年　組　番　氏名

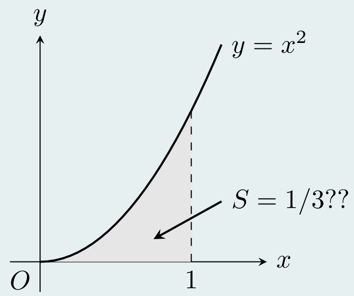
1. 区分求積法

全体課題

ある古代の数学者が考えた「曲がった図形の面積を求めるための設計図」がある．しかし，インクが滲んで一部が読めない．設計図（式）を復元し，放物線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の面積 S の値を確定させ，右の図形 (初回で扱った図形) の面積が $\frac{1}{3}$ であることを確かめよ．

復元すべき設計図（面積 S の定義式）：

$$S = \lim_{\boxed{①}\to\infty} \sum_{k=1}^{\boxed{①}} \underbrace{\left(\boxed{②}\right)}_{\text{高さ}} \times \underbrace{\left(\boxed{③}\right)}_{\text{幅}}$$



Memo / Answer

♠ エキスパート A：中身を作るパターン A

目標 A

長方形の「幅」と「高さ」に注目し全体課題の $\sum$ の中身を立式し，その過程を説明できる．

課題

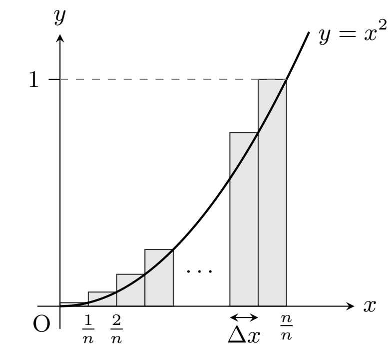
(初回の復習) 図形を「長方形の集まり」と見なし，$\sum$ を使って面積の合計式を作る．

(1) 1 つの長方形の「幅 Δx 」はいくつか．
答え：

(2) 左から k 番目の長方形の右端の座標は $x = \frac{k}{n}$ である．「高さ $(y = x^2)$」はいくつか．
答え：

(3) 面積の合計 S_n を $\sum$ で表せ．

$\sum$ の式：



区間 $0 \to 1$ を n 等分する．

♠ エキスパート B：極限計算

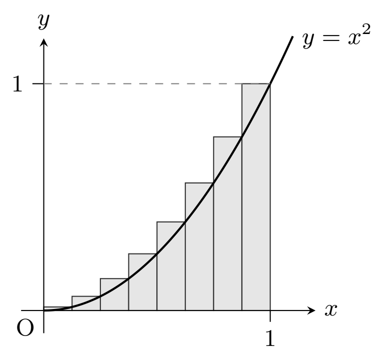
目標 B

「分割数の一般化」をもとに全体課題の $\sum$ の中身を立式し，その過程を説明できる．

課題 1

(1) (初回の復習) 8 等分の場合の図形の面積 S_8 は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{8}{8}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k}{8}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8^3}\sum_{k=1}^{8}k^2 \cdots (\text{あ}) \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{aligned}$$



(2) 式 (あ) にて，$8 \to n$ と置き換えて，n 等分された図形の面積を $\sum$ を用いて表し，n の式に直せ．

$\sum$ の式：　　　　　　，　n の式：

2．定積分の記号

全体課題の設計図（定義式）は，長くて書くのが大変である．そこで，歴史上の数学者はこれを「記号化」した．次の記号は面積を表す記号で，「合計（Sum）」と「長方形」のイメージから作られている．

定義

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ と x 軸が囲う図形の面積 S を

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

と書き，「区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ の**定積分**」という．

記号の由来（ライプニッツのアイデア）

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\updownarrow$$

Sum(合計) の S
引き伸ばした $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$\uparrow$ 高さ　$\uparrow$ 微小な幅

$\Delta x \to dx$

- $\int$（インテグラル）: Sum（和）の頭文字 S を縦に引き伸ばした．
- dx : 長方形の「横幅」．Δx (幅) が限りなく 0 に近づけたもの．
- $0 \to 1$: どこからどこまで足すか (積分区間)．

「$\int f(x)dx$」は**「高さ $f(x)$，幅 dx の微小な長方形の面積を，全部足し合わせる」**という意味である．

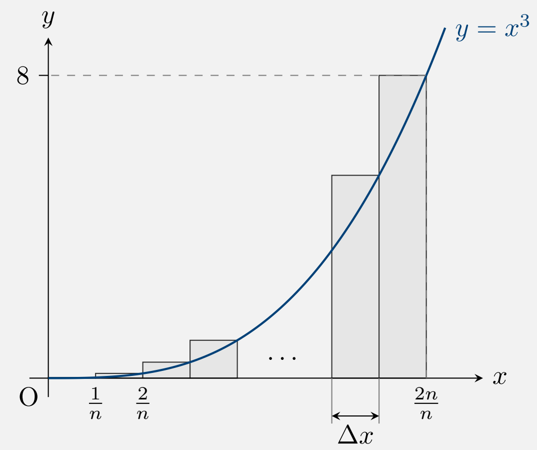
練習 1

定積分 $\displaystyle\int_0^2 x^3 dx$ の値を次の手順に従って求めよ．

(1) グラフを書いて，「高さ」×「横幅」の n の式を作れ．

(2) $\sum$ を用いて部分和 S_n を求め，n の式で表せ．

(3) (2) の部分和 S_n の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を考えることで定積分 (面積) $\displaystyle\int_0^2 x^3 dx$ を求めよ．



Memo / Answer