Introduction：ルートの中身

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

です。このルートの中身 $b^2 - 4ac$ を判別式 D と呼びます。実数の世界では**「ルートの中身はマイナスになってはいけない」**というルールがあるため,

- $D > 0 \to \sqrt{D}$ は正の数 $\to \pm$ で 2 つの解が存在
- $D = 0 \to \sqrt{0} = 0 \to x = \frac{-b}{2a}$ (1 つの解・重解)
- $D < 0 \to$ 実数としては存在しない $\to$ 解なし（0 個）

となるわけです。これがグラフの交点個数と対応しています。

グラフの概形と係数の符号

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを見て，各係数の符号を判定できます。

(1) a **の符号**：グラフの「凸の向き」
- 下に凸 $\iff a > 0$
- 上に凸 $\iff a < 0$

(2) c **の符号**：「y 切片（y 軸との交点)」
- $x = 0$ を代入すると $y = c$ になるため，y 軸との交点の位置で判定。

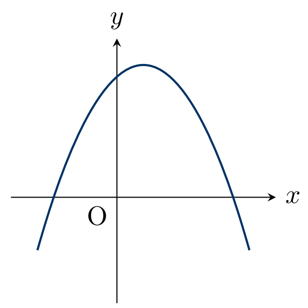
(3) b **の符号**：「軸の位置」と「a の符号」から判断
- 軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$
- 軸が y 軸より右（正）か左（負）かで判定する。

(4) D **の符号**：「x 軸との交点個数」

例題 1：a, c, D の符号判定

右の図のような放物線について，次の値の符号を調べよ。

(1) a
(2) c
(3) $b^2 - 4ac$



着眼点:

(1) 上に凸か下に凸か？
(2) y 軸とどこで交わっているか？（正・原点・負）
(3) x 軸と何箇所で交わっているか？

Memo / Answer

軸の位置と b の符号

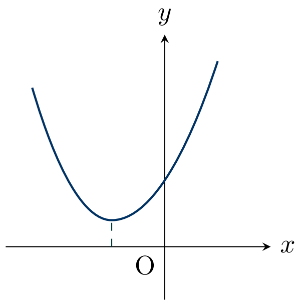
軸の方程式 $x = -\frac{b}{2a}$ の符号を考えます。

- 軸が右側（正）にあるとき $\to -\frac{b}{2a} > 0 \to a$ と b は**異符号**
- 軸が左側（負）にあるとき $\to -\frac{b}{2a} < 0 \to a$ と b は**同符号**

「左同右異（さどううい）」と覚えることもありますが，式から導けるようにしましょう。

例題 2：b の符号判定

右の図のような放物線について，a, b, c の符号を調べよ。



Memo / Answer

特定の値を代入した符号

グラフ上の点の座標から，式の符号を判定できます。

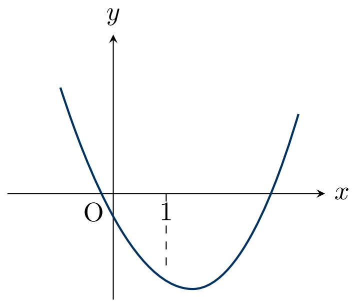
- $x = 1$ を代入 $\to y = a + b + c$
- $x = -1$ を代入 $\to y = a - b + c$
- $x = 2$ を代入 $\to y = 4a + 2b + c$

これらの式の符号は，グラフの $x = 1$ や $x = -1$ における y 座標の正負を見れば分かります。

例題 3：$a + b + c$ の符号

右の図の放物線（頂点の x 座標は 1 より大きい）について，次の符号を調べよ。

(1) $a + b + c$
(2) $a - b + c$



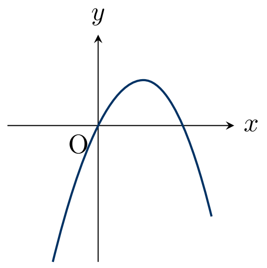
Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

図の放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について，次の値の符号（正・負・0）を答えよ。

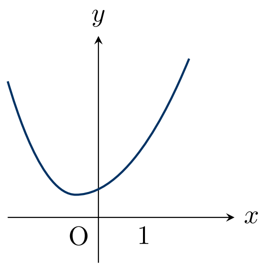
練習 A1: 基本 3 点セット

(1) a
(2) c
(3) $b^2 - 4ac$



練習 A2: 軸と代入値

(1) b
(2) $a + b + c$



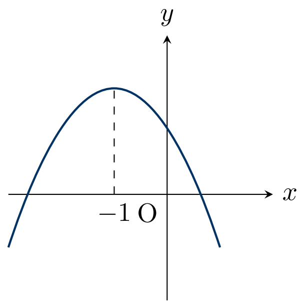
Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 総合判定

図の放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について，次の値の符号を調べよ。ただし，頂点の x 座標は -1 である。

(1) a
(2) b
(3) c
(4) $b^2 - 4ac$
(5) $a - b + c$



Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) 負
グラフが上に凸（山なり）であるため。

(2) 負
y 軸との交点（y 切片）が原点より下にあるため。

(3) 正
x 軸と異なる 2 点で交わっているため（判別式 $D > 0$）。

A2

(1) 正
軸の位置は左側（負）。軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$。¡br¿ グラフが下に凸より $a > 0$。¡br¿ $-\frac{b}{2a} < 0$ と $a > 0$ より，b は正でなければならない。
(a, b が同符号なら軸は左，異符号なら右。今回は左なので同符号 $\to b > 0$)

(2) 正
$a + b + c$ は $x = 1$ のときの y 座標の値である。¡br¿ グラフを見ると，$x = 1$ のときグラフは x 軸より上にあるため。

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) 負
上に凸であるため。

(2) 負
軸が $x = -1$（負の位置）にある。¡br¿ $a < 0$ で，軸 $-\frac{b}{2a}$ が負になるには，b も負である必要がある（a, b 同符号)。¡br¿ ※ 実際に計算すると：$-\frac{b}{2a} = -1 \iff b = 2a$。$a < 0$ なので $b < 0$。

(3) 正
y 軸との交点が原点より上にあるため。

(4) 正
x 軸と異なる 2 点で交わっているため。

(5) 負
$a - b + c$ は $x = -1$ のときの y 座標の値ではなく，$a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c$ である。¡br¿ グラフより，頂点 $x = -1$ のとき y 座標は 2（正）なので，一見「正」に見えるが，
よく見ると式は $a - b + c$ である。これは $x = -1$ の代入値そのものである。¡br¿ ... おっと，問題の意図を確認しましょう。¡br¿ $x = -1$ を代入 $\to y = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c$。¡br¿ グラフの $x = -1$ での y 座標は頂点なので明らかに「正」です。¡br¿ したがって答えは正。
(※もし $x = 1$ の代入値 $a + b + c$ であれば，図を見ると $x = 1$ で y は負になっています)