

1. 微積分学の基本定理 ～ Fundamental Theorem of Calculus ～

面積関数 $S(x)$ のおさらい.

$f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分 ($a \sim x$) の面積を $S(x)$ とする. 前回, 次の衝撃的な事実を証明した.

$S'(x) = f(x)$ (微積分学の基本定理)

つまり, 「面積関数 $S(x)$ は, 元の関数 $f(x)$ の原始関数の一つである」.
実は, この定理には続きがある.

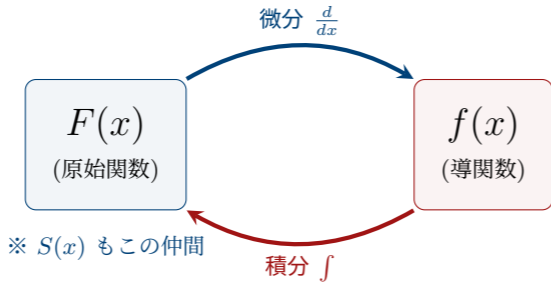
「微積分学の基本定理 II」

関数 $f(x)$ の原始関数のうちの一つを $F(x)$ とする. このとき, 任意の積分区間 $[a, b]$ に対して次が成り立つ.

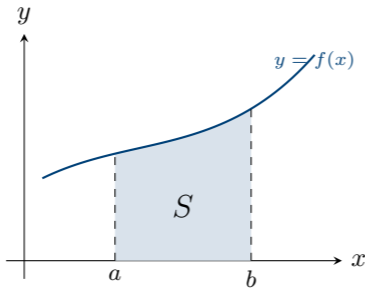
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

注意: 2 つの定理からわかること

- 「積分」と「微分」が互いに逆演算であること.



- 「面積」を求めるために必要なのは,
「端点 a, b 」と「原始関数 $F(x)$ 」
のみであること.



証明の方針

- (1) 面積関数 $S(x)$ は $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ で定義されており, 定理の右辺は $S(b)$ のことである.

$$S(b) = \int_a^b f(t)dt$$

- (2) 面積関数 $S(x)$ と原始関数 $F(x)$ は互いに定数分のずれがある.

$$S(x) = F(x) + C$$

- (3) 面積関数 $S(x)$ は, $x = a$ のとき 0 になる.

$$S(a) = 0$$

Proof of theorem II

Grid area for the proof of theorem II.

2. 定積分の計算 (面積計算)

便利な記号と計算手順

定積分の計算 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ の右辺を

$$\underbrace{[F(x)]_a^b}_{\text{上の文字-下の文字}} = F(b) - F(a)$$

と書く (この記号があると計算がしやすくなる). この記号を使用し, 定積分の計算 (面積計算) は以下の手順で行う.

- (1) 原始関数 $F(x)$ を求める. (一番簡単なもので良い.)
- (2) 求めた原始関数 $F(x)$ を利用して, 定理を用いる.

以上, 面積計算に必要なステップはこれだけである.

例題 1

定積分 $\int_1^3 2x dx$ を求めよ.

解答 $f(x) = 2x$ の原始関数 $F(x)$ のうちの一つは

$$F(x) = x^2. \quad \leftarrow \text{微分して } 2x \text{ になる関数}$$

よって, 定積分は

$$\int_1^3 2x dx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

例題 2

曲線 $y = x^2 + 1$ と x 軸, および直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

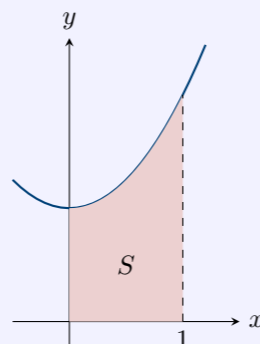
解答 面積は $S = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$ である.

関数 $f(x) = x^2 + 1$ の原始関数のうちのひとつ $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x.$$

よって面積 S は,

$$S = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 = \frac{4}{3}$$



練習 1

次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_1^4 3x^2 dx$$

$$(2) \int_{-1}^2 (6x^2 + 4x - 1)dx$$

練習 2

次の曲線と x 軸, および $[]$ 内の直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

$$(1) y = 3x^2 \quad [x = 1, x = 2]$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 3 \quad [x = 0, x = 3]$$

Memo / Answer

確認テスト

練習 A：定積分の計算

次の定積分を求めよ.

(1) $\int_{-2}^1 4x^3 dx$

(2) $\int_1^2 (3x^2 - 4x + 2)dx$

Memo / Answer

練習 B：面積

曲線 $y = -x^2 + 4$ と x 軸 ($y = 0$) で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

ヒント：

(1) まずグラフを描いて、積分区間 (x 軸との交点) を求める.

$$-x^2 + 4 = 0 \iff x = \dots$$

(2) その区間で定積分する.

Memo / Answer

