0$)

練習 B2

点 $\mathrm{A}(1,2,3)$ を通り，直線 $l : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-2}$ に垂直な平面

Memo / Answer

「直線に垂直な平面」を求めるとき，**直線の方向ベクトルがそのまま平面の法線ベクトルになる**。直線 l の方向ベクトルは $\vec{d} = (3, 4, -2)$。よって，求める平面の法線ベクトルは $\vec{n} = (3, 4, -2)$ ととれる。点 $\mathrm{A}(1,2,3)$ を通るから $3(x-1)+4(y-2)-2(z-3)=0$ $3x-3+4y-8-2z+6=0$ $3x+4y-2z-5=0$ 答 $3x+4y-2z-5=0$