

**Introduction : 数学の「言葉」を学ぼう**

高校数学へようこそ！ 最初は計算練習のように見えますが、ここでは「式を整理整頓する力」と「式のカタマリを見る力」を養います。複雑な式も、整理のルールに従えばシンプルに見えてきます。まずは用語の確認から始めましょう。

**単項式と多項式・次数のルール**

(1) 単項式：数や文字の掛け算だけで作られた式（例： $3x^2$ ,  $-2ab$ ）

- 次数：掛け合わせた文字の個数。
- 係数：数の部分。

(2) 多項式：単項式の和で表された式（例： $x^2 + 2x + 1$ ）

- 次数：最も次数の高い項の次数。
- 定数項：文字を含まない項。

(3) 重要：特定の文字に着目する

- 「 $x$ についての式」と見なす場合、他の文字（ $a$ や $y$ ）はただの数字（定数）として扱う。

**例題 1：次数と係数**

単項式  $-2ax^2y^3$  について、次の文字に着目したときの係数と次数を答えよ。

- (1)  $x$
- (2)  $y$
- (3)  $x$  と  $y$

**考え方：**着目した文字以外はすべて「係数（数字扱い）」として答えます。

- (1)  $x$ に着目  $\rightarrow x$ は2個  $\rightarrow$  次数2。残りの  $-2ay^3$  が係数。

**Memo / Answer****降べきの順（こうべきのじゅん）**

多項式を整理するときは、「次数の高い項から低い項へ」順に並べるのが基本マナーです。これを降べきの順といいます。

$$\text{例: } 3x + x^2 - 1 \xrightarrow{\text{整理}} x^2 + 3x - 1$$

**例題 2：降べきの順**

多項式  $ax^3 + x^2 - 2x^2 + 5a - 1$  を、 $x$ について降べきの順に整理せよ。また、 $x$ についての何次式か答えよ。

**Point:** 同類項（文字の部分が同じ項）はまとめます。 $x^2 - 2x^2 = (1 - 2)x^2 = -x^2$  定数項（ $x$ がない部分）もまとめて後ろに置きます。

**Memo / Answer**

## 展開の「視点」：カタマリを見つける

高校数学では、式の一部を「カタマリ」として捉え、別の文字（ $A$ など）に置き換えて計算を楽にする技術が必須です。

## 展開の公式（3項の平方）

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

導出： $a+b=A$  と置くと、 $(A+c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$  これを展開して整理すると得られます。

## 例題3：置き換えによる展開

次の式を展開せよ。

(1)  $(a-b+c)^2$

(2)  $(x^2+x+1)(x^2+x-3)$

考え方：(1) 公式の  $b$  を  $-b$  に変えて当てはめるか、 $a-b=A$  と置く。(2) バラバラに展開すると  $3 \times 3 = 9$  回の掛け算が必要になり大変。共通部分  $x^2 + x$  を見つけ、 $A$  と置いてみよう。

$$(A+1)(A-3) = A^2 - 2A - 3$$

最後に  $A$  を元に戻すのを忘れずに。

## Memo / Answer

## 展開の「順序」：組み合わせの工夫

「計算は前から順番にやるもの」という思い込みを捨てましょう。掛け算の順序を変えることで、共通部分（カタマリ）を自分で作り出すことができます。

## 例題4：ベストカップルを探せ!!

次の式を展開せよ。

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$$

ヒント：適当に2つずつペアを作って展開し、同じ部分  $(x^2 + \square x)$  ができる組み合わせを探します。

- $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

- $(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

これだと共通部分ができません。和が等しくなるペア  $(-1+4=3, -2+3=1 \dots \text{違うな})$  を探そう。

## Memo / Answer

**A 問題：基礎の定着****練習 A1: 次数と係数**

単項式  $-5xy^2z^3$  について、次の文字に着目したときの係数と次数を答えよ。

- (1)  $y$
- (2)  $y$  と  $z$

**練習 A2: 降べきの順**

次の整式を  $x$  について降べきの順に整理し、次数と定数項を答えよ。

$$2x^2 + y^2 - 3xy - 4 + x + 5y$$

**練習 A3: 基本的な置き換え**

次の式を展開せよ。

$$(x + 2y - 3)(x + 2y + 1)$$

Memo / Answer

**B 問題：標準・応用****練習 B1: 3項の平方**

次の式を展開せよ。

$$(x - 2y - 3z)^2$$

**練習 B2: 組み合わせの工夫**

次の式を展開せよ。

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$$

**練習 B3: 少し複雑な置き換え**

次の式を展開せよ。

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1)$$

Memo / Answer

**A 問題：解答****Memo / Answer****A1**(1)  $y$  に着目：

- 係数： $-5xz^3$
- 次数： $2$  ( $y^2$  なので)

(2)  $y$  と  $z$  に着目：

- 係数： $-5x$
- 次数： $2 + 3 = 5$  ( $y^2z^3$  なので)

**A2**  $x$  を含む項を次数順に並べ、係数をまとめろ。

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3xy + x + y^2 + 5y - 4 \\ &= 2x^2 + (-3y + 1)x + (y^2 + 5y - 4) \end{aligned}$$

よって、

- 整理した式： $2x^2 - (3y - 1)x + y^2 + 5y - 4$
- 次数：**2**
- 定数項： $y^2 + 5y - 4$

**A3**  $x + 2y = A$  と置く。

$$(A - 3)(A + 1) = A^2 - 2A - 3$$

 $A$  を元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 3 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 \end{aligned}$$

**B 問題：解答****Memo / Answer****B1** 公式  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  において、 $a = x$ ,  $b = -2y$ ,  $c = -3z$  として考える。

$$\begin{aligned} & x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2x(-2y) + 2(-2y)(-3z) + 2(-3z)x \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx \end{aligned}$$

**B2** 定数項の和が等しくなる組み合わせを作る。 $(1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5)$  なので、

$$\begin{aligned} & \{(x + 1)(x + 4)\} \times \{(x + 2)(x + 3)\} \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) \end{aligned}$$

ここで  $x^2 + 5x = A$  と置く。

$$(A + 4)(A + 6) = A^2 + 10A + 24$$

元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 \\ &= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24 \\ &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \end{aligned}$$

**B3**  $x^2 - 2x = A$  と置く。

$$(A - 3)(A + 1) = A^2 - 2A - 3$$

元に戻す。

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 + 4x - 3 \\ &= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$