年　　組　　番　氏名

1. 原始関数とは

関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ は求められる．では，微分して $f(x)$ になる関数はどうやって求めれば良いか??

$$\boxed{\;?\;} \xrightarrow{\text{微分}} f(x) \xrightarrow{\text{微分}} f'(x)$$

「微分の逆」クイズ

次の問いについて，正しいものを【 】から選び，丸で囲め．また，その理由を考えよ．

Q1. 微分すると **3** になる関数 $F(x)$ は？

$F(x) =$ 【 3 / $3x$ / x^3 】

Q2. 微分すると $\boldsymbol{2x}$ になる関数 $F(x)$ は？

$F(x) =$ 【 2 / $2x^2$ / x^2 】

Q3. 微分すると $\boldsymbol{4x^3}$ になる関数 $F(x)$ は？

$F(x) =$ 【 x^4 / $4x^4$ / x^3 】

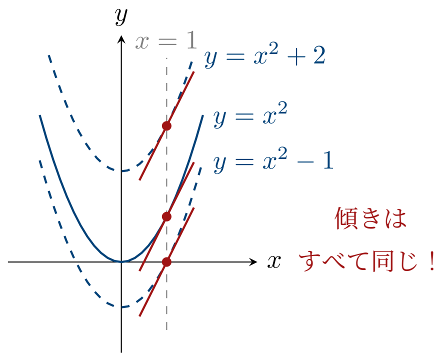
：答えは他にもある

Q2 で，$F(x) = x^2$ を選んだ人は正解である．しかし，本当にそれだけだろうか？ 微分して確かめてみよう．

- $(x^2)' = 2x \quad \to$ OK
- $(x^2 + 1)' =$ ＿＿＿＿＿＿
- $(x^2 - 5)' =$ ＿＿＿＿＿＿
- $(x^2 + 100)' =$ ＿＿＿＿＿＿

原始関数

- 導関数とは「接線の傾き」のことであった．グラフの「高さ（定数項）」が変わっても，「傾き」は変化しないため，元の関数を復元する際には**「高さのズレ」**まで特定することはできない．



- 微分して $f(x)$ になる関数は無数にある．それらをまとめて表現するために，任意の定数 C を用いる．（この定数の名前は次回紹介する．）

$$\text{微分して } 2x \text{ になる関数} \quad \to \quad \boldsymbol{x^2 + C}$$

- 定義　微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ のことを，$f(x)$ の**原始関数** $F(x)$ という．

練習

次の関数を原始関数 (微分してこの関数になる関数) を求めよ．

(1) $5x^4$
(2) $6x$
(3) x^2

Memo / Answer

2. 定積分再訪

第 3 回の振り返りと動機づけ

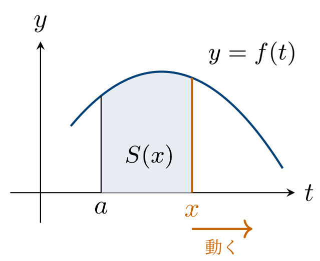
我々は「定積分＝面積（和の極限）」と定義し，区分求積法で計算した．しかし，あの計算（$\lim \sum$）は非常に大変だった．**「もっと簡単に，面積を求める魔法のような方法はないか？」**

面積関数 $S(x)$ の定義

区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ とする．定数 a から x までの定積分

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

を考えると，これは「a から x までの面積」を表す関数となる．これを**面積関数**と呼ぶことにする．



注意

S の値は x の場所によって自動的に決まる．

1. x の位置を決める
2. 右側の「壁」が決まる
3. 囲まれた**面積**が確定する

$\boxed{x} \longrightarrow$ 面積計算装置 $\longrightarrow \boxed{S}$

$\rightarrow$ S は x の関数である．

だからなんなのだ

面積関数の「変化の割合」を求め，「面積」と「微分」の関係を考察せよ!!

♣ 全体課題「微積分学の基本定理」

全体課題 ：微分と積分の関係

面積関数 $S(x)$ が $f(x)$ の原始関数である，すなわち

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

が成り立つことを示せ．，図と数式を用いて論理的に証明せよ．

Memo / Answer

証明の構想メモ（各班の持ち寄った部品）：

- A 班（不等式）：

- B 班（論理）：

- C 班（極限）：

証明の完成：

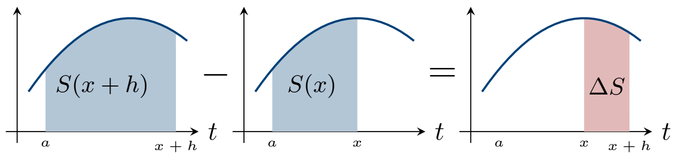
♠ エキスパート A「面積をはさみこめ.」

目標 A

面積の増分 ΔS を長方形の面積と比較し，**平均変化率に関する不等式**を 2 分で説明できる．

0. 準備：面積の差分 ΔS の正体

$S(x)$ は a から x までの面積を表す．x が $x+h$ に変化したとき，面積の変化量 ΔS はどうなるか確認しよう．

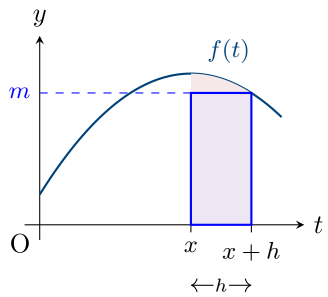


つまり，$\Delta S = S(x+h) - S(x)$ は，幅 h の**細長い帯の部分**の面積になる．

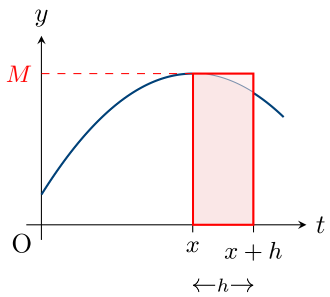
1. ΔS を長方形で評価する

区間 $[x, x+h]$ における $f(t)$ の最小値を m，最大値を M とする．Box 0 のグラフ（$x = 2.0$ から $x+h = 2.8$ の区間）を用いて，面積 ΔS を長方形と比較する．

最小の長方形 $(m \times h)$



最大の長方形 $(M \times h)$



図より明らかに，面積 ΔS（薄い赤色）は「小さい長方形」より大きく，「大きい長方形」より小さい．

2. 平均変化率の形へ

上の大小関係を不等式で表すと

$$m \times h \leqq \Delta S \leqq M \times h$$

全辺を $h(>0)$ で割ると，微分の定義式に似た形が現れる．

$$\boxed{m \leqq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq M}$$

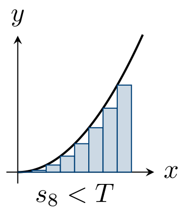
♠ エキスパート B「論理の型を整えよ.」

目標 B

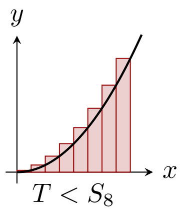
第 1 回授業の面積近似で用いた**「はさみうちの原理」**を思い出し，その論理構造を 2 分で説明できる.

1. 記憶の再生：第 1 回の面積近似

第 1 回の授業で，曲線の面積 T を長方形の和で挟み込んだことを思い出そう.



不足和 s_8



過剰和 S_8

あのとき，次の論理で面積 $T = 1/3$ を確定させた.

$$s_n \leqq T \leqq S_n$$

ここで $n \to \infty$ のとき，両側の極限が一致し

$$\lim s_n = \frac{1}{3}, \quad \lim S_n = \frac{1}{3}$$

となったため，間に挟まれた T は $\frac{1}{3}$ **以外に逃げ場がなかった**.

2. はさみうちの原理（Squeeze Theorem）

これを一般化したものが**はさみうちの原理**である.
関数 $A(h), X(h), B(h)$ について，常に

$$A(h) \leqq X(h) \leqq B(h)$$

が成り立ち，かつ両端の極限が一致するならば,

$$\lim_{h \to 0} A(h) = \alpha, \quad \lim_{h \to 0} B(h) = \alpha$$

真ん中の関数も同じ値に収束する.

$$\therefore \lim_{h \to 0} X(h) = \alpha$$

♠ エキスパート C「極限の行方を追え.」

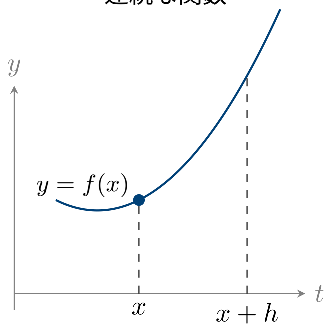
目標 C

連続関数において**区間を縮めたときの最大値・最小値の挙動**を 2 分で説明できる.

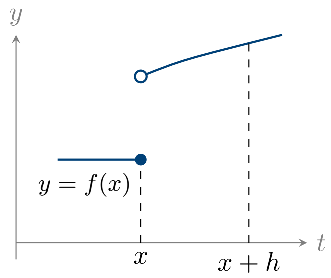
1. 連続関数とは

関数 $y = f(t)$ のグラフが「つながっている（切れていない）」とき，この関数は**連続**であるという．高校数学で扱う関数は，ほとんどが連続関数である.

連続な関数

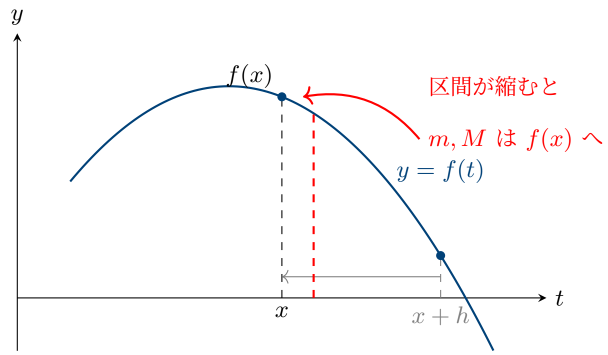


不連続な関数



2. 区間が縮むとき，最大・最小はどうなる？

連続関数 $f(t)$ において，区間 $[x, x+h]$ を考える．この区間内での最小値を $m(h)$，最大値を $M(h)$ とする.



$h \to 0$ とするとき，区間 $[x, x+h]$ は一点 x に縮まっていく．グラフがつながっている（連続）ならば，区間内の「最大値」も「最小値」も，最終的にはその地点の高さ $f(x)$ に一致するはずである.

3. 結論：極限値の一致

$f(t)$ が連続ならば次が成り立つ.

$$\lim_{h \to 0} m(h) = f(x) \quad , \quad \lim_{h \to 0} M(h) = f(x)$$

3. 不定積分

面積関数 $S(x)$ のおさらい

$f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分（$a \sim x$）の面積を $S(x)$ とする．前回，次の衝撃的な事実を証明した．

$$S'(x) = f(x) \quad (\text{微積分学の基本定理})$$

つまり，**「面積関数 $S(x)$ は，元の関数 $f(x)$ の原始関数の一つである」**．
すなわち，「原始関数 (微分の逆演算)」が分かれば，面積（Summation=$\int$）が求まる．
そこで，この**「微分の逆演算」そのもの**にも，面積の記号 $\int$ を使うことにする．

定義 不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

と書き，これを $f(x)$ の**不定積分**という．

読み方： インテグラル $f(x)\ dx$

定積分と不定積分の違い

似ているが，役割が違うので注意すること．

- **定積分** $\displaystyle\int_a^b$ . . . **値（面積）**を表す．
- **不定積分** $\displaystyle\int$ . . . **関数（微分の逆）**を表す．

4. 計算トレーニング

基本公式（x^n の積分）

微分して x^n になるものを探すと . . .

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

コツ： 次数を 1 増やして，その逆数を前に掛ける．

例題 不定積分の計算

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

【解答】

(1) $\displaystyle\frac{1}{2+1}x^{2+1} + C = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + C}$

(2) $\displaystyle 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = \boldsymbol{x^3 - 2x^2 + x + C}$