年　組　番　氏名

1. 等比数列の定義

等差数列が「足し算のリレー」なら，等比数列は**「掛け算のリレー」**である．

等比数列 (Geometric Progression)

一定の数 r を次々と**掛けていく**数列を等比数列といい，r を**公比 (こうひ)** という．

【漸化式による定義】

$$a_{n+1} = a_n \times r \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

意味：次の項は，前の項を r 倍したもの

例: 3, 6, 12, 24, ...

- 初項 $a_1 = 3$
- 毎回 $\times 2$ されているので，公比 $r = 2$
- 漸化式で書くと: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$

$$\underset{a_1}{3} \xrightarrow{\times 2} \underset{a_2}{6} \xrightarrow{\times 2} \underset{a_3}{12} \xrightarrow{\times 2} \underset{a_4}{24} \quad \cdots$$

細胞分裂や借金の利子など，急激に増えていく現象（指数関数的増加）を表すモデルとなる．

2. 何回掛ければいい？（一般項）

等差数列と同じく，スタート地点からゴールまで一気に**ワープする式（一般項）**を作ろう．掛け算を繰り返すということは，**累乗 (るいじょう)** になる．

- $a_1 = a$
- $a_2 = a \times r$ (1 回掛ける)
- $a_3 = a \times r \times r = ar^2$ (2 回掛ける)
- $a_4 = a \times r \times r \times r = ar^3$ (3 回掛ける)

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \quad \cdots \quad a_n$$

合計 $(n-1)$ 回掛ける $\to \times r^{n-1}$

n 番目に行くには，公比 r を $(n-1)$ **回** 掛ければ良い．

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例題 1 (基本計算)

初項 2，公比 -3 の等比数列の一般項を求めよ．また，第 5 項を求めよ．

Memo / Answer

3. 数列の決定（割り算で消去）

初項 a と 公比 r が不明なときは, 連立方程式を立てる. 等比数列では, 変数 a を消去するために**辺々を割り算する**のがテクニックである.

例題 2 (2 つの項から決定)

第 2 項が 6, 第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ.

Memo / Answer

4. 等比中項（3 つの数が等比数列）

3 つの数 a, b, c がこの順で等比数列になっているとき, 公比 r は

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

と表せる. これを分母を払って整理すると

$$b^2 = ac$$

というきれいな関係式が得られる. これを**等比中項**の性質という.

例題 3 (等比中項)

数列 $x-1,\ x+1,\ 2x+2$ が等比数列となるとき, x の値を求めよ.

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (一般項の計算)

次の等比数列の一般項 a_n と，第 4 項 a_4 を求めよ．

(1) 初項 3, 公比 2
(2) 初項 -2, 公比 -3
(3) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$

Memo / Answer

練習 A2 (項の決定)

初項 3, 公比 2 の等比数列において，初めて 1000 を超えるのは第何項か．($2^{10} = 1024$ を用いてもよい)

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (2 項から決定)

第 3 項が 12, 第 6 項が -96 である等比数列の一般項を求めよ．

Memo / Answer

練習 B2 (等比中項)

3 つの数 a, 4, b が等差数列であり，かつ a, 3, b が等比数列であるとき，a, b の値を求めよ．

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

公式 $a_n = ar^{n-1}$ より

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

第 5 項は $n = 5$ を代入して

$$a_5 = 2 \cdot (-3)^{5-1} = 2 \cdot (-3)^4 = 2 \cdot 81 = 162$$

例題 2 解答

初項 a, 公比 r とおく.

- $a_2 = 6 \iff ar = 6 \ \ldots(1)$
- $a_5 = 162 \iff ar^4 = 162 \ \ldots(2)$

(2) ÷ (1) を計算する:

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{6} \implies r^3 = 27$$

r は実数なので $r = 3$. (1) に代入して $3a = 6 \implies a = 2$.

よって, $\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

例題 3 解答

等比中項の性質 $b^2 = ac$ より

$$\begin{gathered}(x+1)^2 = (x-1)(2x+2)\\ x^2+2x+1 = 2(x-1)(x+1)\\ x^2+2x+1 = 2(x^2-1)\\ x^2+2x+1 = 2x^2-2\\ x^2-2x-3 = 0\\ (x-3)(x+1) = 0\end{gathered}$$

よって $\boldsymbol{x = 3, -1}$.

($x = -1$ のときは 0 が現れるため等比数列とみなさない場合もあるが, ここでは数式上の解として扱う. ただし等比数列の定義において公比 0 や初項 0 を除くのが一般的であるため, $x = 3$ のみが適する場合が多い. $x = 3$ のとき $2, 4, 8$. $x = -1$ のとき $-2, 0, 0$.)

解答 (確認テスト)

練習 A1 解答

(1) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$.

(2) $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$.
$a_4 = -2 \cdot (-27) = 54$.

(3) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$.
$a_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
$a_4 = \frac{1}{8}$.

練習 A2 解答

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. $3 \cdot 2^{n-1} > 1000 \iff 2^{n-1} > 333.3\ldots$
$2^8 = 256$, $2^9 = 512$. これでは足りない. 2^{n-1} が 512 を超える必要はないかもしれないが...
$2^8 = 256 \to 3 \times 256 = 768$ (まだ) $2^9 = 512 \to 3 \times 512 = 1536$ (超えた!)
よって指数部分 $n - 1 = 9 \implies n = 10$. **答え: 第 10 項**

練習 B1 解答

$ar^2 = 12\ldots(1)$, $ar^5 = -96\ldots(2)$. 割り算して $r^3 = -8 \implies r = -2$. (1) より $a(-2)^2 = 12 \implies 4a = 12 \implies a = 3$.
答え: $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}}$

練習 B2 解答

(I) $a, 4, b$ が等差 $\to 2 \times 4 = a + b \implies a + b = 8\ldots(1)$ (II) $a, 3, b$ が等比 $\to 3^2 = ab \implies ab = 9\ldots(2)$
(1) より $b = 8 - a$. (2) に代入. $a(8-a) = 9 \implies a^2 - 8a + 9 = 0$. 因数分解できないので解の公式. $a = 4 \pm \sqrt{16-9} = 4 \pm \sqrt{7}$.
$a = 4 + \sqrt{7}$ のとき $b = 4 - \sqrt{7}$. $a = 4 - \sqrt{7}$ のとき $b = 4 + \sqrt{7}$.
答え: $\boldsymbol{(a, b) = (4 \pm \sqrt{7},\ 4 \mp \sqrt{7})}$ (複号同順)