年　組　番　氏名

Introduction：最大値・最小値とは

関数 $y = f(x)$ の値域（グラフの縦の範囲）において，

- **最大値 (Max)**：グラフの最も高い位置にある点の y 座標。
- **最小値 (Min)**：グラフの最も低い位置にある点の y 座標。

2 次関数では，**「頂点」**または**「定義域の両端」**のいずれかで最大・最小をとります。

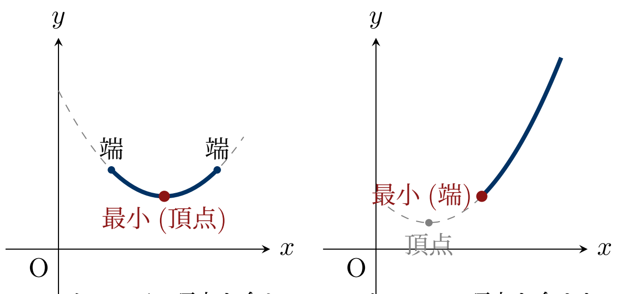
最大・最小を求める 3 ステップ

(1) **平方完成**をして，頂点と軸を求める。

(2) **グラフの概形**を描く。

(定義域の部分を**実線**，それ以外を**点線**で描くと分かりやすい！)

(3) グラフを見て，一番高い所と低い所の y 座標を答える。



パターン A: 頂点を含む　パターン B: 頂点を含まない

例題 1：定義域に頂点が含まれる場合

関数 $y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値・最小値を求めよ。

Check: 平方完成すると頂点の x 座標は 2。
これは定義域 $0 \leqq x \leqq 3$ の中に入っているか？ $\longrightarrow$ **入っている！**

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

例題 2：定義域に頂点が含まれない場合

関数 $y = x^2 - 4x + 1 \quad (3 \leqq x \leqq 5)$ の最大値・最小値を求めよ。

Check: 頂点の x 座標は 2。
定義域 $3 \leqq x \leqq 5$ の中に入っているか？ $\longrightarrow$ 外れている！（左側に外れている）

Memo / Answer

よくあるミス

「2 次関数の最大・最小問題だから，頂点が答えだろう」と思い込み，定義域を無視して頂点を答えてしまうミスが非常に多いです。
必ず「頂点が定義域内にあるかどうか」を確認する癖をつけましょう。

例題 3：上に凸の場合

関数 $y = -x^2 + 2x + 3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ の最大値・最小値を求めよ。

Memo / Answer

年　　　組　　　番　氏名

A 問題：基礎の定着

次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ。

練習 A1: 頂点を含む

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$$

練習 A2: 頂点を含まない

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (2 \leqq x \leqq 5)$$

練習 A3: 上に凸

$$y = -2x^2 + 4x \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

最大値・最小値の条件から，関数の決定を行う問題。

練習 B1: 係数の決定 (1)

関数 $y = x^2 - 4x + a \quad (0 \leqq x \leqq 3)$ の最小値が -2 であるとき，定数 a の値を求めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

練習 B2: 係数の決定 (2)

関数 $y = -x^2 + 6x + c \quad (1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 5 であるとき，定数 c の値を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $y=(x-1)^2-4$　(頂点 $(1,-4)$) 定義域 $0 \leqq x \leqq 4$ に頂点 $x=1$ は含まれる。

- $x=1$ (頂点) で最小値 -4
- $x=0$ のとき $y=-3$
- $x=4$ のとき $y=16-8-3=5$ (こちらが最大)

よって，$x=4$ で最大値 5，$x=1$ で最小値 -4

A2 $y=(x-1)^2-4$　(頂点 $(1,-4)$) 定義域 $2 \leqq x \leqq 5$ に頂点 $x=1$ は含まれない。グラフは右上がりの単調増加となる。

- $x=2$ (左端) で最小値 $y=4-4-3=-3$
- $x=5$ (右端) で最大値 $y=25-10-3=12$

よって，$x=5$ で最大値 12，$x=2$ で最小値 -3

A3 $y=-2(x^2-2x)=-2(x-1)^2+2$　(頂点 $(1,2)$) 定義域 $-1 \leqq x \leqq 2$ に頂点 $x=1$ は含まれる。上に凸なので，頂点が最大値。

- $x=1$ (頂点) で最大値 2
- $x=-1$ のとき $y=-2-4=-6$ (頂点から遠い)
- $x=2$ のとき $y=-8+8=0$

よって，$x=1$ で最大値 2，$x=-1$ で最小値 -6

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $y=(x-2)^2-4+a$　(頂点 $(2,a-4)$) 定義域 $0 \leqq x \leqq 3$ に頂点 $x=2$ は含まれる。下に凸なので，頂点で最小値をとる。
最小値は $a-4$ なので，

$$a-4=-2 \iff \boldsymbol{a=2}$$

このとき，関数は $y=x^2-4x+2$。最大値は，頂点 $x=2$ から遠い方の端点 $x=0$ でとる。$x=0$ のとき，$y=2$。よって，**最大値 2**

B2 $y=-(x-3)^2+9+c$　(頂点 $(3,9+c)$) 定義域 $1 \leqq x \leqq 4$ に頂点 $x=3$ は含まれる。上に凸なので，頂点で最大値をとる。
最大値は $9+c$ なので，

$$9+c=5 \iff \boldsymbol{c=-4}$$

このとき，関数は $y=-(x-3)^2+5$。最小値は，頂点 $x=3$ から遠い方の端点 $x=1$ でとる。$x=1$ のとき，$y=-4+5=1$。よって，**最小値 1**