0. 順列の定義

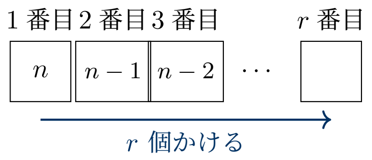
異なるいくつかのものから，いくつかを選んで，「順序をつけて」1 列に並べる並べ方の総数を順列 **(Permutation)** といいます．

定義：順列 ${}_nP_r$

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して 1 列に並べる順列の総数は，

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} $$

- 最初の箱には n 通り
- 次の箱には $n-1$ 通り
- $\cdots$ と r 個の箱を埋めていく「積の法則」そのものです．



1. 階乗と特殊な順列

n 個「すべて」を並べるとき，特別な記号を使います．

定義：階乗 $n!$（Factorial）

異なる n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は，

$$ {}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

ただし，$0! = 1$，${}_nP_0 = 1$ と定める．

例題 1．順列の計算

(1) 次の値を求めよ．　(a) ${}_5P_3$　(b) $5!$　(c) ${}_7P_1$　(d) $0!$

(2) 10 人の生徒から，会長，副会長，書記を 1 人ずつ選出する方法は何通りあるか．

Memo / Answer

2. 整数の作成問題

数字を並べて整数を作るときは，最高位（一番上の位）に **0 が来られない**という制約に注意します．

条件のある順列の鉄則

「制約の強い場所」から先に決める！

例題 2．整数の作成

$0, 1, 2, 3, 4$ の 5 個の数字のうち，異なる 4 個を使って 4 桁の整数を作るとき，次のような整数は何個できるか．

(1) 整数すべて
(2) 偶数

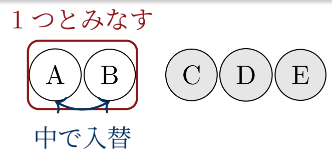
Memo / Answer

3. 隣り合う順列（ブロック化）

「A と B が隣り合う」ときは，2 人を紐で縛って**「1 セット」**とみなします．

隣り合う順列の解法ステップ

(1) 隣り合うもの同士をまとめて **1 つの箱（ブロック）**とみなす．
(2) ブロックと，残りのものを並べる（外側の順列）．
(3) ブロックの中で，並び替える（内側の順列）．
(4) 最後に積の法則で掛け合わせる．



例題 3．隣り合う順列

女子 2 人，男子 4 人が 1 列に並ぶとき，女子 2 人が隣り合う並び方は何通りあるか．

Memo / Answer

4. 両端指定・位置固定

「両端が～」「〇番目が～」という指定がある場合も，やはり**「制約の強い場所」**から埋めていきます．

例題 4. 両端指定と固定

男子 4 人，女子 3 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか．

(1) 両端が女子である．
(2) 両端の少なくとも 1 人が男子である．
(3) 女子 3 人が続いて並ぶ．

Memo / Answer

Lecture Note

■ 0 の処理の別解（補集合の利用）

例題 2(1) のような問題では，「0 を気にせず並べた全体」から「0 が千の位に来てしまった場合（3 桁になってしまった場合）」を引くという考え方も有効です．

$$ {}_5P_4 - {}_4P_3 $$

これは「少なくとも～」の問題で威力を発揮します．

■ 「隣り合う」の逆は？

「隣り合わない」という条件は，「全体 − 隣り合う」**ではありません．**（3 人以上の場合，2 人だけ隣り合うケースが残るため）隣り合わない順列については，次回の授業で「隙間に入れる方法」として詳しく扱います．今回はまず「隣り合う＝ブロック」を完璧にしましょう．

氏名 得点 / 20

確認テスト A（基本）

練習 1：順列の計算

次の値を求めよ.

(1) ${}_6P_2$
(2) $6!$
(3) ${}_4P_4$
(4) $1!$

練習 2：文字列の作成

6 個の文字 a, b, c, d, e, f から異なる 3 個を選んで 1 列に並べるとき,

(1) 並べ方は全部で何通りあるか.
(2) a が含まれている並べ方は何通りあるか.

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：整数の作成

$0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 個の数字から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作るとき,

(1) 整数は全部で何個できるか.
(2) 偶数は何個できるか.

練習 4：隣り合う順列

大人 2 人，子供 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか.

(1) 大人 2 人が隣り合う.
(2) 両端に大人が来る.

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

(1) $6 \times 5 = \mathbf{30}$
(2) $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{720}$
(3) $4! = \mathbf{24}$
(4) $\mathbf{1}$

2

(1) ${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = \mathbf{120}$ (通り)
(2) 「a を含む」という条件処理.

- まず a を置く場所を決める $\to$ 3 通り
- 残りの 2 ヶ所を，a 以外の 5 文字から 2 個選んで並べる $\to {}_5P_2$

よって，$3 \times (5 \times 4) = \mathbf{60}$ (通り).
別解：a を必ず選ぶので，残り 5 文字から 2 文字選ぶ ($5 \times 4/2 = 10$ 通り)．選ばれた 3 文字 $(a, \bigcirc, \triangle)$ を並べる ($3! = 6$ 通り)．よって $10 \times 6 = 60$ 通り.

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

(1) 百の位は 0 以外の 5 通り．十，一の位は残り 5 個から 2 個選んで並べる.

$$5 \times {}_5P_2 = 5 \times (5 \times 4) = \mathbf{100} \text{ (個)}$$

(2) 偶数なので一の位が $0, 2, 4$ のいずれか．0 の扱いに注意して場合分けする.

(i) 一の位が 0 のとき：
百，十の位は残り 5 個から 2 個．${}_5P_2 = 20$ 個.
(ii) 一の位が $2, 4$ のとき（2 通り）：
百の位は 0 と一の位以外なので 4 通り.
十の位は残り 4 通り.
よって $2 \times (4 \times 4) = 32$ 個.

合計して $20 + 32 = \mathbf{52}$ (個).

4

(1) 大人 2 人を 1 セット (AB) とみなす．全体は「セット＋子供 4 人」の計 5 つの順列 $\to 5!$.
セットの中で大人の入替 $\to 2!$.

$$5! \times 2! = 120 \times 2 = \mathbf{240} \text{ (通り)}$$

(2) まず両端に大人 2 人を並べる．大人は 2 人しかいないので，並べ方は $2! = 2$ 通り．間に子供 4 人を並べる $\to 4! = 24$ 通り.

$$2 \times 24 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$