Introduction：絶対値の意味

絶対値 $|a|$ は，数直線上での**原点からの距離**を表します。距離はマイナスにならないため，中身が負の場合はマイナスをつけて正に戻します。

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -A & (A < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

グラフにおいては，y 座標（高さ）が負になる部分を正にする，つまり「**x 軸での折り返し**」を意味します。

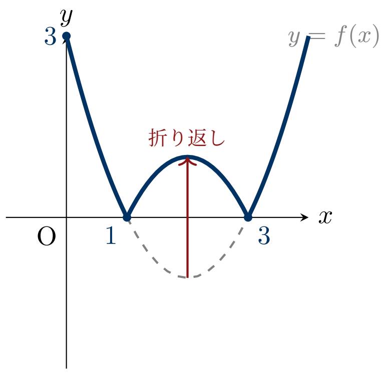
全体に絶対値がついたグラフ $y = |f(x)|$

手順：

(1) まず，中身のグラフ $y = f(x)$ を薄く描く。

(2) x 軸より**下にある部分（負の部分）**を，x **軸に関して対称移動（折り返し）**させる。

(3) x 軸より上の部分はそのまま残す。



例題 1：1 次関数の絶対値

次の関数のグラフをかけ。

$$y = |x - 2|$$

場合分けによる記述：

- $x - 2 \geqq 0$ $(x \geqq 2)$ のとき：$y = x - 2$
- $x - 2 < 0$ $(x < 2)$ のとき：$y = -(x - 2) = -x + 2$

Memo / Answer

例題 2：2 次関数の絶対値

次の関数のグラフをかけ。

$$y = |x^2 - 4|$$

手順: まず $y = x^2 - 4$ のグラフを描き，$y < 0$ の部分（$-2 < x < 2$）を折り返す。

Memo / Answer

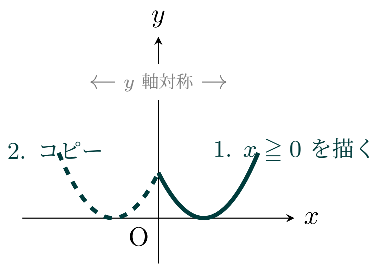
発展：x だけに絶対値がついたグラフ

$y = f(|x|)$ の形（例：$y = x^2 - 2|x| - 3$）
※ $x^2 = |x|^2$ なので，$y = |x|^2 - 2|x| - 3$ と同じ。
性質：x に $-x$ を代入しても，$|-x| = |x|$ なので式が変わらない。

$$f(|-x|) = f(|x|) \quad \longrightarrow \quad y \text{ 軸対称}$$

描き方手順：

(1) $x \geqq 0$ の範囲だけグラフを描く。（絶対値記号をそのまま外す）
(2) そのグラフを y 軸に関して対称移動して，$x < 0$ の側にコピーする。



例題 3：$y = f(|x|)$ のグラフ

関数 $y = x^2 - 4|x| + 3$ のグラフをかけ。

Memo / Answer

方程式への応用

方程式 $|x^2 - 2| = k$ の実数解の個数は，グラフ $y = |x^2 - 2|$ と 直線 $y = k$ の共有点の個数として視覚的に捉えることができます。

A 問題：基本グラフ

次の関数のグラフをかけ。

練習 A1: 1 次関数の折り返し

$$y = |2x - 4|$$

練習 A2: 2 次関数の折り返し

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

Memo / Answer

B 問題：応用

練習 B1: x の絶対値

関数 $y = x^2 - 2|x|$ のグラフをかけ。

練習 B2: 方程式とグラフ

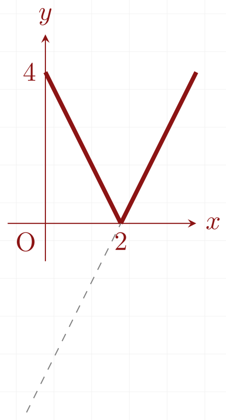
方程式 $|x^2 - 4| = k$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

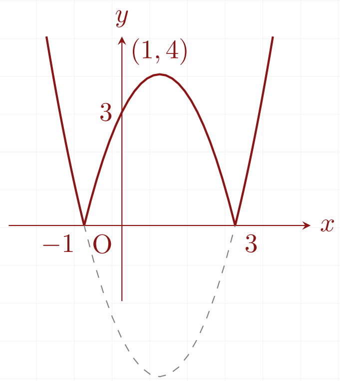
A 問題：解答

Memo / Answer

A1 $y=2x-4$ のグラフ（x 切片は 2）を描き，$x<2$ の部分を折り返す。



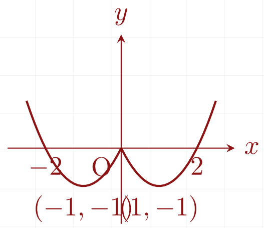
A2 中身：$y=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ x 軸との交点は $-1, 3$。頂点は $(1,-4)$。これを x 軸で折り返す。頂点は $(1,4)$ になる。



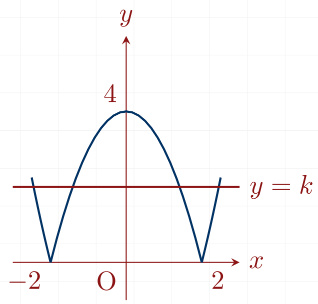
B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $y=x^2-2|x|$ は y 軸対称。$x \geqq 0$ のとき，$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$。頂点 $(1,-1)$，x 切片 $0, 2$。これを左側に折り返す。



B2 $y=|x^2-4|$ のグラフと，直線 $y=k$ の共有点が 4 個になればよい。$y=|x^2-4|$ は，頂点 $(0,-4)$ の放物線を折り返したものなので，頂点は $(0,4)$ となる。



グラフより，$y=k$ が x 軸と頂点の間にあるとき共有点が 4 個になる。よって，$\mathbf{0<k<4}$