年　　組　　番　氏名

1. 公比倍してズラして引く！

初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和 S_n を求めたい.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

等差数列のとき（ひっくり返す）とは違い, ここでは「S_n を r 倍してズラして引く」という必殺技を使う.

ここがごっそり消える！

$$\begin{array}{rllll} S_n = & a + & \boxed{ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}} & & \\ rS_n = & & \boxed{ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}} & + ar^n \\ \hline -) \quad (1-r)S_n = & a & & - ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

ここから $1-r$ で割り算すれば公式が得られる.

2. 等比数列の和の公式

$1-r$ で割るとき, $r=1$ だと「0 で割る」ことになり危険である. よって場合分けが必要になる.

等比数列の和

初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和 S_n は

(1) **$r \neq 1$ のとき:**

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{または} \quad \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

※ $r > 1$ なら左, $r < 1$ なら右の式を使うと符号が楽.

(2) **$r = 1$ のとき:**

$$S_n = na$$

※ $a, a, a, \ldots, a$ を n 個足すだけ.

注意点：指数のミス

公式の中にある r^n の n は**「項数（足す個数）」**である. 一般項 $a_n = ar^{n-1}$ の指数と混同しないように注意！

例題 1 (基本計算)

初項 2, 公比 3, 項数 4 の等比数列の和を求めよ.

Memo / Answer

3. 項数 n を正しく数える

末項が与えられている場合, まず一般項から「項数 n」を求める必要がある.

例題 2 (項数を求めてから和)

次の等比数列の和を求めよ.

$$1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 128$$

Memo / Answer

4. 公比が文字の場合

公比に文字 x が含まれるときは, $x = 1$ かどうかで場合分けが必要になる.

例題 3 (場合分けが必要な和)

初項 1, 公比 x, 項数 n の等比数列の和 S_n を求めよ.

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (和の計算)

次の等比数列の和を求めよ.

(1) 初項 3, 公比 2, 項数 5
(2) 初項 1, 公比 -2, 項数 4

Memo / Answer

練習 A2 (分数・小数の和)

初項 8, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の, 初項から第 4 項までの和を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (項数を求める)

次の等比数列の和を求めよ.

$$2,\ 6,\ 18,\ \ldots,\ 486$$

Memo / Answer

練習 B2 (文字を含む和)

次の等比数列の和を求めよ.

$$1,\ x^2,\ x^4,\ \ldots,\ x^{2(n-1)}$$

ただし n は自然数とする.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

$a=2, r=3, n=4$. 公比 $r>1$ なので $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ を使う.

$$S=\frac{2(3^4-1)}{3-1}=\frac{2(81-1)}{2}=\mathbf{80}$$

例題 2 解答

初項 $a=1$, 公比 $r=2$. まず項数 n を求める. 一般項は $a_n=1\cdot 2^{n-1}$. 末項が 128 なので,

$$2^{n-1}=128=2^7$$

よって $n-1=7 \implies n=8$. (項数は 8)

和の公式より

$$S=\frac{1(2^8-1)}{2-1}=256-1=\mathbf{255}$$

例題 3 解答

(i) $x\neq 1$ のとき公式より $S_n=\dfrac{1(x^n-1)}{x-1}=\dfrac{\boldsymbol{x^n-1}}{\boldsymbol{x-1}}$

(ii) $x=1$ のとき数列は $1, 1, 1, \ldots$ となる. これを n 個足すので, $S_n=1\times n=\boldsymbol{n}$

答: $x\neq 1$ のとき $\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $x=1$ のとき n.

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(1) $r=2$. $S=\dfrac{3(2^5-1)}{2-1}=3(32-1)=3\times 31=\mathbf{93}$.

(2) $r=-2$. $S=\dfrac{1(1-(-2)^4)}{1-(-2)}=\dfrac{1-16}{3}=\dfrac{-15}{3}=\mathbf{-5}$. (※項数 4 は偶数なので $(-2)^4=16$. 符号に注意)

練習 A2 解答

$a=8, r=\frac{1}{2}, n=4$.

$$S=\frac{8(1-(\frac{1}{2})^4)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8(1-\frac{1}{16})}{\frac{1}{2}}$$

分子分母に 2 を掛けるイメージで整理すると,

$$S=16\left(\frac{15}{16}\right)=\mathbf{15}$$

練習 B1 解答

初項 $a=2$, 公比 $r=3$. 末項 486 より項数を求める. $a_n=2\cdot 3^{n-1}=486$. $3^{n-1}=243=3^5$.

よって $n-1=5 \implies n=6$.

和は $S=\dfrac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=729-1=\mathbf{728}$.

練習 B2 解答

この数列は, 初項 1, 公比 x^2, 項数 n の等比数列である. 公比が x^2 なので, 場合分けの基準は $x^2=1$ つまり $x=\pm 1$ である.

(i) $x^2\neq 1$ $(x\neq\pm 1)$ のとき

$$S_n=\frac{1\cdot((x^2)^n-1)}{x^2-1}=\frac{\boldsymbol{x^{2n}-1}}{\boldsymbol{x^2-1}}$$

(ii) $x^2=1$ $(x=1,-1)$ のとき数列は $1, 1, 1, \ldots$ となる. よって $S_n=1\times n=\boldsymbol{n}$.