年　組　番　氏名

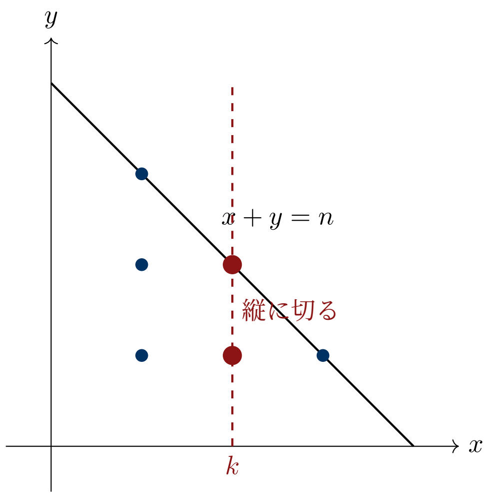
1. 散らばった星を数える (格子点)

座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を**格子点 (こうしてん)** という. 領域内の格子点を数える鉄則は, **「一方の文字を固定（スライス）して数える」**ことである.

格子点のカウント法

領域 D 内の格子点 (x, y) の総数を求めるには:

(1) $x = k$ (定数) と固定する.
(2) その縦線上の格子点の数（y の個数）を k で表す.
(3) その個数を k の動く範囲で合計 (Σ) する.



例題 1 (三角形の領域)

次の不等式を満たす正の整数 (x, y) の組（格子点）の個数を求めよ.

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ x + y \leqq n \quad (n \text{ は自然数})$$

Memo / Answer

2. シグマの中にシグマ (二重和)

格子点を数える操作は, 式で書くと「二重の Σ」になる.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \right)$$

計算の鉄則は**「内側から処理する」**. 内側の Σ (j の式) を計算するとき, 外側の文字 (i) は**定数扱い**になる.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} i(i+1) \right) \end{aligned}$$

また, 状況によっては**「足す順序を入れ替える」**と楽になることがある. (縦に切ってから足す ↔ 横に切ってから足す)

例題 2 (二重シグマの計算)

次の和を求めよ.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j$$

Memo / Answer

年　　組　　番　氏名

確認テスト (A: 二重シグマ)

練習 A1 (定数の二重和)

次の和を求めよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1$$

Memo / Answer

練習 A2 (変数の分離)

次の和を求めよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 格子点)

練習 B1 (領域内の個数)

n を自然数とする．次の不等式を満たす正の整数 (x, y) の組の個数を求めよ．

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ 2x + y \leqq 2n$$

ヒント: $x = k$ でスライスすると $y \leqq 2n - 2k$. k の範囲に注意.

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

$x = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ と固定する．$y \leqq n-k$ かつ $y \geqq 1$ より，格子点は $(n-k)$ 個．これを $k=1$ から $n-1$ まで足す．

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

例題 2 解答

内側: $\sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{2}i(i+1)$．外側: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(i^2+i) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$．

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

内側: $\sum_{j=1}^{i} 1 = i$ (1 を i 個足す)．外側: $\sum_{i=1}^{n} i = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$．

練習 A2 解答

$\sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} j\right)$ と変形できる．$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1)$ は定数なので外に出せる．

$$\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

$x = k$ と固定する．条件より $y \leqq 2n-2k$．$y \geqq 1$ なので，存在するためには $2n-2k \geqq 1$，つまり $2k \leqq 2n-1$．よって x のとりうる範囲は $1 \leqq k \leqq n-1$ である．(もし $k=n$ だと $y \leqq 0$ となり不適)

$x = k$ のとき，y の個数は $2n-2k$ 個．総数は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1}(2n-2k) \\ &= 2n\sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2\sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 2n(n-1) - 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n \\ &= 2n(n-1) - n(n-1) \\ &= n(n-1) = \boldsymbol{n^2 - n} \end{aligned}$$

(注: テキストの問題設定とは少し異なり $x \geq 1$ としたため，答えは異なる)