

Introduction : 日常言語を不等式へ

「3000円以下で買いたい」「少なくとも5個は必要」など、私たちの生活には不等式が溢れています。不等式の文章題は、方程式とほとんど同じですが、「以下(\leq)」「未満($<$)」の使い分けに注意が必要です。

そして、今回の最大の敵は「整数の個数問題」です。「解の中に自然数が3個ある」とき、範囲はどこまで許されるのか？ここをクリアできるかどうかが、数学が得意になるかの分かれ道です。

例題 1：1次不等式の文章題

1個120円のりんごと1個80円のみかんを合わせて30個買い、100円の箱に詰めてもらう。合計金額を3000円以下にするとき、りんごは最大で何個買えるか。

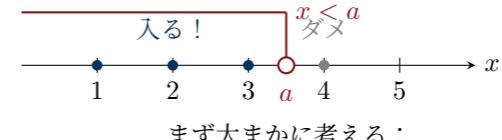
手順：

- 求めたいものを x とおく。(りんごの個数)
- みかんの個数は $30 - x$ 個。ただし x は整数で $0 \leq x \leq 30$ 。
- 「合計金額 ≤ 3000 」という式を作る。

Memo / Answer

整数の個数と定数の決定

「不等式 $x < a$ を満たす自然数(1, 2, 3, …)がちょうど3個ある」このとき、定数 a はどんな範囲にあるべきでしょうか？



まず大まかに考える：

$$3 \text{ と } 4 \text{ の間なら OK} \rightarrow 3 < a < 4$$

最重要：端点のチェック（イコールはつくのか？）

- $a = 3$ のとき： $x < 3$ となる。自然数は1, 2の2個。 $\rightarrow \times$
- $a = 4$ のとき： $x < 4$ となる。自然数は1, 2, 3の3個。 $\rightarrow \bigcirc$

よって、答えは $3 < a \leq 4$ (4にはイコールがつく！)

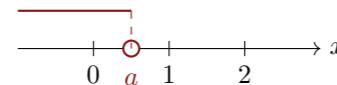
Check：なぜイコールの位置で迷うのか？

不等号が「 $<$ (白丸)」なのか「 \leq (黒丸)」なのかによって、端点を含めるかどうかが変わることです。
「もし a がちょうどその数字になったら、条件を満たすか？」と、具体的に数字を入れて検証するクセをつけましょう。これが唯一の攻略法です。

例題2：個数から範囲を求める

不等式 $x < a$ を満たす自然数がない（0個）とき、定数 a の値の範囲を求めよ。

考え方：数直線を描いて考えます。自然数は1から始まります。1さえ入らなければ良いのです。



端点チェック：

- $a = 1$ のとき、 $x < 1$ 。自然数は…ない！ (OK)
- a が1より大きかったら、1.1とかでも自然数1が入ってしまう。(NG)

Memo / Answer

例題3：不等式の解に含まれる整数

不等式 $2x + a > 5(x - 1)$ を満たす自然数 x が2個だけであるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

手順：

- (1) まず不等式を解いて、 $x < \square$ の形にする。
- (2) 数直線を描き、自然数が2個（つまり1と2）入る状況を作る。
- (3) 端点の吟味をする。

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着**練習 A1: 文章題**

ある遊園地の入園料は、1人600円である。ただし、15人以上の団体は1割引きになる。15人に満たない人数で行くとき、15人分の団体チケットを買った方が安くなるのは、何人以上で行くときか。

練習 A2: 自然数の個数

不等式 $x < a$ を満たす自然数 x がちょうど4個あるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

Memo / Answer

B 問題：標準・応用**練習 B1: 不等式の解と整数**

不等式 $x + 2a > 4(x + 1)$ を満たす自然数 x がちょうど3個（1, 2, 3）であるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 B2: 連立不等式の整数解

次の連立不等式を満たす整数 x がちょうど3個存在するような、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$\begin{cases} 2x + 3 < 3x + 5 \\ 4x - a < 3x + 2 \end{cases}$$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1 行く人数を x 人とする ($x < 15$)。

- 普通に買う場合 : $600x$ 円
- 15人分の団体チケットを買う場合 : $600 \times 15 \times 0.9 = 8100$ 円

団体チケットの方が安くなる条件は,

$$600x > 8100$$

$$x > \frac{81}{6} = 13.5$$

x は人数（整数）なので、14人以上。答え：14人以上

A2 数直線を書く。自然数が4個(1, 2, 3, 4)入るということは、 a は4と5の間にある。

$$4 < a < 5$$

端点の吟味：

- $a = 4$ のとき : $x < 4$ 。自然数は1, 2, 3の3個。(×)
- $a = 5$ のとき : $x < 5$ 。自然数は1, 2, 3, 4の4個。(○)

よって、 $4 < a \leq 5$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1 まず不等式を解く。

$$x + 2a > 4x + 4$$

$$-3x > 4 - 2a$$

$$x < \frac{2a - 4}{3}$$

この範囲に自然数が1, 2, 3だけ入れればよい。つまり、境界線 $\frac{2a - 4}{3}$ が3と4の間にあればよい。

$$3 < \frac{2a - 4}{3} < 4$$

端点の吟味：

- 右辺が3のとき : $x < 3$ (自然数2個) → ×
- 右辺が4のとき : $x < 4$ (自然数3個: 1, 2, 3) → ○
よって,

$$3 < \frac{2a - 4}{3} \leq 4$$

各辺を3倍して,

$$9 < 2a - 4 \leq 12$$

各辺に4を足して,

$$13 < 2a \leq 16$$

2で割って,

$$\frac{13}{2} < a \leq 8$$

B2 連立不等式を解く。

- $2x + 3 < 3x + 5 \implies -x < 2 \implies x > -2$
- $4x - a < 3x + 2 \implies x < a + 2$

合わせると、 $-2 < x < a + 2$ 。この範囲に整数がちょうど3個入れればよい。範囲の左端は-2（含まない）なので、入るべき整数は大きい順に-1, 0, 1の3つである。（次の整数2は入ってはいけない）
よって、右端 $a + 2$ が1と2の間にあればよい。

$$1 < a + 2 < 2$$

端点の吟味：

- $a + 2 = 1$ のとき : $-2 < x < 1$ 。整数は-1, 0の2個。(×)
- $a + 2 = 2$ のとき : $-2 < x < 2$ 。整数は-1, 0, 1の3個。(○)
したがって,

$$1 < a + 2 \leq 2$$

全体から2を引いて、 $-1 < a \leq 0$