Introduction：急がば回れ

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ のとき，$x^3 - x$ の値を求めよ。そのまま代入すると $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \ldots$ 計算ミスをしそうです。
数学では，複雑な値を代入する前に**「式を扱いやすい形に変形する」**あるいは**「簡単な部品を作ってから組み立てる」**ことが鉄則です。

分母の有理化（項が 3 つの場合）

分母にルートが 2 つ以上ある場合，**「カタマリ」**を作って $(A+B)(A-B)$ の形に持ち込みます。
例：$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の有理化

(1) 2 つをセットにする：$\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$
(2) 符号違いを掛ける：分母・分子に $(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ を掛ける。
(3) もう一度有理化が必要になることが多い。

例題 1：3 項の有理化

次の式を有理化せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

考え方: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ をカタマリと見て，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$ を掛けます。分母を展開すると，

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = (2+2\sqrt{6}+3) - 5 = 2\sqrt{6}$$

うまく整数部分が消えて，単項式になります！

Memo / Answer

対称式の値：ペアの力

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のように，符号だけ違うペアは非常に相性が良いです。

- 和：$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$　（シンプル！）
- 積：$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$　（超シンプル！）

この「和」と「積」さえあれば，どんな対称式も計算できます。

対称式の変形公式（再確認）

x,y の対称式は，必ず**基本対称式** $(x+y)$ と xy で表せる。

- $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

戦略：いきなり代入せず，まず $x+y$ と xy の値を計算し，公式に代入する。

例題 2：対称式の値

$x=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y,\ xy$

(2) x^2+y^2

(3) x^3+y^3

手順: まず x,y それぞれを有理化して簡単にします。その後，基本対称式の値を求め，公式を利用します。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 基本の有理化

次の式を有理化せよ。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

練習 A2: 基本的な対称式の値

$x=\sqrt{3}+1,\ y=\sqrt{3}-1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$

(2) xy

(3) x^2+y^2

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 3 項の有理化

次の式を有理化せよ。

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

練習 B2: 式の値（応用）

$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+\frac{1}{x}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}$

練習 B3: 少し複雑な対称式

$x=2-\sqrt{3},\ y=2+\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) 分母・分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ を掛ける。

$$\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

(2) 分母・分子に $\sqrt{2}+1$ を掛ける。

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$$

A2

(1) $x+y=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

(2) $xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=3-1=\boldsymbol{2}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2=12-4=\boldsymbol{8}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 分母の $(1+\sqrt{2})$ をカタマリと見て，$(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$ を掛ける。

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$$

分母 $=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=(1+2\sqrt{2}+2)-3=2\sqrt{2}$ よって，式は

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

さらに分母・分子に $\sqrt{2}$ を掛けて有理化する。

$$\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{2}}$$

B2 まず $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ より，$\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(1) $x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{5})^2-2=\boldsymbol{3}$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

B3 通分すると基本対称式が現れる。

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{y^2+x^2}{xy}$$

$x+y=4,\quad xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2=14$

よって，

$$\frac{14}{1}=\boldsymbol{14}$$