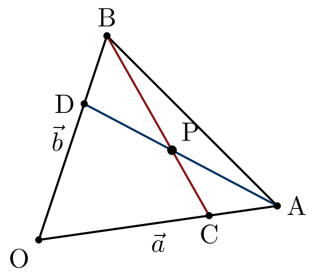
1. 交点の定番解法（2 通りで表す）

2 直線 AD, BC の交点 P の位置ベクトルを求める問題は，ベクトルで最も重要なパターンの 1 つである．**「P は直線 AD 上にある」**かつ**「P は直線 BC 上にある」**という 2 つの情報を数式にして連立する．

例題 1 (交点の位置ベクトル)

△OAB において，辺 OA を 5 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とする．線分 AD と BC の交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．



2. メネラウスの定理（検算の魔法）

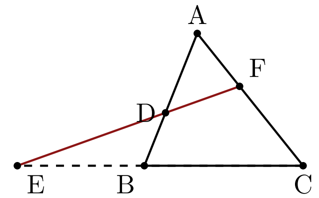
記述試験では係数比較（左の解法）を書くべきだが，答えだけ求めたい場合や検算には**図形の性質**を使うと圧倒的に速い．

メネラウスの定理

右図のような形（キツネ型）において，一筆書きの要領で比を掛けると 1 になる．

$$\frac{CE}{EB} \times \frac{BD}{DA} \times \frac{AF}{FC} = 1$$

※頂点 → 分点 → 頂点... と回る



例題 2 (比の計算と検算)

例題 1 について，メネラウスの定理を用いて $AP : PD$ および $BP : PC$ を求めよ．また，その比を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求め，例題 1 の答えと一致するか確認せよ．

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (交点の計算)

△OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とする．線分 AD と BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (面積比)

練習 A1 の設定において，以下の線分の比を求めよ．

(1) $AP : PD$

(2) $BP : PC$

Memo / Answer

練習 B2 (一直線上の点)

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$ であるとき，直線 OP と線分 AB の交点 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(**ヒント:** Q は OP 上の点なので $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$．また Q は AB 上にあるので係数の和が...?)

Memo / Answer

解答 A

Memo / Answer

A1 解答:
$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{d} = \frac{1}{3}\vec{b}$.
(1) P は AD 上: $\vec{p} = (1-s)\vec{a} + s\vec{d} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b}$. (2) P は BC 上: $\vec{p} = (1-t)\vec{c} + t\vec{b} = \frac{1}{2}(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$.
連立方程式: $1-s = \frac{1}{2}(1-t)$, $\frac{1}{3}s = t$. 代入して $1-s = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}s) \implies 2-2s = 1-\frac{1}{3}s$. $1 = \frac{5}{3}s \implies s = \frac{3}{5}$.
よって, $\vec{p} = (1-\frac{3}{5})\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\vec{b} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}}$

解答 B

Memo / Answer

A1 の計算過程を利用する.
(1) $AP : PD$
P は線分 AD を $s : (1-s)$ に内分する点である. A1 より $s = \frac{3}{5}$ なので,

$$AP : PD = s : (1-s) = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \mathbf{3:2}$$

(2) $BP : PC$
P は線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点である. **(注意: $\vec{b}$ の係数が t)** $t = \frac{1}{3}s = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{5}$. C から B へ向かうベクトルで考えたとき, C 側の比率が t. つまり $CP : PB = t : (1-t) = 1 : 4$. あるいは $\vec{p} = (1-t)\vec{c} + t\vec{b}$ の係数を見て, $BP : PC = (1-t) : t = \frac{4}{5} : \frac{1}{5} = \mathbf{4:1}$.

Memo / Answer

B2 解答:
Q は OP 上にあるので, $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} = 3k\vec{a} + 4k\vec{b}$. Q は AB 上にあるので, 係数の和が 1.
$3k + 4k = 1 \implies 7k = 1 \implies k = \frac{1}{7}$.
よって, $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}}$