1. 掛け算の新しいルール「内積」

ベクトルの足し算・引き算は「矢印の継ぎ足し」だったが，**掛け算**はどう定義すればよいだろうか？
物理学における「仕事（力 × 移動距離）」の考え方を導入し，ベクトル同士の積を定義する．

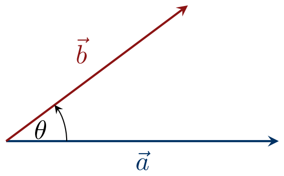
内積の定義 (Inner Product)

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と定義する．($\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは 0 と定める)

最大の注意点: 計算結果はベクトル（矢印）ではなく，**スカラー（単なる数値）**になる．



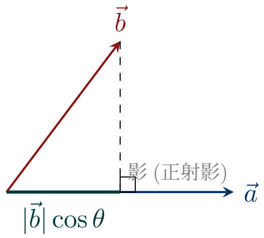
ポイント:
必ず始点を揃えて
角度を測る．

2. 内積の幾何学的意味（影の長さ）

式を変形すると，図形的な意味が見えてくる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \times \underbrace{(|\vec{b}|\cos\theta)}_{\text{影の長さ}}$$

- $|\vec{b}|\cos\theta$ は，$\vec{b}$ から $\vec{a}$ に下ろした垂線の足までの長さ（正射影）を表す．
- つまり内積とは，**「一方のベクトルの上にもう一方を投影し，その長さ同士を掛けたもの」**である．



重要な値

- $\theta = 0^\circ$ (同じ向き): $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ (最大)
- $\theta = 90^\circ$ (垂直): $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$　　**※超重要**
- $\theta = 180^\circ$ (逆向き): $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ (最小)

例題 1 (基本計算)

$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ で，なす角 θ が以下のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(1) $\theta = 60^\circ$
(2) $\theta = 135^\circ$

3. 図形問題での注意点

多角形の中で内積を考えるとき, ベクトルの始点が揃っていない場合がある. **必ず始点を揃える**ように平行移動してから角度を読み取ること.

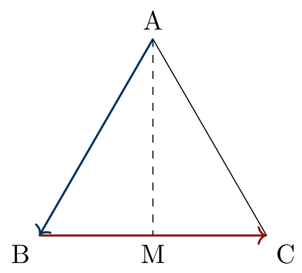
例題 2 (正三角形の内積)

1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC について, 次の内積を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(始点に注意!)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$　(M は辺 BC の中点)



例題 3 (成分計算への布石)

直角二等辺三角形 ABC ($C = 90^\circ, AC = BC = 1$) において, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (計算)

次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積を求めよ.

(1) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2$, なす角 $60°$

(2) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$, なす角 $150°$

(3) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \perp \vec{b}$

Memo / Answer

練習 A2 (大きさの計算)

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ のとき, なす角 θ を求めよ.

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (正六角形の内積)

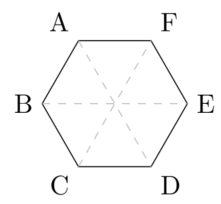
1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において, 次の内積を求めよ.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$

(4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$



Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 (計算)

(1) $5 \times 2 \times \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = \mathbf{5}$
(2) $4 \times 3 \times \cos 150^\circ = 12 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{-6\sqrt{3}}$
(3) 垂直ならば内積は $\mathbf{0}$

Memo / Answer

A2 解答:
定義より $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$. 値を代入すると,

$$4 = 2 \times 3 \times \cos\theta$$

$$6\cos\theta = 4 \implies \cos\theta = \frac{2}{3}$$

よって $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{2}{3}}$
(具体的な角度が出ない場合は cos の値で答える)

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:
1 辺の長さは 1. 内角は 120°.
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
始点は A で揃っている. なす角は $\angle BAF = 120^\circ$.
$1 \times 1 \times \cos 120^\circ = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$
(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
始点が異なる. $\overrightarrow{AB}$ を平行移動して, 始点を B に合わせる (B から A の逆へ伸ばす).
なす角は $180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
$1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \mathbf{\frac{1}{2}}$
(3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$
AD は外接円の直径で長さ 2. $\angle DAF = 60^\circ$.
$2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{1}$
(4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$
$\overrightarrow{BE}$ と $\overrightarrow{AD}$ は平行ではない...? いや, BE も対角線.
図を見ると $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BE}$ のなす角は 60°. 長さは共に 2.
$2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{2}$