P.78～P.82

基本事項

- (復習) 確率変数 X が二項分布 $B(n\ p)$ に従うとき,

$$E(X)=np,\quad V(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad (\text{ただし } q=1-p).$$

- (復習) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき,

$$E(X)=m,\ V(X)=\sigma^2,\ \sigma(X)=\sigma^2$$

- 平均が $0(m=0)$, 分散 (標準偏差) が $1(\sigma=1)$ である正規分布 $N(0,\ 1)$ を____________________という.

全体課題 pre

1 個のサイコロを 180 回投げて，1 の目が出る回数を X とするとき，$20 \leqq X \leqq 45$ となる確率を求めよ.

解答 (pre)

解答 (post)

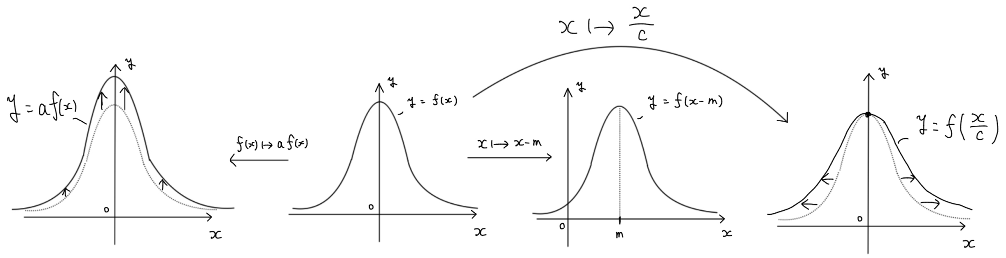
♠ エキスパート A「分布の標準化」

目標 A

正規分布と標準正規分布の関係を，グラフの「伸縮」と「平行移動」の観点から説明できる．

説明

- 関数 $y = f(x)$ を $y = f(x-m)$ と置き換えると，グラフは【 x 軸 / y 軸 】方向に【 $+m$ / $-m$ 】平行移動される．
- 関数 $y = f(x)$ を $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ と置き換えると，グラフは,【 x 軸 / y 軸 】方向に【 c 倍 / $\frac{1}{c}$ 倍 】伸縮する．
- 関数 $y = f(x)$ を $y = af(x)$ と置き換えると，グラフは,【 x 軸 / y 軸 】方向に【 a 倍 / $\frac{1}{a}$ 倍 】伸縮する．



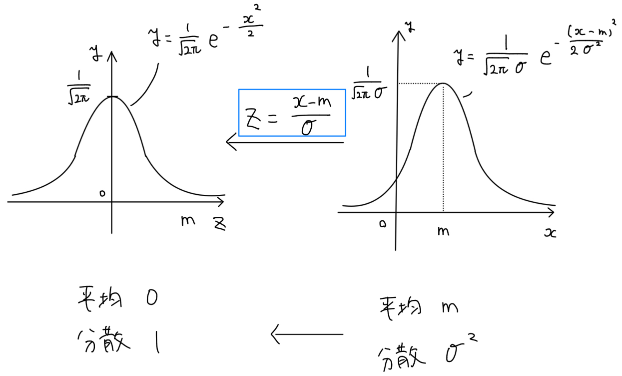
- 平均 m, 分散 σ^2 の正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う確率変数 X を, 平行移動と伸縮の観点から

$$X \xrightarrow{\text{平均を 0 に}} X - m \xrightarrow{\text{分散を 1 に}} \frac{X-m}{\sigma}$$

を考えて，

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} \tag{1}$$

と置き換えた確率変数 Z を考えると，Z は, 平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数になっている．というかむしろ変数変換 (1) は，平均が 0, 分散が 1 になるように変形した結果であると理解できる．



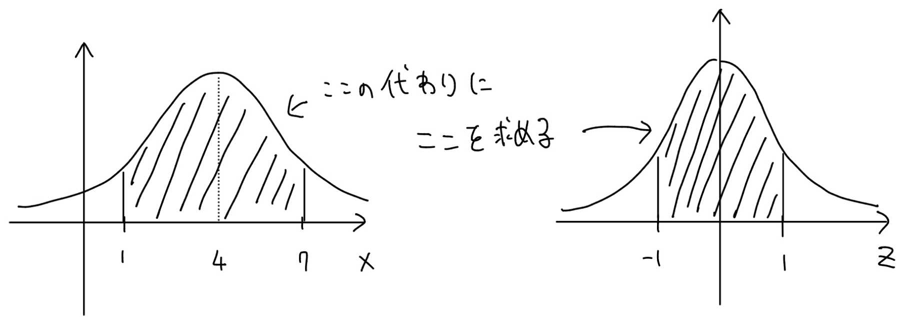
- 正規分布で確率を求める代わりに，標準正規分布で確率を求めることができる．(求め方はエキスパート C がやってくれているはず．)

例

- $X \sim N(4,\ 3^2)$ のとき確率 $P(1 \leqq X \leqq 7)$ を求めろと言われたら，$Z = \dfrac{X-4}{3}$ と置き換えて，

「$X = 1 \to Z = -1$」と「$X = 7 \to Z = 1$」を用いて，

$P(1 \leqq X \leqq 7)$ の代わりに $P(-1 \leqq Z \leqq 1)$ を求めれば良い．(求め方はエキスパート C がやってくれる．)



- $X \sim N(30,\ 5^2)$ のとき確率 $P(20 \leqq X \leqq 45)$ を求めろと言われたら，上と同様に，$Z = \dfrac{X-\qquad}{\qquad}$ と標準化した確率 $P(\qquad \leqq Z \leqq \qquad)$ を求めれば良い．

まとめ

変数変換 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ は, 平均を 0, 分散を 1 に書き直すためのもので，使われている考え方は，グラフの平行移動と伸縮である．

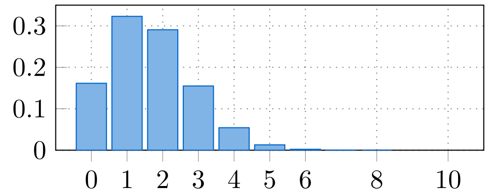
♠ エキスパート B 「二項分布と正規分布」

目標 B

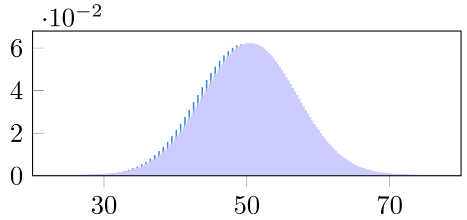
二項分布の試行回数を増やすと，グラフの分布が正規分布に近づいていくことを理解し，二項分布の確率を正規分布の確率として書き直すことができる．

説明

(前回) n 回サイコロを振り,1 の目が出た回数を X として，ヒストグラムを書き並べた．



$n=10$



$n=300$

- 確率変数 X 二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う．
- $n=300$ のときに X が従う分布は $B\left(300,\ \frac{1}{6}\right)$ であり，期待値 m と分散 σ^2 はそれぞれ
  $m=E(X)=$ ______，$\sigma^2=V(X)=$ ________．
- 実は，$n=300$ のように，**試行回数を増やした際に現れる山型の分布は，正規分布に近づくことが知られている．**(これは事実として使用して良い．)
- これを用いると，

$$X \sim B\left(n,\ p\right) \quad を \quad X \sim N\left(m,\ \sigma^2\right)，\ つまり$$
$$X \sim N(\underbrace{np}_{\text{二項分布の期待値}}, \underbrace{\sqrt{npq}^2}_{\text{二項分布の分散}})$$

と書きなおすことができる．ただし $q=1-p$.

- 例えば，今回の $n=300$ では，$X \sim N($　　　，　　　$)$ と書ける．
- 正規分布に従う確率変数の確率なら，正規分布表を用いて求めることができる (これはほかのエキスパート A, C がやってくれるはず．)

まとめ

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う．

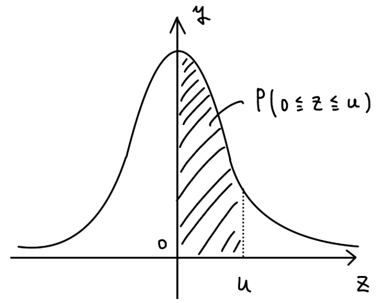
♠ エキスパート C「標準正規分布と確率」

目標 C

標準正規分布に従う確率変数 Z の確率を，正規分布表を用いて求めることができるようになる．

説明

- 正規分布表 (教科書巻末) の値は,$z=0$ から $z=u$ までの内側の山の面積を表しており，これは確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ に等しい．



- 例えば，$u=1.05$ の値を読み取ることで，$P(0 \leqq Z \leqq 1.05)=$ ________ がわかる．
- また，グラフは $z=0$(y 軸) に関して対称だから，
  $P(-1.05 \leqq Z \leqq 0)=P(0 \leqq Z \leqq 1.05)=$ ________．
- これを応用して，

$$\begin{aligned} P(-2 \leqq Z \leqq 1.05) &= P(-2 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1.05) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 2)+P(0 \leqq Z \leqq 1.05) \\ &= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}. \end{aligned}$$

- 特に，左右対称な区間の確率は，対称性を使うことで，
  $P(-1.05 \leqq Z \leqq 1.05)=2 \times P(0 \leqq Z \leqq 1.05)=$ ________．
- さらに，1 点の $Z=1.05$ の確率は $P(Z=1.05)=0$(線の面積は 0) だから，
  $P(-2 \leqq Z < 1.05)=P(-2 \leqq Z \leqq 1.05)=$ ________．

まとめ

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数の確率は，正規分布表を用いることで求めることができる．その際，グラフの対称性を利用するのも大切．