

## Introduction : 関数とは何か

中学校までは「 $x$  の値を決めると  $y$  の値がただ1つ決まるとき、 $y$  は  $x$  の関数である」と学びました。  
高校数学では、これをもう少し抽象的に捉え、箱（ブラックボックス）のイメージで理解します。



function (機能・関数) の頭文字をとって  
 $f(x)$  や  $g(x)$  などの記号で表す

$y$  が  $x$  の関数であることを、 $y = f(x)$  と書きます。 $f(x)$  という記号は、「 $x$  の式」そのものを表すと同時に、代入の操作も表します。

## 例題 1：関数の値

関数  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  について、次の値を求めよ。

- (1)  $f(2)$
- (2)  $f(-1)$
- (3)  $f(a + 1)$

## Memo / Answer

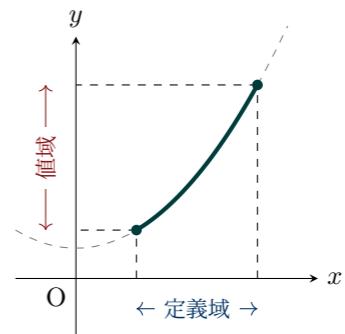
## 定義域と値域

関数  $y = f(x)$  において、変数のとりうる範囲を次のように呼びます。

## 用語の定義

- 定義域 (Domain) : 入力変数  $x$  のとりうる値の範囲。
- 値域 (Range) : 出力変数  $y$  のとりうる値の範囲（グラフの縦の範囲）。

グラフを用いて値域を考えるときは、定義域に対応するグラフを実線で、それ以外を点線で描き、「一番高いところ（最大値）」と「一番低いところ（最小値）」を探します。



**例題 2：グラフと値域**

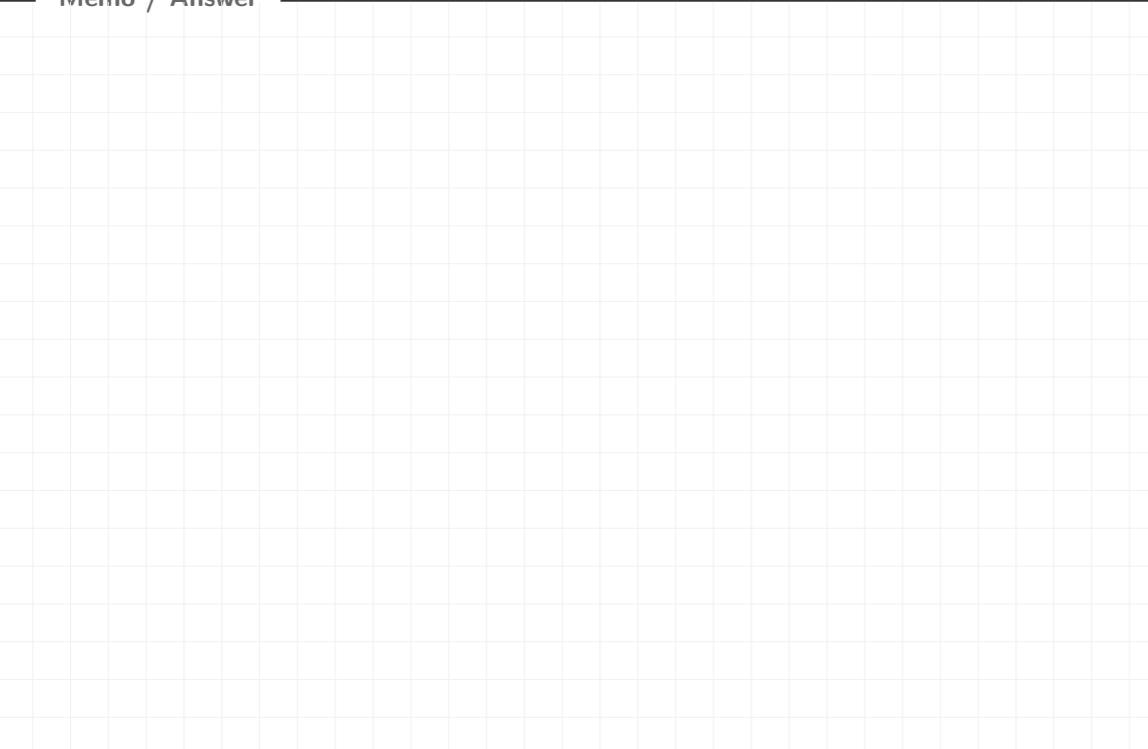
次の関数のグラフをかき、その値域を求めよ。

(1)  $y = -2x + 4 \quad (1 \leq x < 4)$

(2)  $y = x^2 \quad (-2 \leq x \leq 1)$

**Point:** 端点を含む場合 ( $\leq, \geq$ ) は黒丸  $\bullet$ 、含まない場合 ( $<, >$ ) は白丸  $\circ$  で描く。

Memo / Answer

**発展：最大値・最小値とは**

値域の中で、最も大きい値を最大値、最も小さい値を最小値といいます。ただし、白丸（端点を含まない）が最大・最小の位置に来る場合は、「最大値（最小値）なし」と答えます。

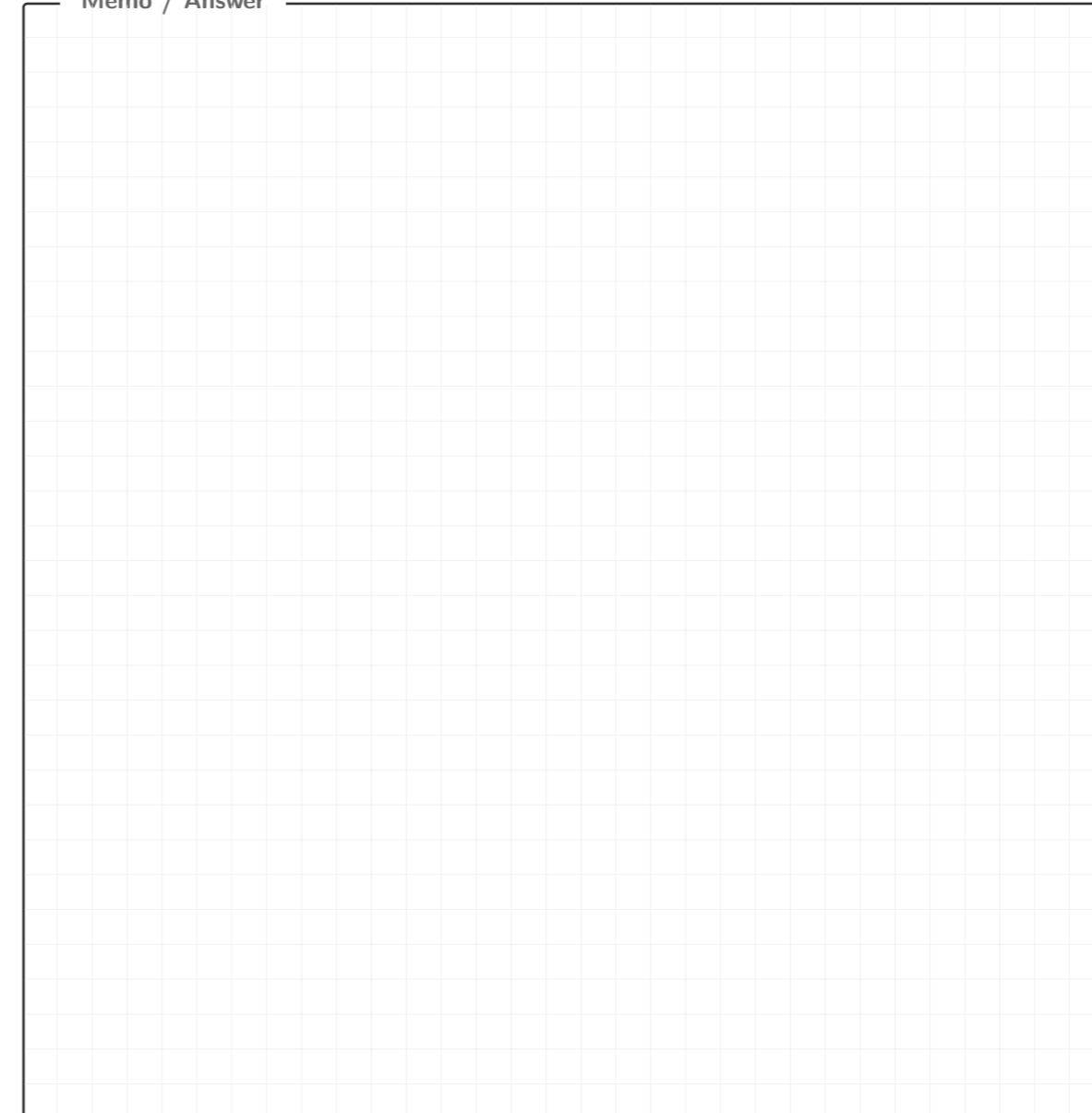
例： $1 \leq y < 5$  のとき

- 最小値は 1
- 最大値はなし ( $4.999\dots$  となり特定できないため)

**例題 3：値域からの決定（逆問題）**

関数  $y = ax + b \quad (1 \leq x \leq 3)$  の値域が  $0 \leq y \leq 4$  となるような定数  $a, b$  の値を求めよ。ただし  $a < 0$  とする。

Memo / Answer



**A 問題：基礎の定着**

以下の問い合わせよ。

**練習 A1: 関数の値**

$f(x) = -x^2 + 2x - 5$  のとき、次の値を求めよ。

- (1)  $f(0)$
- (2)  $f(-3)$
- (3)  $f(a - 1)$

**練習 A2: 1次関数の値域**

次の関数の値域を求めよ。また、最大値・最小値があれば答えよ。

$$y = 3x - 2 \quad (-1 \leq x < 2)$$

**Memo / Answer****B 問題：標準・応用**

グラフを描いて考えること。

**練習 B1: 2次関数の値域**

関数  $y = -2x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) の値域を求めよ。また、最大値・最小値があれば答えよ。

**練習 B2: 定義域の決定**

関数  $y = x^2$  の定義域が  $a \leq x \leq a + 2$  であるとき、値域の最大値が 9 となるような正の定数  $a$  の値を求めよ。

**Memo / Answer**

## A 問題：解答

## Memo / Answer

**A1**

$$\begin{aligned}
 (1) f(0) &= -0^2 + 2(0) - 5 = -5 \\
 (2) f(-3) &= -(-3)^2 + 2(-3) - 5 = -9 - 6 - 5 = -20 \\
 (3) f(a-1) &= -(a-1)^2 + 2(a-1) - 5 \\
 &= -(a^2 - 2a + 1) + 2a - 2 - 5 \\
 &= -a^2 + 2a - 1 + 2a - 7 \\
 &= -a^2 + 4a - 8
 \end{aligned}$$

**A2**  $y = 3x - 2$  は右上がりの直線。

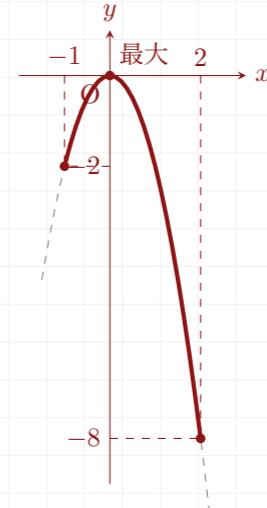
- $x = -1$  のとき,  $y = 3(-1) - 2 = -5$
- $x = 2$  のとき,  $y = 3(2) - 2 = 4$

グラフより, 値域は  $-5 \leq y < 4$ 最大値: なし ( $y < 4$  のため)最小値:  $-5$ 

## B 問題：解答

## Memo / Answer

**B1**  $y = -2x^2$  は上に凸（山なり）の放物線。頂点は原点  $(0, 0)$ 。定義域  $-1 \leq x \leq 2$  におけるグラフを描く。



$x = 0$  で最大値  $0$ ,  $x = 2$  で最小値  $-8$  をとる。よって, 値域は  $-8 \leq y \leq 0$

**B2**  $y = x^2$  は下に凸で,  $y$  軸対称。区間の幅は 2 で一定。 $a > 0$  より区間  $a \leq x \leq a+2$  はすべて  $y$  軸の右側にある。よって,  $y = x^2$  はこの区間で単調に増加する。  
最大値をとるのは, 原点から最も遠い  $x = a+2$  のときである。

$$(a+2)^2 = 9$$

$a+2 > 2$  ( $a > 0$  より) なので,  $a+2 = 3$  のみ適する。よって,  $a = 1$