年　　組　　番　氏名

1. 係数が動くと，点も動く

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ という式において，係数 s, t がある条件を満たしながら変化するとき，点 P はどのような図形を描くだろうか．

基本の 3 パターン

$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とする．

(1) **直線 AB**:

$$s + t = 1$$

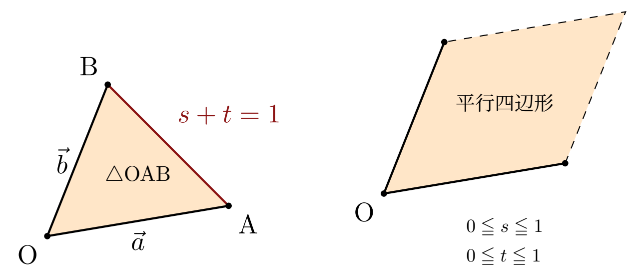
(2) **三角形 OAB の周と内部**:

$$0 \leqq s + t \leqq 1, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0$$

(3) **平行四辺形の周と内部**:

$$0 \leqq s \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

イメージ図:



特に重要なのは **(1)** $s + t = 1$ である．これが「直線」を表す条件となる．

2. 「ななめの座標」で考える（斜交座標）

第 2 回で触れた通り，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を基準にすると，平面上に**斜めのマス目（グリッド）**を作ることができる．

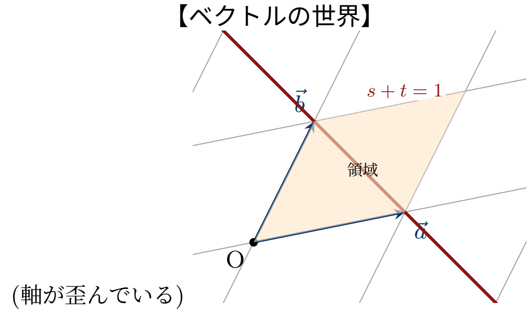
$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \iff \text{点 P の座標は } (s, t)$$

この視点で見れば，難しいベクトルの式も，中学・高 1 で習った「グラフ」と同じに見えてくる．

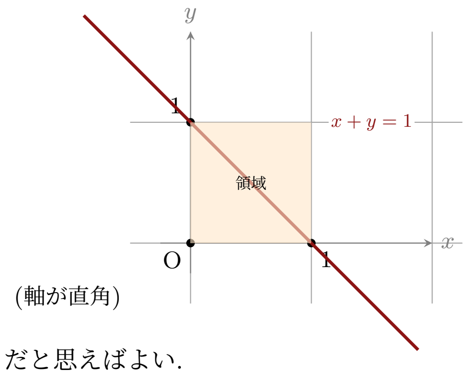
いつものグラフと比較

- **直線 AB**: $s + t = 1 \iff$ 直交座標の直線 $x + y = 1$
- **平行四辺形の内部**: $0 \leqq s, t \leqq 1 \iff$ 直交座標の正方形 $0 \leqq x, y \leqq 1$

【ベクトルの世界】



【いつもの xy 世界】



結論: ベクトルの係数 s, t は，斜めの世界での座標 (x, y) だと思えばよい．

3. 「和を 1 にする」テクニック

もし $s+t=2$ のようになったらどうするか？ ベクトルの世界では**「係数の和が 1」**の形に持ち込むのが鉄則である.

- 式全体を割って, 右辺を無理やり 1 にする.
- 係数を調整して, 新しい基底ベクトル（矢印）を作る.

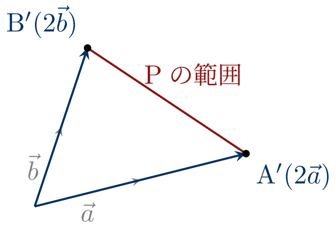
例題 1 (基本変形)

$\triangle$OAB において, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする. $s+t=2$ を満たすとき, 点 P の存在範囲を図示せよ.

手順: 1. 両辺を 2 で割る. $\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$. 2. $s'=\dfrac{s}{2}, t'=\dfrac{t}{2}$ と置く. $(s'+t'=1)$ 3. 元の式を s', t' で書き換える.

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}=(2s')\vec{a}+(2t')\vec{b}=s'(2\vec{a})+t'(2\vec{b})$$

4. 新しい矢印 $2\vec{a}, 2\vec{b}$ の終点を結ぶ直線を考える.



4. 不等式になってもやることは同じ

条件が $s+t\leqq 2$ のように不等式になった場合も, 同様に変形する.

例題 2 (不等式の領域)

$\triangle$OAB において, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする. $2s+3t\leqq 1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$ のとき, 点 P の存在範囲を図示せよ.

手順: 1. 右辺は既に 1 なので, 左辺を無理やり $(s')+(t')\leqq 1$ の形と見る.

$$2s+3t=(2s)+(3t)\leqq 1$$

2. $s'=2s,\ t'=3t$ と置く. $(s'\geqq 0, t'\geqq 0)$ 3. 元の式を書き換える. $s=\frac{1}{2}s',\ t=\frac{1}{3}t'$ なので,

$$\vec{p}=\frac{1}{2}s'\vec{a}+\frac{1}{3}t'\vec{b}=s'(\frac{1}{2}\vec{a})+t'(\frac{1}{3}\vec{b})$$

4. 新しい矢印 $\frac{1}{2}\vec{a}, \frac{1}{3}\vec{b}$ で作られる三角形を描く.

年　　組　　番　氏名

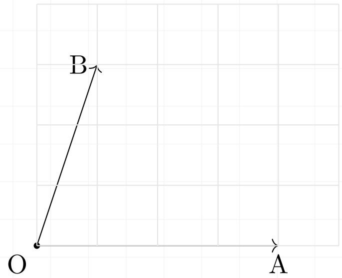
確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (直線の変形)

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とする．次の条件を満たす点 P の存在範囲を答えよ（「どのような図形か」を言葉で記述し，図示せよ）．

$$2s + t = 1$$

Memo / Answer



練習 A2 (領域の変形)

条件が以下のとき，点 P の存在範囲を図示せよ．

$$s + t \leqq 2, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (一般形の領域)

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とする．

$$2s + 3t \leqq 6, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0$$

を満たす点 P の存在範囲を図示し，その面積は △OAB の面積の何倍か求めよ．

Memo / Answer

図示:

面積比の計算:

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

式を変形する: $(2s)+t=1$. $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}=(2s)(\frac{1}{2}\vec{a})+t\vec{b}$.
よって, 辺 OA の中点 $(\frac{1}{2}\vec{a})$ を A$'$, 点 B を B$'(\vec{b})$ としたとき, **直線 A$'$B$'$** が求める範囲である.
(補足: 直線 AB 上の点ではなく, 線分 OA の中点と B を通る直線になる)

練習 A2 解答

両辺を 2 で割る: $\frac{s}{2}+\frac{t}{2}\leqq 1$. 式は $\vec{p}=(\frac{s}{2})(2\vec{a})+(\frac{t}{2})(2\vec{b})$.
OA を 2 倍に延長した点を A$'$, OB を 2 倍に延長した点を B$'$ とする. 求める範囲は, **△OA$'$B$'$ の周と内部**である.

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

両辺を 6 で割って右辺を 1 にする.

$$\frac{2s}{6}+\frac{3t}{6}\leqq 1 \iff \frac{s}{3}+\frac{t}{2}\leqq 1$$

これを $\vec{p}$ の式に反映させるには,

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}=\frac{s}{3}(3\vec{a})+\frac{t}{2}(2\vec{b})$$

と変形する.

図形の特定:

- A$'$: OA を 3 倍に延長した点 $(3\vec{a})$
- B$'$: OB を 2 倍に延長した点 $(2\vec{b})$

これらで作られる △OA$'$B$'$ の周と内部が求める範囲.

面積比: 底辺 (OA 方向) が 3 倍, 高さ方向 (OB 方向) が 2 倍 になっているので, 面積は $3\times 2=6$ 倍.

答え: △OAB の **6 倍**