年　組　番　氏名

1. 発展：方程式の実数解の個数

定数を分離して「グラフ」で見る

方程式 $f(x) = a$ の実数解は，

- 曲線 $y = f(x)$
- 直線 $y = a$ (横線)

の共有点として視覚化できる．「解の個数を求めよ」と言われたら，**a を分離してグラフを描け！**

例題 1（定数分離）

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - a = 0$ が，異なる 3 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

Step

(1) $x^3 - 3x^2 = a$ と変形する．
(2) $y = x^3 - 3x^2$ のグラフを描く．
(3) 直線 $y = a$ を上下に動かし，3 回交わる範囲を探す．

Memo / Answer

2. 発展：絶対値を含む不等式

三角不等式

絶対値についても，重要な不等式がある．

$$|a + b| \leqq |a| + |b|$$

「寄り道せずに足した長さ ($|a + b|$)」よりも，「それぞれの長さを足したもの ($|a| + |b|$)」の方が長い（か等しい），という意味．三角形の成立条件とも関係している．

例題 2（三角不等式の証明）

不等式 $|a + b| \leqq |a| + |b|$ を証明せよ．

Memo / Answer

単元のおわりに

私たちは数を「複素数」まで広げ，方程式が必ず解ける完全な世界を手に入れた．しかし，同時に「大小関係」という順序を失った．だからこそ，私たちが普段扱う「実数」がいかに特別な存在であるか（大小があり，2 乗して正になる），そのありがたみが分かったはずだ．この「実数の性質」は，次の単元「図形と方程式」や「三角関数」でも土台として君たちを支えてくれるだろう．

Last Challenge!

練習 1（解の配置問題）

2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ が, 次のような解をもつように定数 a の値の範囲を定めよ.

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ

(2) 異符号の解をもつ

Memo / Answer

練習 2（絶対値の証明）

$|a| < 1,\ |b| < 1$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$|a + b| < 1 + ab$$

Hint

両辺正であることを確認して, 2 乗の差をとる. $(1+ab)^2 - (a+b)^2 = 1+2ab+a^2b^2 - (a^2+2ab+b^2) = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$. 因数分解すると $(1-a^2)(1-b^2)$. 条件 $|a| < 1$ より $1 - a^2 > 0$ ...

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

練習 3（パラメータと 3 次方程式）

方程式 $x^3 - 3x + 1 = k$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

Memo / Answer

Congratulations!

これで「式と証明・複素数と方程式」の全課程は終了です．この単元で培った「論理力（証明）」と「計算力（方程式）」は，数学 II・B のあらゆる場面で武器になります．自信を持って次に進んでください！