1. 割り算をせずに「余り」だけを知る

仕組み：恒等式の利用

整式 $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とする．余り R は定数であり，次の等式 (恒等式) が成り立つ．

$$P(x)=(x-k)Q(x)+R$$

この式の両辺に $\boldsymbol{x=k}$ を代入すると…

$$P(k)=\underbrace{(k-k)Q(k)}_{0}+R \quad \therefore R=P(k)$$

つまり，**代入するだけで余りが求まる！**

定理：剰余の定理

> 整式 $P(x)$ を 1 次式 $\boldsymbol{x-k}$ で割った余りは，$\boldsymbol{P(k)}$ に等しい．

- $x-1$ で割った余り $\to$ $x=1$ を代入 $(P(1))$
- $x+2$ で割った余り $\to$ $x=-2$ を代入 $(P(-2))$

例題 1（剰余の定理の利用）

整式 $P(x)=x^3-3x^2+4x-5$ を，次の 1 次式で割った余りを求めよ．

(1) $x-2$

(2) $x+1$

Memo / Answer

2. 1 次式 $\boldsymbol{ax+b}$ で割る場合

割る式が 0 になる値を代入せよ

$ax+b$ で割った余りを求めたい場合も，同様に考える．商を $Q(x)$, 余りを R とすると

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$$

右辺の $(ax+b)$ を 0 にするためには，$\boldsymbol{x=-\frac{b}{a}}$ を代入すればよい．

> 整式 $P(x)$ を $\boldsymbol{ax+b}$ で割った余りは，$\boldsymbol{P\left(-\frac{b}{a}\right)}$ に等しい．

例題 2（$ax+b$ で割る場合）

整式 $P(x)=2x^3-3x^2-x+2$ を，次の 1 次式で割った余りを求めよ．

(1) $2x-1$

(2) $2x+3$

Memo / Answer

3. 因数定理

「余りが 0」の意味

剰余の定理 $P(k)=R$ において, 特に余り R が 0 になる場合を考える.

$$P(k)=0 \iff P(x) \text{ は } x-k \text{ で割り切れる}$$

割り切れるということは, $P(x)=(x-k)Q(x)$ の形に変形できるということ. つまり, **因数分解できる！** ということである.

因数定理

整式 $P(x)$ について,
- $\boldsymbol{P(k)=0 \iff P(x)}$ **は** $\boldsymbol{x-k}$ **を因数にもつ**

「代入して 0 になる値」を見つければ, それをヒントに因数分解ができる.

例題 3（因数を見つける）

$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とする.

(1) $P(-1)$ の値を求めよ.
(2) $P(x)$ が因数としてもつ 1 次式を答えよ.

Memo / Answer

4. 因数定理を利用した因数分解

候補の探し方

$P(k)=0$ となる k の候補は, 次の数の中から探すとよい.

$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

（基本的には $\pm1, \pm2, \pm3$ など, **定数項の約数**を順に代入して探す）

例題 4（3 次式の因数分解）

x^3-4x^2+x+6 を因数分解せよ.

手順

(1) $P(k)=0$ となる k を見つける. $\to x=-1$ で 0 になった！
(2) $P(x)$ を $(x+1)$ で割り算する（筆算 or 組立除法）.
(3) $P(x)=(x+1)(2\text{ 次式})$ の形になる.
(4) 後ろの 2 次式をさらに因数分解する.

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1（基本計算）

整式 $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ を，次の式で割った余りを求めよ．

(1) $x - 1$
(2) $x - 3$
(3) $x + 2$

練習 A2（$ax + b$ で割る）

整式 $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$ を，次の式で割った余りを求めよ．

(1) $2x + 1$
(2) $2x - 3$

Memo / Answer

練習 B1（余りからの係数決定）

整式 $P(x) = x^3 + kx^2 - 3x + 2$ を $x - 2$ で割った余りが 4 であるとき，定数 k の値を求めよ．

練習 B2（2 次式で割った余り）

整式 $P(x)$ を $x - 1$ で割ると 3 余り，$x + 2$ で割ると -3 余る．このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ．

Hint

2 次式で割った余りは「1 次以下の式」になるので，$\boldsymbol{ax + b}$ とおける．

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

この恒等式に $x = 1$ と $x = -2$ を代入して，a, b の連立方程式を作ろう．

Memo / Answer

確認テスト

練習 A1（基本計算）

整式 $P(x)=x^3+2x^2-5x+1$ を，次の式で割った余りを求めよ．

(1) $x-1$
(2) $x-3$
(3) $x+2$

練習 A2（$ax+b$ で割る）

整式 $P(x)=4x^3-2x^2+3$ を，次の式で割った余りを求めよ．

(1) $2x+1$
(2) $2x-3$

Memo / Answer

A1

(1) $P(1)=1^3+2(1)^2-5(1)+1=1+2-5+1=\mathbf{-1}$
(2) $P(3)=3^3+2(3)^2-5(3)+1=27+18-15+1=\mathbf{31}$
(3) $P(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-5(-2)+1=-8+8+10+1=\mathbf{11}$

A2

(1) $x=-\frac{1}{2}$ を代入．
$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{8}\right)-2\left(\frac{1}{4}\right)+3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3=\mathbf{2}$$
(2) $x=\frac{3}{2}$ を代入．
$$P\left(\frac{3}{2}\right)=4\left(\frac{27}{8}\right)-2\left(\frac{9}{4}\right)+3=\frac{27}{2}-\frac{9}{2}+3=9+3=\mathbf{12}$$

練習 B1（余りからの係数決定）

整式 $P(x)=x^3+kx^2-3x+2$ を $x-2$ で割った余りが 4 であるとき，定数 k の値を求めよ．

練習 B2（2 次式で割った余り）

整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 3 余り，$x+2$ で割ると -3 余る．このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ．

Hint

2 次式で割った余りは「1 次以下の式」になるので，$\boldsymbol{ax+b}$ とおける．
$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$
この恒等式に $x=1$ と $x=-2$ を代入して，a,b の連立方程式を作ろう．

Memo / Answer

B1

剰余の定理より $P(2)=4$ となればよい．
$P(2)=2^3+k(2)^2-3(2)+2=8+4k-6+2=4k+4$
よって $4k+4=4 \iff 4k=0 \iff \boldsymbol{k=0}$

B2

求める余りを $ax+b$ とおくと，条件より
$$\begin{cases} P(1)=a+b=3 \\ P(-2)=-2a+b=-3 \end{cases}$$
辺々引くと $3a=6 \iff a=2$．
これを代入して $2+b=3 \iff b=1$．
よって求める余りは $\boldsymbol{2x+1}$

確認テスト

練習 A3（因数の判定）

整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ について，次の 1 次式のうち，$P(x)$ の因数であるものを選べ．

$$x-1, \quad x+1, \quad x-2, \quad x-3$$

練習 A4（因数分解の実践）

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$　($P(2)$ や $P(3)$ を試そう)

(2) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

Memo / Answer

練習 B3（係数がついている場合）

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ を因数分解せよ．

Hint

定数項 6 の約数 $(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$ を代入しても 0 にならない場合は，分数 $\pm\frac{1}{2}$ などを試す必要がある．

$$P(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$$

(おっと，今回は整数 3 で見つかりますね．$x-3$ で割ってみよう)

練習 B4（因数をもつ条件）

整式 $P(x) = x^3 + (k+1)x^2 - x - 3$ が $x-1$ を因数にもつとき，定数 k の値を求めよ．また，そのときの $P(x)$ を因数分解せよ．

Memo / Answer

確認テスト

練習 A3（因数の判定）

整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ について，次の 1 次式のうち，$P(x)$ の因数であるものを選べ．

$$x-1, \quad x+1, \quad x-2, \quad x-3$$

練習 A4（因数分解の実践）

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$　($P(2)$ や $P(3)$ を試そう)
(2) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

Memo / Answer

A3

剰余の定理より $P(k) = 0$ となるものを確認する．

- $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$　→ ○ $(x-1)$
- $P(-1) = -1 - 2 + 5 + 6 = 8 \neq 0$
- $P(2) = 8 - 8 - 10 + 6 = -4 \neq 0$
- $P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$　→ ○ $(x-3)$

よって答えは $\boldsymbol{x-1, \quad x-3}$

A4

(1) $P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$ より $x-2$ を因数にもつ．
$(x-2)(x^2 - x - 6) = \boldsymbol{(x-2)(x+2)(x-3)}$

(2) $P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$ より $x-1$ を因数にもつ．
$(x-1)(x^2 + 5x + 6) = \boldsymbol{(x-1)(x+2)(x+3)}$

練習 B3（係数がついている場合）

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ を因数分解せよ．

Hint

定数項 6 の約数 $(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$ を代入しても 0 にならない場合は，分数 $\pm\frac{1}{2}$ などを試す必要がある．

$$P(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$$

(おっと，今回は整数 3 で見つかりますね．$x-3$ で割ってみよう)

練習 B4（因数をもつ条件）

整式 $P(x) = x^3 + (k+1)x^2 - x - 3$ が $x-1$ を因数にもつとき，定数 k の値を求めよ．また，そのときの $P(x)$ を因数分解せよ．

Memo / Answer

B3

ヒントより $x-3$ を因数にもつ．筆算または組立除法で割り算を行うと

$$(x-3)(2x^2 + 3x - 2)$$

後ろの 2 次式をたすき掛けで因数分解して，

$$\boldsymbol{(x-3)(x+2)(2x-1)}$$

B4

$x-1$ を因数にもつ $\iff$ $P(1) = 0$.

$$P(1) = 1 + (k+1) - 1 - 3 = k - 2 = 0 \iff \boldsymbol{k = 2}$$

このとき $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.
$P(1) = 0$ なので $x-1$ で割ると，

$$(x-1)(x^2 + 4x + 3) = \boldsymbol{(x-1)(x+1)(x+3)}$$