1. 自然数の和 ($\sum k$)

まずは復習．1 から n までの自然数の和 S_n を考える．これは「初項 1, 末項 n, 項数 n」の等差数列の和である．

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n &= n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{aligned}$$

$n+1$ が n 個できるので $2S_n = n(n+1)$.

1 乗の和

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

2. 連続整数の積の和 ($\sum k(k+1)$)

$\sum k^2$ を求める前に，まず**「連続 2 整数の積の和」**を求めよう．次の恒等式を利用する．

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$$

この式の k に 1 から n までを代入して縦に足すと...

$$\begin{array}{lcccc} k=1: & 1\cdot 2\cdot 3 & -0\cdot 1\cdot 2 & = & 3(1\cdot 2) \\ k=2: & 2\cdot 3\cdot 4 & -1\cdot 2\cdot 3 & = & 3(2\cdot 3) \\ & \vdots & & & \vdots \\ k=n: & n(n+1)(n+2) & -(n-1)n(n+1) & = & 3n(n+1) \\ \hline & n(n+1)(n+2) & & = & 3\sum k(k+1) \end{array} \quad (+)$$

よって $3\sum k(k+1) = n(n+1)(n+2)$.

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

3. 2 乗の和 ($\sum k^2$)

先ほど求めた $\sum k(k+1)$ を利用して $\sum k^2$ を求める．

$$k(k+1) = k^2 + k \iff k^2 = k(k+1) - k$$

であることを利用する．

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ & \quad \leftarrow \frac{1}{6}n(n+1) \text{ でくくる} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2) - 3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4-3) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

この方法なら，展開や複雑な計算なしで導くことができる．

2 乗の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

4. 3 乗の和 ($\sum k^3$)

(参考) 同様に $\sum k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ を用いると，$k^3 = k(k+1)(k+2) - 3k^2 - 2k$ の変形から導くことができる．

3 乗の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

5. 公式を使った計算

公式を代入した後，バラバラに展開してしまうと計算ミスが増える．共通因数（特に分数の $n(n+1)$ など）でくくりだすのが鉄則である．

例題 1 (くくり出しの練習)

次の和を求め，因数分解した形で答えよ．

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)$$

Memo / Answer

6. ゴールが n じゃないとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$ のように，ゴールが $n-1$ のときは，公式の n をすべて $(n-1)$ に書き換えて計算する．

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} c = c(n-1)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$

例題 2 ($n-1$ までの和)

次の和を計算せよ．($n \geqq 2$)

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$

Memo / Answer

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (公式の確認)

次の和を求めよ．因数分解した形でなくてもよい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k+2)$

Memo / Answer

練習 A2 (因数分解)

次の計算を行い，因数分解した形で答えよ．

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (数列の和)

次の数列の和を求めよ．

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + n(n+2)$$

ヒント：第 k 項（一般項）は $k(k+2)$．これを Σ で計算する．

Memo / Answer

練習 B2 (項数に注意)

次の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

$$\begin{aligned}\sum(3k^2-k) &= 3\sum k^2-\sum k\\ &= 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &\quad (\leftarrow \text{共通因数 } \frac{1}{2}n(n+1) \text{ でくくる})\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-1\}\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot 2n\\ &= \boldsymbol{n^2(n+1)}\end{aligned}$$

例題 2 解答

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) &= 2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\\ &= n(n-1)+(n-1)\\ &= (n-1)(n+1)\\ &= \boldsymbol{n^2-1}\end{aligned}$$

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

(1) $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=\frac{2310}{6}=\boldsymbol{385}$

(2) $6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n=3n^2+3n+2n=\boldsymbol{3n^2+5n}$

練習 A2 解答

$$\begin{aligned}\sum(k^2+k) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\cdot 2(n+2)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

$a_k=k(k+2)=k^2+2k$.

$$\begin{aligned}S &= \sum k^2+2\sum k\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{6}{6}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)}\end{aligned}$$

練習 B2 解答

$\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$. A2 の結果「$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$」の n を $n-1$ に変えればよい.

$$\frac{1}{3}(n-1)\{(n-1)+1\}\{(n-1)+2\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)}$$

(普通に計算する場合) $=\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{6}(n-1)n\{(2n-1)+3\}=\frac{1}{6}(n-1)n(2n+2)$.