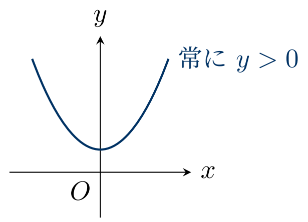
年　　組　　番　氏名

Introduction：最強と最弱の論理

「クラスの**全員**がテストに合格した」と言える条件は何でしょう？ ⟶ **「最低点の人が合格点を超えている」**ことです。
では，「クラスに**少なくとも一人**，合格者がいる」と言える条件は？ ⟶ **「最高点の人が合格点を超えている」**ことです。
2 次関数の不等式においても，この考え方が重要になります。

「すべての x で成り立つ」条件（絶対不等式）

2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ が**「すべての実数 x で成り立つ」**ための条件は，グラフが常に x 軸**より上（空中）**にあることです。



条件：① 下に凸 $(a>0)$
② 交わらない $(D<0)$

※ 頂点の y 座標（最小値）が正である，と考えても同じです。

例題 1：すべての実数で成り立つ条件

すべての実数 x について，不等式 $x^2+kx+k+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

考え方: グラフが常に浮いていればよい。x^2 の係数はプラスなので（下に凸），判別式 $D<0$ であればよい。

Memo / Answer

変域がある場合の「すべての〜」

定義域 $p \leqq x \leqq q$ において，常に $f(x)>0$ が成り立つ条件は，

- その区間での $f(x)$ の**最小値** >0

「一番低い所さえ 0 より大きければ，あとは全部大丈夫！」という発想です。

例題 2：ある区間で常に成り立つ

$0 \leqq x \leqq 2$ のすべての x について，不等式 $x^2-2ax+4>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

ヒント: $f(x)=(x-a)^2-a^2+4$ とおく。軸 $x=a$ が区間の「左・中・右」のどこにあるかで，最小値をとる場所が変わります（第 8 回の復習！）。

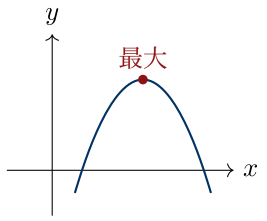
Memo / Answer

「ある x で成り立つ」条件（存在条件）

区間内に「$f(x) > 0$ となる x が少なくとも一つある（存在する）」ための条件は，

- その区間での $f(x)$ の**最大値** > 0

「一番高い所が 0 を超えていれば，少なくともそこだけは OK！」という発想です。



最大値さえプラスなら OK

例題 3：ある x で成り立つ

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$x^2 - 2ax + 4 < 0$ を満たす x が**存在する**ような定数 a の値の範囲を求めよ。

注意: 不等号が「< 0」なので，今回は**最小値**が 0 より小さければよい。（下に凸のグラフが，一瞬でも水面下に潜れば OK）最小値の場所は例題 2 と同じ場合分けを使う。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: すべての実数で成立

すべての実数 x について，不等式 $x^2+2ax+a+6>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 A2: 区間内で常に成立

$0 \leqq x \leqq 3$ のすべての x について，不等式 $x^2-2x+a>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 区間内で「ある」成立

$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，不等式 $-x^2+2x+a>0$ を満たす x が少なくとも一つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 B2: 条件の言い換え

関数 $f(x)=x^2-2ax-a+2$ について，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

(1) すべての x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ で $f(x)>0$

(2) ある x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ で $f(x)<0$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 x^2 の係数が正（下に凸）なので，条件は「判別式 $D<0$」（x 軸と交わらない）。

$$\frac{D}{4}=a^2-(a+6)<0$$
$$a^2-a-6<0$$
$$(a-3)(a+2)<0$$

よって，$\boldsymbol{-2<a<3}$

A2 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$ 軸は $x=1$。定義域 $0\leqq x\leqq 3$ において，常に $f(x)>0$ となる条件は，**最小値** >0。グラフより，頂点 $x=1$ は定義域に含まれるので，ここで最小値 $a-1$ をとる。

$$a-1>0 \quad \therefore \boldsymbol{a>1}$$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $f(x)=-x^2+2x+a=-(x-1)^2+1+a$ 上に凸のグラフ。軸は $x=1$。「少なくとも一つ存在する」条件は，**最大値** >0。定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中央に軸 $x=1$ があるので，頂点で最大値をとる。

$$\text{最大値 } =1+a$$

条件より，

$$1+a>0 \quad \therefore \boldsymbol{a>-1}$$

B2 $f(x)=(x-a)^2-a^2-a+2$。軸は $x=a$。定義域は $-1\leqq x\leqq 1$。

(1) **すべての** x **で** $f(x)>0 \iff$ **最小値** $m>0$ 軸 a の位置で場合分けして最小値を求める。

- $a<-1$ のとき：左端 $x=-1$ で最小。$f(-1)=1+2a-a+2=a+3>0 \implies a>-3$。範囲と合わせて $\boldsymbol{-3<a<-1}$。
- $-1\leqq a\leqq 1$ のとき：頂点 $x=a$ で最小。$f(a)=-a^2-a+2>0 \implies a^2+a-2<0 \implies (a+2)(a-1)<0 \implies -2<a<1$。範囲と合わせて $\boldsymbol{-1\leqq a<1}$。
- $1<a$ のとき：右端 $x=1$ で最小。$f(1)=1-2a-a+2=-3a+3>0 \implies a<1$。これは範囲 $1<a$ と矛盾するため不適。

以上を合わせて，$\boldsymbol{-3<a<1}$

(2) **ある** x **で** $f(x)<0 \iff$ **最小値** $m<0$ （※ $f(x)$ は下に凸なので，「ある場所で負」になる一番の候補は最小値の場所。最小値が負なら条件達成）(1) の逆（補集合）を考えればよいが，境界の等号に注意。$m>0$ の否定は $m\leqq 0$ だが，問題は $m<0$。計算すると，$\boldsymbol{a<-3,\quad 1<a}$