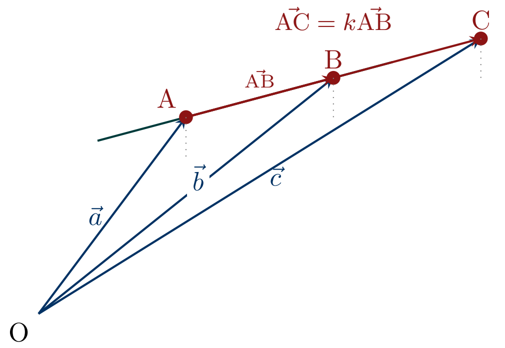
## 1. 3 点が一直線上にある条件

2 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ を通る直線上にもう一つの点 C があるとき，「3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ は一直線上にある」という。ベクトルの言葉では「向きが同じ（または逆）」ということなので，**実数倍**で表現できる。




### 共線条件 (Collinear Condition)

2 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ が異なるとき，点 C が直線 AB 上にある条件は，実数 $k$ を用いて次のように表される。

(1) **ベクトルで表す**

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(2) **始点を O にそろえる（係数の和が 1）**

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

または $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ において $s + t = 1$

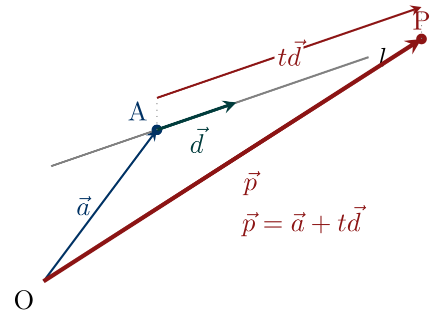
### 例題 1

3 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(3, -2, 1)$, $\mathrm{C}(x, y, -2)$ が一直線上にあるとき，$x, y$ の値を求めよ。

Memo / Answer

## 2. 直線のベクトル方程式

「点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線」を考える。この $\vec{d}$ を直線の**方向ベクトル**という。直線上を動く点 P は，パラメータ（媒介変数）$t$ を用いて表せる。




### 直線のベクトル方程式と成分表示

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}$ の直上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t \text{ は実数})$$

成分で表すと，$\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1), \vec{d} = (l, m, n)$ として

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$

これを直線の**媒介変数表示**という。

### 例題 2

点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d} = (2, -1, 1)$ に平行な直線を $l$ とする。

(1) 直線 $l$ の媒介変数表示を求めよ。

(2) 直線 $l$ と $xy$ 平面 $(z = 0)$ との交点の座標を求めよ。

Memo / Answer

## 3. 2 点を通る直線

2 点 A, B を通る直線の場合，方向ベクトルは $\vec{d} = \vec{\mathrm{AB}}$ と考えればよい。

**2 点を通る直線**

2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ を通る直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

※ これは $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ を成分表示したものと同じである。

**例題 3**

2 点 $\mathrm{A}(0, 3, 4)$, $\mathrm{B}(2, 1, 5)$ を通る直線 $l$ 上にあり，原点 O からの距離が最小になる点 H の座標を求めよ。

Memo / Answer

## 参考：直線の対称式

媒介変数 $t$ を消去して，次のように書くこともある。

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

ただし，分母が 0 になる場合はその部分を $x = x_1$ のように分ける。

## 確認テスト A (基本)

**練習 A1**

3 点 $A(2,5,-1)$, $B(4,2,1)$, $C(-2,a,b)$ が一直線上にあるとき，定数 $a,b$ の値を求めよ。

**練習 A2**

点 $A(3,-1,2)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,2,-1)$ に平行な直線を $l$ とする。

(1) 直線 $l$ 上の点 P の座標を媒介変数 $t$ を用いて表せ。

(2) 直線 $l$ と $yz$ 平面 $(x=0)$ との交点の座標を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト B (標準)

**練習 B1**

2 点 $A(1,2,3)$, $B(3,-2,1)$ を通る直線を $l$ とする。

(1) 直線 $l$ と $xy$ 平面の交点 P の座標を求めよ。

(2) 直線 $l$ が平面 $x=5$ と交わる点 Q の座標を求めよ。

**練習 B2**

点 $A(1,0,1)$ と，直線 $l:(x,y,z)=(0,1,1)+t(1,1,0)$ がある。点 A から直線 $l$ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト A（基本）【解答】

### 練習 A1

A$(2,5,-1)$, B$(4,2,1)$, C$(-2,a,b)$ が一直線上。

**Memo / Answer**

$\vec{AB}=(4-2,2-5,1-(-1))=(2,-3,2)$
$\vec{AC}=(-2-2,a-5,b-(-1))=(-4,a-5,b+1)$
3 点が一直線上にあるので $\vec{AC}=k\vec{AB}$ となる実数 $k$ がある。
$(-4,a-5,b+1)=k(2,-3,2)$
$x$ 成分比較： $-4=2k \implies k=-2$
$y$ 成分比較： $a-5=-3k=-3(-2)=6 \implies a=11$
$z$ 成分比較： $b+1=2k=2(-2)=-4 \implies b=-5$
答 $a=11, b=-5$

### 練習 A2

A$(3,-1,2)$, 方向 $\vec{d}=(1,2,-1)$

**Memo / Answer**

(1)
$$\begin{cases} x=3+1\cdot t=3+t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases}$$
答 $(3+t,-1+2t,2-t)$
(2) $yz$ 平面との交点は $x=0$
$3+t=0 \implies t=-3$
これを $y,z$ に代入して
$y=-1+2(-3)=-7$
$z=2-(-3)=5$
答 $(0,-7,5)$

## 確認テスト B（標準）【解答】

### 練習 B1

A$(1,2,3)$, B$(3,-2,1)$ を通る直線 $l$

**Memo / Answer**

方向ベクトルは $\vec{AB}=(2,-4,-2)$。
簡単のため $\vec{d}=(1,-2,-1)$ としてもよいが，そのまま使う。
直線 $l$ 上の点 R は実数 $t$ を用いて
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-4t \\ z=3-2t \end{cases}$$
と表せる。
(1) $xy$ 平面との交点は $z=0$
$3-2t=0 \implies t=\frac{3}{2}$
$x=1+3=4$
$y=2-6=-4$
答 P$(4,-4,0)$
(2) 平面 $x=5$ との交点
$1+2t=5 \implies 2t=4 \implies t=2$
$y=2-8=-6$
$z=3-4=-1$
答 Q$(5,-6,-1)$

### 練習 B2

A$(1,0,1)$ から直線 $l:(0,1,1)+t(1,1,0)$ に下ろした垂線の足 H

**Memo / Answer**

直線 $l$ の方向ベクトルは $\vec{d}=(1,1,0)$
点 H は直線上の点なので，ある実数 $t$ を用いて
H$(t,1+t,1)$
とおける。
$\vec{AH}=(t-1,1+t,0)$
$\vec{AH}\perp\vec{d}$ より $\vec{AH}\cdot\vec{d}=0$
$1(t-1)+1(1+t)+0=0$
$t-1+1+t=0$
$2t=0 \implies t=0$
よって H の座標は $t=0$ を代入して
答 H$(0,1,1)$