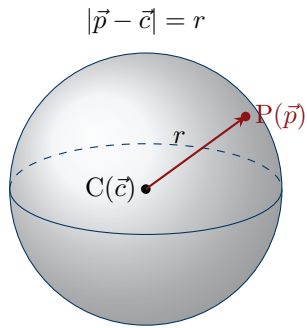


1. 球面の方程式

中心からの距離が一定である点の集合、それが「球」である。ベクトルでの表現（定義）は、平面（円）の場合と全く同じ式になる。



球面のベクトル方程式と成分表示

中心 $C(\vec{c})$ ，半径 r の球面のベクトル方程式は

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$

中心 $C(a, b, c)$ ，動点 $P(x, y, z)$ とすると

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

※ 数学 II「図形と方程式」の円の方程式に、 z 成分が加わっただけである。

例題 1

次の方程式はどのような図形を表すか。

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 1 = 0$$

Memo / Answer

2. 2 点を直径の両端とする球面

2 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を直径の両端とする球面上において、点 P (A, B を除く) をとると、 $\angle APB = 90^\circ$ となる。

直径の両端

2 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を直径の両端とする球面の方程式は

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

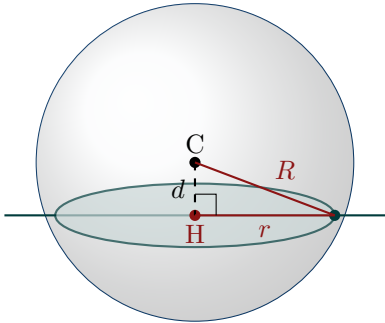
例題 2

2 点 $A(1, 2, 3), B(3, -2, 1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

Memo / Answer

3. 球面と平面の交わり（切り口の円）

球面を平面で切ると、その断面は「円」になる。この円の中心と半径を求めるには、球の中心から平面に下ろした垂線（距離 d ）に着目し、直角三角形を取り出す。



三平方の定理
 $R^2 = d^2 + r^2 \implies r = \sqrt{R^2 - d^2}$
 R : 球の半径
 d : 球心と平面の距離
 r : 切り口の円の半径

例題 3

球面 $S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ が、平面 $\alpha : 2x + y - 2z - 9 = 0$ と交わってできる円の半径 r と、円の中心 H の座標を求めよ。

Memo / Answer

4. 接平面の方程式

球面上の点 $P_0(p_0)$ における接平面は、半径 $C\vec{P}_0$ に垂直である。つまり、法線ベクトル $\vec{n} = C\vec{P}_0$ と考えればよい。

接平面の方程式

球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面は
 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2$

確認テスト A (基本)

練習 A1

中心が $(2, -1, 4)$ で、点 $(5, 3, 4)$ を通る球面の方程式を求めよ。

練習 A2

球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$ の中心と半径を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト B (標準)

練習 B1

球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ と 平面 $\alpha : x + 2y + 2z - 6 = 0$ が交わってできる円の半径 r を求めよ。

練習 B2

点 $A(0, 3, 0)$ を中心とする半径 r の球面 S がある。球面 S が 平面 $x - 2y + 2z - 3 = 0$ と接するとき、半径 r の値を求めよ。また、接点の座標を求めよ。

Memo / Answer

確認テスト A (基本) 【解答】

練習 A1

中心 $C(2, -1, 4)$, 点 $A(5, 3, 4)$ を通る

Memo / Answer

半径 r は 中心 C と通る点 A の距離である。 $r^2 = |\vec{CA}|^2 = (5-2)^2 + (3-(-1))^2 + (4-4)^2 = 3^2 + 4^2 + 0^2 = 9 + 16 = 25$ よって求める方程式は答 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 25$

練習 A2

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$$

Memo / Answer

平方完成を行う。 $(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z) = 11$ $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9 = 11$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 11 + 1 + 4 + 9$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ よって答 中心 $(1, -2, 3)$, 半径 5

確認テスト B (標準) 【解答】

練習 B1

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ と $x + 2y + 2z - 6 = 0$ の交円の半径

Memo / Answer

球の中心は原点 $O(0, 0, 0)$, 半径は $R = 3$ 。中心 O と平面 α の距離 d を求める。
 $d = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$ 切り口の円の半径を r とすると, R, d, r で直角三角形ができるので $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ 答 $r = \sqrt{5}$

練習 B2

中心 $A(0, 3, 0)$, 平面 $x - 2y + 2z - 3 = 0$ に接する。

Memo / Answer

球が平面に接するとき, 球の半径 r は, 中心と平面の距離 d に等しい。

$$r = d = \frac{|0 - 2(3) + 2(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-6 - 3|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

答 $r = 3$

次に接点 H を求める。 H は, 中心 A を通り平面に垂直な直線上にある。平面の法線ベクトル $\vec{n} = (1, -2, 2)$ が直線方向ベクトルとなるので $H(t, 3-2t, 2t)$ とおける。これが平面上にあるので代入: $t - 2(3-2t) + 2(2t) - 3 = 0$ $t - 6 + 4t + 4t - 3 = 0 \implies 9t = 9 \implies t = 1$ H の座標は $(1, 3-2, 2) = (1, 1, 2)$

答 接点 $(1, 1, 2)$