年　組　番　氏名

Introduction：一般形と標準形

2 次関数は，展開された形（**一般形**）で出題されることが多いですが，そのままではグラフの頂点がわかりません。そこで，前回学んだ形（**標準形**）へ式を変形します。この操作を**平方完成**といいます。

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \xrightarrow{\text{平方完成}} \boxed{y = a(x-p)^2 + q}$$

グラフの特徴が見えない　　　頂点 (p, q) がわかる！

平方完成のアルゴリズム

$y = ax^2 + bx + c$ の変形手順：

(1) x^2 の係数 a で，x のついている 2 項をくくる。
(2) カッコ内で，「x の係数の**半分の 2 乗**」を足して引く。
(3) 因数分解し，定数項をカッコの外に出す（a **を掛けるのを忘れない！**）。

式変形の流れ：

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \leftarrow \text{文字を含む項を } a \text{ でくくる} \\
&= a\underbrace{\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}}_{\text{余計な項を引き辻褄を合わせる}} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
\end{aligned}
$$

例題 1：基本（x^2 の係数が 1）

次の 2 次関数を平方完成し，頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$
(2) $y = x^2 + 8x$

Memo / Answer

例題 2：係数がある場合

次の 2 次関数を平方完成し，頂点の座標を求めよ。

(1) $y = 2x^2 - 8x + 3$
(2) $y = -x^2 + 4x - 2$

ミス注意: 定数項（$+3$ や -2）はカッコの外に置いておくこと。
$2(x^2 - 4x + 3)$ のように定数項までくくらない。

Memo / Answer

例題 3：分数が出る場合（奇数係数）

次の 2 次関数を平方完成せよ。

(1) $y = x^2 + 3x + 1$

(2) $y = -2x^2 + 6x - 3$

Point: 係数が奇数の場合，半分にすると分数 $\frac{\text{奇数}}{2}$ が登場します。$(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ のように，2 乗して分数の計算を行います。

Memo / Answer

発展：文字を含む平方完成

係数に文字 a, k などが含まれていても，操作は全く同じです。「x に着目」し，それ以外は数字と同じように扱います。

例題 4：文字係数

次の 2 次関数を平方完成し，頂点の座標を a を用いて表せ。

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + a$$

Memo / Answer

A 問題：基礎の定着

次の 2 次関数を平方完成し，頂点の座標を求めよ。

練習 A1: 偶数の係数

(1) $y = x^2 + 4x - 1$
(2) $y = x^2 - 10x + 20$

練習 A2: 係数あり

(1) $y = 2x^2 + 8x + 5$
(2) $y = -x^2 + 6x - 4$
(3) $y = -2x^2 - 4x + 1$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

分数計算，文字係数の処理を正確に行うこと。

練習 B1: 分数・奇数の係数

次の 2 次関数を平方完成せよ。

(1) $y = x^2 - 5x + 2$
(2) $y = 3x^2 - 4x + 1$

練習 B2: 文字係数

次の 2 次関数を平方完成し，頂点の座標を求めよ。ただし a は定数とする。

(1) $y = x^2 + 2(a-1)x + 3$
(2) $y = -x^2 + ax$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $y=(x^2+4x)-1$
$=\{(x+2)^2-4\}-1$
$=\boldsymbol{(x+2)^2-5}$　頂点 $\boldsymbol{(-2,-5)}$

(2) $y=(x^2-10x)+20$
$=\{(x-5)^2-25\}+20$
$=\boldsymbol{(x-5)^2-5}$　頂点 $\boldsymbol{(5,-5)}$

A2

(1) $y=2(x^2+4x)+5$
$=2\{(x+2)^2-4\}+5$
$=2(x+2)^2-8+5$
$=\boldsymbol{2(x+2)^2-3}$　頂点 $\boldsymbol{(-2,-3)}$

(2) $y=-(x^2-6x)-4$
$=-\{(x-3)^2-9\}-4$
$=-(x-3)^2+9-4$
$=\boldsymbol{-(x-3)^2+5}$　頂点 $\boldsymbol{(3,5)}$

(3) $y=-2(x^2+2x)+1$
$=-2\{(x+1)^2-1\}+1$
$=-2(x+1)^2+2+1$
$=\boldsymbol{-2(x+1)^2+3}$　頂点 $\boldsymbol{(-1,3)}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) $y=x^2-5x+2$
$=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+2$
$=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{8}{4}$
$=\boldsymbol{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{17}{4}}$　頂点 $\boldsymbol{(\frac{5}{2},-\frac{17}{4})}$

(2) $y=3(x^2-\frac{4}{3}x)+1$
$=3\{(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}\}+1$
$=3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}+\frac{3}{3}$
$=\boldsymbol{3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{1}{3}}$　頂点 $\boldsymbol{(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})}$

B2

(1) x の係数は $2(a-1)$ なので，半分は $a-1$。
$y=\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2+3$
$=\{x+(a-1)\}^2-(a^2-2a+1)+3$
$=\boldsymbol{\{x+(a-1)\}^2-a^2+2a+2}$
頂点 $\boldsymbol{(-a+1,-a^2+2a+2)}$

(2) x の係数は a なので，半分は $\frac{a}{2}$。
$y=-(x^2-ax)$
$=-\{(x-\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2\}$
$=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}$
$=\boldsymbol{-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}}$
頂点 $\boldsymbol{(\frac{a}{2},\frac{a^2}{4})}$