1. 直角三角形の個数

正多角形の頂点を結んで三角形を作るとき，「どんな三角形ができるか」を分類する問題は入試の頻出テーマです．まずは直角三角形から考えます．

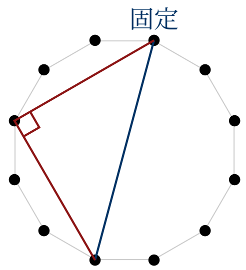
直角三角形の成立条件

円周上の 3 点を結んで直角三角形ができるのは，

1 辺が円の直径になるとき

に限ります．（直径に対する円周角は 90°）

- ステップ 1：**直径を 1 本選んで固定**する．
- ステップ 2：残りの頂点から，もう 1 点を選ぶ．



直径 1 本につき，
残り $12 - 2 = 10$ 点
どこを選んでも直角！

例題 1．直角三角形の個数

正十二角形の頂点のうち 3 点を結んでできる三角形について，直角三角形は何個あるか．

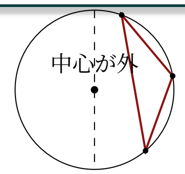
Memo / Answer

2. 鈍角三角形・鋭角三角形

直角以外の三角形の分類には，円の中心との位置関係を使います．

三角形の形状判定

- **直角**：斜辺が中心を通る（直径）．
- **鈍角**：中心が三角形の**外**にある．
  $\iff$ 3 点が**半円の孤の上**に収まる．
- **鋭角**：中心が三角形の**内**にある．



鈍角

$\longrightarrow$ **解法テクニック：**
頂点を 1 つ固定し，
半周未満の範囲から
残り 2 点を選ぶ！

例題 2．鈍角・鋭角三角形の個数

正十二角形の頂点のうち 3 点を結んでできる三角形について，次の個数を求めよ．

(1) 鈍角三角形
(2) 鋭角三角形

ヒント：鋭角三角形を直接数えるのは難しい．

$$(\text{全体}) - (\text{直角}) - (\text{鈍角})$$

で求めよう．

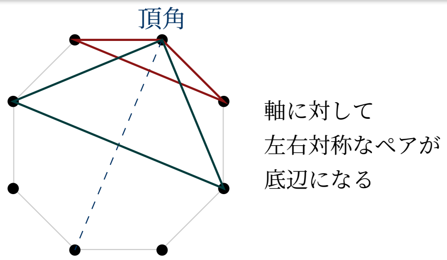
Memo / Answer

3. 二等辺三角形

正多角形の二等辺三角形を数えるときは，対称軸（頂点を通る直径）を利用します．ある頂点を「頂角」と定めて，底辺が対称になるようにペアを探します．

二等辺三角形の数え上げ

(1) 1 つの頂点を**頂角として固定**する．
(2) その頂点を通る直径に対して，左右対称になる 2 点のペアを探す．
(3) **正三角形**も二等辺三角形の一種なので含まれるが，重複して数えてしまうため最後に調整が必要な場合がある（または，正三角形だけ別枠で考える）．



例題 3．二等辺三角形の個数

正十二角形の頂点 3 つを結んでできる三角形のうち，二等辺三角形は何個あるか．また，正三角形は何個あるか．

Memo / Answer

Lecture Note：正三角形の重複

正十二角形の場合，頂点 A_1 を頂角とする二等辺三角形の中に，正三角形 (A_1, A_5, A_9) が含まれます．しかし，頂点 A_5 を頂角としたときも，同じ正三角形 (A_5, A_9, A_1) をカウントしてしまいます．

- 二等辺三角形（正三角形含む）：A_1 を頂角とするものが 5 個 $\times 12$ 頂点 $= 60$ 個？
- **間違いです！**　正三角形だけ 3 回重複カウントされています．

安全な数え方：

(1) 正三角形以外の二等辺三角形を数える．
(2) 正三角形を別に数えて足す．

または，

$$(\text{単純計算の総和}) - 2 \times (\text{正三角形の個数})$$

（3 回数えたものを 1 回にするため，2 回分引く）

Challenge：直角二等辺三角形

正八角形について，直角二等辺三角形は何個あるか．

氏名　　得点　　/ 20

確認テスト A（基本）

練習 1：直角三角形

正十角形の頂点 3 つを結んでできる直角三角形の個数を求めよ.

練習 2：鈍角三角形

正八角形の頂点 3 つを結んでできる鈍角三角形の個数を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：三角形の形状分類

正十二角形の頂点 3 つを結んでできる三角形について,

(1) 全部の三角形の個数.
(2) 直角三角形の個数.
(3) 鈍角三角形の個数.
(4) 鋭角三角形の個数.

練習 4：二等辺三角形

正十角形の頂点 3 つを結んでできる二等辺三角形（正三角形も含む）は何個あるか.

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

正十角形の頂点は 10 個なので，直径は $10 \div 2 = 5$ 本引ける．直径 1 本につき，残りの $10 - 2 = 8$ 個の頂点と結べば直角三角形ができる．よって，

$$5 \times 8 = \mathbf{40} \text{ (個)}$$

2

鈍角三角形 → 3 点が半円周上に収まる．頂点 1 つを固定する（仮に P_1）．P_1 を最も左端（反時計回りの始点）としたとき，半円周上（直径の対岸を含まない）にある頂点は，$8 \div 2 - 1 = 3$ 個．この 3 個から残り 2 点を選べば，すべて P_1 を鈍角の頂点とするわけではないが，必ず鈍角三角形になる．(※正確には「P_1 を始点とする半円」に含まれる 3 点を選ぶと 1 個の鈍角三角形が決まる）正八角形の頂点それぞれを始点として考えられるので，

$$8 \times {}_3C_2 = 8 \times 3 = \mathbf{24} \text{ (個)}$$

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

(1) ${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{220}$ (個)

(2) 直径は $12 \div 2 = 6$ 本．$6 \times (12 - 2) = 6 \times 10 = \mathbf{60}$ (個)

(3) 1 つの頂点を始点として固定．半円周上（端点除く）にある点は $12 \div 2 - 1 = 5$ 個．この 5 個から 2 個選べばよい．$12 \times {}_5C_2 = 12 \times 10 = \mathbf{120}$ (個)

(4) (全体) - (直角) - (鈍角) $220 - 60 - 120 = \mathbf{40}$ (個)

4

正十角形は 10 が 3 の倍数ではないので，正三角形は作れない．よって重複を気にする必要はない．頂点 P_1 を頂角とする二等辺三角形を考える．対称軸に対して左右対称なペアは，$(P_2, P_{10}), (P_3, P_9), (P_4, P_8), (P_5, P_7)$ の 4 組．(P_6 は対岸なので三角形にならない）よって，1 つの頂点につき 4 個できる．

$$10 \times 4 = \mathbf{40} \text{ (個)}$$