## 1. 位置ベクトル ＝ 「点の住所」

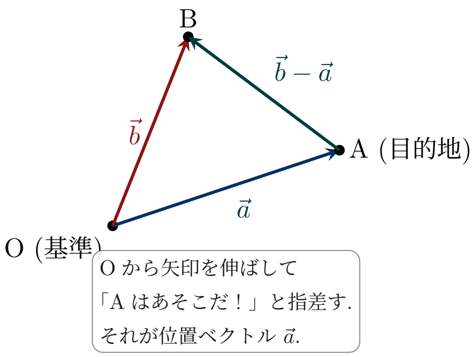
「点 A」と「点 B」を足すことはできないが，ベクトルなら計算ができる．そこで，平面上の**すべての点にベクトルを対応させて**，点の場所を計算で扱えるようにしたい．

**位置ベクトルの考え方**

平面上のどこかに，基準となる点 O（原点）を 1 つ決める．すると，どんな点 A に対しても，O から A への矢印 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ がただ 1 つ決まる．
この $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を **点 A の位置ベクトル** といい，$A(\vec{a})$ で表す．

$$\text{点 A} \longleftrightarrow \text{ベクトル } \vec{a} \quad \text{(O を基準とした A の住所)}$$

**視覚的イメージ:**




**重要：2 点間のベクトル**

「A から B へ行く」という移動 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，位置ベクトルを使うと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \text{終点} - \text{始点} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表せる．(**あと － まえ**) これは「B の場所 ($\vec{b}$)」から「A の場所 ($\vec{a}$)」を引くことで，2 点間の相対的な位置関係を求めていることになる．

## 2. 三角形の重心

**重心の公式**

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 $G(\vec{g})$ は:

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これも座標の公式（平均）と同じ形である．

**例題 1 (分点の計算)**

2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(1) 線分 AB を $3:2$ に内分する点 $P(\vec{p})$
(2) 線分 AB を $3:1$ に外分する点 $Q(\vec{q})$
(3) 線分 AB の中点 $M(\vec{m})$

**例題 2 (重心の利用)**

△ABC の重心を G とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

**方針:** 始点を任意の点 O（原点）にそろえて計算する．$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{a} - \vec{g}$ と変形できる．

## 3. ベクトル等式を「図形」に翻訳する

「$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$」のような式を見たとき, 点 P がどこにあるか瞬時にわかるだろうか？ 式変形により, これを**内分の公式の形**に帰着させるのがコツである.

### 例題 3 (等式を満たす点の位置)

2 点 A, B と点 P があり, $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$ が成り立っている. 点 P はどのような位置にあるか.

**解法 1 (始点変更):** すべて始点を A に書き換える.

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

**解法 2 (視覚的解釈):** $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$. つまり A→P の 3 倍が B→P と等しい（逆向き）.

### 例題 4 (三角形と点)

△ABC と点 P に対し, 次の等式が成り立つとき, 点 P はどのような位置にあるか.

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

**ヒント:** 1. 始点を A にそろえて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求める. 2. 求まった式を「内分の公式」の形に無理やり変形して解釈する.

(途中式) $\vec{a}=\vec{0}$ (A を原点) と考えると計算が楽. $-\vec{p}+2(\vec{b}-\vec{p})+3(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}$

年　組　番　氏名

## C1. 重心公式の数学的証明

三角形の重心は，**「中線を 2 : 1 に内分する点」**として定義される．これと分点の公式を用いて，重心の位置ベクトル $\vec{g}$ を導く．

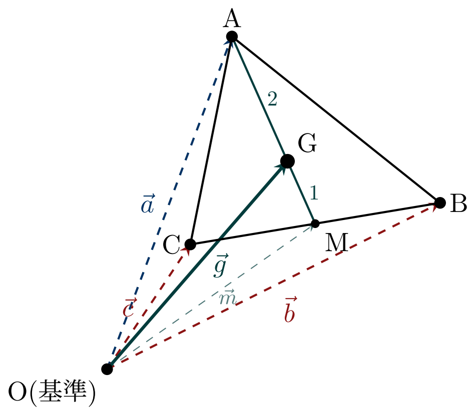
**証明の流れ**

(1) 辺 BC の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ を求める．
(2) 重心 G は線分 AM を 2 : 1 に内分する点である．
(3) 内分点の公式を用いて $\vec{g}$ を計算する．

**【証明】**
基準点 $O$ を任意にとり，3 点位置ベクトルをそれぞれ A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) とする．
まず，辺 BC の中点 M($\vec{m}$) は，中点の公式より

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \cdots (1)$$

である．




次に，重心 G($\vec{g}$) は中線 AM を 2 : 1 に内分する点であるから，内分の公式より

$$\vec{g} = \frac{1\vec{a}+2\vec{m}}{2+1} = \frac{\vec{a}+2\vec{m}}{3}$$

ここで (1) を代入すると，

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+2\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}$$

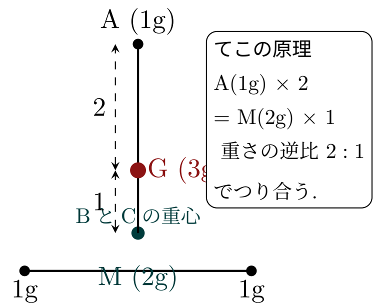
2 が約分されて消えるので，

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{(証明終)}$$

## C2. 「足して 3 で割る」の直感的意味

なぜ重心は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ という「平均」の形になるのか？ 物理的な**「おもりのつり合い」**で考えると納得しやすい．

- 頂点 A, B, C にそれぞれ **1g** のおもりを置く．
- この 3 点をつり合わせる点（バランスポイント）が重心 G である．




(1) B(1g) と C(1g) の重心は，ど真ん中の M にあり，ここに合計 **2g** の重さがかかるとみなせる．
(2) 次に，A(1g) と M(2g) のつり合いを考える．
(3) てこの原理より，支点 G は「重さの逆比」つまり 2 : 1 の位置にくる．

これが，重心が中線を 2 : 1 に内分する理由であり，結果として 3 つの点の「平均位置」になる理由である．

**発展：4 面体の重心**

この考え方を拡張すると，空間図形における四面体 ABCD の重心 G も推測できる．4 つの頂点の「平均」をとればよいので，

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

となる．（これも入試で使える知識である）

年　　組　　番　氏名

## 確認テスト (A: 基本)

### 練習 A1 (分点公式)

2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) に対し, 次の点を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ.

(1) 線分 AB を 1 : 2 に内分する点 D($\vec{d}$)
(2) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点 E($\vec{e}$)
(3) 線分 AB の中点 M($\vec{m}$)

Memo / Answer

### 練習 A2 (重心)

3 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC の重心を G とする. 辺 BC の中点を M とするとき, 線分 AM を 2 : 1 に内分する点の位置ベクトルを求め, それが G と一致することを確認せよ.

Memo / Answer

## 確認テスト (B: 標準)

### 練習 B1 (等式の読み取り)

一直線上の 3 点 A, B, P について,

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

が成り立つとき, 点 P は線分 AB をどのように分ける点か答えよ.

Memo / Answer

### 練習 B2 (三角形の内部の点)

△ABC において,

$$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

を満たす点 P はどのような位置にあるか. 「辺 BC の中点 M を用いて」説明せよ.

Memo / Answer

## 解答 (A: 基本)

### 練習 A1 (分点公式)

(1) $\vec{d} = \frac{2\vec{a}+1\vec{b}}{1+2} = \boldsymbol{\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}}$
(2) $\vec{e} = \frac{-2\vec{a}+3\vec{b}}{3-2} = \boldsymbol{-2\vec{a}+3\vec{b}}$
(3) $\vec{m} = \boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$

Memo / Answer

**A2 解答:**

辺 BC の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は,

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

線分 AM を 2 : 1 に内分する点 P($\vec{p}$) は,

$$\vec{p} = \frac{1\vec{a}+2\vec{m}}{2+1} = \frac{\vec{a}+2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3}$$
$$= \frac{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これは重心 G の公式と一致する．よって，重心は中線を 2 : 1 に内分する点である．

## 解答 (B: 標準)

Memo / Answer

**B1 解答:**

始点を原点 O にして位置ベクトルで考える．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ などとする．

$$2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p}) = \vec{0}$$
$$2\vec{a}-2\vec{p}+3\vec{b}-3\vec{p} = \vec{0}$$
$$5\vec{p} = 2\vec{a}+3\vec{b}$$
$$\vec{p} = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5} = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}$$

この式は，線分 AB を 3 : 2 **に内分する点** を表している．

**別解:** $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の比を求める．$2\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -3\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BP}}$．向きが同じなので $2|\mathrm{PA}| = 3|\mathrm{PB}| \implies \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 3 : 2$.

Memo / Answer

**B2 解答:**

始点を A にそろえる．($A$ を原点扱い: $\vec{a} = \vec{0}$)

$$2(-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p}) = \vec{0}$$
$$-4\vec{p}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0} \implies 4\vec{p} = \vec{b}+\vec{c}$$
$$\vec{p} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

ここで，辺 BC の中点 M は $\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ なので，$\vec{b}+\vec{c} = 2\vec{m}$．これを代入すると:

$$\vec{p} = \frac{2\vec{m}}{4} = \frac{1}{2}\vec{m}$$

これは $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を意味する．

**答え:** 点 P は，**線分 AM の中点** である．