年　組　番　氏名

1. 総合演習：法線と面積

微分法と積分法の全範囲を総動員して，以下の問題に挑む．

最後の問い「微分・積分・極限」

放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ $(a > 0)$ を通り，点 P における接線と直交する直線を ℓ（法線）とする．

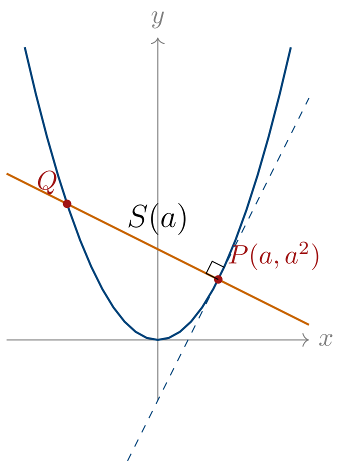
(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 ℓ と放物線 C の交点のうち，P でない方の点 Q の x 座標を求めよ．

(3) 放物線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a を用いて表せ．

(4) $a > 0$ における $S(a)$ の最小値を求めよ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{S(a)}{a^3}$ を求めよ．

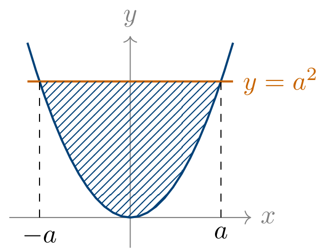


Memo / Answer

Memo / Answer

Epilogue：極限の図形的意味

この極限値 $\frac{4}{3}$ は何を意味しているのだろうか？
$a \to \infty$ のとき，$P(a, a^2)$ は遥か彼方へ移動する．このとき，接線の傾き $2a$ は ∞（垂直）に近づくため，直交する**法線は「水平（真横）」に近づく**．
つまり，面積 $S(a)$ は，限りなく「**放物線 $y = x^2$ と 水平な直線 $y = a^2$ で囲まれた面積**」に近づいていくはずである．



実際にこの面積を計算してみると，幅が $2a$ なので 1/6 公式より

$$\frac{1}{6}\{a-(-a)\}^3 = \frac{1}{6}(2a)^3 = \frac{8}{6}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

となる．したがって比率は

$$\frac{S(a)}{a^3} \approx \frac{\frac{4}{3}a^3}{a^3} = \frac{4}{3}$$

となり，計算結果と完全に一致する．

【結び】
第 1 回の授業で，我々は「極限（lim）」を使って面積を定義した．
そして今，我々は微積分を使って面積関数 $S(a)$ を手に入れ，その挙動を再び「極限」を使って予測できるようになった．静止した図形だけでなく，**「変化する世界」**を記述できるようになったこと．これこそが微積分の力である．