Introduction：不等式とグラフの高さ

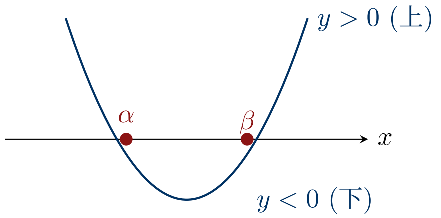
2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解くとは，グラフ $y=ax^2+bx+c$ において，

- $y>0$ となる（x 軸より上にある）部分の x の範囲

を答えることです。逆に <0 ならば，x 軸より下にある範囲を答えます。

2 次不等式の基本解法（$D>0$ のとき）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ が異なる 2 つの実数解 α,β $(\alpha<\beta)$ をもつとき：



- $ax^2+bx+c>0$ (上) $\Longrightarrow x<\alpha,\quad \beta<x$ （外側）
- $ax^2+bx+c<0$ (下) $\Longrightarrow \alpha<x<\beta$ （内側）

例題 1：因数分解できる場合

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-4x+3>0$

(2) $x^2+2x-8\leqq 0$

解法: まず $(x-1)(x-3)>0$ のように因数分解する。交点は $1,3$。不等号の向きを見て，外側か内側か判断する。

Memo / Answer

例題 2：解の公式を使う場合

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-3x+1<0$

(2) $-x^2+4x+2<0$

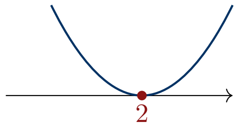
Check: (2) のように x^2 の係数が負の場合は，両辺に -1 を掛けて，不等号の向きを逆にしてから解くのが鉄則です。

$$x^2-4x-2>0$$

Memo / Answer

特殊な解（$D = 0$ のとき）

グラフが x 軸に**接している**場合，図を描いて慎重に判断します。例：$y = (x-2)^2$ のグラフ（頂点 2 で接する）



- $(x-2)^2 > 0 \to 0$ より大きい場所 $\to$ **2 以外のすべて**
- $(x-2)^2 \geqq 0 \to 0$ 以上 $\to$ **すべての実数**
- $(x-2)^2 < 0 \to 0$ より小さい場所 $\to$ **解なし** (存在しない)

例題 3：完全平方式

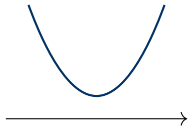
次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 9 > 0$
(2) $x^2 - 6x + 9 \leqq 0$

Memo / Answer

特殊な解（$D < 0$ のとき）

グラフが x 軸と**共有点を持たない（浮いている）**場合。例：$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$（常に正）



- $x^2 + 2x + 3 > 0 \to$ 常に浮いている $\to$ **すべての実数**
- $x^2 + 2x + 3 < 0 \to$ 下にある部分はない $\to$ **解なし**

例題 4：共有点なし

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 - 4x + 5 > 0$
(2) $2x^2 + 3x + 4 \leqq 0$

Memo / Answer

A 問題：基本パターンの定着

次の 2 次不等式を解け。

練習 A1: 因数分解

(1) $x^2 - 3x - 10 > 0$
(2) $x^2 - 6x + 5 \leqq 0$

練習 A2: 解の公式

(1) $x^2 - 2x - 2 < 0$
(2) $2x^2 + 5x + 1 \geqq 0$

練習 A3: 係数が負

(1) $-x^2 + 2x + 8 > 0$

Memo / Answer

B 問題：標準・応用

特殊な解（$D \leqq 0$）の判定を含む問題。グラフの概形を描いて考えること。

練習 B1: 完全平方式

(1) $x^2 + 10x + 25 \geqq 0$
(2) $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$
(3) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

練習 B2: 共有点なし

(1) $x^2 - 2x + 4 > 0$
(2) $x^2 + x + 1 \leqq 0$

Memo / Answer

A 問題：解答

Memo / Answer

A1

(1) $(x-5)(x+2)>0$

交点は $-2, 5$。不等号は $>$ (外側)。

$\boldsymbol{x < -2,\quad 5 < x}$

(2) $(x-1)(x-5) \leqq 0$

交点は $1, 5$。不等号は $\leqq$ (内側)。

$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 5}$

A2

(1) $x^2-2x-2=0$ を解くと，$x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

不等号は $<$ (内側)。

$\boldsymbol{1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3}}$

(2) $2x^2+5x+1=0$ を解くと，$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

不等号は $\geqq$ (外側)。

$\boldsymbol{x \leqq \frac{-5-\sqrt{17}}{4},\quad \frac{-5+\sqrt{17}}{4} \leqq x}$

A3

(1) 両辺に -1 を掛けて，

$x^2-2x-8<0$

$(x-4)(x+2)<0$

$\boldsymbol{-2 < x < 4}$

B 問題：解答

Memo / Answer

B1

(1) $(x+5)^2 \geqq 0$

2 乗したものは常に 0 以上である（グラフは $x=-5$ で接して上側）。

よって，**すべての実数**

(2) $(x-2)^2 \leqq 0$

2 乗して 0 以下になるのは，0 になるときだけ。

よって，$x=2$

(3) $(2x-1)^2<0$

2 乗して負になる実数は存在しない。

よって，**解なし**

B2

(1) $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

頂点 $(1,3)$ で下に凸。グラフは常に x 軸より上にある（浮いている）。

式 >0 を満たすのは，すべて。

よって，**すべての実数**

(2) 判別式 $D=1^2-4=-3<0$

グラフは x 軸と共有点を持たず，常に上にある。

式 $\leqq 0$ （下にある部分）は存在しない。

よって，**解なし**