年　組　番　氏名

0. 集合と要素の記号

場合の数を学ぶための「言葉」と「記号」を整理します．ここでの定義が曖昧だと，確率まですべて分からなくなるので丁寧に確認しましょう．

定義：集合と要素の記号

- **集合** (Set)：ものの集まりのこと．大文字 A, B, U などで表す．
- **要素** $(Element)$：集合に入っている一つ一つのもの．
- **要素の個数** $n(A)$：集合 A に含まれる要素の個数．
  ※ **n** は **n**umber（数）の頭文字．

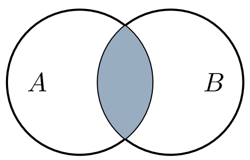
例：$A = \{1, 2, 4, 8\}$ のとき，$n(A) = 4$ である．

定義：かつ ($\cap$) と または ($\cup$)

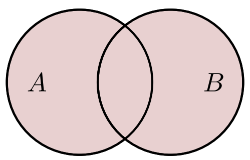
2 つの集合 A, B について，新しい集合を作る操作を定義します．

(1) **共通部分（インターセクション）** $A \cap B$
「A **かつ** B」 (A and B)
→ A と B の両方に入っている要素の集まり．

(2) **和集合（ユニオン）** $A \cup B$
「A **または** B」 (A or B)
→ A と B の少なくとも一方に入っている要素の集まり．



$A \cap B$ (共通部分)
キャップ（帽子）の形



$A \cup B$ (和集合)
カップ（器）の形

個数の定理（包除原理）

2 つの集合の和集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めるとき，単純に足すと重なり部分を 2 回数えてしまいます．そこで，重なりを 1 回引きます．

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

1. 補集合とド・モルガンの法則

「〜でない」ものを数えるときは，全体から「〜である」ものを引くのが基本です．

定義：補集合 ($\overline{A}$)

全体集合 U の中で，A に含まれない要素の集まりを A の**補集合**といい，$\overline{A}$ で表す．

$$\boldsymbol{n(\overline{A}) = n(U) - n(A)}$$

例題 1．集合の要素の個数

1 から 100 までの自然数全体を U とする．

(1) 3 の倍数の集合 A の個数 $n(A)$
(2) 4 の倍数の集合 B の個数 $n(B)$
(3) 3 の倍数 かつ 4 の倍数 の集合 $A \cap B$ の個数
(4) 3 の倍数 または 4 の倍数 の集合 $A \cup B$ の個数
(5) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数（A, B の外側）の個数

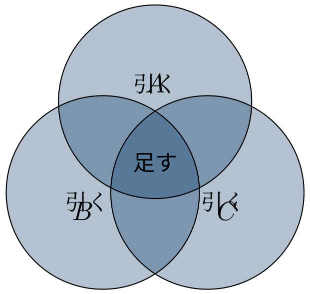
Memo / Answer

2. 3 つの集合の包除原理

集合が 3 つに増えても，「足しすぎて引きすぎる」調整の原理は同じです．

3 つの集合の要素の個数

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \\
-\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\
+n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$



※最後に真ん中の $A \cap B \cap C$ を足すのを忘れないこと！

例題 2．3 つの集合の計算

1 から 100 までの自然数のうち，$2, 3, 5$ の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか．

Memo / Answer

3. 和の法則と積の法則

場合の数の計算における「足し算」と「掛け算」の使い分けを明確にします．

和の法則・積の法則の使い分け

(1) **和の法則（足し算）**
　事柄 A と B が**同時には起こらない**とき．
- 「A の場合」と「B の場合」に**場合分け**したとき．
- 接続詞は「または (or)」．

(2) **積の法則（掛け算）**
　A が起こり，**そのそれぞれに対して** B が起こるとき．
- 一連の動作（A して，次に B する）．
- 接続詞は「かつ (and)」「続けて」．

例題 3．積の法則の利用（展開式・約数）

(1) 式 $(a+b)(x+y+z)$ を展開したときの項数は？
(2) 200 の正の約数の個数を求めよ．

Memo / Answer

4. 樹形図 (Tree Diagram)

計算式一発で解けない複雑な条件があるときは，「すべて書き出す」のが最良の方法です．漏れなく重複なく書き出すために，樹木の枝のように広がる図を描きます．

例題 4．樹形図の利用

A, B, C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき，手の出し方は全部で何通りあるか．また，あいこになる場合は何通りあるか．

Memo / Answer

5. 辞書式配列

アルファベット順（a, b, c...）や数字の小さい順（1, 2, 3...）に規則正しく並べる書き出し方です．

例題 5．辞書式配列

4 個の文字 a, b, c, d をすべて使ってできる順列を，辞書式に並べる．

(1) cbda は何番目の文字列か．

(2) 15 番目の文字列を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト A（基本）

練習 1：集合の要素の個数

1 から 50 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 6 の倍数
(2) 6 の倍数 または 8 の倍数
(3) 6 の倍数であるが 8 の倍数でない数

練習 2：和の法則・積の法則

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 になる場合は何通りあるか．
(2) $(x+y+z)(A+B)(p+q)$ を展開したときの項数を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト B（標準・応用）

練習 3：3 つの集合

1 から 100 までの自然数のうち，$2, 3, 7$ の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか．

練習 4：約数と積の法則

108 の正の約数の個数を求めよ．また，その中で偶数は何個あるか．

練習 5：辞書式配列

5 個の数字 $1, 2, 3, 4, 5$ をそれぞれ 1 回ずつ使って，5 桁の整数を作る．これらの整数を小さい順に並べるとき，

(1) 34125 は何番目か．
(2) 60 番目の数を求めよ．

Memo / Answer

【解答】確認テスト A

Memo / Answer

1

全体集合を $U = \{1, \ldots, 50\}$ とする．

$A = \{6 \cdot 1, \ldots, 6 \cdot 8\}$ より $n(A) = 8$.

$B = \{8 \cdot 1, \ldots, 8 \cdot 6\}$ より $n(B) = 6$.

$A \cap B$ は 24 の倍数．$\{24, 48\}$ より $n(A \cap B) = 2$.

(1) $n(A) = \mathbf{8}$ (個)

(2) $n(A \cup B) = 8 + 6 - 2 = \mathbf{12}$ (個)

(3) $n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 8 - 2 = \mathbf{6}$ (個)

2

(1) 和が 5 になるのは (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) の **4 通り**．

(2) $3 \times 2 \times 2 = \mathbf{12}$ (個)

【解答】確認テスト B

Memo / Answer

3

A:2 の倍数, B:3 の倍数, C:7 の倍数．

$n(A) = 50, n(B) = 33, n(C) = 14$.

$A \cap B$ (6 の倍数): 16 個

$B \cap C$ (21 の倍数): 4 個

$C \cap A$ (14 の倍数): 7 個

$A \cap B \cap C$ (42 の倍数): 2 個

よって

$50 + 33 + 14 - (16 + 4 + 7) + 2 = \mathbf{72}$ (個)

4

$108 = 2^2 \times 3^3$.

約数の個数：$(2 + 1)(3 + 1) = \mathbf{12}$ (個).

偶数であるには，$2^a \cdot 3^b$ において $a \geq 1$ であればよい．

a は 1, 2 の 2 通り，b は 0, 1, 2, 3 の 4 通り．

$2 \times 4 = \mathbf{8}$ (個).

5

(1) 万の位で場合分け．

1xxxx: $4! = 24$ 個

2xxxx: 24 個

ここまでの累計 48 個.

31xxx: $3! = 6$ 個

32xxx: 6 個 (累計 60 個)

34xxx シリーズへ．

34125 はこの最初なので，**61 番目**.

(2) 上の検討より，32xxx の最後が 60 番目である．

32xxx の中で一番大きい数は 32541.

よって **32541**.