年　　組　　番　氏名

1. 平面を決める「2 つの矢印」

平面上のあらゆる位置（ベクトル）を表すには，基準となる「2 つのベクトル」が必要となる．

定義：一次独立（いちじどくりつ）

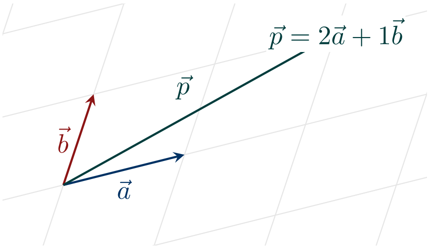
2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が以下の条件を満たすとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**一次独立**であるという．

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}, \quad \vec{a} \not\parallel \vec{b}$$

つまり，「0 でなく，平行でもない」2 つのベクトルのことである．

斜交座標のイメージ:

一次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を**基底（きてい）**と呼ぶ．これらを基準にすると，座標軸が斜めになったマス目（グリッド）を作ることができる．



どんな場所にある点 P も，基底の足し合わせで表現できる．

2. ベクトルの分解定理

分解の一意性（最重要）

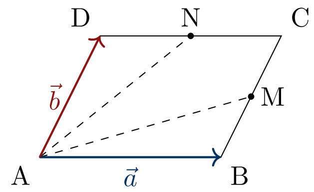
$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であるとき，平面上の**任意のベクトル** $\vec{p}$ は，実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に**ただ 1 通り**に表される．

例題 1 (図形の分解)

平行四辺形 ABCD において，辺 BC の中点を M，辺 CD の中点を N とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．



3. 係数比較法

分解が「1 通り」しかないため, 係数を比較して方程式を作ることができる.

係数比較の定理

$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であるとき,

(1) $s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=0$ かつ $t=0$
(2) $s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s'$ かつ $t=t'$

記述上の注意:
この定理を使うときは, 必ず「$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ なので」（または単に「$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので」）という断り書きが必要である.

例題 2 (係数決定)

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立とする.

$$(3x+y)\vec{a}+(x-2y-7)\vec{b}=\vec{0}$$

を満たす実数 x, y の値を求めよ.

例題 3 (基底の変換)

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立とする. $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$ であるとき, $\vec{a}$ を $\vec{p}, \vec{q}$ を用いて表せ.

方針: 連立方程式のように $\vec{b}$ を消去する.

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

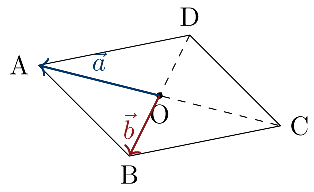
練習 A1 (図形の分解)

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



Memo / Answer

練習 A2 (係数比較)

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立とする．

$$(x-2)\vec{a} + (2x+y-5)\vec{b} = \vec{0}$$

を満たす実数 x, y を求めよ．

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (基底の変換)

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立とする．

$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{v} = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

であるとき，$\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$ を $\vec{u}, \vec{v}$ を用いて表せ．

Memo / Answer

解答 (A: 基本)

練習 A1 (図形の分解)

(1) O は AC の中点. $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の逆ベクトル.

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\boldsymbol{\vec{a}}$$

(2) 終点 − 始点.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\vec{b}} - \boldsymbol{\vec{a}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-\vec{a}) - \vec{b} = \boldsymbol{-\vec{a} - \vec{b}}$

Memo / Answer

A2 解答:

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので, 係数はそれぞれ 0 である.

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

第 1 式より $x = 2$. 第 2 式に代入して $4 + y - 5 = 0 \iff y = 1$.

答え: $x = 2, y = 1$

解答 (B: 標準)

Memo / Answer

B1 解答:

$\vec{p} = s\vec{u} + t\vec{v}$ とおき, s, t を決定する（係数比較法）.

代入して整理すると:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= s(2\vec{a} - \vec{b}) + t(-\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= (2s - t)\vec{a} + (-s + 3t)\vec{b} \end{aligned}$$

一方で, 問題の条件より $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$ である. $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから, 係数を比較して:

$$\begin{cases} 2s - t = 3 & \cdots (1) \\ -s + 3t = 1 & \cdots (2) \end{cases}$$

(2) より $s = 3t - 1$. これを (1) に代入. $2(3t - 1) - t = 3 \implies 6t - 2 - t = 3 \implies 5t = 5 \implies t = 1$. よって $s = 3(1) - 1 = 2$.

したがって,

$$\boldsymbol{\vec{p} = 2\vec{u} + \vec{v}}$$

別解（連立方程式として解く）:

$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} \dots (i)$

$\vec{v} = -\vec{a} + 3\vec{b} \dots (ii)$

$(i) + 2 \times (ii)$ より $\vec{u} + 2\vec{v} = 5\vec{b} \implies \vec{b} = \frac{1}{5}(\vec{u} + 2\vec{v})$.

同様に $\vec{a}$ を $\vec{u}, \vec{v}$ で表して $\vec{p}$ に代入してもよい.