

## 1. 高次方程式の解き方

基本戦略：因数分解して次数を下げる

3次以上の方程式を高次方程式という。解の公式が存在しない（あるいは複雑すぎる）ため、基本的に因数定理を用いて因数分解し、1次式や2次式の積の形にもちこんで解く。

### 手順

- (1)  $P(x) = 0$  となる  $x$  の値 ( $k$ ) を見つける。
- (2)  $P(x)$  を  $x - k$  で割り算し、 $(x - k)(2\text{次式}) = 0$  にする。
- (3) 2次方程式を解く（因数分解 or 解の公式）。

割り算は「筆算」で十分！

教科書等では「組立除法」という計算テクニックが紹介されることがあるが、これは必須ではない。通常の筆算による割り算の方が、「今何をしているか」が明確であり、ミスをした際の確認もしやすい。堂々と筆算を使おう。

### 例題 1 (3次方程式)

3次方程式  $x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = 0$  を解け。

### Memo / Answer

1.  $P(1) = 1 - 4 + 8 - 5 = 0$  なので、 $x - 1$  を因数にもつ。

2. 筆算で割り算を行う（右図）。

商は  $x^2 - 3x + 5$ 。

$$3. (x - 1)(x^2 - 3x + 5) = 0$$

$$x = 1, \text{ または } x^2 - 3x + 5 = 0$$

解の公式より

$$x = 1, \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 5 \\ x - 1 \overline{) x^3 - 4x^2 + 8x - 5} \\ x^3 - x^2 \\ \hline - 3x^2 + 8x \\ - 3x^2 + 3x \\ \hline 5x - 5 \\ 5x - 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

### 練習 1

次の3次方程式を解け。

- (1)  $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
- (2)  $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

### Memo / Answer

## 2. 置き換えを利用する形

複二次式  $ax^4 + bx^2 + c = 0$

$x^4$  と  $x^2$  だけが登場する式は,  $X = x^2$  と置き換えることで 2 次方程式に帰着できる。ただし,  $X$  が求まった後,  $x = \pm\sqrt{X}$  で  $x$  に戻すことを忘れないこと。

### 例題 2 (複二次方程式)

次の方程式を解け。

- (1)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
- (2)  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Memo / Answer

Note: 重解の扱い

$(x - 1)^2(x + 2) = 0$  のように因数分解された場合, 解は  $x = 1$  (2重解),  $x = -2$  となる。3次方程式だからといって必ずしも異なる3つの解をもつとは限らない。

**確認テスト****練習 A1 (因数定理と筆算)**

次の方程式を解け.

(1)  $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

(2)  $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$

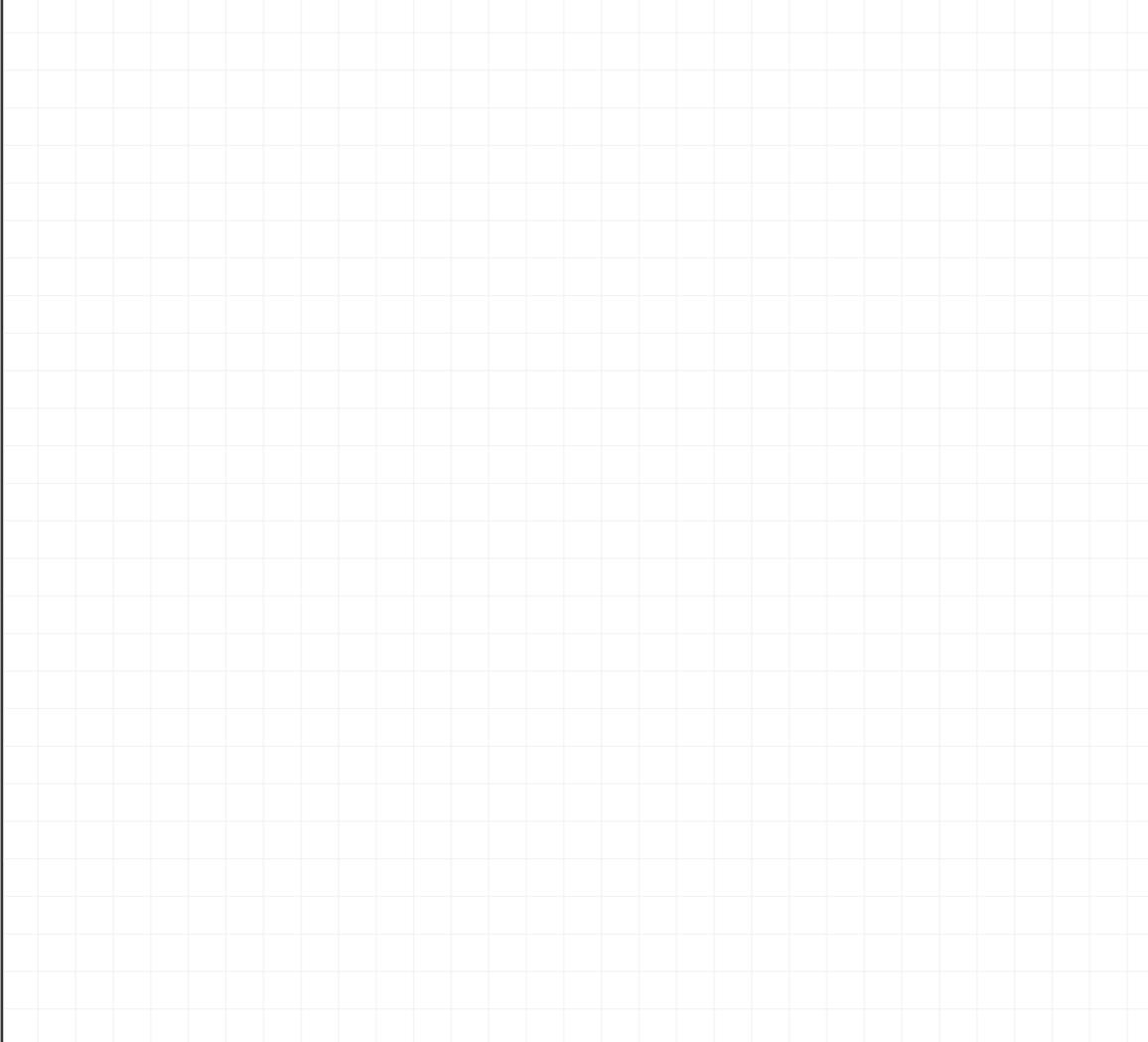
**練習 A2 (複二次式)**

次の方程式を解け.

(1)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(2)  $x^4 - 16 = 0$

Memo / Answer

**練習 B1 (虚数解をもつ高次方程式)**

$x^3 - 1 = 0$  を解け. また, その虚数解の一つを  $\omega$  (オメガ) とするとき,  $\omega^2 + \omega + 1$  の値を求めよ.

**Hint**

因数分解公式  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  を利用する.

**練習 B2 (係数決定)**

3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$  が  $x = 1$  と  $x = 2$  を解にもつとき, 定数  $a, b$  の値と, 残りの解を求めよ.

Memo / Answer

