年　　組　　番　氏名

1. 崩壊の連鎖 (部分分数分解)

次の和を計算せよと言われたら、どうするだろうか.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

通分して計算するのは現実的ではない．ここで重要なのは、分数を「足す」のではなく**「引き算に分解する」**ことである.

部分分数分解

分母が積の形になっている分数は、差の形に変形できる.

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

実際に右辺を通分してみると、$\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$ となり元に戻る．この変形を行うと、驚くべきことが起こる.

$$S=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

中間がすべて消滅する！

$$S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

2. 係数が必要な場合

分母の差が 1 でない場合は、係数による調整が必要になる.

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

(右辺を通分すると分子が 2 になるため、$\frac{1}{2}$ で割っておく)

例題 1 (1 つ飛ばしの消去)

次の和を求めよ.

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

Memo / Answer

3. 姿を変えた打ち消し合い ($\sqrt{}$)

分母にルートがある場合も、**有理化**することで「差の形」を作れる.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

これなら $\sum(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ となり、隣同士が打ち消し合う.

例題 2 (無理数の数列の和)

次の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Memo / Answer

4. 混ざり合った数列 (等差 × 等比)

次は打ち消し合わないが、計算テクニックで解けるパターン.

$$S = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n$$

左側は等差数列 $(1, 2, 3\ldots)$、右側は等比数列 $(2, 2^2, 2^3\ldots)$ である.

解法: 等比数列の和の公式の導出と同じく、**「公比を掛けてズラして引く」**.

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n \\ 2S_n = & \quad\quad 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \cdots + (n-1)2^n + n\cdot 2^{n+1} \\ \hline -S_n = & 2 + \boxed{1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + \cdots + 1\cdot 2^n} - n\cdot 2^{n+1} \end{array} \quad (-)$$

ここが等比数列の和になる！

例題 3 (等差 × 等比)

上の数列の和 S を求めよ.

Memo / Answer

年　組　番　氏名

確認テスト (A: 基本)

練習 A1 (部分分数分解)

次の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Memo / Answer

練習 A2 (等差 × 等比の導入)

次の和 S を $S-3S$ を計算することで求めよ.

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$$

Memo / Answer

確認テスト (B: 標準)

練習 B1 (2 つ飛ばし)

次の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

Memo / Answer

練習 B2 (等差 × 等比)

次の和を求めよ.

$$S = 1\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^n$$

Memo / Answer

解答 (例題)

例題 1 解答

部分分数分解を行うと

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

これを書き並べると $S=\frac{1}{2}\{(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\dots$
$\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\}$
差が 2 なので「1 つ飛ばし」で消え合い，残るのは**最初の 2 つと最後の 2 つ**である．

$$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

※通分して整理すると $\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ となる．

例題 2 解答

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ と変形できる．

$$\begin{aligned}S&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=-1+\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

例題 3 解答

$S-2S$ を計算すると:

$$-S=2+(2^2+2^3+\dots+2^n)-n\cdot 2^{n+1}$$

カッコ内は初項 4，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列の和だが，最初の 2 を含めて「初項 2，公比 2，項数 n」と見たほうが早い．

$$\begin{aligned}-S&=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}\\&=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2\end{aligned}$$

よって $S=(n-1)2^{n+1}+2$．

解答 (A: 基本)

練習 A1 解答

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\dots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$.

練習 A2 解答

$$\begin{aligned}S&=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\dots+n\cdot 3^{n-1}\\3S&=\qquad 1\cdot 3+2\cdot 3^2+\dots+(n-1)3^{n-1}+n\cdot 3^n\end{aligned}$$

引くと:

$$-2S=1+3+3^2+\dots+3^{n-1}-n\cdot 3^n$$

等比数列の部分は $\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$.

$$-2S=\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n=\frac{3^n-1-2n\cdot 3^n}{2}=\frac{(1-2n)3^n-1}{2}$$

よって $S=\boldsymbol{\frac{(2n-1)3^n+1}{4}}$.

解答 (B: 標準)

練習 B1 解答

$\sum\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})=\frac{1}{2}\{(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\dots\ \dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\}$.
残るのは $1,\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{n+1},-\frac{1}{n+2}$.

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

(展開前の式でも正解となることが多い)

練習 B2 解答

公比 $r=2$ を掛けて引く．

$$\begin{aligned}S&=1\cdot 2+3\cdot 2^2+\dots+(2n-1)2^n\\2S&=\qquad 1\cdot 2^2+\dots+(2n-3)2^n+(2n-1)2^{n+1}\end{aligned}$$

引くと（係数の差が 2 になることに注意）：

$$-S=2+(2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\dots+2\cdot 2^n)-(2n-1)2^{n+1}$$

カッコ内は $2(2^2+\dots+2^n)=2\cdot\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}=8(2^{n-1}-1)=2^{n+2}-8$.

$$-S=2+(2^{n+2}-8)-(2n-1)2^{n+1}$$

$$-S=2\cdot 2^{n+1}-6-(2n-1)2^{n+1}=(3-2n)2^{n+1}-6$$

よって $S=\boldsymbol{(2n-3)2^{n+1}+6}$.