

## 1. 等比数列の定義

等差数列が「足し算のリレー」なら、等比数列は「掛け算のリレー」である。

## 等比数列 (Geometric Progression)

一定の数  $r$  を次々と掛けていく数列を等比数列といい、 $r$  を公比 (こうひ) という。

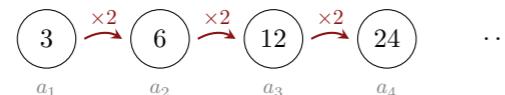
## 【漸化式による定義】

$$a_{n+1} = a_n \times r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

意味：次の項は、前の項を  $r$  倍したもの

例：3, 6, 12, 24, …

- 初項  $a_1 = 3$
- 毎回  $\times 2$  されているので、公比  $r = 2$
- 漸化式で書くと： $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$

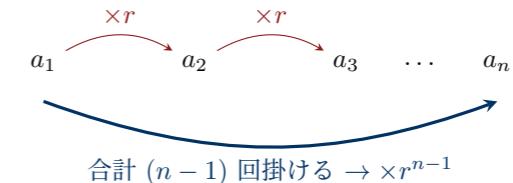


細胞分裂や借金の利子など、急激に増えていく現象（指数関数的増加）を表すモデルとなる。

## 2. 何回掛ければいい？（一般項）

等差数列と同じく、スタート地点からゴールまで一気にワープする式（一般項）を作ろう。掛け算を繰り返すということは、累乗（るいじょう）になる。

- $a_1 = a$
- $a_2 = a \times r$  (1回かける)
- $a_3 = a \times r \times r = ar^2$  (2回かける)
- $a_4 = a \times r \times r \times r = ar^3$  (3回かける)



$n$  番目に行くには、公比  $r$  を  $(n - 1)$  回掛けば良い。

## 等比数列の一般項

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の一般項  $a_n$  は

$$a_n = ar^{n-1}$$

## 例題 1 (基本計算)

初項 2、公比  $-3$  の等比数列の一般項を求めよ。また、第 5 項を求めよ。

## Memo / Answer

## 3. 数列の決定（割り算で消去）

初項  $a$  と 公比  $r$  が不明なときは、連立方程式を立てる。等比数列では、変数  $a$  を消去するために辺々を割り算するのがテクニックである。

## 例題 2 (2 つの項から決定)

第 2 項が 6、第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ。

Memo / Answer

## 4. 等比中項（3 つの数が等比数列）

3 つの数  $a, b, c$  がこの順で等比数列になっているとき、公比  $r$  は

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

と表せる。これを分母を払って整理すると

$$b^2 = ac$$

というきれいな関係式が得られる。これを等比中項の性質という。

## 例題 3 (等比中項)

数列  $x - 1, x + 1, 2x + 2$  が等比数列となるとき、 $x$  の値を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト (A: 基本)

## 確認テスト (B: 標準)

## 練習 A1 (一般項の計算)

次の等比数列の一般項  $a_n$  と、第 4 項  $a_4$  を求めよ。

- (1) 初項 3, 公比 2
- (2) 初項 -2, 公比 -3
- (3)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Memo / Answer

## 練習 B1 (2 項から決定)

第 3 項が 12, 第 6 項が -96 である等比数列の一般項を求めよ。

Memo / Answer

## 練習 A2 (項の決定)

初項 3, 公比 2 の等比数列において、初めて 1000 を超えるのは第何項か。 $(2^{10} = 1024$  を用いてもよい)

Memo / Answer

## 練習 B2 (等比中項)

3 つの数  $a, 4, b$  が等差数列であり、かつ  $a, 3, b$  が等比数列であるとき、 $a, b$  の値を求めよ。

Memo / Answer

## 解答 (例題)

## 例題 1 解答

公式  $a_n = ar^{n-1}$  より

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

第 5 項は  $n = 5$  を代入して

$$a_5 = 2 \cdot (-3)^{5-1} = 2 \cdot (-3)^4 = 2 \cdot 81 = 162$$

## 例題 2 解答

初項  $a$ , 公比  $r$  とおく.

•  $a_2 = 6 \iff ar = 6 \dots (1)$

•  $a_5 = 162 \iff ar^4 = 162 \dots (2)$

(2) ÷ (1) を計算する:

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{6} \implies r^3 = 27$$

$r$  は実数なので  $r = 3$ . (1) に代入して  $3a = 6 \implies a = 2$ .

よって,  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

## 例題 3 解答

等比中項の性質  $b^2 = ac$  より

$$(x+1)^2 = (x-1)(2x+2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2(x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

よって  $x = 3, -1$ .

( $x = -1$  のときは 0 が現れるため等比数列とみなさない場合もあるが, ここでは数式上の解として扱う. ただし等比数列の定義において公比 0 や初項 0 を除くのが一般的であるため,  $x = 3$  のみが適する場合が多い.  $x = 3$  のとき 2, 4, 8.  $x = -1$  のとき -2, 0, 0.)

## 解答 (確認テスト)

## 練習 A1 解答

(1)  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ .

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

(2)  $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$ .

$$a_4 = -2 \cdot (-27) = 54.$$

(3) 初項 1, 公比  $\frac{1}{2}$ .

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$a_4 = \frac{1}{8}.$$

## 練習 A2 解答

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, 3 \cdot 2^{n-1} > 1000 \iff 2^{n-1} > 333.3\dots$$

$2^8 = 256, 2^9 = 512$ . これでは足りない.  $2^{n-1}$  が 512 を超える必要はないかもしれないが...

$$2^8 = 256 \rightarrow 3 \times 256 = 768 \text{ (まだ)} 2^9 = 512 \rightarrow 3 \times 512 = 1536 \text{ (超えた!)}$$

よって指数部分  $n-1 = 9 \implies n = 10$ . 答え: 第 10 項

## 練習 B1 解答

$$ar^2 = 12 \dots (1), ar^5 = -96 \dots (2). \text{ 割り算して } r^3 = -8 \implies r = -2. \text{ (1) より}$$

$$a(-2)^2 = 12 \implies 4a = 12 \implies a = 3.$$

答え:  $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

## 練習 B2 解答

(I)  $a, 4, b$  が等差  $\rightarrow 2 \times 4 = a + b \implies a + b = 8 \dots (1)$  (II)  $a, 3, b$  が等比  $\rightarrow 3^2 = ab \implies ab = 9 \dots (2)$

(1) より  $b = 8 - a$ . (2) に代入.  $a(8-a) = 9 \implies a^2 - 8a + 9 = 0$ . 因数分解できないので解の公式.  $a = 4 \pm \sqrt{16-9} = 4 \pm \sqrt{7}$ .

$$a = 4 + \sqrt{7} \text{ のとき } b = 4 - \sqrt{7}. a = 4 - \sqrt{7} \text{ のとき } b = 4 + \sqrt{7}.$$

答え:  $(a, b) = (4 \pm \sqrt{7}, 4 \mp \sqrt{7})$  (複号同順)