클린업 1주차

3팀 선형대수학

황정현
고경현
김지민
반경림
전효림

INDEX

1. 선형대수 소개
2. 기본 개념
3. 선형방정식과 선형결합
4. 선형변환
5. 선대, 딥러닝을 만나다

1

선형대수 소개

선형대수

통계 분석의 시작점

선형성을 바탕으로

선형변환과 그때의 공간에 대해 연구하는

대수학의 한 분야

1 선형대수 소개

선형대수

데이터의 처리

데이터프레임화

차원축소

공간적 조작

이론적 바탕

머신러닝의 기반

통계 모델의 원리

2

기본 개념

선형성

함수 f는 선형이다

가산성 임의의 수 x와 y에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y)$

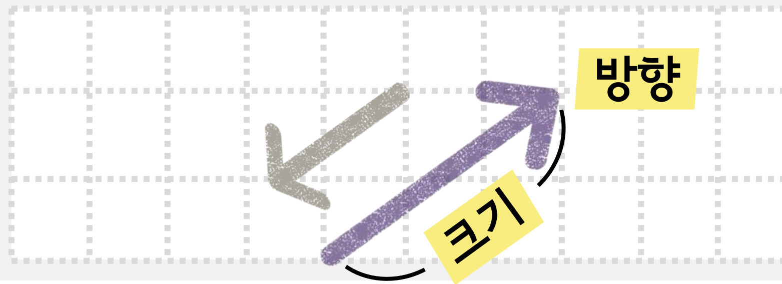
동차성 임의의 수 x와 상수 a에 대해 $f(ax) = a \cdot f(x)$

벡터(vector)의 개념

벡터의 물리적 의미

' 어느 **방향**으로 **얼마만큼**의
힘 또는 속도를 갖는지 '

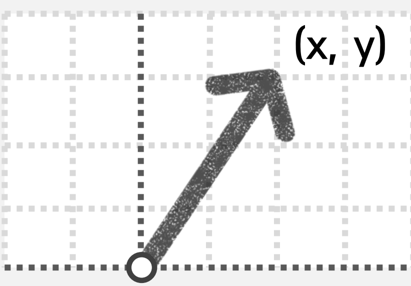
≠ *스칼라(scalar)*



데이터분석의 기본 단위

다른 데이터를 구성하는 기본
+
데이터를 **선형적 관점**에서
이해할 수 있는 핵심 매개

선형대수학의 공간적 이해



2개의 원소

$\mathbb{R}^2$

- **원소**(component): 벡터를 구성하는 값
- **벡터공간**(vector space, $\mathbb{R}$): 벡터로 이뤄지는 공간
- **n개의 원소**로 이뤄진 벡터는 **n차원** 공간에 있음

벡터의 연산

1 수식적으로 계산하기

벡터의 연산은 원소끼리 이루어짐

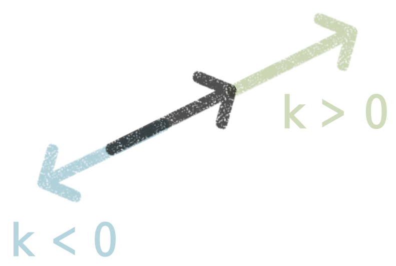
$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

상수배	덧셈	뺄셈
$\overset{\text{상수}}{k}v = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$	$v + w = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$	$v - w = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$

벡터의 연산

2 기하학적으로 계산하기

상수배



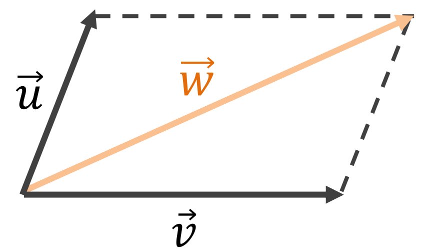
벡터에 상수 k를 곱한다

=

벡터의 길이를 k배 한다

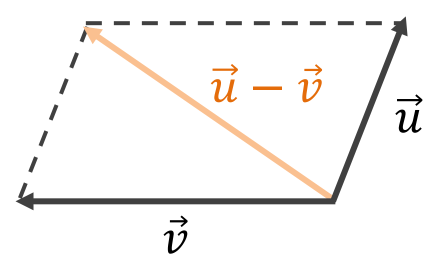
덧셈

벡터 u에서 벡터 v만큼 이동하면서 생기는 평행사변형의 대각선이 u+v, 즉 벡터 w



뺄셈

벡터 v에 대해 -1배 한 뒤 벡터 u와 더하면 벡터 u-v



벡터의 연산법칙

$\mathbb{R}^n$ 의 벡터 x, y, z와 스칼라 h, k에 대하여 다음이 성립한다.

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + 0 = x = 0 + x$
- $x + (-x) = 0 = (-x) + x$
- $k \cdot (x + y) = kx + ky$
- $(h + k) \cdot x = hx + kx$
- $(h \cdot k) \cdot x = h \cdot (k \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

행렬(matrix)의 개념

- 실수를 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 형태

원소(element) 또는 성분(entry)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

행 m개와 열 n개로 이루어진
m x n 크기의 행렬

행렬(matrix)의 개념

- 실수를 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 형태

정사각행렬(square matrix)

주대각성분

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

행 n개와 열 n개로 이루어진
n x n 크기의 행렬

행렬의 연산

상수배	모든 원소에 같은 상수를 곱함
합	크기가 같은 두 행렬에서 같은 위치에 있는 원소끼리 합함

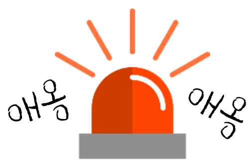
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+6 \\ 3+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

행렬의 연산

곱	앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행이 크기가 같을 때, 원소의 곱의 합



행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않음, 즉 $AB \neq BA$

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{AB} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1 \\ 3\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

행렬의 종류

영행렬

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (0)

행렬의 종류

영행렬

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (O)

정방행렬

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

행과 열의 개수가 같은 정사각형 행렬

대각행렬

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

정방행렬 중 주대각선 이외의 값이 0인 행렬

단위행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

대각행렬 중 주대각성분이 1인 행렬 (I)

2 기본개념

행렬의 종류

영행렬

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (O)

$$\underset{3 \times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{2 \times 3}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

전치행렬

행렬 A의 **행과 열을 교환**하여 얻은 행렬 A^T

정방행렬의 전치행렬은 주대각선을 기준으로 대칭

정방행렬

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

행과 열의 개수가 같은 정사각형 행렬

대각행렬

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

정방행렬 중 주대각선 이외의 값이 0인 행렬

단위행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

대각행렬 중 주대각성분이 1인 행렬 (I)

역행렬

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

n x n의 정방행렬 (A)

n x n의 단위행렬 (I)

Properties

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2 x 2 matrix의 경우

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

역행렬

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

n x n의 정방행렬 (A)

n x n의 단위행렬 (I)

행렬 A는 오직 하나의 역행렬만 가질 수 있기 때문에

역행렬을 가진다

해가 유일하다 (unique)

가역하다 (invertible)

모두 같은 말! 

Properties

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2 x 2 matrix의 경우

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3

선형방정식과 선형결합

선형방정식(Linear equation)

양의 정수 n에 대하여, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 형태로 표현되는 식

하나 이상의 선형방정식 집합은 **연립선형방정식**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A **x** = **b**

m x n 행렬   n x 1 벡터   m x 1 벡터

선형방정식(Linear equation)

문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때

행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결할 수 있다!

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \quad \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

m x n 행렬 n x 1 벡터 m x 1 벡터

Ax = b 판별 및 해 구하기

문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때

행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결할 수 있다!

Gauss-Jordan Elimination

Carl Friedrich Gauss

Wilhelm Jordan

계수만으로 행렬을 생성한 후

Elementary Row Operation을 이용하여

Row Echelon Form으로 만들어

연립선형방정식의 해를 구함

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

두 행을 교환한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

한 행에 0이 아닌 실수를 곱한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1 \rightarrow 2 \times R1]{\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

- Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

한 행에 0이 아닌 실수배를 하여 다른 행에 더한다

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[R2 \to 2 \times R1 + R2]{\times 2} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

성분이 모두 0인 행이 존재하면

그 행은 행렬의 **맨 아래**에 위치

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

각 행에서 처음으로 나타나는

0이 아닌 성분은 1

Leading 1 (선행성분, pivot)

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i+1)행의 선행성분은
i행의 선행성분보다
오른쪽에 위치

Ax = b 판별 및 해 구하기

1 해 구하기

Reduced Row Echelon Form (RREF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Leading 1을 포함하는 열의

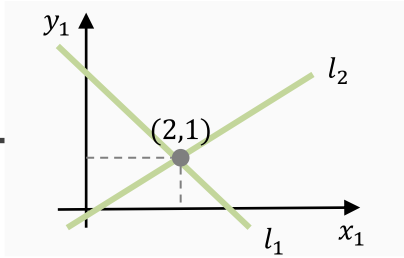
선행선분 외의 성분은 모두 0

Ax = b 판별 및 해 구하기

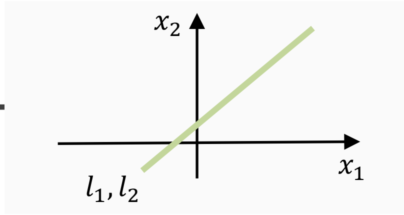
2 해의 종류

일치한다
Consistent

해가 유일하다

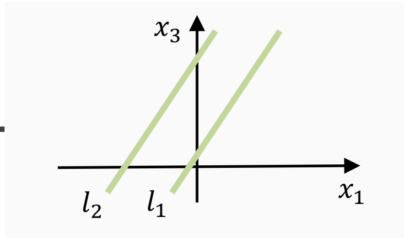


해가 무수히 많다



불일치한다
Inconsistent

해가 없다



Ax = b 판별 및 해 구하기

3 해의 판별

사전 작업

Ax = b 를 행렬 [A | b] 로 만들고 G-J 소거법을 이용해

RREF인 [H | c] 로 만든다

$$\begin{cases} -2x - 5y + 2z = -3 \\ x + 3y = 4 \\ y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ax = b 판별 및 해 구하기

3 해의 판별

H의 모든 열에 leading 1이 존재할 때 ⟩ **유일한 해**가 있다

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -5 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}$$

Ax = b 판별 및 해 구하기

3 해의 판별

H의 일부 행에 leading 1이 없고, 오른쪽 숫자가 0일 때

→ 해가 **무수히 많다**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{array}$$

자유변수(free variable)

: z에 의해 x, y 설명

Ax = b 판별 및 해 구하기

3 해의 판별

H의 일부 행에 leading 1이 없고, 오른쪽 숫자가 0이 아닐 때

⟩ 해가 **없다**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

위 선형방정식을 만족시키는 해는 존재하지 않음

선형결합(Linear combination)

- 벡터들을 상수배와 벡터 덧셈을 통해 조합하여 새로운 벡터를 얻는 연산

$$\mathrm{Ax} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

선형결합(Linear combination)과 span

- 벡터들을 상수배와 벡터 덧셈을 통해 조합하여 새로운 벡터를 얻는 연산

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

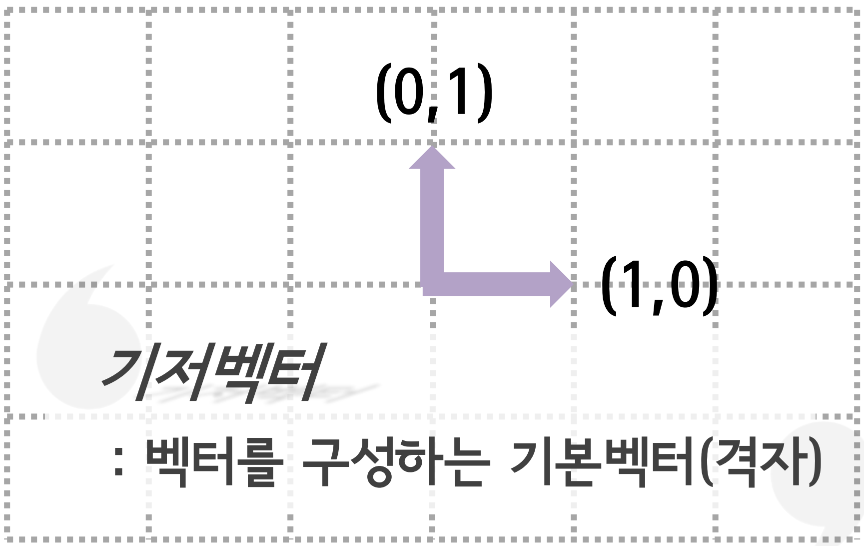
$$span\{a_1 \ \ a_2 \ \ \cdots \ \ a_n\}$$

m x n 행렬 A와 n개의 원소를 가진 벡터 x를 곱할 때,

a_i의 조합 = span

span의 공간적 이해

$\mathbb{R}^2$



기저벡터

: 벡터를 구성하는 기본벡터(격자)

2차원 벡터공간 내
모든 벡터는 **기저벡터인**
(0, 1)과 (1, 0)의
span(조합)을 통해
표현할 수 있음

span의 공간적 이해

다음주를 기대해주새오!

$\mathbb{R}^2$

(0,1)

(1,0)

기저벡터

: 벡터를 구성하는 기본벡터(격자)

2차원 벡터공간 내 모든 벡터는 기저벡터인 (0, 1)과 (1, 0)의 span(조합)을 통해 표현할 수 있음

Ax = b의 해가 존재한다

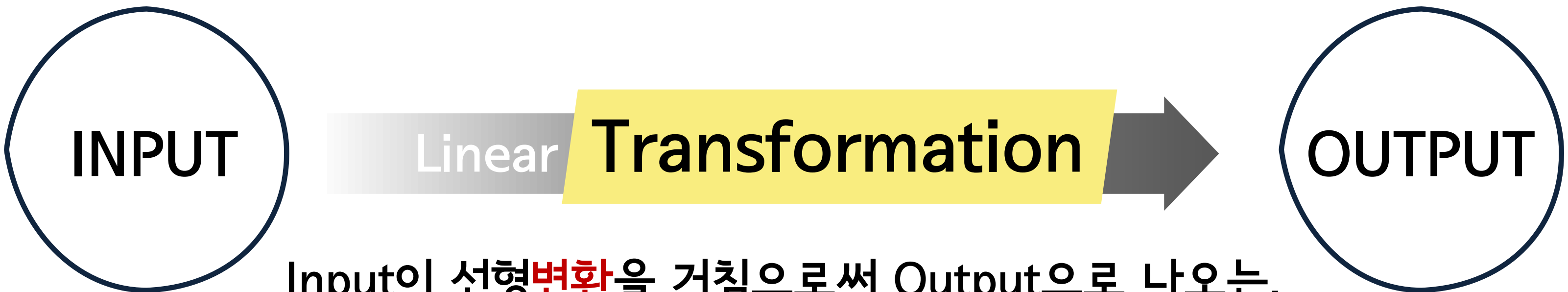
a의 조합으로 b를 표현할 수 있다

벡터 b가 span(a1, a2, ⋯, an)에 있다

4

선형변환

선형 '변환'의 의미



Input이 선형**변환**을 거침으로써 Output으로 나오는,
일종의 함수

선형방정식 Ax = b를 '변환'의 관점에서 이해해보자!

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

x라는 input에 A라는 변환을 거쳐 b라는 새로운 output 반환

선형 '변환'의 의미

Ax = b의 해를 찾고자 하는 것은 곧

A를 곱했을 때 b로 변환되는 벡터 x를 찾는 것이다!

선형방정식 Ax = b를 '변환'의 관점에서 이해해보자!

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}\overset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

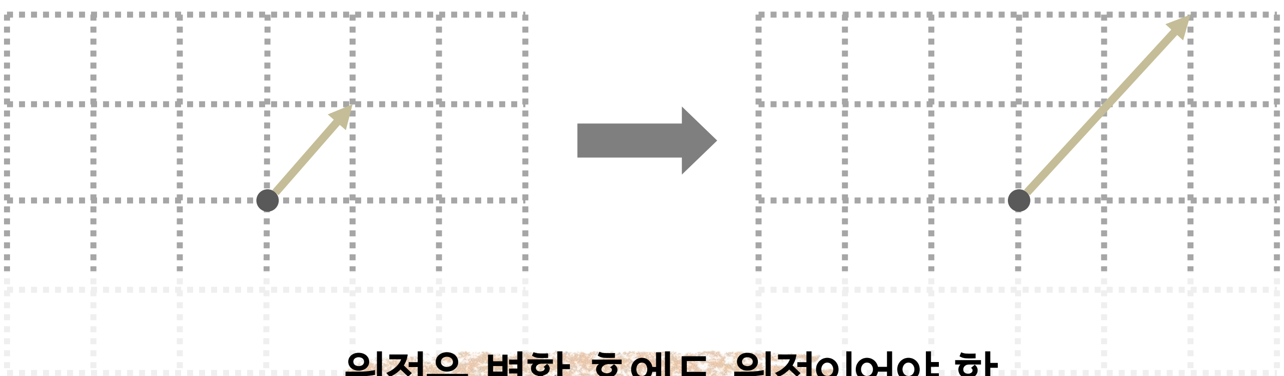
x라는 input에 A라는 변환을 거쳐 b라는 새로운 output 반환

‘선형’ 변환의 의미 (1) 수식적 의미

T : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 일 때,

정의역에 존재하는 임의의 벡터 u, v에 대해

- T(u + v) = T(u) + T(v)
- T(ku) = k · T(u) (k는 상수)



원점은 변환 후에도 원점이어야 함

‘선형’ 변환의 의미 (2) 공간적 의미

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

: 기존 기저

: 선형변환

: 새 기저

새로운 기저,
새로운 공간의 형성

'선형' 변환의 의미 (2) 공간적 의미

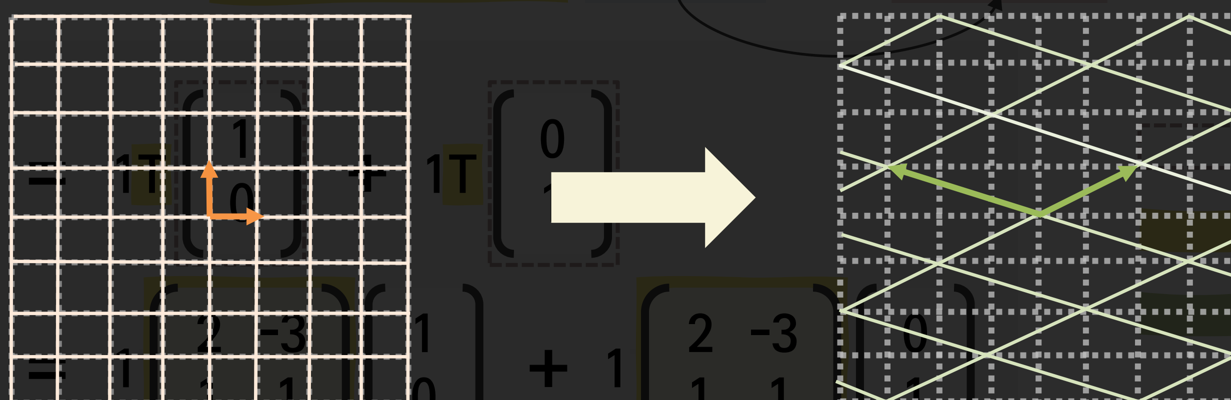
$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

선형변환 이후 기저가 변했다!

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$



: 기존 기저

: 선형변환

: 새 기저

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$

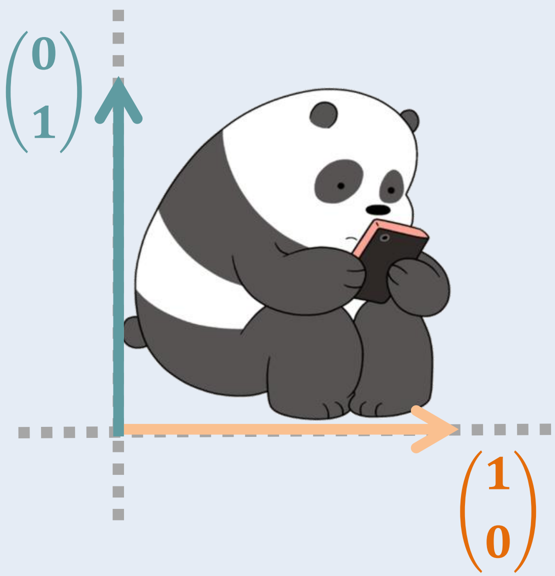
새로운 기저,

로운 공간의 형성

선형변환의 종류

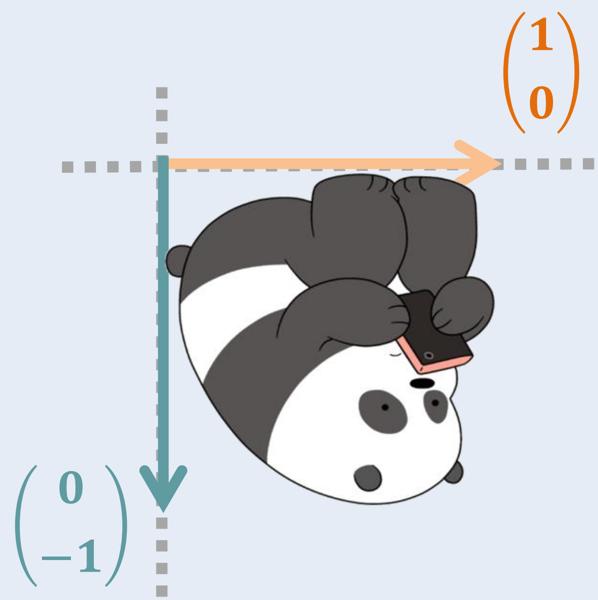
Reflection

- 특정 축을 중심으로 벡터를 반전
- 각각의 벡터 (1,0), (0,1)이 선형변환 행렬 A에 의해 반전



행렬 A

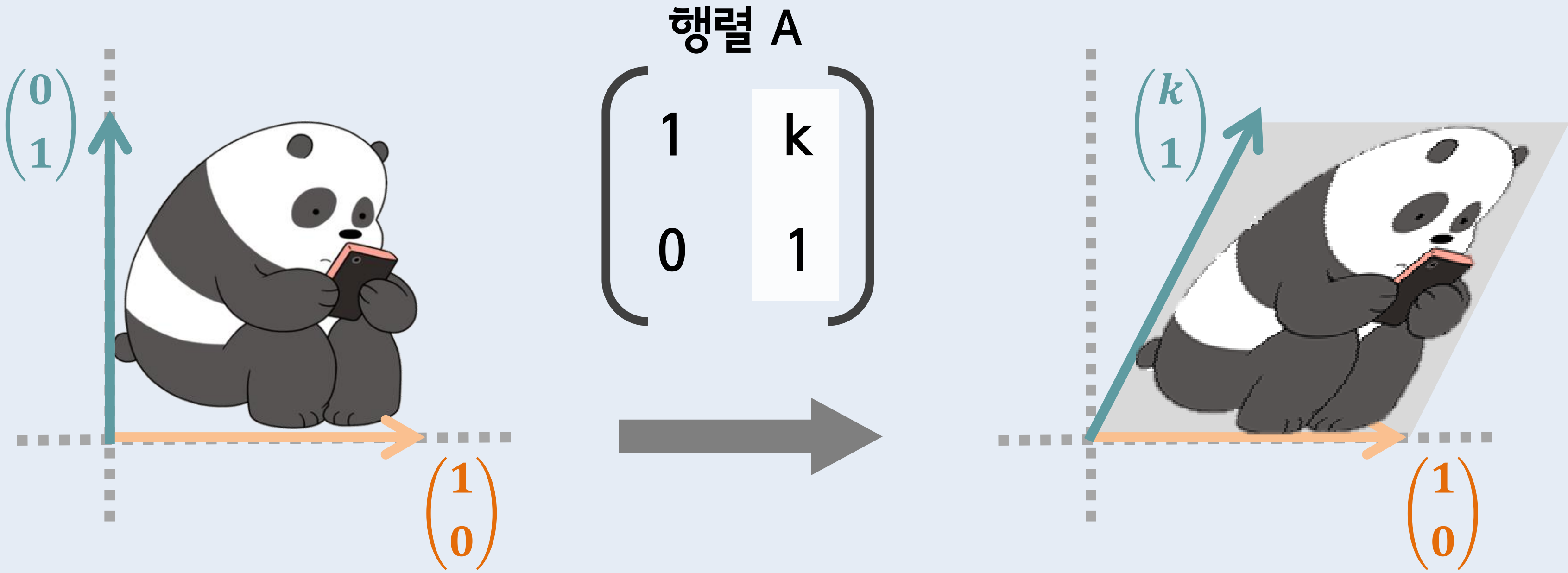
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



선형변환의 종류

Shear

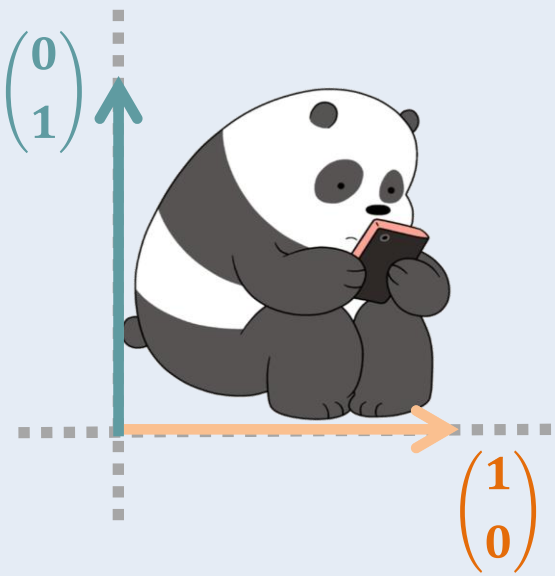
- 평행사변형으로 변환
- 각각의 벡터 (1,0), (0,1)이 선형변환 행렬 A에 의해 평행사변형 꼴로 변환



선형변환의 종류

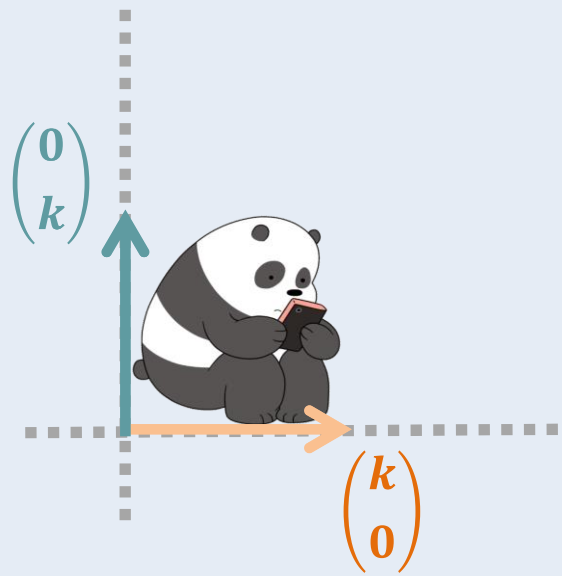
Contractions & Expansions

- 특정 k배로 수축 또는 확장
- 각각의 벡터 (1,0), (0,1)이 선형변환 행렬 A에 의해 축소됨 (k < 0)



행렬 A

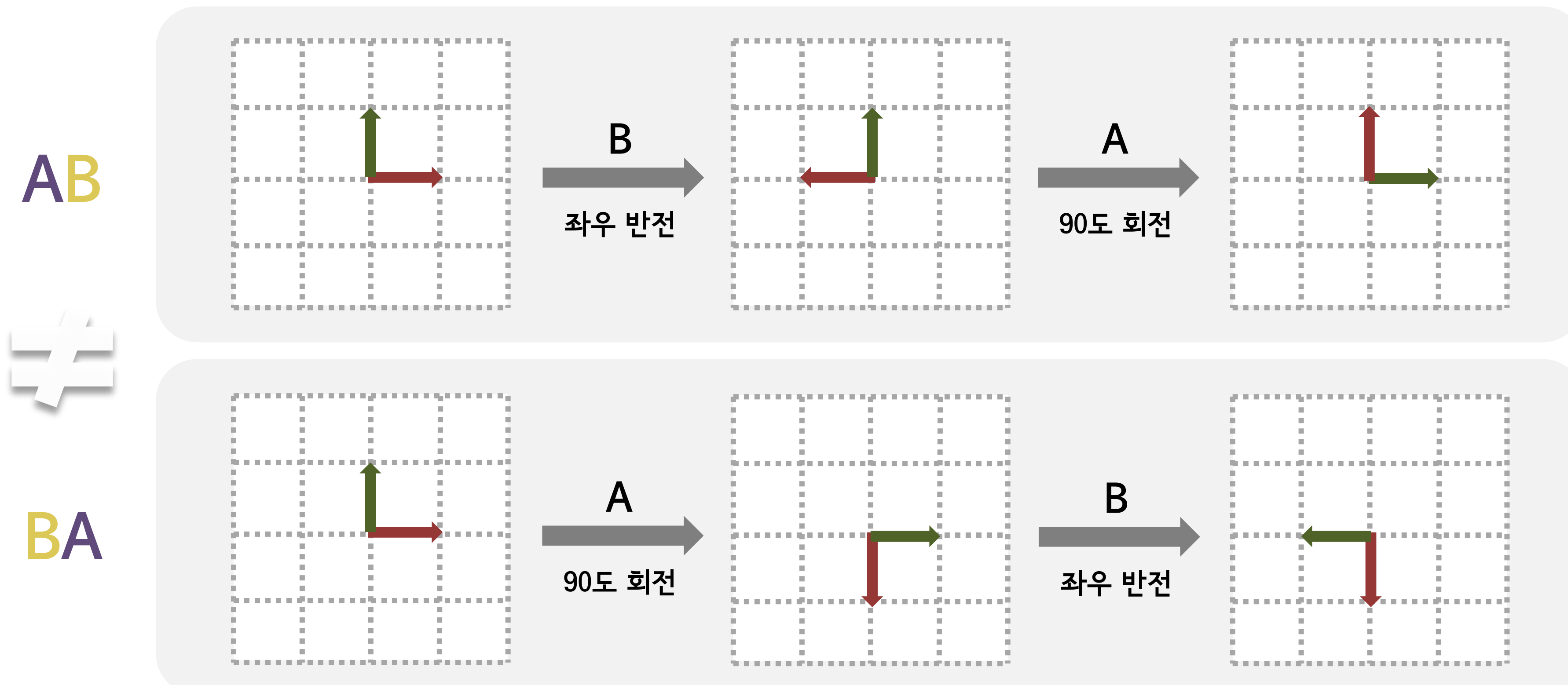
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$



선형변환으로 AB와 BA가 다름을 이해하기

A 공간을 오른쪽으로 90° 회전시키는 선형변환

B 공간을 좌우로 뒤집는 선형변환

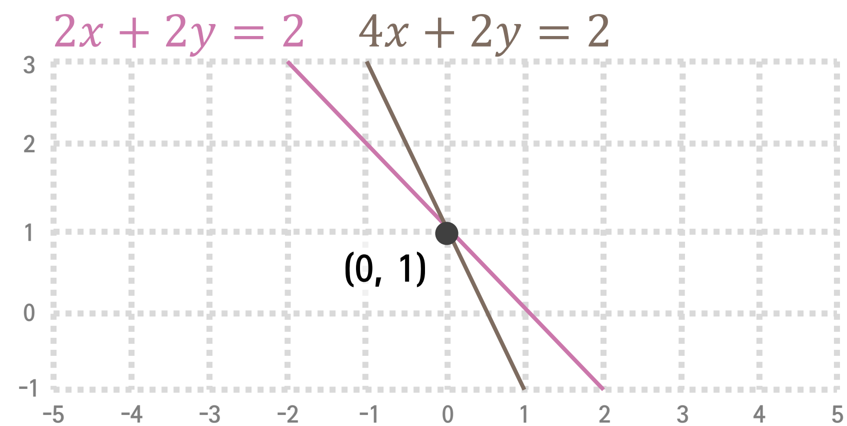


선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

Q. 선형변환의 차원에서 선형방정식 $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ 을 풀어보자!

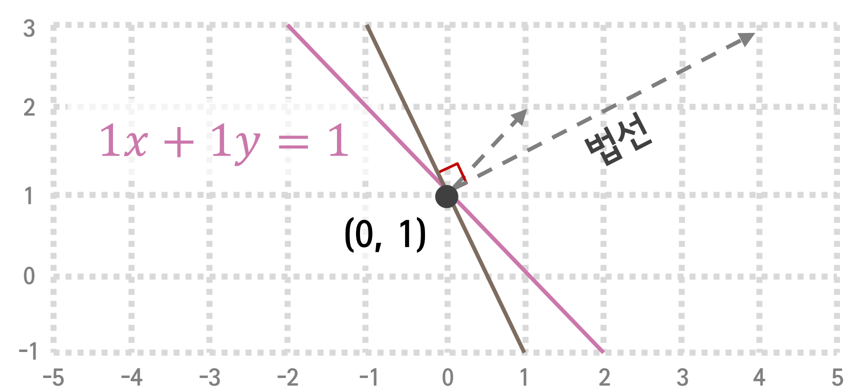
1 Ax = b를 [A | b] 형태로 변경

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$



2 Scaling (R1 x 0.5)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

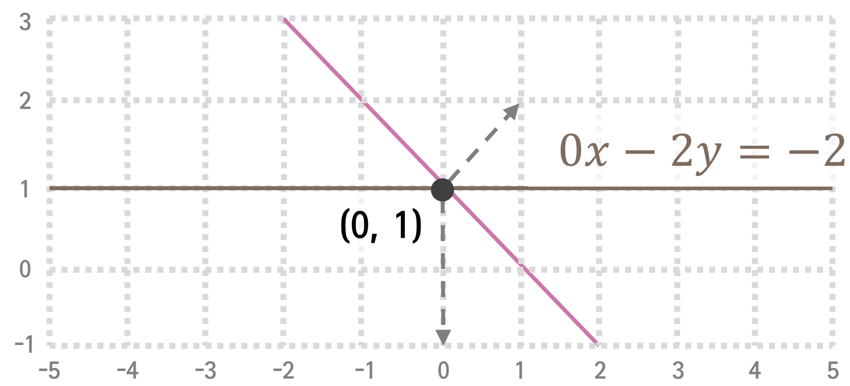


선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

Q. 선형변환의 차원에서 선형방정식 $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ 을 풀어보자!

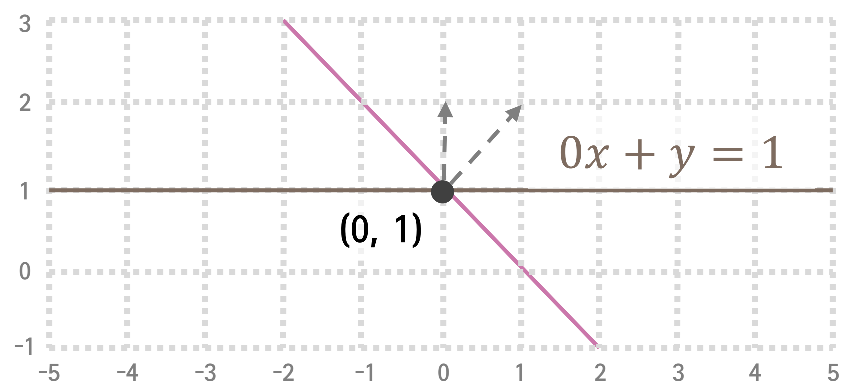
3 Subtraction (R2 - 4 x R1)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$



4 Scaling (R2 x -0.5)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

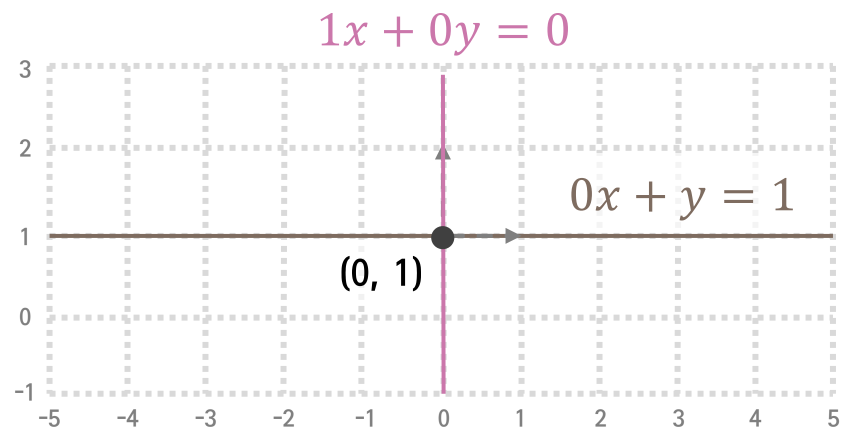


선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

Q. 선형변환의 차원에서 선형방정식 $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ 을 풀어보자!

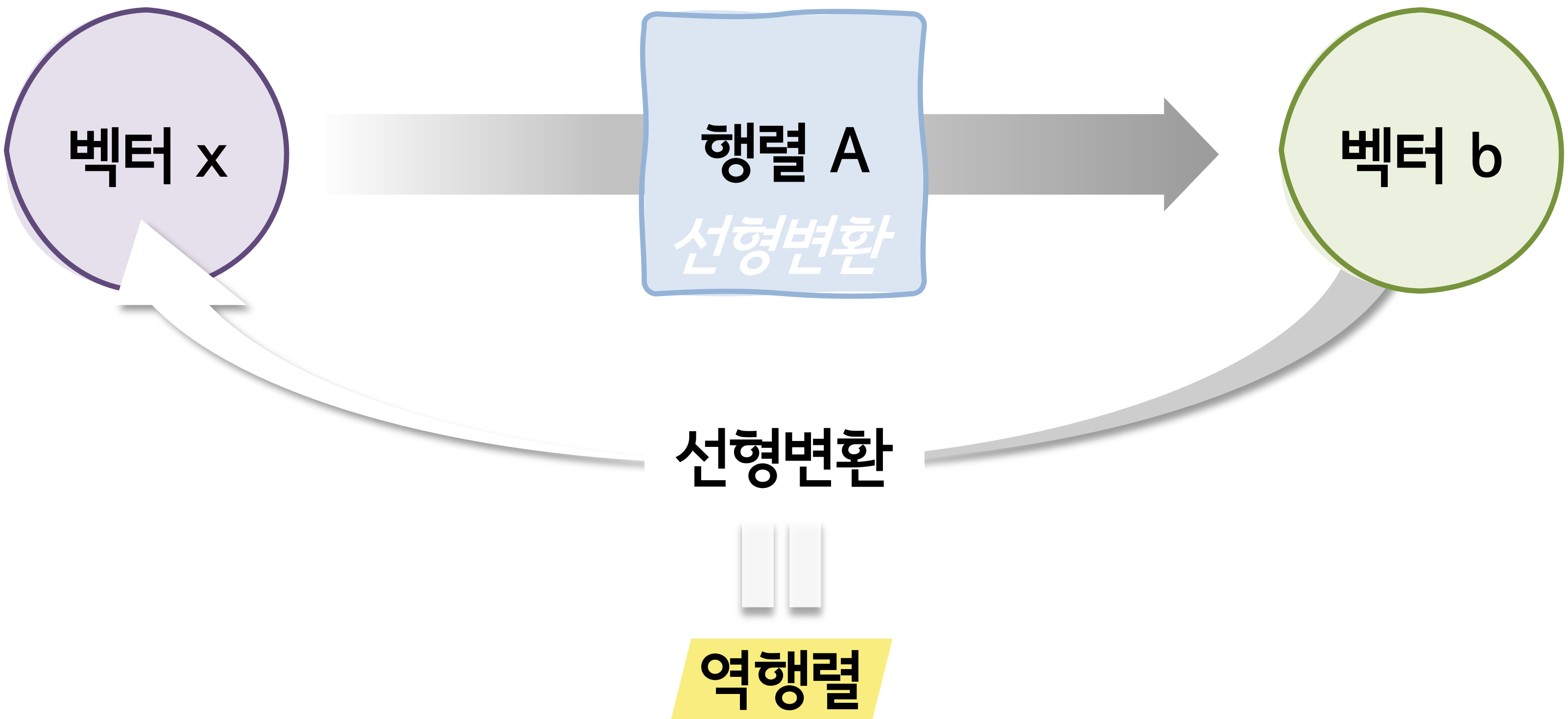
5 Subtraction (R1 - R2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$



∴ 축이 원래의 x축 · y축과 평행해짐

선형변환으로 역행렬 이해하기

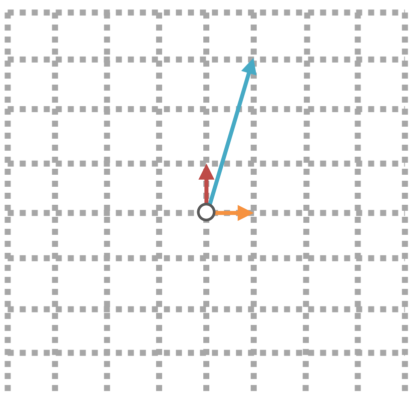


역행렬이 있는 경우

역행렬이 없는 경우

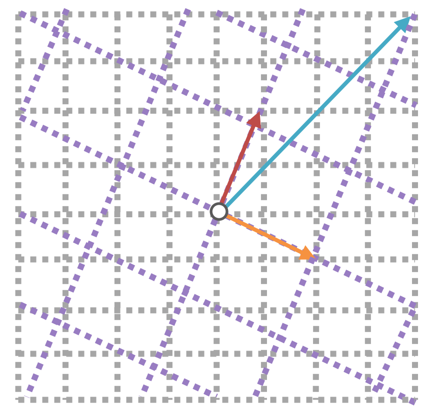
선형변환으로 역행렬 이해하기

1 역행렬이 있는 경우



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$



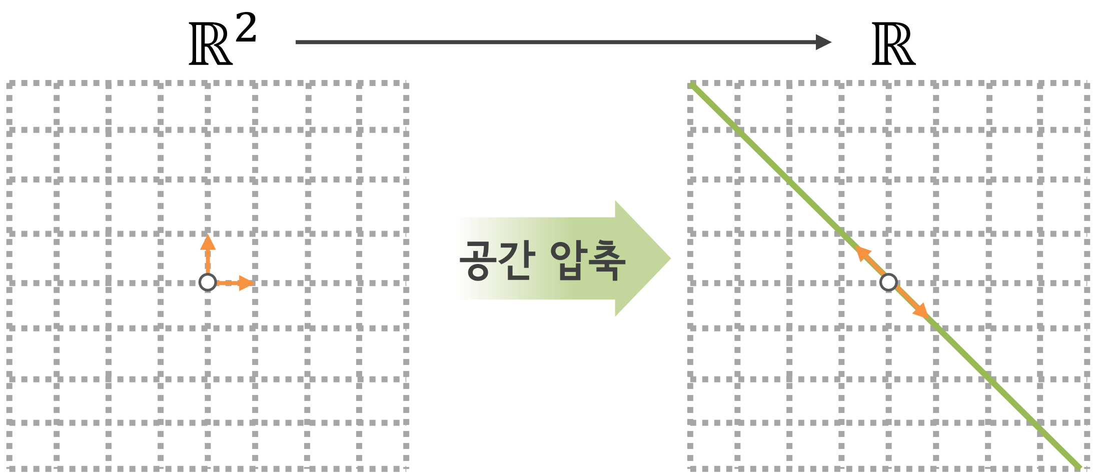
정방행렬 A의 **역행렬이 존재**한다 ⊜ Ax = b가 유일한 해를 갖는다(**unique**)

⊜ 특정 x를 선형변환한 Ax가 유일하다

⊜ x와 Ax가 서로 **일대일 대응**이다

선형변환으로 역행렬 이해하기

2 역행렬이 없는 경우



1차원 벡터를 어떠한 특정 2차원 벡터로 되돌려야 하는지 알 수 없다

⊜ x와 Ax가 서로 일대일 대응이 아니다

⊜ Ax = b의 해가 유일하지 않다

⊜ 역행렬이 존재하지 않는다

5

선대, 딥러닝을 만나다

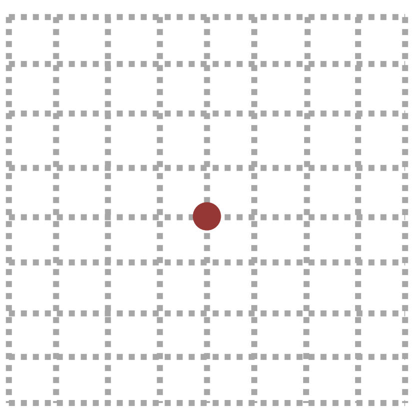
Affine transformation

아핀변환 = 선형변환 + 평행이동

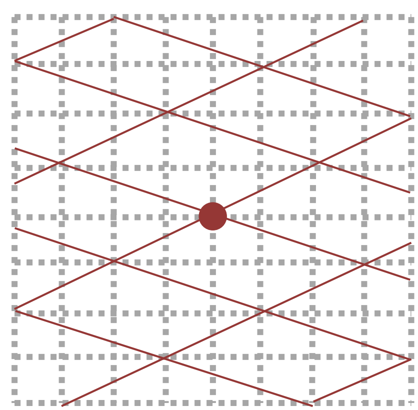
$y = ax + b$

'선형성'을 바탕으로 한
원점 변화 없는 벡터 변환

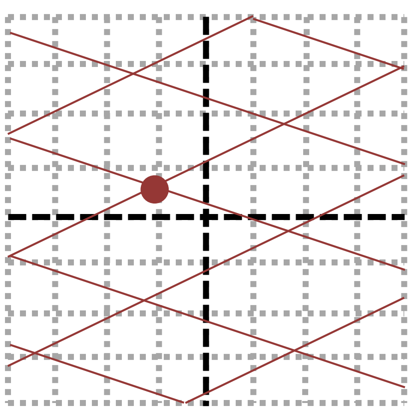
선형성 만족하지 않음



변환 전



선형변환



아핀변환

Affine transformation

아핀변환 = **선형변환** + **평행이동**

$y = ax + b$

'선형성'을 바탕으로 한
원점 변화 없는 벡터 변환

선형성 만족하지 않음

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \overset{\text{bias}}{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}$$

Ax + b (2차원)

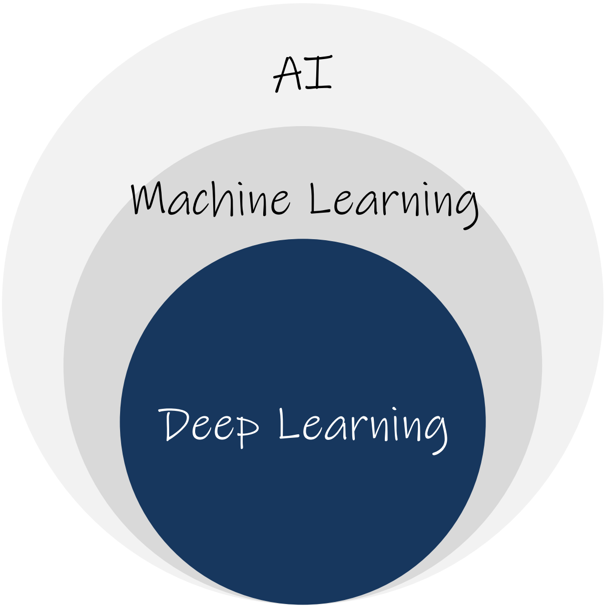
$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

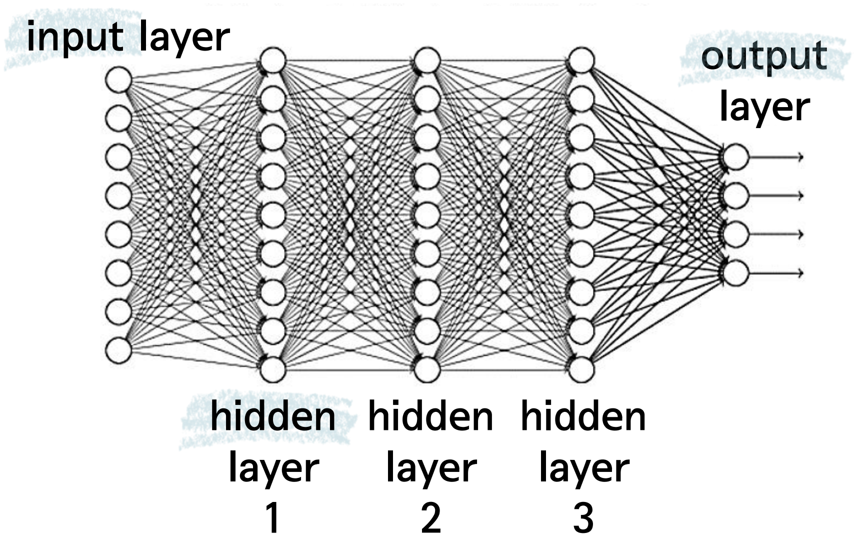
선형결합

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

A*x* (3차원)

딥러닝





- 인공신경망을 이용하는 머신러닝
- 주로 비정형데이터 분석에 사용

활성화 함수로 예측값 계산

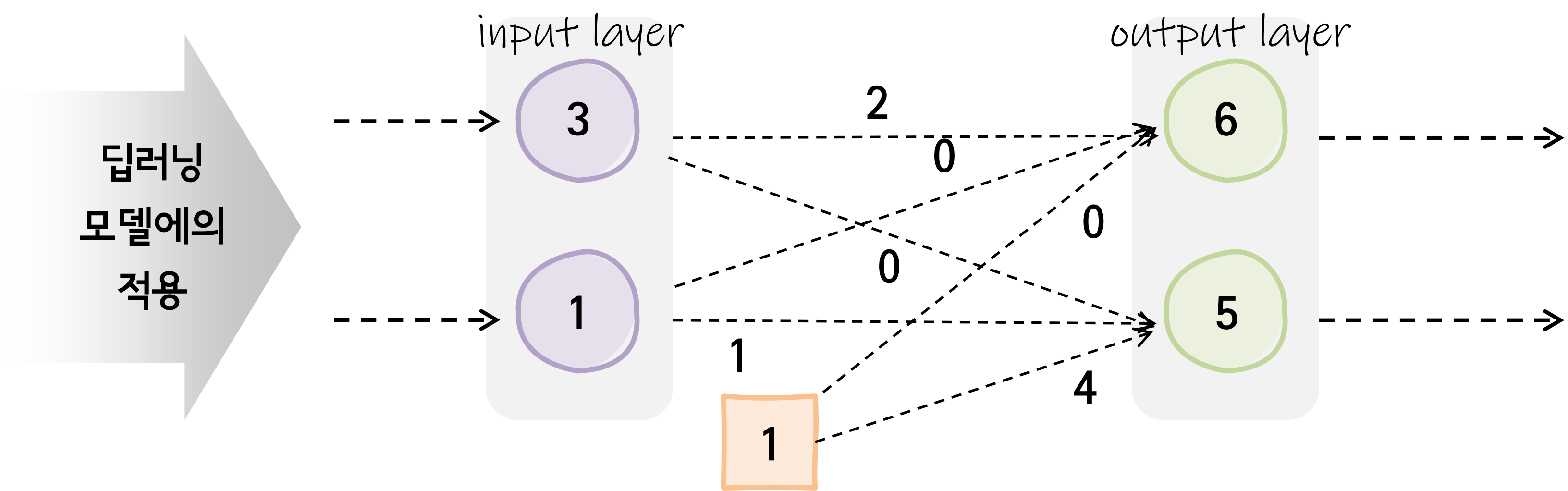
손실함수로 예측과 실제의 오차 측정

손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

Affine과 딥러닝

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

가중치 | input layer 입력값 | bias



Affine과 딥러닝

그럼 딥러닝이 곧 아핀변환이다,
이 말인가요?

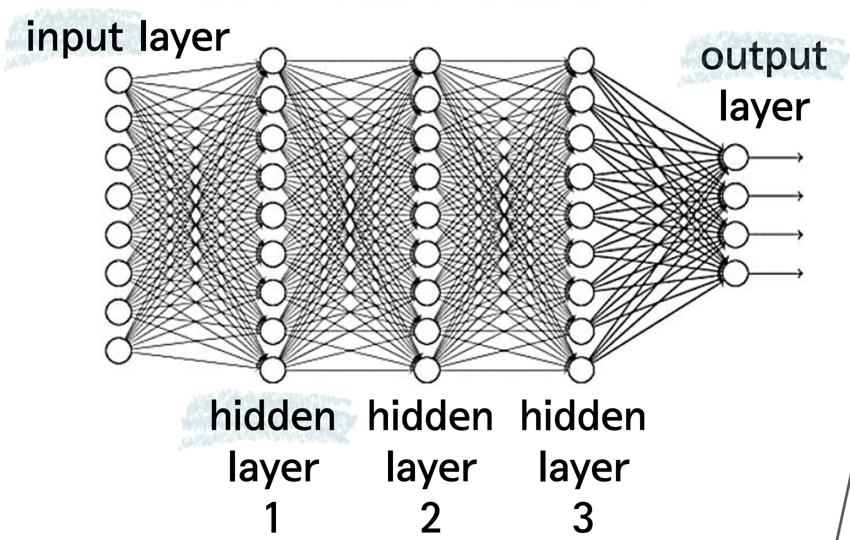
A.

input vector ▶ 가중치 행렬을 통한 선형변환 ▶ output vector

딥러닝의 학습 과정 중 **bias를 고려**하는 것을

아핀변환에서의 **평행이동**처럼 해석할 수 있다!

Affine과 딥러닝



활성화 함수로 예측값 계산

손실함수로 예측과 실제의 오차 측정

손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

sigmoid, tanh, …

***비선형* 활성화 함수를 이용하는 이유**

선형함수 $f(x) = kx$를 이용해

n번 층을 쌓음

$k^n x$

즉, **k^n을 한 번 적용**하는 것과 같아

여러 hidden layer을 쌓으며

가중치를 업데이트하는 이점이 없음

!다음주 예고!

다음주에는

☀️ 행렬식 ☀️

☀️ 공간개념 이해하기 ☀️

부분공간, 기저, Rank

☀️ 직교와 투영벡터 ☀️

선대, 회귀를 만나다

합니다!!

THANK YOU