Introduction：基準値が変わるだけ

前回は「解が正 $(x>0)$」「解が負 $(x<0)$」という条件を扱いました。今回は，基準となる値が 0 から特定の実数 k に変わります。

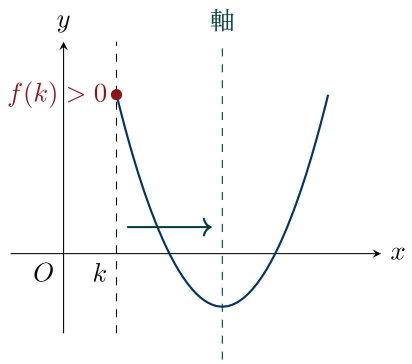
- 解が k より大きい $\iff$ グラフが $x>k$ の範囲で交わる
- 解が k より小さい $\iff$ グラフが $x<k$ の範囲で交わる

グラフ全体が左右にスライドしただけで，考えるべき**「3 点セット」**の本質は変わりません。

ある値 k と解の大小比較

下に凸の 2 次関数 $f(x)$ について，方程式 $f(x)=0$ が**「k より大きい異なる 2 つの解」**をもつ条件：

(1) **判別式** $D>0$　(2 点で交わる)
(2) **軸** $>k$　(山が k より右側にある)
(3) **端点** $f(k)>0$　($x=k$ のときプラス)



k より大きい 2 つの解
(右側で交わる)

※ 「k より小さい異なる 2 つの解」の場合は，軸の条件が「**軸** $<k$」になります。

例題 1：k より大きい解

2 次方程式 $x^2-2ax+3a-2=0$ が 1 より大きい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

方針: $f(x)=x^2-2ax+3a-2$ とおく。

1. $\frac{D}{4}>0$
2. 軸 $a>1$
3. $f(1)>0$

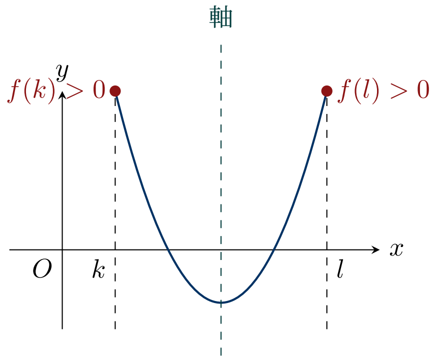
この 3 つを連立させる。

Memo / Answer

特定の区間に解をもつ条件

方程式 $f(x)=0$ が「**2 つの解がともに $k<x<l$ の範囲にある**」条件：

(1) **判別式** $D \geqq 0$　(異なる 2 つなら $>$)
(2) **軸** $k<$ 軸 $<l$　(軸が区間内にある)
(3) **端点** $f(k)>0$ かつ $f(l)>0$　(両端でプラス)



区間内の 2 つの解

例題 2：区間内の解

2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が $0<x<3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

条件:

(1) $\frac{D}{4}>0$
(2) $0<$ 軸 <3
(3) $f(0)>0$ かつ $f(3)>0$

Memo / Answer

「解の間に k がある」場合

解 α, β が $\alpha<k<\beta$ となる条件（k を挟む）は，

$$f(k)<0$$

だけで OK です（下に凸の場合）。これは異符号の解（0 を挟む）の一般化です。

例題 3：解の間に値がある

2 次方程式 $x^2-ax+a-1=0$ の 2 つの解の間に 2 があるとき（1 つの解が 2 より小さく，もう 1 つが 2 より大きい），定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

次の問いに答えよ。

練習 A1: ある値より大きい解

2 次方程式 $x^2-2ax+3a+4=0$ が 2 より大きい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 A2: ある値より小さい解

2 次方程式 $x^2-4x+a=0$ が 3 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 A3: 挟まれる解

2 次方程式 $x^2-ax+2a-6=0$ の解 α,β が $\alpha<1<\beta$ を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 区間内の解

2 次方程式 $x^2-2ax+4=0$ が $1<x<3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 B2: 解の存在範囲（片方だけ）

2 次方程式 $x^2-ax+a-1=0$ が $-1<x<1$ の範囲に「ただ 1 つの実数解」をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。（重解の場合や，端点を通る場合は除いて考えてよい）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $f(x) = x^2 - 2ax + 3a + 4$ とおく。

(1) $\frac{D}{4} > 0 \implies (-a)^2 - (3a+4) > 0$
$a^2 - 3a - 4 > 0 \implies (a-4)(a+1) > 0$
$\therefore a < -1, \quad 4 < a \ldots$①

(2) 軸 $x = a > 2 \ldots$②

(3) $f(2) > 0 \implies 4 - 4a + 3a + 4 > 0$
$-a + 8 > 0 \implies a < 8 \ldots$③

①, ②, ③ の共通範囲をとって，$\boldsymbol{4 < a < 8}$

A2 $f(x) = x^2 - 4x + a$ とおく。

(1) $\frac{D}{4} > 0 \implies (-2)^2 - a > 0 \implies 4 - a > 0 \implies a < 4 \ldots$①

(2) 軸 $x = 2 < 3$
これは常に成り立つ。

(3) $f(3) > 0 \implies 9 - 12 + a > 0 \implies a > 3 \ldots$②

①, ② より，$\boldsymbol{3 < a < 4}$

A3 $f(x) = x^2 - ax + 2a - 6$ とおく。条件は $f(1) < 0$ のみ。

$$1 - a + 2a - 6 < 0$$
$$a - 5 < 0 \quad \therefore \boldsymbol{a < 5}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $f(x) = x^2 - 2ax + 4$ とおく。

(1) $\frac{D}{4} > 0 \implies a^2 - 4 > 0 \implies a < -2, 2 < a \ldots$①

(2) $1 <$ 軸 $< 3 \implies 1 < a < 3 \ldots$②

(3) 端点条件：$f(1) > 0 \implies 1 - 2a + 4 > 0 \implies 2a < 5 \implies a < \frac{5}{2} \ldots$③
$f(3) > 0 \implies 9 - 6a + 4 > 0 \implies 6a < 13 \implies a < \frac{13}{6} \ldots$④

共通範囲を求める。①かつ②より，$2 < a < 3$。さらに④（$\frac{13}{6} = 2.16\ldots$）より，$\boldsymbol{2 < a < \frac{13}{6}}$

B2 「$-1 < x < 1$ にただ 1 つの解をもつ」とは，グラフがこの区間を「1 回だけまたぐ」ということである。つまり，$f(-1)$ と $f(1)$ が異符号であればよい。

$$f(-1)f(1) < 0$$

$f(-1) = 1 - (-a) + a - 1 = 2a$ $f(1) = 1 - a + a - 1 = 0 \ldots$おっと？ $f(1) = 0$ となるので，必ず $x = 1$ を解にもつ。$x^2 - ax + a - 1 = (x-1)(x-a+1) = 0$ 解は $x = 1, a-1$ である。「$-1 < x < 1$ にただ 1 つの解」をもつには，もう一つの解 $a - 1$ がこの区間に入ればよい。（$x = 1$ は区間外なのでカウントされない）

$$-1 < a - 1 < 1$$

各辺に $+1$ して，$\boldsymbol{0 < a < 2}$