年　組　番　氏名

## Introduction：最小値の狙い撃ち

下に凸の 2 次関数において，最小値の候補は「**頂点**」または「**定義域の端点**」のどちらかです。

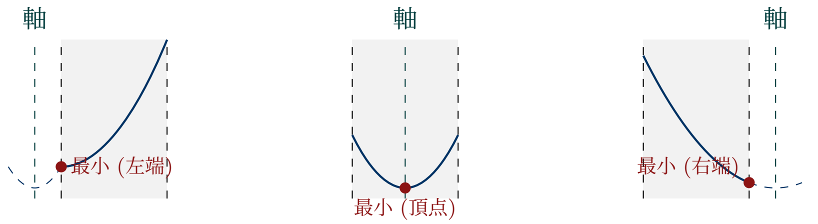
- 頂点が定義域の**中**にある $\longrightarrow$ **頂点**で最小
- 頂点が定義域の**外**にある $\longrightarrow$ 頂点に近い方の**端点**で最小

軸の位置が動くとき，この「中か外か」で場合分けを行います。

### 軸が動く場合の最小値（下に凸）

定義域が $0 \leqq x \leqq 2$（固定），軸が $x = a$（動く）の場合，次の 3 つに分類して記述します。※ $a$ の値によるグラフの位置関係（イメージ）

**(i) 軸が左外 $(a < 0)$　(ii) 軸が中 $(0 \leqq a \leqq 2)$　(iii) 軸が右外 $(2 < a)$**




頂点に近い $x = 0$　　頂点が範囲内！　　頂点に一番近い $x = 2$

**等号 (=) の付け方ルール：**
「境界線」はどちらのグループに入れても値は同じなので，どちらに入れても正解です。一般的に，真ん中のパターン（$0 \leqq a \leqq 2$）にまとめて付けることが多いです。

### 例題 1：基本的な記述練習

$a$ は定数とする。関数 $y = (x-a)^2 + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。

---

**記述の雛形:**

1. $a < 0$ のとき，グラフは右上がりなので，
   $x = \square$ で最小値 $\square$
2. $0 \leqq a \leqq 2$ のとき，頂点は定義域内なので，
   $x = \square$ で最小値 $\square$
3. $2 < a$ のとき，グラフは右下がりなので，
   $x = \square$ で最小値 $\square$

最後にまとめて答えを書く。

Memo / Answer

## 実践：平方完成が必要なタイプ

式が一般形 $y = x^2 - 2ax + \dots$ で与えられた場合，まずは平方完成して**軸の位置**を特定します。

$$y = (x-a)^2 - a^2 + \dots \quad \longrightarrow \quad \text{軸は } x = a$$

あとは例題 1 と同じ手順です。

### 例題 2：一般形の最小値

$a$ は定数とする。関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。

Memo / Answer

## グラフを描くコツ

答案用紙には，場合分けごとのグラフを小さく描くことを推奨します。採点者に「正しく理解して分類している」ことが伝わり，部分点がもらいやすくなります。

### 例題 3：定義域が異なる場合

$a$ は定数とする。関数 $y = x^2 - 2ax + 2a \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めよ。

**注意:** 定義域が変われば，境界となる値も変わります。
定義域が $-1 \leqq x \leqq 1$ なので，

- $a < -1$ （左外）
- $-1 \leqq a \leqq 1$ （中）
- $1 < a$ （右外）

で分けます。

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

## A 問題：基礎の定着

記述式の解答を作成せよ。

**練習 A1: 基本フォーム**

$a$ は定数とする。関数 $y=(x-a)^2+3 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$ の最小値を求めよ。

**練習 A2: 一般形の処理**

$a$ は定数とする。関数 $y=x^2-4ax+4a^2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。

Memo / Answer

## B 問題：標準・応用

定義域に注意して場合分けを行うこと。

**練習 B1: 負の範囲を含む定義域**

$a$ は定数とする。関数 $y=x^2+2ax+a^2+1 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$ の最小値を求めよ。

**練習 B2: 最小値から係数決定**

$a$ は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+a^2+1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が 5 となるような $a$ の値をすべて求めよ。

Memo / Answer

## A 問題：解答

Memo / Answer

**A1** 軸は $x=a$，頂点は $(a,3)$。定義域は $0 \leqq x \leqq 3$。

(i) $a<0$ **のとき**（軸が左外）

頂点より右側（定義域内）では単調増加。

$x=0$ で最小値 $(0-a)^2+3=\boldsymbol{a^2+3}$

(ii) $0 \leqq a \leqq 3$ **のとき**（軸が中）

頂点が定義域に含まれる。

$x=a$ で最小値 $\mathbf{3}$

(iii) $3<a$ **のとき**（軸が右外）

頂点より左側（定義域内）では単調減少。

$x=3$ で最小値 $(3-a)^2+3=\boldsymbol{a^2-6a+12}$

**A2** 平方完成：$y=(x-2a)^2$ 軸は $\boldsymbol{x=2a}$。定義域は $0 \leqq x \leqq 2$。場合分けの境界は，軸 $2a$ が 0 と 2 のとき。

つまり，$2a<0 \to a<0$，　$2a>2 \to a>1$ などで分ける。

(i) $2a<0$ すなわち $a<0$ **のとき**

$x=0$ で最小値 $(0-2a)^2=\boldsymbol{4a^2}$

(ii) $0 \leqq 2a \leqq 2$ すなわち $0 \leqq a \leqq 1$ **のとき**

$x=2a$ で最小値 $\mathbf{0}$ (頂点)

(iii) $2<2a$ すなわち $1<a$ **のとき**

$x=2$ で最小値 $(2-2a)^2=\boldsymbol{4(a-1)^2}$

## B 問題：解答

Memo / Answer

**B1** 平方完成：$y=(x+a)^2+1$ 軸は $\boldsymbol{x=-a}$。定義域は $-2 \leqq x \leqq 0$。※軸が $-a$ なので，不等式の向きに注意！

(i) 軸が左外：$-a<-2 \iff \boldsymbol{a>2}$ のとき

$x=-2$ で最小値 $(-2+a)^2+1=\boldsymbol{a^2-4a+5}$

(ii) 軸が中：$-2 \leqq -a \leqq 0 \iff \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2}$ のとき

$x=-a$ で最小値 $\mathbf{1}$

(iii) 軸が右外：$0<-a \iff \boldsymbol{a<0}$ のとき

$x=0$ で最小値 $(0+a)^2+1=\boldsymbol{a^2+1}$

**B2** 例題 2 の結果を利用する。最小値を $m(a)$ とする。(i) $a<0$ のとき，$m(a)=a^2+1=5$

$a^2=4 \implies a=\pm 2$。$a<0$ より $\boldsymbol{a=-2}$

(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき，$m(a)=1=5$

これを満たす $a$ は存在しない（不適）。

(iii) $2<a$ のとき，$m(a)=a^2-4a+5=5$

$a^2-4a=0 \implies a(a-4)=0 \implies a=0,4$。

$2<a$ より $\boldsymbol{a=4}$

以上より，$\boldsymbol{a=-2,4}$