1. 数学者は「書くのが面倒」

数列の和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を毎回書くのは大変である．そこで，「和 (Sum)」の頭文字 S に対応するギリシャ文字 Σ（シグマ）を使って，足し算をスッキリ表現することにする．

Σ（シグマ）の定義

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

読み方: 「$k = 1$ から n までの a_k の和」

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

n ← ゴール（k に最後に代入する数）

a_k ← 一般項（足される数のルール）

$k = 1$ ← スタート（k に最初に代入する数）

変数 k が 1, 2, 3... と変化しながら足されていく

具体例:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$
- $\displaystyle\sum_{k=3}^{5} (2k) = (2 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 5) = 6 + 8 + 10 = 24$

2. Σ の性質（バラして OK）

Σ はただの足し算なので，普通の計算と同じルールが成り立つ．

Σ の線形性

(1) **和・差の分解:**

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

(2) **定数倍の外出し:**（c は k に無関係な定数）

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

イメージ:

$$(2a_1 + 2a_2 + \ldots) = 2(a_1 + a_2 + \ldots)$$

という当たり前のことを言っているだけである．

例題 1（性質の利用）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 10,\ \sum_{k=1}^{n} b_k = 5$ のとき，次の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n} (3a_k - 2b_k)$$

Memo / Answer

3. 定数の和（最大のひっかけ）

もし $a_k = c$ （定数）だったらどうなるか？

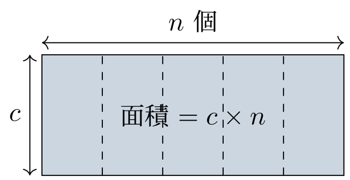
$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\ 個}$$

k が変わっても，足される数は c のままである．

定数の和

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

(c が n 個あるので，掛け算になる）



例題 2 (定数の和)

次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$

Memo / Answer

4. Σ への翻訳練習

数列の和を Σ で表すには，**「一般項 (k 番目の形)」**を見つければよい．

例: $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$

- 一般項は $2k$.
- 最後は 20 なので，$2k = 20 \to k = 10$ (ゴール).
- よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2k$.

例題 3 (和の記号で表す)

次の和を Σ を用いて表せ．

(1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

(2) $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$

Memo / Answer

注意点：変数はなんでもいい

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ も $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ も同じ意味である．ただし，ゴールの n と変数が被らないように注意．($\sum_{n=1}^{n} n$ はダメ！)

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (展開と計算)

次の Σ の式を, $1+2+\ldots$ のように書き下して値を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2k+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2$

Memo / Answer

練習 A2 (性質の利用)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=T$ とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4a_k-3b_k+2)$ を S, T, n を用いて表せ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (記号で表す)

次の和を Σ 記号を用いて表せ.

(1) $2+5+8+\cdots+29$　(ヒント: まず一般項を求める)

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

Σ をバラバラにする．

$$\sum_{k=1}^{n} 3a_k - \sum_{k=1}^{n} 2b_k = 3\sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} b_k$$

値を代入して，

$$3 \times 10 - 2 \times 5 = 30 - 10 = \mathbf{20}$$

例題 2 解答

(1) 3 を 5 個足すので，$3 \times 5 = \mathbf{15}$．(式: $3+3+3+3+3=15$)

(2) 1 を n 個足すので，$1 \times n = \boldsymbol{n}$．

例題 3 解答

(1) 一般項は $2k-1$．スタートは $k=1$，ゴールは $k=n$．

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}$$

(2) 一般項は 3^k．スタートは $k=1$，ゴールは $k=n$．

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 3^k}$$

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(1) $k=1,2,3,4$ を代入して足す．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(2k+1) &= (2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+(2\cdot3+1)+(2\cdot4+1)\\ &= 3+5+7+9\\ &= \mathbf{24}\end{aligned}$$

(2) k が変化しても中身はずっと 2．

$$\sum_{k=1}^{5} 2 = 2+2+2+2+2 = 2\times5 = \mathbf{10}$$

練習 A2 解答

定数項の取扱いに注意する．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4a_k - 3b_k + 2) &= 4\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 2\\ &= 4S - 3T + (2\times n)\\ &= \boldsymbol{4S - 3T + 2n}\end{aligned}$$

(最後の $2n$ を単に 2 としないよう注意！)

練習 B1 解答

(1) 数列は $2,5,8,\ldots$．初項 2，公差 3 の等差数列．一般項は $2+(k-1)3 = 3k-1$．末項が 29 なので，$3k-1=29 \implies 3k=30 \implies k=10$．よって，$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{10}(3k-1)}$．

(2) 数列は $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$．初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列．一般項は $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$．最後は $\frac{1}{2^{n-1}}$ なので，k は 1 から n まで．よって，$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$ または $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}}$．