年　　組　　番　氏名

1. 直線の総復習

直線を決定する要素は「1 点」＋「向き」である．向きの指定方法によって 2 パターンの式がある．

直線のベクトル方程式まとめ

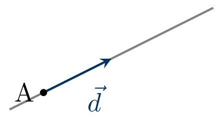
点 $A(\vec{a})$ を通り...

(1) **方向ベクトル $\vec{d}$ に平行:**

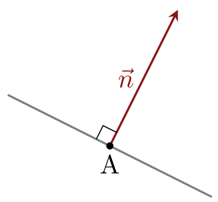
$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

(2) **法線ベクトル $\vec{n}$ に垂直:**

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$



平行 $(\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d})$



垂直 $(\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0)$

例題 1 (基本演習)

次の直線の方程式をベクトルを用いて求め，最終的に $ax + by + c = 0$ の形で答えよ．

(1) 点 $(1, 2)$ を通り，ベクトル $\vec{d} = (3, -1)$ に平行な直線．

(2) 点 $(3, -4)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (2, 5)$ に垂直な直線．

2. 円の総復習

円を決定する要素は「中心」と「半径」，または「直径の両端」である．

円のベクトル方程式まとめ

(1) **基本形** (中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$, 半径 r):

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r \iff |\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2$$

(2) **直径形** ($\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ が直径):

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

例題 2 (式の読み取り)

次の方程式はどのような図形を表すか．

$$(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

ヒント: 「内積が 0」ということは，何かと何かが垂直である．$\vec{p} + \vec{a} = \vec{p} - (-\vec{a})$ と変形できる．

例題 3 (式の変形)

方程式 $|\vec{p} - \vec{a}| = 2|\vec{p} - \vec{b}|$ はどのような図形を表すか．両辺を 2 乗して計算せよ．

年　　組　　番　氏名

3. 円の接線の方程式

円の接線は，**「半径と垂直である」**という性質を持つ．これはまさに「法線ベクトル」の考え方がそのまま使える場面である．

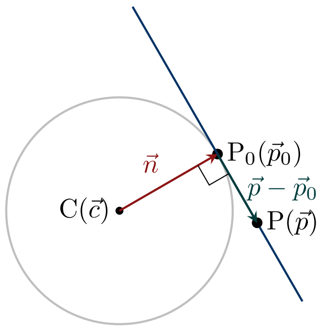
円の接線のベクトル方程式

中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$, 半径 r の円上の点 $\mathrm{P}_0(\vec{p}_0)$ における接線の式は,

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$$

ここで, 法線ベクトル $\vec{n}$ は半径ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}$ である．つまり:

$$(\vec{p}_0-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$$



半径 $\vec{CP_0}$ がそのまま
法線ベクトルになる

例題 4 (接線の方程式)

中心 $\mathrm{C}(1,2)$, 半径 $\sqrt{10}$ の円上の点 $\mathrm{P}_0(4,3)$ における接線の方程式を, ベクトルを用いて求めよ．

演習テスト (A: 基本)

練習 A1 (直線の決定)

以下の直線の方程式を $ax + by + c = 0$ の形で求めよ.

(1) 点 $\mathrm{A}(-2, 1)$ を通り，ベクトル $\vec{d} = (4, 3)$ に平行な直線.

(2) 点 $\mathrm{A}(3, 5)$ を通り，直線 $2x - y + 4 = 0$ に垂直な直線.
(ヒント: 元の直線の法線ベクトルを利用する)

Memo / Answer

練習 A2 (円の決定)

2 点 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(-4, 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ. (ベクトルを用いて立式し，x, y の式で表せ)

Memo / Answer

演習テスト (B: 応用)

練習 B1 (接線の方程式)

円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 上の点 $\mathrm{P}_0(5, 1)$ における接線の方程式を，ベクトルの内積を用いて求めよ.

Memo / Answer

練習 B2 (軌跡の特定)

$|\vec{p} + 2\vec{a}| = |\vec{p} - 4\vec{a}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ はどのような図形を描くか. 「2 点 ◯, ◯ を結ぶ線分の...」という形で答えよ.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

(1) 平行 → 方向ベクトル. $x=1+3t,\ y=2-t$. $t=2-y$ を代入して $x=1+3(2-y) \implies$ $\boldsymbol{x+3y-7=0}$.
(2) 垂直 → 法線ベクトル. $2(x-3)+5(y-(-4))=0$. $2x-6+5y+20=0 \implies$ $\boldsymbol{2x+5y+14=0}$.

例題 3 解答

両辺を 2 乗: $|\vec{p}-\vec{a}|^2=4|\vec{p}-\vec{b}|^2$. $|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=4(|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$. $3|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{b}+2\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$. (計算が複雑になる場合は内分・外分を利用)
$|\vec{p}-\vec{a}|:|\vec{p}-\vec{b}|=2:1$. これは線分 AB を $2:1$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円（アポロニウスの円）.

例題 4 解答

中心 $C(1,2)$, 接点 $P_0(4,3)$. 法線 $\vec{n}=\overrightarrow{CP_0}=(4-1,3-2)=(3,1)$. 接線は $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ より, $3(x-4)+1(y-3)=0 \implies 3x-12+y-3=0$. $\boldsymbol{3x+y-15=0}$.

解答 (演習テスト)

練習 A1 解答

(1) $x=-2+4t, y=1+3t \implies \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}$. $3(x+2)=4(y-1) \implies \boldsymbol{3x-4y+10=0}$.
(2) 「直線 $2x-y+4=0$ に垂直」ということは, この直線の法線ベクトル $(2,-1)$ が, 求める直線の**方向ベクトル**になる. 逆に, 求める直線の法線ベクトルは $(1,2)$ となる. $1(x-3)+2(y-5)=0 \implies \boldsymbol{x+2y-13=0}$.

練習 A2 解答

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ より, $(x-2)(x-(-4))+(y-1)(y-3)=0$. $(x-2)(x+4)+(y-1)(y-3)=0$. $x^2+2x-8+y^2-4y+3=0$. $\boldsymbol{x^2+y^2+2x-4y-5=0}$. (中心 $(-1,2)$, 半径 $\sqrt{10}$ の円)

練習 B1 解答

中心 $C(1,-2)$, 接点 $P_0(5,1)$. 法線ベクトル $\vec{n}=\overrightarrow{CP_0}=(5-1,\ 1-(-2))=(4,3)$. 接線の方程式は, $4(x-5)+3(y-1)=0$. $4x-20+3y-3=0$. $\boldsymbol{4x+3y-23=0}$.

練習 B2 解答

$|\vec{p}-(-2\vec{a})|=|\vec{p}-4\vec{a}|$. これは, 2 点 $-2\vec{a}$ と $4\vec{a}$ からの距離が等しい点の集合である. よって, **線分 $-2\tilde{a}, 4\tilde{a}$ を結ぶ線分の垂直二等分線**.
(補足: この線分の中点は $\vec{a}$. すなわち点 A を通り, ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線となる)