1. 規則が見えないときは「段差」を見る

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項はどうなるだろうか.

$$2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 18,\ 29,\ \ldots$$

等差でも等比でもない. しかし, 「増え方（段差）」に注目すると...

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\{a_n\}: & 2 & & 3 & & 6 & & 11 & & 18 & & \cdots \\
\{b_n\}: & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \cdots &
\end{array}$$

下の段を見ると $1, 3, 5, 7 \ldots$
奇数（等差数列）になっている！

このように, 数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の差

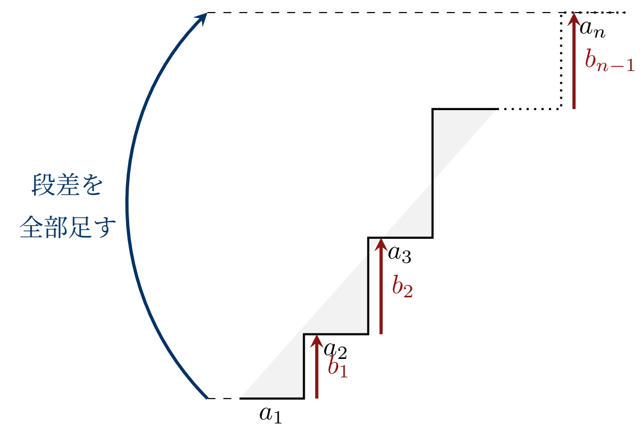
$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を, $\{a_n\}$ の**階差数列**という.

2. 「スタート＋段差」でゴールへ

元の数列 $\{a_n\}$ を求めることは, **階段を登ること**と同じである.

- a_1：スタート地点の高さ（1 階）
- b_k：k 段目の段差の高さ



重要ポイント:
n 階に行くための「段差」は
$\boldsymbol{n-1}$ 個しかない！（植木算）

階差数列を利用した一般項

$$\text{ゴール} = \text{スタート} + \text{段差の合計}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

※ Σ の上が $n-1$ になることに注意.

年　　組　　番　氏名

3. 基本パターン（段差が等差）

例題 1 (階差が等差数列)

次の数列の一般項を求めよ.

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ \ldots$$

Memo / Answer

4. 段差が急激に増える（等比）

段差が「倍々」で増えていくときは, Σ の等比数列の公式を使う.

例題 2 (階差が等比数列)

次の数列の一般項を求めよ.

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \ldots$$

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (階差が等差)

次の数列の一般項を求めよ．

$$2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (階差が等比)

次の数列の一般項を求めよ．

$$2,\ 4,\ 10,\ 28,\ 82,\ \ldots$$

Memo / Answer

練習 B2 (階差の利用)

初項が 1，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n = 3n^2 + 1$ である数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

階差をとると: $1, 3, 5, 7, \ldots$ これは初項 1, 公差 2 の等差数列なので $b_n = 2n - 1$.
$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 = n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると $1^2 - 2(1) + 2 = 1$. 初項と一致する. **答え: $a_n = n^2 - 2n + 2$**

例題 2 解答

階差をとると: $2, 4, 8, 16, \ldots$ これは初項 2, 公比 2 の等比数列. 一般項は $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.
$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \quad (\leftarrow \text{初項 } 2,\ \text{公比 } 2,\ \text{項数 } n-1) \\ &= 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると $2^1 - 1 = 1$. 初項と一致する. **答え: $a_n = 2^n - 1$**

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

階差数列は $1, 3, 5, 7, \ldots$. (初項 1, 公差 2 の等差数列) $b_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$.
$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 2 + n^2 - n - n + 1 \\ &= n^2 - 2n + 3 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $1^2 - 2 + 3 = 2$. 初項と一致. **答え: $a_n = n^2 - 2n + 3$**

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

階差をとると: $2, 6, 18, 54, \ldots$ これは初項 2, 公比 3 の等比数列. $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.
$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 2 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= 2 + (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$. 初項と一致. **答え: $a_n = 3^{n-1} + 1$**

練習 B2 解答

$b_n = 3n^2 + 1$. $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + 1) \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) + (n-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n-1)(2n-1) + n - 1 \\ &= \frac{1}{2}n(2n^2 - 3n + 1) + n \\ &= n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n \\ &= n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $1 - 1.5 + 1.5 = 1$. 初項と一致. **答え: $a_n = n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$**