

## 1. 微積分学の基本定理 ~ Fundamental Theorem of Calculus ~

面積関数  $S(x)$  のおさらい。

$f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分 ( $a \sim x$ ) の面積を  $S(x)$  とする。前回、次の衝撃的な事実を証明した。

$$S'(x) = f(x) \quad (\text{微積分学の基本定理})$$

つまり、「面積関数  $S(x)$  は、元の関数  $f(x)$  の原始関数の一つである」。

実は、この定理には続きがある。

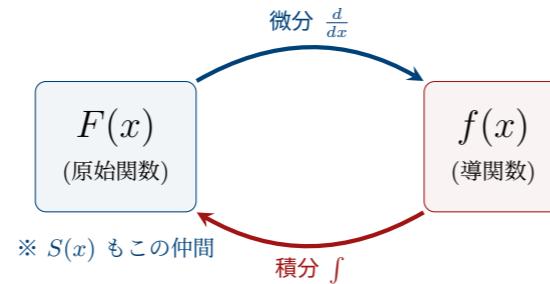
「微積分学の基本定理 II」

関数  $f(x)$  の原始関数のうちの一つを  $F(x)$  とする。このとき、任意の積分区間  $[a, b]$  に対して次が成り立つ。

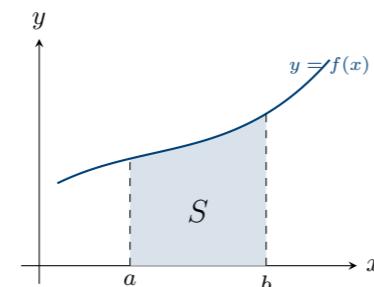
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

注意: 2 つの定理からわかること

- 「積分」と「微分」が互いに逆演算であること。



- 「面積」を求めるために必要なのは、「端点  $a, b$ 」と「原始関数  $F(x)$ 」のみであること。



証明の方針

(1) 面積関数  $S(x)$  は  $S(x) = \int_a^x f(t)dt$  で定義されており、定理の右辺は  $S(b)$  のことである。

$$S(b) = \int_a^b f(t)dt$$

(2) 面積関数  $S(x)$  と原始関数  $F(x)$  は互いに定数分のずれがある。

$$S(x) = F(x) + C$$

(3) 面積関数  $S(x)$  は、 $x = a$  のとき 0 になる。

$$S(a) = 0$$

Proof of theorem II

## 2. 定積分の計算(面積計算)

### 便利な記号と計算手順

定積分の計算  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  の右辺を

$$\underbrace{[F(x)]_a^b}_{\text{上の文字}-\text{下の文字}} = F(b) - F(a)$$

と書く(この記号があると計算がしやすくなる). この記号を使用し、定積分の計算(面積計算)は以下の手順で行う.

- (1) 原始関数  $F(x)$  を求める。(一番簡単なもので良い。)
- (2) 求めた原始関数  $F(x)$  を利用して、定理を用いる。

以上、面積計算に必要なステップはこれだけである。

### 例題 1

定積分  $\int_1^3 2xdx$  を求めよ。

解答  $f(x) = 2x$  の原始関数  $F(x)$  のうちの一つは

$$F(x) = x^2. \quad \leftarrow \text{微分して } 2x \text{ になる関数}$$

よって、定積分は

$$\int_1^3 2xdx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

### 例題 2

曲線  $y = x^2 + 1$  と  $x$  軸、および直線  $x = 0, x = 1$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

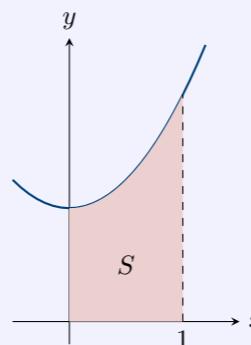
解答 面積は  $S = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$  である。

関数  $f(x) = x^2 + 1$  の原始関数のうちの一つ  $F(x)$  は

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x.$$

よって面積  $S$  は、

$$S = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - 0 = \frac{4}{3}$$



### 練習 1

次の定積分を求めよ。

- (1)  $\int_1^4 3x^2 dx$
- (2)  $\int_{-1}^2 (6x^2 + 4x - 1)dx$

### 練習 2

次の曲線と  $x$  軸、および [ ] 内の直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

- (1)  $y = 3x^2 \quad [x = 1, x = 2]$
- (2)  $y = -x^2 + 2x + 3 \quad [x = 0, x = 3]$

### Memo / Answer

## 確認テスト

## 練習 A：定積分の計算

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^1 4x^3 dx$$

$$(2) \int_1^2 (3x^2 - 4x + 2) dx$$

Memo / Answer

## 練習 B：面積

曲線  $y = -x^2 + 4$  と  $x$  軸 ( $y = 0$ ) で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

ヒント：

(1) まずグラフを描いて、積分区間（ $x$  軸との交点）を求める。

$$-x^2 + 4 = 0 \iff x = \dots$$

(2) その区間で定積分する。

Memo / Answer

