클린업 2주차

3팀 선형대수학

황정현 고경현 김지민 반경림 전효림

INDEX

- 0. 지난주 REVIEW
 - 1. 행렬식
 - 2. 공간개념
 - 3. 투영벡터
- 4. 선대, 회귀와 만나다

지난주 REVIEW



선형대수



선형성을 바탕으로 선형변환과 그때의 공간에 대해 연구하는 대수학의 한 분야



지난주 REVIEW

선형 '변환'의 의미



Linear Transformation



DUTPUT

Input이 선형<mark>변환</mark>을 거침으로써 Output으로 나오는, 일종의 함수

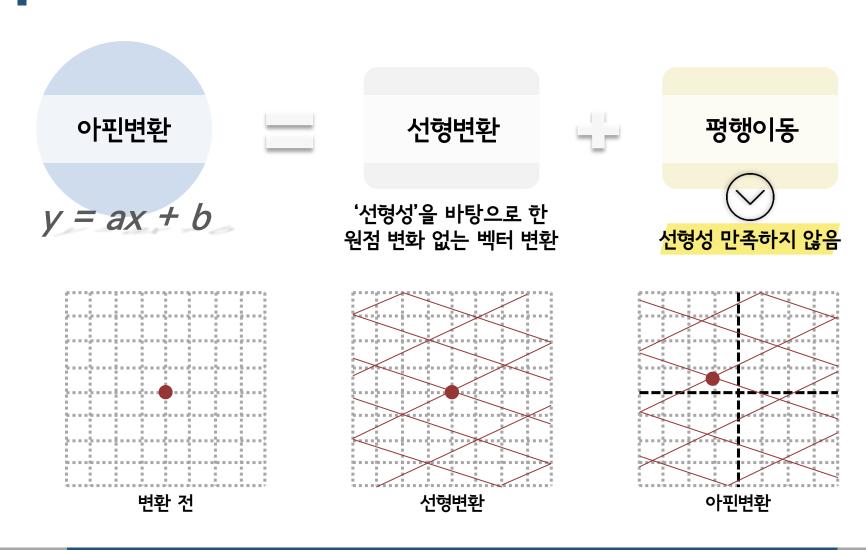
선형방정식 Ax = b를 '변환'의 관점에서 이해해보자!

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

x라는 input에 A라는 변환을 거쳐 b라는 새로운 output 반환

지난주 REVIEW

Affine transformation



1

행렬식



n x n의 정사각행렬에 스칼라를 대응시키는 일종의 함수 **det(A) | det A**

기하학적 의미

행렬식과 선형변환

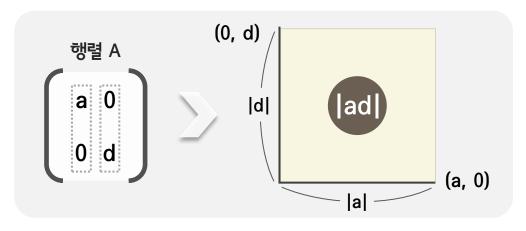
행렬식의 쓰임

행렬식

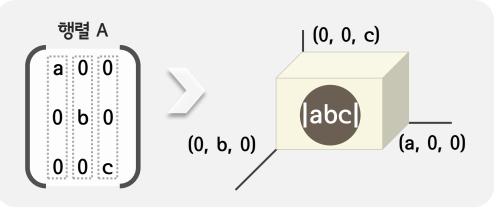
기하학적 의미

• | de+(A) | : 행렬의 열벡터로 만들어지는 공간의 크기

2 x 2 행렬 행렬의 열벡터로 만들어지는 평행사변형의 넓이



3 x 3 행렬 행렬의 열벡터로 만들어지는 직육면체의 부피



행렬식

선형변환으로의 해석

• 선형변환 전후의 넓이 관계 설명

'선형변환'의 관점에서 바라본 선형방정식 Ax = b



$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

벡터 x에 행렬 A를 곱하는 선형변환을 통해 벡터 b 만듦

input

벡터 x가 만드는 공간의 넓이 Linear Transformation

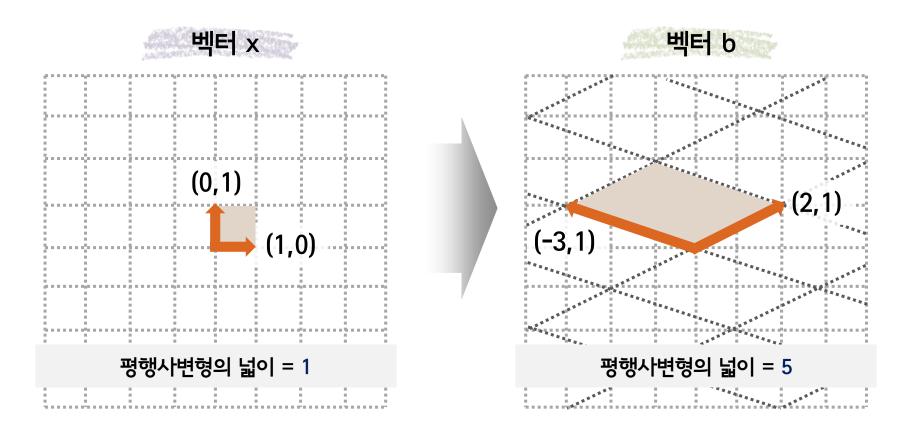
|det(A)|배 변화

output

벡터 b가 만드는 공간의 넓이

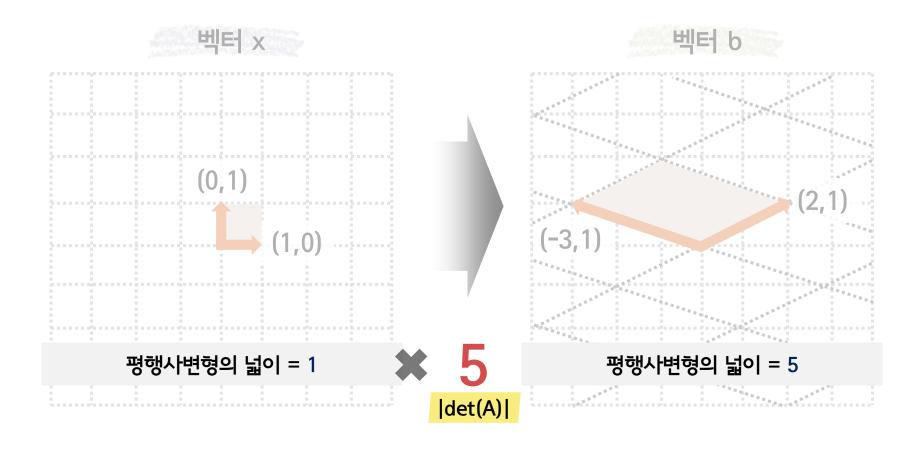
선형변환으로의 해석

• 선형변환 전후의 넓이 관계 설명



선형변환으로의 해석

• 선형변환 전후의 넓이 관계 설명



선형변환으로의 해석

• 선형변환 전후의 넓이 관계 설명



선형방정식 Ax = b에서

 (\mathbb{R}^2) 변환 후(b) 넓이 = $|\det(A)|$ · 변환 전(x) 넓이

 (\mathbb{R}^3) 변환 후(b) 부피 = $|\det(A)|$ · 변환 전(x) 부피

평행사변형의 넓이 = 1



평행사변형의 넓이 = 5

행렬식

선형변환으로의 해석



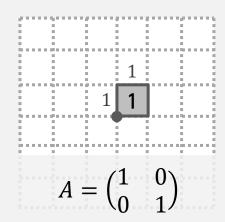
det(A)에 절닷값을 씌우는 이유는 무엇인가요?

det(A)의 부호

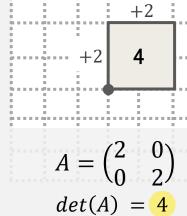


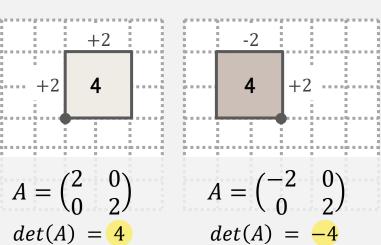
공간의 반전 여부

면적 변화는 4배로 같지만 좌우가 반전됨









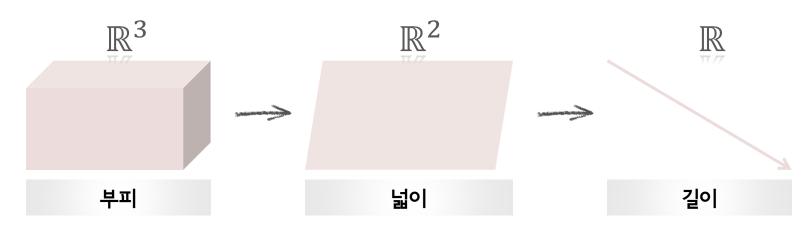
행렬식

선형변환으로의 해석



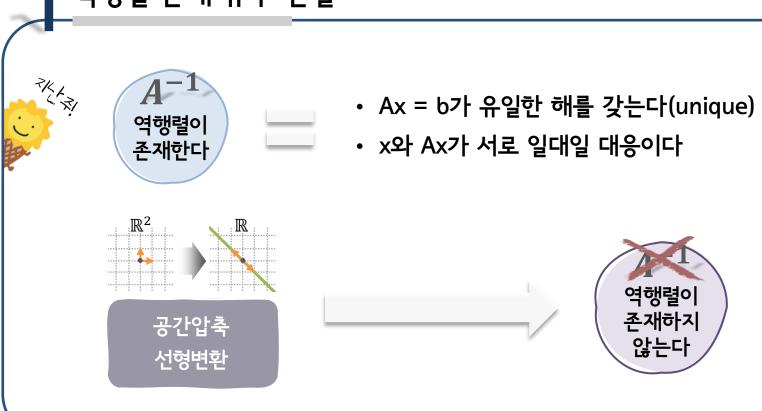
그렇다면 det(A)가 이인 것은 무엇을 뜻하나요?

선형변환을 통해 공간이 압축되었다!



차원이 바뀌면 기존 공간에서의 부피/넓이는 0이 됨

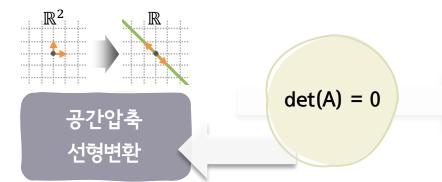
역행렬 존재 유무 판별



역행렬 존재 유무 판별



- Ax = b가 유일한 해를 갖는다(unique)
- x와 Ax가 서로 일대일 대응이다



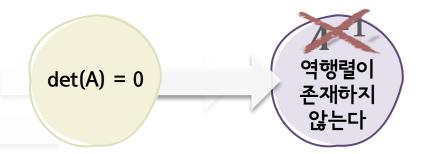
역행렬이 존재하지 않는다

역행렬 존재 유무 판별



- Ax = b가 유일한 해를 갖는다(unique)
- x와 Ax가 서로 일대일 대응이다





- Cramer's Rule로 해 구하기
 - det(A) ≠ 0일 때, 즉 A의 역행렬이 존재할 때 Cramer's Rule 활용



선형방정식 $\begin{cases} 8x + 5y = 2 \\ 2x - 4y = -10 \end{cases}$ 을 풀어보자!

$$det(A) = -32 - 10 = -42$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8 - (-50)}{-42} = -6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-80-4}{-42} = 2$$

2

공간 개념

선형부분공간

벡터공간

선형부분공간

span

column space

선형부분공간

벡터공간

선형부분공간

span

column space

- 여러 벡터들이 모여 형성한 공간 (\mathbb{R}^n)
- 벡터에 대한 합과 상수배가 연산법칙 만족

벡터의 합

상수배

$$a + b = b + a$$
 $- 교환법칙$
 $(a + b) + c = a + (b + c)$ $- 결합법칙$
 $a + 0 = a$ $- 항등원$
 $a + (-a) = 0$ $- 역원$

<mark>┃ 선형부분공</mark>간

subspace

벡터공간

선형부분공간

span

column space



• 벡터공간 안의 몇 가지 벡터 집합으로 이루는 또다른 부분 벡터공간



♡ 선형 조건 ♡



0벡터(원점)가 존재한다

선형부분공간 내 벡터에 다른 벡터를 합한 것도 선형부분공간에 존재한다 선형부분공간 내 벡터에 상수를 곱한 것도 선형부분공간에 존재한다

<mark>┃ 선형부분공</mark>간

subspace

벡터공간

선형부분공간

span

column space



• 벡터공간 안의 몇 가지 벡터 집합으로 이루는 또다른 부분 벡터공간



선형 조건 💢



0벡터(원점)가 존재한다

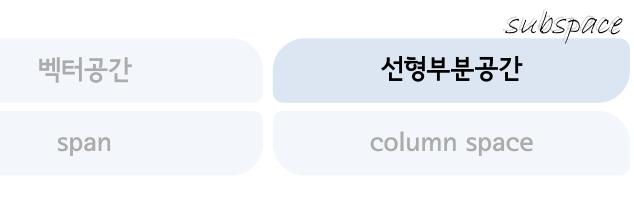


어떤 벡터에 0을 곱하면 항상 0이 되므로 반드시 원점을 포함

선형부분공간 내 벡터에 다른 벡터를 합한 것도 선형부

선형부분공간 내 벡터에 상수를 곱한 것도 선형부분공간에 존재한다

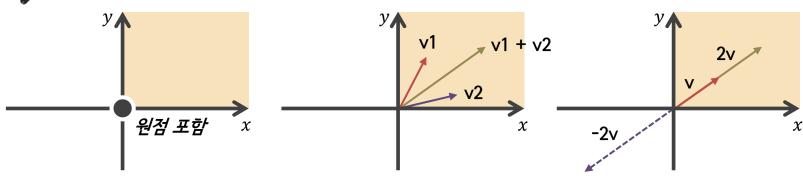
선형부분공간



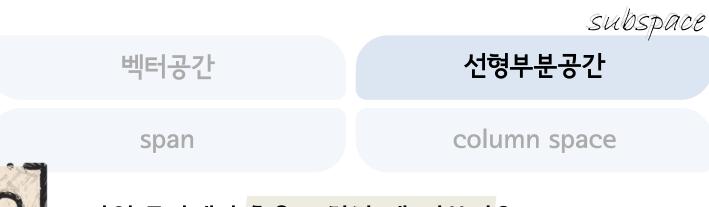


2차원 공간에서 축을 포함한 제1사분면은

선형부분공간이 될 수 있을까?



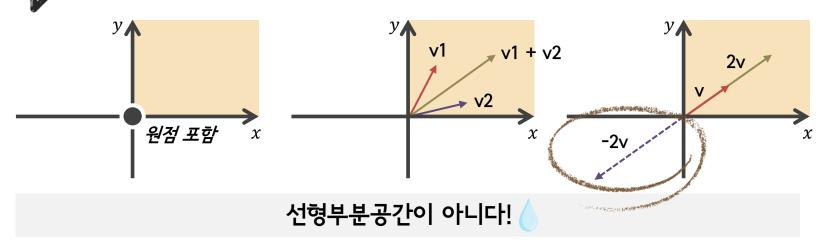
선형부분공간



Q

2차원 공간에서 축을 포함한 제1사분면은

선형부분공간이 될 수 있을까?



선형부분공간



벡터공간

선형부분공간

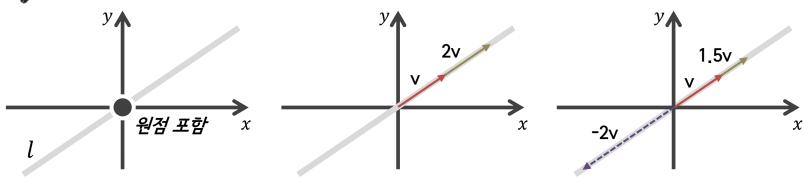
span

column space



그렇다면 2차원 공간에서의 직선 l은

선형부분공간이 될 수 있을까?



선형부분공간



벡터공간

선형부분공간

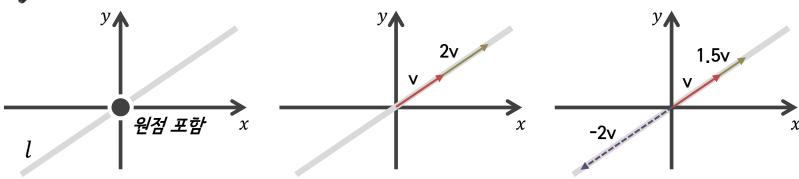
span

column space



그렇다면 2차원 공간에서의 직선 l은

선형부분공간이 될 수 있을까?



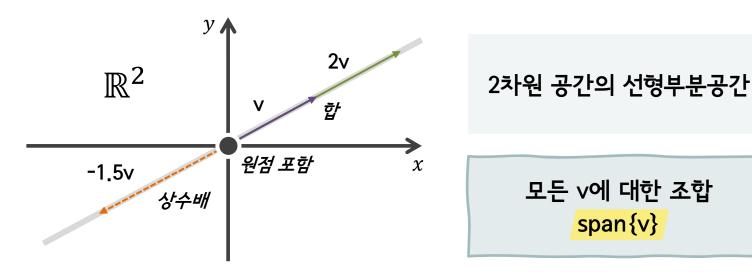
선형부분공간이다!



선형부분공간

벡터공간 선형부분공간 span column space

• 벡터 a1, a2, …, an의 모든 선형결합이 속하는 선형부분공간



선형부분공간

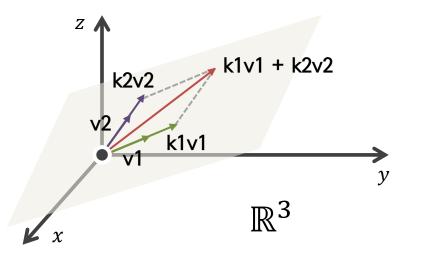
벡터공간

선형부분공간

span

column space

• 벡터 a1, a2, …, an의 모든 선형결합이 속하는 선형부분공간



v1과 v2의 합과 상수배로 만든 모든 조합

span{v1, v2}

3차원 공간에서 원점을 지나는 평면

선형부분공간

벡터공간

선형부분공간

span

column space

span은 사용하는 벡터에 따라

모든 공간을 채움

직선, 평면 등의 형태인 선형부분공간



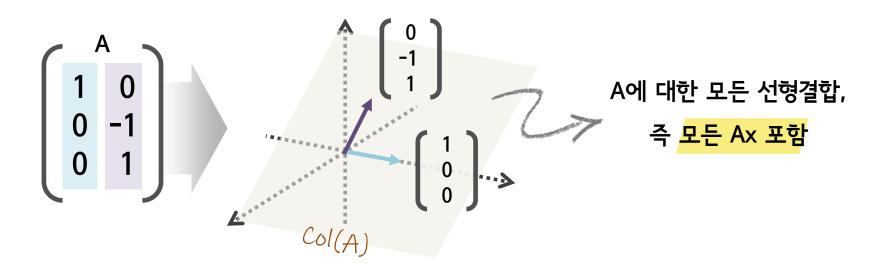
특정 공간의 특정 형태

벡터들의 가능한 선형결합의 모음을 한 공간에 몰아넣은 것

선형부분공간

벡터공간 선형부분공간 column space span

- 행렬 A의 열벡터의 연산으로 만드는 공간 행렬 A의 <mark>열벡터의</mark> span



선형부분공간

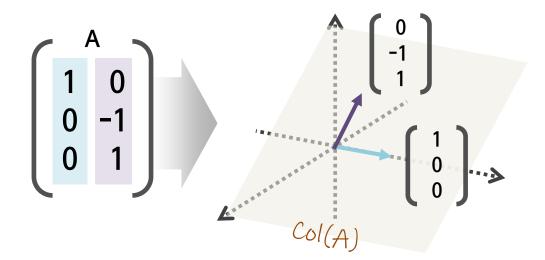
벡터공간

선형부분공간

span

column space

- 행렬 A의 열벡터의 연산으로 만드는 공간
- 행렬 A의 열벡터의 span



Ax = b의 해가 있다

 col(A)가 모든 Ax를 포함한다

 벡터 b가 col(A)에 있다

 벡터 b가 span{a}에 있다

선형부분공간

벡터공간

선형부분공간

span

column space

• 행렬 A의 열벡터의 연산으로 만드는 공간 • 행렬 A의 <mark>열벡터의 span</mark>

ellel

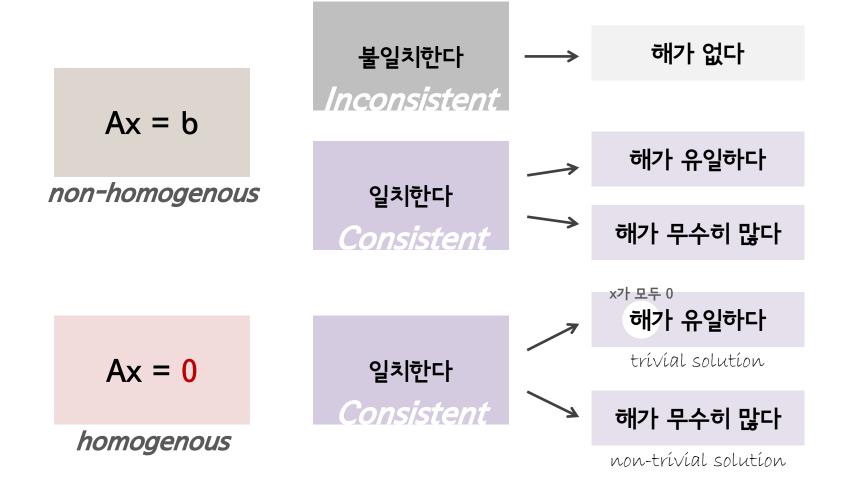
Ax = b가 모든 b에 대해 해를 갖는다

모든 b에 대한 col(A)가 존재한다 col(A)가 모든 b를 표현한다 $\operatorname{col}(A)$ 가 <mark>벡터공간(\mathbb{R}^n)</mark>이다

Ax = b의 해가 있다

col(A)가 모든 Ax를 포함한다 벡터 b가 col(A)에 있다 벡터 b가 span{a}에 있다

Null space



Null space



해가 없다

Ax = 0을 만족하는 해 x가 이루는 공간, 즉 homogenous한 방정식의 해의 집합

Ax = 0

homogenous

일치한다

Consistent

x가 모두 0 **해가 유일하다**

trivial solution

해가 무수히 많다

non-trivial solution

Null space

방정식의 해벡터가 \mathbb{R}^n



그것의 null space는 \mathbb{R}^n 의 선형부분공간

선형독립 independence

• $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ 에서 c가 모두 0인 경우를 제외한 어떠한 c_i 의 조합으로도 식이 성립되지 않는 경우

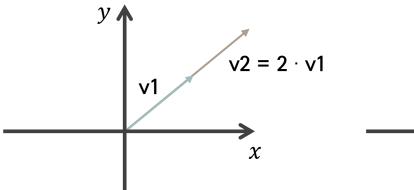
$$A \times = 0$$

• 선형방정식을 만족하는 벡터 x가 오직 0벡터뿐인 경우

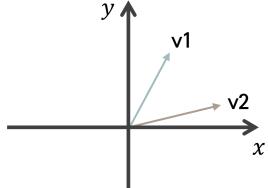
• Null space에 0벡터만 있는 경우

선형독립 independence

c1v1 + c2v2 = 0



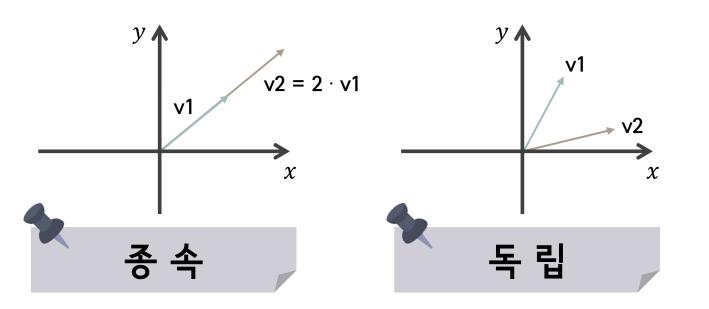
0벡터가 아닌 벡터에 의해 식이 성립됨



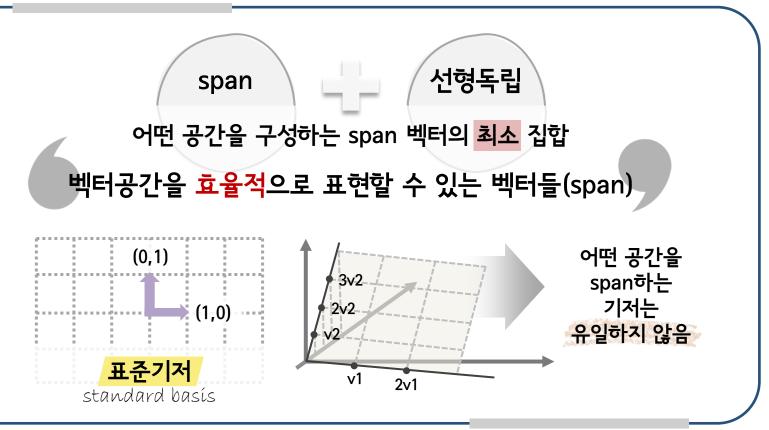
c가 모두 0인 경우를 제외하고는 두 벡터를 이용하여 0을 만들 수 없음



$$c1v1 + c2v2 = 0$$



기저 Basis



3 Null space의 기저

• 자유변수를 상수로 하는 선형조합의 벡터

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

행렬 A를 RREF로 정리 후 해와 기저를 구해보자!

자유변수



$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x2 - 2x4 \\ x2 \\ x4 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **3** Null space의 기저
 - 자유변수를 상수로 하는 선형조합의 벡터

null space의 기저 개수



자유변수 개수



자유변수

n - (pivot 개수)

$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x2 - 2x4 \\ x2 \\ x4 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Column space의 기저

• RREF의 pivot이 위치하는 원래 행렬의 열

column space의 기저 개수



pivot의 개수

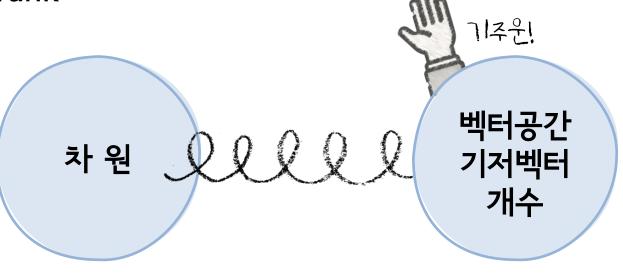
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

공간개념





	Null space	Column space
dímension	자유변수 개수 pivot이 없는 열 개수	pivot 개수
		rank(A)

3

투영벡터

벡터의 크기와 거리

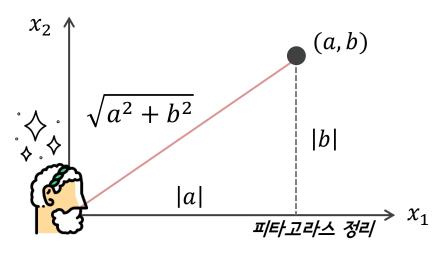
 \mathbb{R}^n 의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ 에 대하여,

벡터의 크기

norm | length | ||x||

$$\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2}$$

: 점 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 와 원점 사이 거리



점 P와 Q 사이의 거리

$$||x - y||$$

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

내적 (inner product(dot product))

$$\mathbb{R}^n$$
의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n)$ 에 대하여,

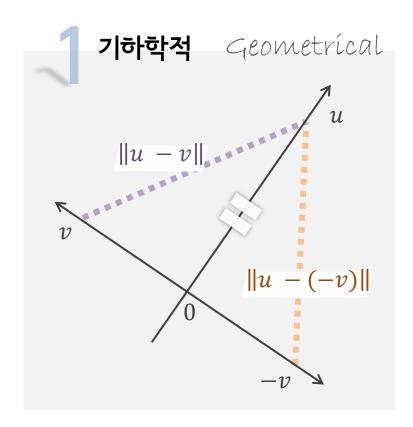
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

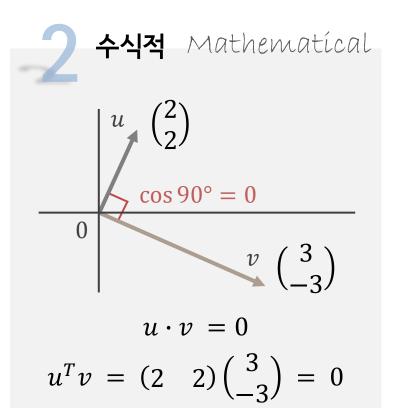
$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x^T \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \times 19 \end{cases}$$

원소의 개수가 같은 x, y

직교 (orthogonality)

• 벡터가 서로 수직으로 만나는 경우





이들의 span으로

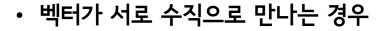
만들어지는

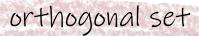
벡터공간의

basis

 u_2

직교 (orthogonality)

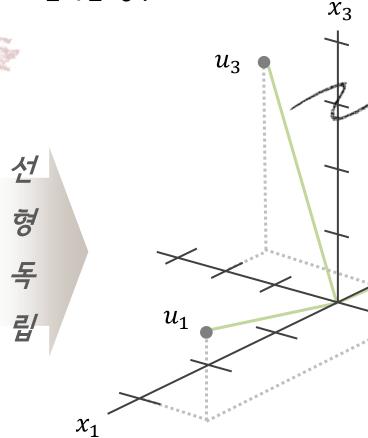




$$u_1 = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

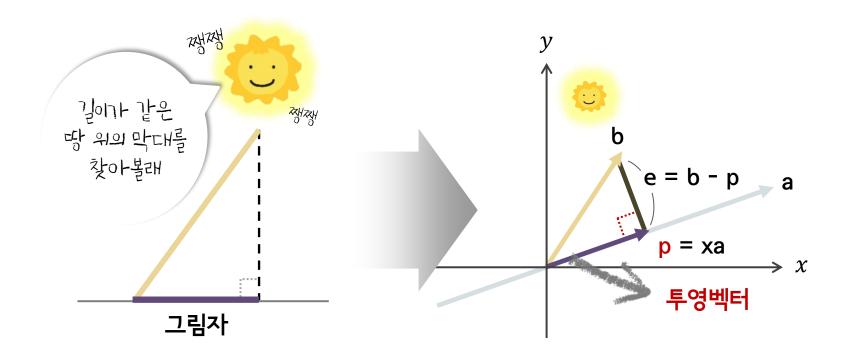
$$u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$



투영벡터 (Projection)



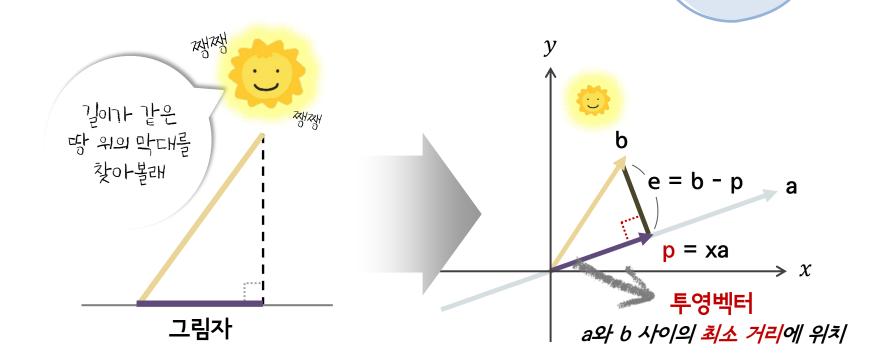
하나의 벡터를 다른 벡터로 옮겨서 표현



투영벡터

투영벡터 (Projection)

벡터 b를 직선 a 위의 벡터로 매핑 벡터 b의 직선 공간으로의 공간압축 공간압축 선형변환



투영벡터

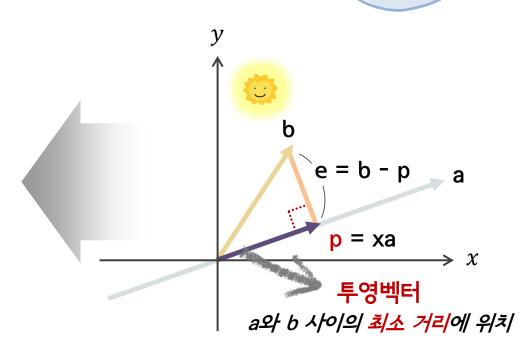
투영벡터 (Projection)

벡터 b를 직선 a 위의 벡터로 매핑 벡터 b의 직선 공간으로의 공간압축 공간압축 선형변환



벡터 b의
span{a} 상의
정사영
' Projab '

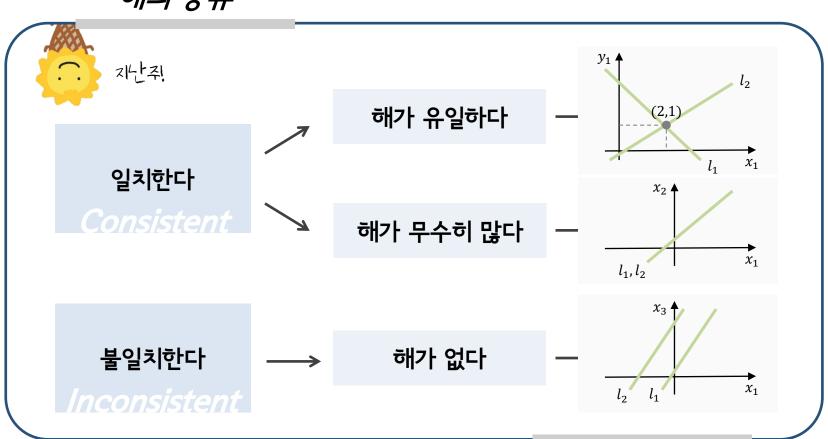
실제값(b)과 예측값(p)의 차이인 e와 벡터 a가 직교함을 이용하여 계산



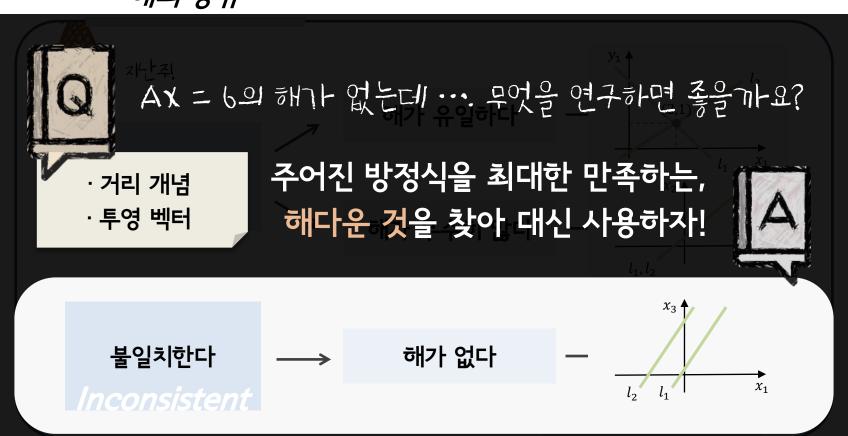
4

선대, 회귀를 만나다

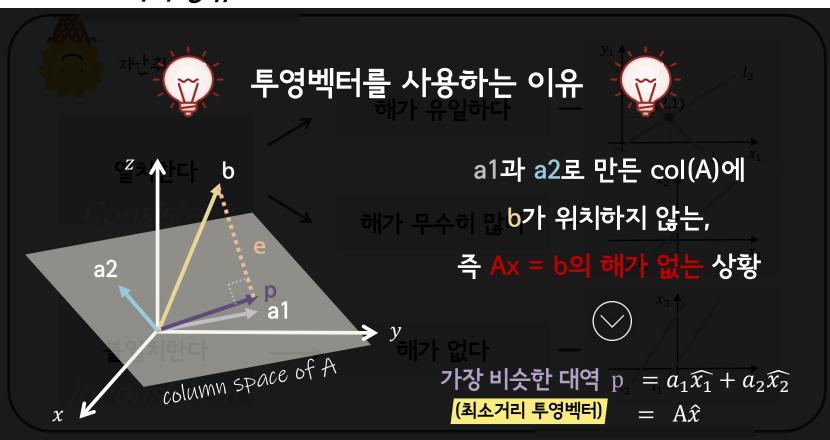
해의 종류



해의 종류



해의 종류



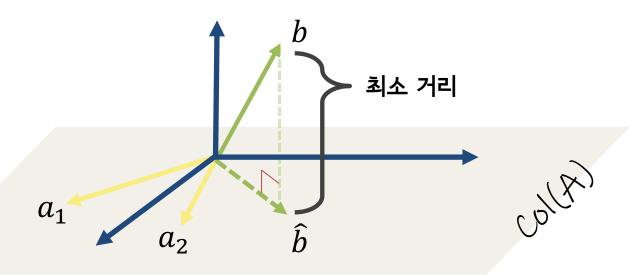
선대, 회귀를 만나다

투영벡터와 Least Square Method

최소자승법

Least Square Method

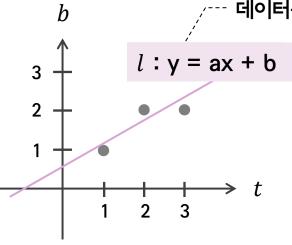
 $\mathbf{A}x=b$ 의 해가 없는 경우 최소 거리를 바탕으로 가장 근접한 $\mathbf{A}\hat{x}=\hat{b}$ 의 해 \hat{x} 를 구하는 것



최소자승법

Least Square Method

 $\mathbf{A}x=b$ 의 해가 없는 경우 최소 거리를 바탕으로 가장 근접한 $\mathbf{A}\hat{x}=\hat{b}$ 의 해 \hat{x} 를 구하는 것



데이터를 최대한 만족하는 하나의 line에 대한 식 탐색

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

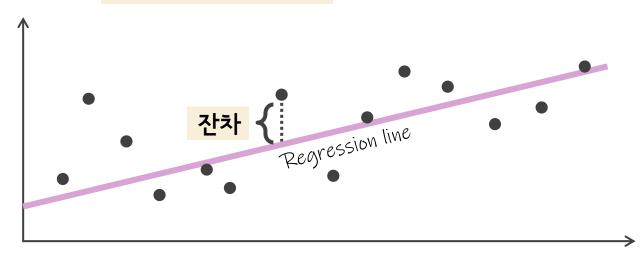
선형회귀분석



독립변수와 종속변수 간의 관계를 가장 잘 설명하는 직선을 찾는 것이 목표

실제값(y)과 예측값(\hat{y})이 비슷하도록,

즉 $y - \hat{y}$ (잔차, residual)의 제곱값을 최소화하도록!



선형회귀분석

회귀식 $y = \beta 0 + \beta 1x$ 형태 바꾸기

Least Square Method 적용해 간접해 구하기

$$\hat{\beta} = \mathbf{y}$$
 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$ XB와 y의 최소 거리 고려

선형회귀분석

1 회귀식 $y = \beta 0 + \beta 1x$ 형태 바꾸기



회귀분석에서는 Least Square Method를 통해 회귀식 $X\hat{\beta} = \hat{y}$ 의 간접해 \hat{y} (proj y)를 구함으로써 실제값(y)과 예측값(\hat{y} , $X\hat{\beta}$)의 거리(residual)를 최소화하는 회귀식을 구한다

XD와 Y의 최소 기디 끄덕

가중회귀모델

$$y = X\beta + \varepsilon$$

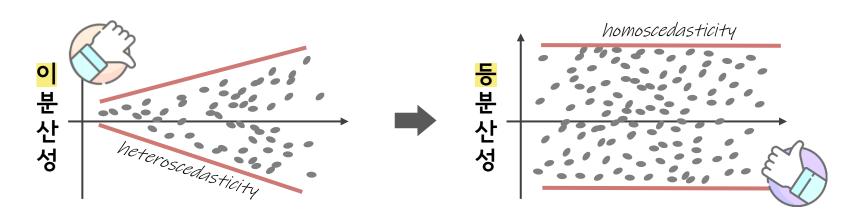
residual



등분산성

$$E(\varepsilon) = 0$$
, $V(\varepsilon) = \sigma^2$

오차항은 독립변수(X)와 무관하게 골고루 분포한다



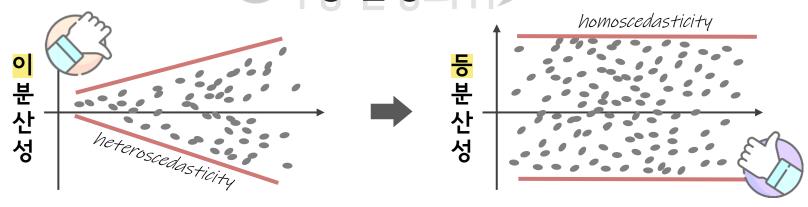
가중회귀모델

$$y = X\beta + \varepsilon$$

작은 분산에 가중치를 두어

등분산성을 만족하게끔 처리한 후 회귀분석 진행

가중선형회귀



가중회귀모델

$$\begin{pmatrix} w_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{1} \\ 1 & x_{2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta 0 \\ \beta 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ \vdots \\ y_{n} \end{pmatrix}$$

$$W \qquad \qquad X \qquad \beta \qquad \qquad W \qquad \qquad y$$

양변에 가중치를 곱한 뒤 Least Square Method를 적용해 베타계수 추정

$$\hat{\beta} = ((WX)^T WX)^{-1} (WX)^T Wy$$

기존 선형회귀 모형



가중치 행렬 ₩

선대, 회귀를 만나다

가중회귀모델

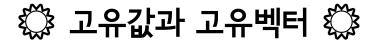
	단순선형회귀	가 중 회귀
SSE	$\ y - \hat{y}\ ^2 = \ y - X\hat{\beta}\ ^2$	$\ \mathbf{W}y - \mathbf{W}\hat{y}\ ^2 = \ \mathbf{W}y - \mathbf{W}X\hat{\beta}\ ^2$
β의 해	$X^T X \hat{\beta} = X^T y$	$(\mathbf{W}X)^T \mathbf{W}X\hat{\beta} = (\mathbf{W}X)^T \mathbf{W}y$

기존 선형회귀 모형

가중치 행렬 🕢

!다음주 예고!

다음주에는













하고 싶습니다!!

THANK YOU