年　　組　　番　氏名

1. コーシー・シュワルツの不等式

「2 乗の積」は「積の 2 乗」よりデカい

相加・相乗平均と並ぶ，不等式のスーパースターを紹介する．これは「ベクトルの内積」とも深く関係している美しい不等式である．

$\boldsymbol{a, b, x, y}$ が実数のとき，

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

(等号成立は $ay = bx$ のとき)

例題 1（不等式の証明）

コーシー・シュワルツの不等式を証明せよ．

Proof

2. 最大・最小問題への応用

2 乗の和がわかっているとき

この不等式は，「$x^2+y^2=k$ のとき $ax+by$ の範囲を求めよ」といった問題で威力を発揮する．

例題 2（最大・最小）

$x^2+y^2=4$ のとき，$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ．

Proof

年　　組　　番　氏名

3 変数の場合（拡張）

この不等式は変数の数が増えても成り立つ．

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

例題 3（3 変数の最小値）

$a>0, b>0, c>0$ とする．$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ の最小値を求めよ．

Proof

年　　組　　番　氏名

確認テスト

練習 A1（基本適用）

$x^2+y^2=1$ のとき，$x+2y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

Proof

$a=1, b=2$ としてコーシー・シュワルツの不等式を適用する．

$$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geqq (x+2y)^2$$
$$5\cdot 1 \geqq (x+2y)^2$$
$$(x+2y)^2 \leqq 5$$
$$-\sqrt{5} \leqq x+2y \leqq \sqrt{5}$$

練習 A2（証明）

$x^2+y^2+z^2=1$ のとき，$x+y+z$ の最大値が $\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

Proof

3 変数のコーシー・シュワルツの不等式で $a=b=c=1$ とする．

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$$
$$3\cdot 1 \geqq (x+y+z)^2$$
$$-\sqrt{3} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3}$$

よって最大値は $\sqrt{3}$.

練習 B1（条件付きの最小値）

$3x+4y=5$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ．

Hint

コーシー・シュワルツの不等式 $(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geqq (3x+4y)^2$ を利用し，不等式の向きに注意して解く．

Memo / Answer

練習 B2（数学史コラム：3 次方程式の解の公式）

16 世紀イタリア，数学者のタルタリアとカルダノは 3 次方程式の解の公式を発見した．しかし，その公式を使うと $\sqrt{-1}$ (虚数) が途中式に出てきてしまう場合があった．彼らは当時「不合理な数」としてこれを嫌ったが，この「虚数」を認めることで，数学の世界は飛躍的に広がった．今日の授業で扱った x^2+y^2 のような 2 乗の和も，複素数平面上では「原点からの距離の 2 乗」として意味を持つ．

問い: 複素数 $z=3+4i$ について，原点からの距離 $|z|=\sqrt{3^2+4^2}$ を求めよ．

Memo / Answer

$|z|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$