年　　組　　番　氏名

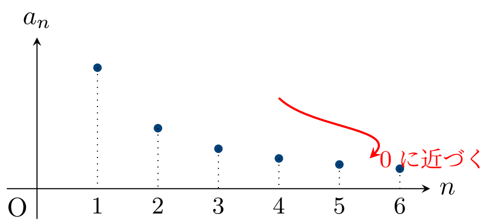
## 1. 数列の極限 $(n \to \infty)$

**導入：前回の振り返りと定義**

前回，「壁に向かって歩く（距離を半分にする操作の繰り返し）」などを通して，

「ある値に向かって限りなく近づいていく」

という現象を扱った．この「目標となる値」のことを**極限値**といい，記号 lim（リミット）を用いて表す．




**定義：**$n$ を $1, 2, 3, \cdots$ と限りなく大きくしていくとき，数列 $\{a_n\}$ の値が一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書き，$\alpha$ をこの数列の**極限値**という．
また，限りなく大きくなることを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{（正の無限大に発散する）}$$

と書く．

**コラム：アルキメデスの原理**

「どんなに小さな正の数でも，何倍かすればどんなに大きな数をも超えることができる」という性質を**アルキメデスの原理**という．

「任意の正の数 $a$，$b$ に対して，ある自然数 $n$ が存在して，$an > b$　が成り立つ.[*1]」

以下の事実はここから導かれる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

## 2. 不定形の極限 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

**例題 1**

次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^2-1}$$

**練習 1**

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+1}{n^2+2}$

**Memo / Answer**

[*1] 杉浦光夫 (1980), 解析入門 I，東京大学出版会

## 3. 関数の極限 $(x \to a)$

**定義と基本ルール**

数列だけでなく，関数 $f(x)$ においても同様に考えられる．

**定義：** $x$ が $a$ とは異なる値をとりながら，限りなく $a$ に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 $b$ に限りなく近づくならば，

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と書く．

**基本ルール：ほとんどの場合**，単に $x$ に $a$ を代入すれば求められる．

**例題 2：代入するだけ**

(1) $\lim_{x \to 2}(x+1) = 2+1 = 3$

(2) $\lim_{x \to 1}(x^2+2x) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

**注意：**「$x \to 2$」は「$x$ は 2 ではないが，限りなく 2 に近い」という意味．

## 4. 不定形の極限 $\left(\frac{0}{0}\right.$ の形$\left.\right)$

**解説：$\dfrac{0}{0}$ の極限**

次のような場合を考える．

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

単純に $x = 1$ を代入すると，分母も分子も 0 になり，$\frac{0}{0}$ となり値が定まらない（**不定形**）．

**対処法：** $\dfrac{0}{0}$ になる原因（犯人）を**因数分解して約分**することで消去する．

**例題 3：不定形の計算**

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ を求めよ．

**練習 2：微分の計算に向けて**

次の極限を求めよ．

(1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{h(2+h)}{h}$

(3) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

## 本日のまとめ

- 極限 lim は「限りなく近づく目標の値」のこと．
- $n \to \infty$ **のとき** ($\frac{\infty}{\infty}$ の形)
  - 分母の最高次で割る．
  - $\frac{1}{n} \to 0$ を作る．
- $x \to a$ **のとき** ($\frac{0}{0}$ の形)
  - まず代入してみる．
  - $\frac{0}{0}$ なら，因数分解して約分する．
- この 2 つの計算技術は，次回以降の「面積（積分）」と「傾き（微分）」を求めるための強力な武器になる．

## 練習 A：基本練習

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+5}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2-3x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

### Memo / Answer

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3-0=\mathbf{3}$

(2) 分母・分子を $n$ で割る．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

(3) 単に代入すればよい．

$$(\text{与式})=(-2)^2-3\cdot(-2)=4+6=\mathbf{10}$$

(4) $\frac{0}{0}$ の不定形なので，因数分解して約分する．

$$(\text{与式})=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)=2-1=\mathbf{1}$$

## 練習 B：次回への準備（重要）

次の計算は，次回の授業で「全く同じ形」で登場する．今のうちにマスターしておこう．

(1) **定積分の準備**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ヒント：式を展開して，最高次の係数だけを見ればよい．

(2) **微分の準備**

$$\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

ヒント：分子を展開してから約分せよ．

### Memo / Answer

(1) 分子の最高次は $n\cdot n\cdot 2n=2n^3$ であることに注目する．

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{6}\cdot1\cdot(1+0)\cdot(2+0)=\frac{2}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

(2) 分子を展開して整理する．

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{h\to0}\frac{(1+2h+h^2)-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h(2+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}(2+h)=2+0=\mathbf{2}\end{aligned}$$