

## ♣ 学びの全体像



## 1. 数列の世界へようこそ

クイズ: 次の □ に入る数字はなんでしょう？

- (1) 2, 4, 6, 8, □
- (2) 1, 2, 4, 7, 11, □
- (3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, □

このように、数を一列に並べたものを数列という。

## 用語の定義

- 項 (こう): 数列を作る一つ一つの数。
- 初項 (しょこう): 1 番目の数。 $(a_1$  と書く)
- 末項 (まっこう): 最後の数。
- 第  $n$  項:  $n$  番目の数。 $(a_n$  と書く)
- 一般項: 第  $n$  項を  $n$  の式で表したもの。

数列全体を  $\{a_n\}$  と表すことが多い。

例: 3, 6, 9, 12, ...

- 初項  $a_1 = 3$
- 第 2 項  $a_2 = 6$
- 一般項  $a_n = 3n$

数列のルールを他人に伝えるとき、どう表現するのが良いだろうか？ 実は、大きく分けて 2 つの流儀がある。

## 2. ルールを伝える 2 つの方法

例として、奇数の列 1, 3, 5, 7, 9, … を考えよう。

A ワープ型 (一般項  $a_n$ )

「 $n$  番目の数は  $2n - 1$  だよ」と伝える方法。

$$a_n = 2n - 1$$

メリット:  $n = 100$  を代入すれば、いきなり 100 番目がわかる。

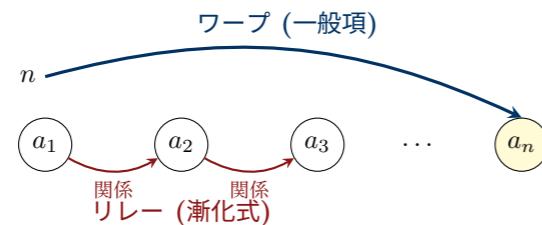
## B リレー型 (漸化式)

「最初は 1 で、次は前の数に 2 を足したものだよ」と伝える方法。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

この「隣り合う項の関係式」を漸化式 (ぜんかしき) という。

メリット: 数字が変化していく様子 (プロセス) が記述できる。コンピュータのプログラムや自然現象はこれらに近い。



## 例題 1 (一般項から書き出す)

一般項が  $a_n = n^2 + 1$  で表される数列の、初項から第 4 項までを求めよ。

## 例題 2 (漸化式から書き出す)

次の条件で定められる数列の、初項から第 4 項までを求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n$$

Memo / Answer

## 確認テスト (A: 基本)

## 確認テスト (B: 標準)

## 練習 A1 (一般項の利用)

次の一般項を持つ数列の初項から第 3 項までを書き出せ.

- (1)  $a_n = 3n - 2$
- (2)  $a_n = 2^n$
- (3)  $a_n = (-1)^n \cdot n$

Memo / Answer

## 練習 B1 (規則性の記述)

次の数列の規則性を発見し、一般項  $a_n$  と漸化式  $a_{n+1} = \dots$  の両方で表現してみよ.

5, 10, 15, 20, ...

Memo / Answer

一般項:  $a_n =$

漸化式:  $a_1 =$ ,  $a_{n+1} =$

## 練習 B2 (少し複雑な漸化式)

次の漸化式で定義される数列の第 2 項、第 3 項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$$

(ヒント: 次の数は、前の数を 2 倍して 1 足したもの)

Memo / Answer

## 練習 A2 (漸化式の利用)

次の条件で定められる数列の初項から第 4 項までを書き出せ.

- (1)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4$
- (2)  $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

Memo / Answer

## 解答 (導入クイズ)

- (1) 10 (2 ずつ増える偶数)  
 (2) 16 (増える数が 1, 2, 3, 4 と変化。次は +5)  
 (3) 13 (前の 2 つを足すと次の数になる。 $5 + 8 = 13$ )

※ (3) はフィボナッチ数列と呼ばれる有名な数列。

## 解答 (A: 基本)

## 練習 A1 解答

$n = 1, 2, 3$  を代入する。

- (1)  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7$ . 答: 1, 4, 7  
 (2)  $a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8$ . 答: 2, 4, 8  
 (3)  $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3$ . 答: -1, 2, -3

## 練習 A2 解答

前の項を使って次を計算する。

- (1) 「4 ずつ足す」数列.  
 $1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+4} 13$ .  
 答: 1, 5, 9, 13  
 (2) 「2 ずつ引く」数列.  
 $3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-2} -3$ .  
 答: 3, 1, -1, -3

## 解答 (B: 標準)

## 練習 B1 解答

数列は 5 の倍数が並んでいる。

一般項:  $n$  番目は  $5 \times n$  なので,

$$a_n = 5n$$

漸化式: 隣同士を見ると 5 ずつ増えているので、「次の項は前の項に 5 を足したもの」。

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n + 5$$

## 練習 B2 解答

$a_{n+1} = 2a_n + 1$  の計算を行う。

•  $n = 1$  のとき:

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

•  $n = 2$  のとき:

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

答え: 第 2 項 3, 第 3 項 7

(参考: さらに続けると 1, 3, 7, 15, 31... となる)