

Introduction：文字は「数」だが、ただの数ではない

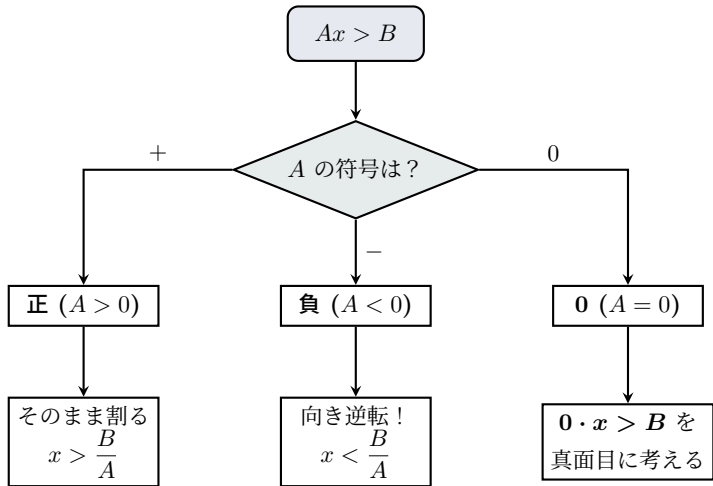
不等式  $2x > 6$  を解くとき、迷わず 2 で割って  $x > 3$  とします。では、不等式  $ax > 6$  ならどうでしょう？

$$x > \frac{6}{a} \quad \cdots \text{としてはいけません！}$$

なぜなら、もし  $a = -2$  だったら不等号は逆転しますし、もし  $a = 0$  だったら「ゼロ割り」という数学最大のタブーを犯すことになるからです。文字を見たら「正・負・0」の 3 パターンを疑う。これが「場合分け」の入り口です。

文字係数の処理フローチャート

不等式  $Ax > B$  を解くときの手順：



特に  $A = 0$  の場合： $0 \cdot x > B$  という式になります。 $0 \cdot x$  は常に 0 なので、 $0 > B$

という式が「正しい (真)」か「間違い (偽)」かで判定します。

- 正しいとき → どんな  $x$  でも OK → **すべての実数**
- 間違いのとき → どんな  $x$  でもダメ → **解なし**

例題 1： $a$  で割れるか？

不等式  $ax > 3$  を解け。

考え方:  $a$  の符号 (プラス, マイナス, ゼロ) で場合分けします。

- (1)  $a > 0$  のとき：そのまま割って  $x > \frac{3}{a}$
- (2)  $a < 0$  のとき：向きが変わって  $x < \frac{3}{a}$
- (3)  $a = 0$  のとき：式は  $0 \cdot x > 3$  つまり  $0 > 3$ 。これはありえない (偽)。よって、**解なし**。

Memo / Answer

例題 2：係数に式を含む場合

不等式  $(a - 1)x \geq 2$  を解け。

考え方:  $x$  の係数は  $(a - 1)$  です。このカタマリが正・負・0 のときを考えます。

- 正:  $a - 1 > 0 \iff a > 1$
- 負:  $a - 1 < 0 \iff a < 1$
- 0:  $a - 1 = 0 \iff a = 1$

Memo / Answer

Topic：整理してから場合分け

最初から  $Ax > B$  の形になっているとは限りません。まずは  $x$  を含む項を左辺に集め、因数分解して

$$( \quad )x > ( \quad )$$

の形を作るのが第一歩です。

例題 3：項をまとめてから解く

$a$  を定数とすると、不等式  $ax + 2 > 2x + a$  を解け。

手順:

- 移項して  $x$  を左辺にまとめる。 $ax - 2x > a - 2$
- 係数でくくる。 $(a - 2)x > a - 2$
- 係数  $(a - 2)$  の符号で場合分けをする。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 基本的な文字係数

$a$  を定数とするとき、不等式  $ax \leq 5$  を解け。

練習 A2: 0 の解釈

次の不等式の解を答えよ。

- (1)  $0 \cdot x > -2$
- (2)  $0 \cdot x \leq -5$
- (3)  $0 \cdot x \geq 0$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 項をまとめるタイプ

$a$  を定数とするとき、不等式  $ax + 1 > x + a^2$  を解け。

練習 B2: ちょっと複雑な場合分け

$a$  を定数とするとき、不等式  $ax \geq 2x - a + 2$  を解け。

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1  $a$  の符号で場合分けをする。

- (1)  $a > 0$  のとき向きはそのまま。 $x \leq \frac{5}{a}$
- (2)  $a < 0$  のとき向きが逆転する。 $x \geq \frac{5}{a}$
- (3)  $a = 0$  のとき不等式は  $0 \cdot x \leq 5$  となる。左辺は常に 0 なので、 $0 \leq 5$  は常に成り立つ。よって、**すべての実数**。

A2

- (1)  $0 > -2$  は正しい。→ **すべての実数**
- (2)  $0 \leq -5$  は間違い。→ **解なし**
- (3)  $0 \geq 0$  は正しい（等号成立）。→ **すべての実数**

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 移項して整理する。

$$\begin{aligned} ax - x &> a^2 - 1 \\ (a - 1)x &> (a + 1)(a - 1) \end{aligned}$$

係数  $(a - 1)$  の符号で場合分け。

(i)  $a - 1 > 0$  すなわち  $a > 1$  のとき正の数で割るので向きはそのまま。

$$x > \frac{(a + 1)(a - 1)}{a - 1} \implies x > a + 1$$

(ii)  $a - 1 < 0$  すなわち  $a < 1$  のとき負の数で割るので向きは逆転。

$$x < \frac{(a + 1)(a - 1)}{a - 1} \implies x < a + 1$$

(iii)  $a - 1 = 0$  すなわち  $a = 1$  のとき不等式は  $0 \cdot x > 0 \cdot 2$  つまり  $0 > 0$  となる。これは成り立たない。よって、**解なし**。

B2 整理する。

$$\begin{aligned} ax - 2x &\geq -a + 2 \\ (a - 2)x &\geq -(a - 2) \end{aligned}$$

係数  $(a - 2)$  の符号で場合分け。

(i)  $a - 2 > 0$  すなわち  $a > 2$  のとき

$$x \geq \frac{-(a - 2)}{a - 2} \implies x \geq -1$$

(ii)  $a - 2 < 0$  すなわち  $a < 2$  のとき向きが逆転。

$$x \leq \frac{-(a - 2)}{a - 2} \implies x \leq -1$$

(iii)  $a - 2 = 0$  すなわち  $a = 2$  のとき不等式は  $0 \cdot x \geq 0$  となる。これは常に成り立つ。よって、**すべての実数**。