Introduction：距離だけでは戦えない

前回は $|x-2|=3$ を「距離が 3」と考えて解きました。では，右辺にも文字がある $\boldsymbol{|x-2|=2x}$ はどうでしょうか？「距離が $2x$」と言われても，x が変われば距離も変わってしまうため，数直線でイメージするのは困難です。
ここで登場するのが，絶対値の**代数的定義（場合分け）**です。面倒に見えますが，どんな複雑な式でも必ず解ける**最強の解法**です。

絶対値を外す基本ルール

中身の符号で世界を 2 つに分けます。

$$|A|=\begin{cases} A & (A \geqq 0 \text{ のとき} \ldots \text{そのまま外す}) \\ -A & (A<0 \text{ のとき} \ldots \text{マイナスをつけてプラスにする}) \end{cases}$$

手順：

(1) 絶対値の中身が $\geqq 0$ か <0 かで場合分けをする。
(2) それぞれの場合で方程式・不等式を解く。
(3) 重要：出てきた解が，前提条件（場合分けの範囲）を満たすかチェックする（吟味）。
(4) 最後にすべての答えを合わせる。

例題 1：右辺に文字がある方程式

方程式 $|x-3|=2x$ を解け。

考え方: 中身 $x-3$ が正か負かで分けます。境界線は $x=3$ です。
(i) $x-3 \geqq 0$ つまり $\boldsymbol{x \geqq 3}$ のときそのまま外します。

$$x-3=2x$$

これを解いて，吟味します。
(ii) $x-3<0$ つまり $\boldsymbol{x<3}$ のときマイナスをつけて外します。

$$-(x-3)=2x$$

これを解いて，吟味します。

Memo / Answer

Check：なぜ「吟味」が必要か？

例えば (i) で $x=-3$ という解が出たとします。しかし，この計算は「x は 3 以上だよ！」という前提ルールの中で行われたものです。ルールを破っている解は，偽物（不適）として捨てなければなりません。

年　　組　　番　氏名

例題 2：絶対値を含む不等式（場合分け）

不等式 $|x+2| < 3x$ を解け。

考え方: 中身 $x+2$ の符号で場合分けです。境界線は $x=-2$。

(i) $x+2 \geqq 0$ つまり $\boldsymbol{x \geqq -2}$ のとき

$$x+2 < 3x$$

これを解いて出た範囲と，前提条件 $x \geqq -2$ の**共通部分**をとります。

(ii) $x+2 < 0$ つまり $\boldsymbol{x < -2}$ のとき

$$-(x+2) < 3x$$

これを解いて出た範囲と，前提条件 $x < -2$ の**共通部分**をとります。

最後に，(i) と (ii) の範囲を**合わせたもの（和集合）**が答えです。

Memo / Answer

「共通部分」と「合わせた範囲」の違い

- **ケースの中（Inter）**：「前提条件」かつ「計算結果」 $\longrightarrow$ **共通部分**（条件を満たすものだけを採用するため）
- **ケース同士（Outer）**：「場合分け (i)」または「場合分け (ii)」 $\longrightarrow$ **合わせた範囲**（どちらの世界で解が見つかっても OK だから）

例題 3：場合分けの結果をまとめる

不等式 $|x-1| > x+2$ を解け。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

練習 A1: 場合分けによる方程式

次の方程式を解け。

(1) $|x-4| = 3x$

(2) $|x+1| = 2x-1$

練習 A2: 場合分けによる不等式

次の不等式を解け。

(1) $|x| < 2x+3$

(2) $|x-2| \leqq 3x$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

練習 B1: 解の吟味

方程式 $|2x-4| = x+1$ を解け。

練習 B2: 定義域全体が解になるケース

不等式 $|x+3| > 2x$ を解け。（ヒント：場合分けの一方で「解なし」や「前提条件すべて」になることがある）

練習 B3: 方程式の解の個数（グラフ的思考）

方程式 $|x-2| = ax$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。（※数直線やグラフをイメージできると解きやすい応用問題です）

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) (i) $x \geqq 4$ のとき：$x-4=3x \to -2x=4 \to x=-2$。これは $x \geqq 4$ を満たさない（不適）。(ii) $x<4$ のとき：$-(x-4)=3x \to -x+4=3x \to -4x=-4 \to x=1$。これは $x<4$ を満たす（適）。よって，$\boldsymbol{x=1}$

(2) (i) $x \geqq -1$ のとき：$x+1=2x-1 \to -x=-2 \to x=2$。これは $x \geqq -1$ を満たす（適）。(ii) $x<-1$ のとき：$-(x+1)=2x-1 \to -x-1=2x-1 \to -3x=0 \to x=0$。これは $x<-1$ を満たさない（不適）。よって，$\boldsymbol{x=2}$

A2

(1) (i) $x \geqq 0$ のとき：$x<2x+3 \to -x<3 \to x>-3$。前提との共通範囲は $x \geqq 0$。(ii) $x<0$ のとき：$-x<2x+3 \to -3x<3 \to x>-1$。前提との共通範囲は $-1<x<0$。(i)(ii) を合わせて，$\boldsymbol{x>-1}$

(2) (i) $x \geqq 2$ のとき：$x-2 \leqq 3x \to -2x \leqq 2 \to x \geqq -1$。前提との共通範囲は $x \geqq 2$。(ii) $x<2$ のとき：$-(x-2) \leqq 3x \to -x+2 \leqq 3x \to -4x \leqq -2 \to x \geqq \frac{1}{2}$。前提との共通範囲は $\frac{1}{2} \leqq x < 2$。(i)(ii) を合わせて，$\boldsymbol{x \geqq \frac{1}{2}}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 $|2x-4|$ の中身が 0 になるのは $x=2$。(i) $x \geqq 2$ のとき $2x-4=x+1 \implies x=5$ これは $x \geqq 2$ を満たす。（適）(ii) $x<2$ のとき $-(2x-4)=x+1 \implies -2x+4=x+1 \implies -3x=-3 \implies x=1$ これは $x<2$ を満たす。（適）よって，$\boldsymbol{x=1,5}$

B2 (i) $x \geqq -3$ のとき $x+3>2x \implies -x>-3 \implies x<3$ 前提との共通範囲：$\boldsymbol{-3 \leqq x < 3}$ …① (ii) $x<-3$ のとき $-(x+3)>2x \implies -x-3>2x \implies -3x>3 \implies x<-1$ 前提 $x<-3$ との共通範囲は，$\boldsymbol{x<-3}$ そのものとなる。…② ①と②を合わせると，-3 でつながり，$\boldsymbol{x<3}$

B3 グラフ $y=|x-2|$ と直線 $y=ax$ の交点が 2 個あればよい。$y=|x-2|$ は V 字型のグラフ（頂点 $(2,0)$）。$y=ax$ は原点を通る直線。図を描くと，直線が V 字の「右側の枝（傾き 1)」よりも緩やかで，かつ「左側の枝（傾き-1)」と交わる必要がある。右側の傾きよりも緩やか $\to a<1$ x 軸（傾き 0）よりは急でないと 2 点で交わらない $\to a>0$ よって，$\boldsymbol{0<a<1}$