1. 同じものを含む順列

「a, a, a, b, c」のように，区別のつかない文字を含むものを 1 列に並べる方法を考えます．

同じものを含む順列の公式

n 個のものの中に，同じものがそれぞれ p 個，q 個，r 個，$\ldots$ あるとき，これら n 個すべてを 1 列に並べる並べ方は，

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad \text{通り}$$

【理屈】とりあえず全て区別して並べ $(n!)$，区別できないもの同士の並び替え $(p!, q!, \ldots)$ で割って重複を消す．

例題 1. 基本計算

次の文字すべてを 1 列に並べる方法は何通りあるか．

(1) a, a, a, b, b, c の 6 文字

(2) $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ の 7 個の数字

Memo / Answer

2. 順序が指定された順列

「A は B より左にある」のように，順序が決まっている場合の考え方です．これが**入試頻出**の重要テクニックです．

順序指定は「同じもの」とみなす

特定のものの順序が指定されている場合，それらを**「同じ文字（記号）」**に置き換えて並べ，後から左から順に文字を入れます．

A, B, C, D, E の並べ替え　　A は B より左

↓

□, □, C, D, E の並べ替え　　例：D □ C E □

↓

左の □ に A，右に B を入れる　　→ D **A** C E **B** (確定)

例題 2. 順序の固定

S, U, G, A, K, U の 6 文字を 1 列に並べるとき，次の並べ方は何通りあるか．

(1) すべての並べ方．

(2) S が K より左にある並べ方．

Memo / Answer

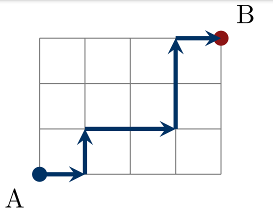
3. 最短経路の基本

碁盤の目のような道を，遠回りせずに進む方法は，「同じものを含む順列」の代表的な応用例です．

最短経路と順列

右に a 区画，上に b 区画進む最短経路の総数は，**「a 個の → と，b 個の ↑ を 1 列に並べる順列」**と同じである．

$$\frac{(a+b)!}{a!b!} = {}_{a+b}C_a$$

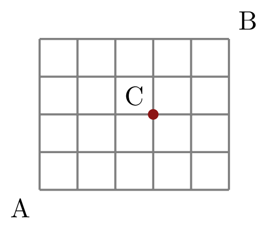


→↑→→↑↑→
の並べ替えと同じ

例題 3. 最短経路（基本・通過点）

図のような道があるとき，A 地点から B 地点へ行く最短経路は何通りあるか．

(1) 全部の道順．
(2) 途中で C 地点を通る道順．



Memo / Answer

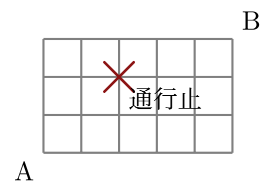
4. 障害物がある場合

「通れない道」や「通れない交差点」がある場合は，以下の 2 つの方法があります．

- **方法 1（余事象）**：(全体) − (通ってはいけない地点を通る)
- **方法 2（和の法則）**：交差点に「そこまでの道順の数」を書き込んで足していく（確実でおすすめ）．

例題 4. 障害物のある最短経路

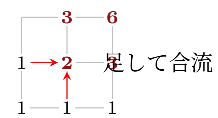
下図のように，×印の地点が通れないとき，A から B へ行く最短経路は何通りあるか．



Memo / Answer

Lecture Note：書き込み計算

複雑な形や障害物が多い場合は，A 地点を「1」として，足し算で進めていくとミスが少ないです．



確認テスト A（基本）

練習 1：同じものを含む順列

次の文字をすべて 1 列に並べる方法は何通りあるか．

(1) a, a, b, b, b, c の 6 文字
(2) $1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3$ の 8 個の数字

練習 2：順序の固定

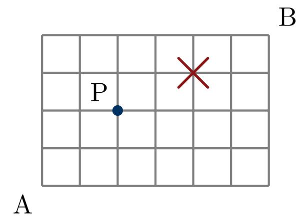
6 人の生徒 A, B, C, D, E, F が 1 列に並ぶとき，A が B より左にあり，かつ B が C より左にある並び方は何通りあるか．

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：最短経路

図のような格子状の道がある．A から B へ行く最短経路について，次の問いに答えよ．



(1) P を通って B へ行く道順は何通りか．
(2) ×印の地点を通らずに B へ行く道順は何通りか．

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

(1) 計 6 文字．a が 2 個，b が 3 個，c が 1 個．

$$\frac{6!}{2!3!1!} = \frac{720}{2\times 6\times 1} = \mathbf{60}\ (\text{通り})$$

(2) 計 8 個．1 が 2 個，2 が 2 個，3 が 4 個．

$$\frac{8!}{2!2!4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 420\ (\text{通り})$$

2

「A が B より左，B が C より左」 $\Longrightarrow$ A, B, C の順序が固定されている．この 3 人を同じ文字（例：□, □, □）とみなして並べる．全体は 6 人なので，□ 3 つと D, E, F の計 6 個の順列．

$$\frac{6!}{3!} = 6\cdot 5\cdot 4 = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

（並べた後，左の □ から順に A, B, C を入れる方法は 1 通りしかない）

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

(1) A → P → B と分解して考える．

- A → P：右 2，上 2 $\Longrightarrow$ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り
- P → B：右 4，上 2 $\Longrightarrow$ $\frac{6!}{4!2!} = 15$ 通り

積の法則より，$6\times 15 = \mathbf{90}$ 通り．

(2) 全体から「×を通る」場合を引く．

- 全体：右 6，上 4 $\Longrightarrow$ $\frac{10!}{6!4!} = 210$ 通り
- ×を通る：A → (4,3) → B
- A → (4,3)：右 4，上 3 $\Longrightarrow$ $\frac{7!}{4!3!} = 35$ 通り
- (4,3) → B：右 2，上 1 $\Longrightarrow$ $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 通り
- 通る場合：$35\times 3 = 105$ 通り

よって，$210 - 105 = \mathbf{105}$ 通り．（※書き込み計算でも求められる）