

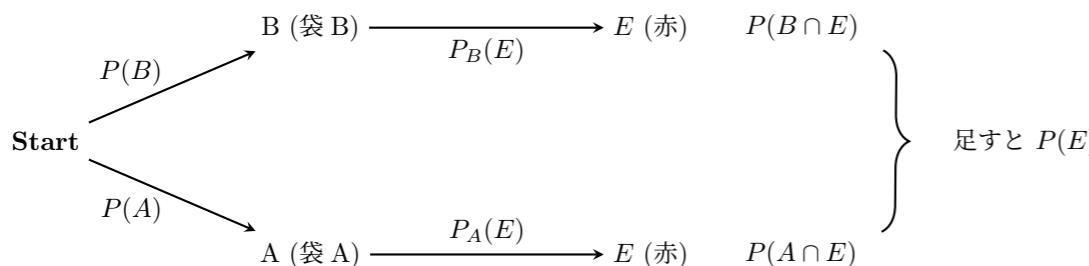
## 1. 時間の流れと確率（木の図）

事象が連鎖して起こる場合、木の図（Tree Diagram）を描くと状況が整理しやすくなります。特に「袋を選んでから玉を取り出す」のような多段階の試行で有効です。

## 全確率の公式

事象  $E$  が、互いに排反な事象  $A, B$  のいずれかを経由して起こるととき、

$$\begin{aligned} P(E) &= \underbrace{P(A \cap E)}_{A \text{ 経由}} + \underbrace{P(B \cap E)}_{B \text{ 経由}} \\ &= P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) \end{aligned}$$



## 例題 1. 袋と玉の確率

袋 A には赤玉 3 個と白玉 2 個、袋 B には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている。1 個のさいころを投げて、3 の倍数の目が出たら袋 A を、それ以外の目が出たら袋 B を選び、その中から玉を 1 個取り出す。

- (1) 3 の倍数の目が出て、かつ赤玉が出る確率。
- (2) 赤玉が出る確率。

Memo / Answer

## 2. 原因の確率（ベイズの定理）

「赤玉が出た」という結果がわかっているとき、それが「袋 A から出たものか、袋 B から出たものか」という原因を確率的に推測します。

## 原因の確率

結果として事象  $E$  が起こったとき、その原因が  $A$  であった確率は、

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{A \text{ 経由で } E \text{ が起こる確率}}{\text{とにかく } E \text{ が起こる確率 (全体)}} \end{aligned}$$

## 例題 2. 原因の確率（袋の推測）

例題 1 の設定において、取り出した玉が赤玉であったとき、それが袋 A から取り出されたものである確率を求めよ。

Memo / Answer

**3. 不良品の発生確率**

工場での製品検査などは、原因の確率の典型的な応用例です。

**例題 3. 工場の機械**

ある工場には機械 A と機械 B があり、製品全体の 60% を A が、40% を B が作っている。また、不良品の発生率は A が 2%，B が 3% である。この工場の製品から無作為に 1 個を取り出したとき、

- (1) それが不良品である確率を求めよ。
- (2) 不良品であったとき、それが機械 A で作られたものである確率を求めよ。

Memo / Answer

**4. 情報の信頼度（嘘つき問題）**

「嘘をつく確率」が決まっている人が発言したとき、その内容が本当である確率を求めます。事象が「起こる/起こらない」の 2 択（コインや紅白の玉）である場合が最も基本的です。

**例題 4. 嘘つき問題**

A 君は 80% の確率で本当のことを言い、20% の確率で嘘をつく。A 君がコインを 1 枚投げ、結果を見て「表が出た」と言った。このとき、実際に表が出ている確率を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト A (基本)

## 練習 1：袋と玉

袋 A には白玉 3 個、赤玉 2 個が入っており、袋 B には白玉 2 個、赤玉 4 個が入っている。まずコインを投げて、表が出たら袋 A を、裏が出たら袋 B を選び、そこから玉を 1 個取り出す。

- (1) 白玉が出る確率を求めよ。
- (2) 白玉が出たとき、それが袋 A から取り出されたものである確率を求めよ。

Memo / Answer

## 確認テスト B (標準・応用)

## 練習 2：病気の検査

ある病気に感染している人は全体の 1% である。この病気の検査キットは、感染している人を正しく陽性と判定する確率が 99%，感染していない人を誤って陽性と判定する確率が 2% である。ある人が検査を受けたところ、陽性と判定された。この人が実際に感染している確率を求めよ。

Memo / Answer

## 【解答】確認テスト A

## Memo / Answer

**1**

事象の整理：

- $A$ : 袋 A を選ぶ ( $1/2$ ),  $B$ : 袋 B を選ぶ ( $1/2$ )
- $W$ : 白玉が出る

(1) 白玉が出る確率  $P(W)$ 

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A \cap W) + P(B \cap W) \\ &= P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

(2) 白玉が出たとき、袋 A である確率  $P_W(A)$ 

$$\begin{aligned} P_W(A) &= \frac{P(A \cap W)}{P(W)} \\ &= \frac{3/10}{7/15} = \frac{3}{10} \times \frac{15}{7} = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

## 【解答】確認テスト B

## Memo / Answer

**2**事象  $X$ : 感染している、事象  $Y$ : 陽性と判定される。与えられた確率：

- $P(X) = 0.01$  (感染率)
- $P(\bar{X}) = 0.99$  (非感染率)
- $P_X(Y) = 0.99$  (感度：感染者を陽性とする)
- $P_{\bar{X}}(Y) = 0.02$  (偽陽性：非感染者を陽性とする)

求める確率は  $P_Y(X)$ 。まず、陽性と判定される全確率  $P(Y)$  を求める。

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\bar{X} \cap Y) \\ &= P(X)P_X(Y) + P(\bar{X})P_{\bar{X}}(Y) \\ &= 0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.02 \\ &= 0.0099 + 0.0198 = 0.0297 \end{aligned}$$

よって、

$$P_Y(X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.0099}{0.0297} = \frac{99}{297} = \frac{1}{3}$$

(※陽性と出ても、実際に感染している確率は 33% 程度しかない)