1. 3 項間漸化式

「前の項」だけでなく「2 つ前の項」も関わる漸化式を考える.

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

この式は, 次のような等比数列の形に変形することを目指す.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

展開して整理すると $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$. 元の式と比較すると, 解と係数の関係より α, β は

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

の 2 つの解であることがわかる.

隣接 3 項間漸化式の解法

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ の形は, 特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解 α, β を利用する.

(1) **異なる 2 解 $\alpha \neq \beta$ のとき:** 2 通りの変形を作り, 連立して解く.

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

(2) **重解 $\alpha = \beta$ のとき:** 式は 1 本しか作れないため, 別の工夫が必要 (後述).

例題 1 (異なる 2 解を持つ場合)

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

Memo / Answer

2. 視点が一つしかないとき (重解)

特性方程式が重解 α を持つ場合 $(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0)$, 変形できる式は 1 種類しかない.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

ここから「公比 α の等比数列」が 1 つだけ手に入る.

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (\text{初項}) \cdot \alpha^{n-1}$$

すると $a_{n+1} = \alpha a_n + (\alpha\text{の累乗})$ という形になる. これは第 11 回で扱った**「等差 $\times$ 等比」型**の漸化式である. 両辺を α^{n+1} で割ることで解決できる.

例題 2 (重解を持つ場合)

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$$

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (特性方程式)

次の漸化式の特性方程式を立て，その解を求めよ．

(1) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

(2) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

Memo / Answer

練習 A2 (異なる 2 解)

次の数列の一般項を求めよ．

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (重解)

次の数列の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

特性方程式 $x^2-5x+6=0$ を解くと $(x-2)(x-3)=0 \implies x=2,3$.

(i) $\alpha=2, \beta=3$ とすると $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$. 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=4-2=2$, 公比 3 の等比数列.

$$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ①$$

(ii) $\alpha=3, \beta=2$ とすると $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$. 数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=4-3=1$, 公比 2 の等比数列.

$$a_{n+1}-3a_n=1\cdot 2^{n-1} \quad \cdots ②$$

① - ② より $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$.

例題 2 解答

特性方程式 $x^2-6x+9=0 \implies (x-3)^2=0 \implies x=3$ (重解).

漸化式は $a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$ と変形できる. 数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=4-3=1$, 公比 3 の等比数列.

$$a_{n+1}-3a_n=1\cdot 3^{n-1}$$

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}=\frac{1}{9}$$

数列 $\{\frac{a_n}{3^n}\}$ は初項 $\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$, 公差 $\frac{1}{9}$ の等差数列.

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+(n-1)\frac{1}{9}=\frac{3+n-1}{9}=\frac{n+2}{9}$$

よって $a_n=\frac{n+2}{9}\cdot 3^n=(n+2)3^{n-2}$.

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(1) $x^2=4x-3 \implies x^2-4x+3=0 \implies (x-1)(x-3)=0$. **解:** $x=1,3$.

(2) $x^2-4x+4=0 \implies (x-2)^2=0$. **解:** $x=2$ (重解).

練習 A2 解答

特性方程式 $x^2-3x+2=0 \implies (x-1)(x-2)=0$. 解は $1,2$.

(i) $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$. 初項 $a_2-a_1=2$. 公比 2. $a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n \quad \cdots ①$

(ii) $a_{n+2}-2a_{n+1}=1(a_{n+1}-2a_n)$. 初項 $a_2-2a_1=2$. 公比 1. $a_{n+1}-2a_n=2\cdot 1^{n-1}=2 \quad \cdots ②$

①-② より $a_n=2^n-2$.

練習 B1 解答

特性方程式 $x^2-4x+4=0 \implies x=2$ (重解).

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$. 初項 $a_2-2a_1=3-2=1$. 公比 2.

$$a_{n+1}-2a_n=1\cdot 2^{n-1}$$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}$$

数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列.

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{4}=\frac{n+1}{4}$$

よって $\boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-2}}$.