Τεχνητή Νοημοσύνη-Project 4

Κυριάκος Λάμπρος Κιουράνας

ΑΜ: 1115201900238

1)

(a) Η πρόταση $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ είναι έγκυρη

(i) Απόδειξη με Πίνακα Αληθείας

Θυμόμαστε:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A \equiv B \vee \neg A \quad (\text{εναλλακτικά: } \neg(\neg B) \vee \neg A = B \vee \neg A).$$

Η αρχική πρόταση είναι:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Θα φτιάξουμε πίνακα αληθείας για A, B. Για κάθε συνδυασμό, υπολογίζουμε $(A \Rightarrow B)$ και $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ και μετά την τελική συνεπαγωγή.

A	B	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T (διότι $F \to F$ είναι T)
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Υπενθύμιση: $X \to Y$ είναι ψευδές μόνο όταν X είναι T και Y είναι F.

Στη 2η γραμμή, $A \to B = F$, $\neg B \to \neg A = F$, άρα «$F \Rightarrow F$» βγαίνει T (εφόσον «ψευδές $\Rightarrow$ ψευδές» είναι αληθές στην κλασική λογική).

Σε όλες τις γραμμές, η τελευταία στήλη είναι αληθής. Επομένως η πρόταση είναι ταυτολογία $\Rightarrow$ έγκυρη.

(ii) Απόδειξη με Resolution

Θέλουμε να δείξουμε ότι $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ είναι έγκυρο, δηλ. $\models$ κτλ. Ισοδύναμα δείχνουμε ότι η άρνησή του είναι μη ικανοποιήσιμη:

$$\neg\big[(\neg A \vee B) \Rightarrow (B \vee \neg A)\big].$$

Αρχικά αντικαθιστούμε $(X \Rightarrow Y)$ από $\neg X \vee Y$. Άρα η πρόταση μέσα είναι:

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow (B \vee \neg A).$$

Που γίνεται:

$$\neg(\neg A \vee B) \vee (B \vee \neg A).$$

Οπότε η όλη έκφραση που θέλουμε να δείξουμε μη ικανοποιήσιμη (η άρνηση του αρχικού) είναι:

$$\neg\big[\neg(\neg A \lor B) \lor (B \lor \neg A)\big].$$

Με De Morgan κ.λπ., γίνεται:

$$(\neg A \lor B) \land \neg(B \lor \neg A).$$

Ξανά $\neg(B \lor \neg A) \equiv \neg B \land A$. Άρα η άρνηση ισοδυναμεί με:

$$(\neg A \lor B) \land (\neg B) \land (A).$$

Φέρνουμε σε σύνολο ρητρών (CNF):

1. $\neg A \lor B$
2. $\neg B$
3. A

Τώρα εφαρμόζουμε resolution:

- Από (3) A και (1) $\neg A \lor B$ βγάζουμε B.
- Τώρα έχουμε (2) $\neg B$ και το συμπέρασμα B. Κάνουμε resolution και βγάζουμε κενή ρήτρα.

Κενή ρήτρα $\Rightarrow$ αντίφαση $\Rightarrow$ καμία ερμηνεία δε μπορεί να ικανοποιήσει την άρνηση. Συνεπώς η αρχική πρόταση είναι έγκυρη (ταυτολογία).

(b) Από $A \Rightarrow B$ συνεπάγεται $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$

Λέμε: $\{A \to B\} \models (C \to A) \to (C \to B)$.

(i) Απόδειξη με Πίνακες Αληθείας

Θέλουμε να δείξουμε ότι σε κάθε διάταξη τιμών, εάν $A \to B$ είναι αληθές, τότε το $(C \to A) \to (C \to B)$ είναι επίσης αληθές. Πιο σύντομα, αν φτιάξουμε κοινό πίνακα για A, B, C και βάλουμε μια στήλη «$\alpha = (A \to B)$» και μια στήλη «$\beta = (C \to A) \to (C \to B)$», και ύστερα ελέγξουμε μόνο τις γραμμές όπου $\alpha = T$, θα δούμε ότι στις ίδιες γραμμές $\beta = T$.

Αν κανείς το αναπτύξει πλήρως, είναι 8 γραμμές. Οποιαδήποτε γραμμή έχει $\neg(\alpha)$ => δεν μας ενδιαφέρει, γιατί όταν $\alpha =$ false η υπόθεση $A \to B$ δεν κρατά. Σε όσες $\alpha = true$, παρατηρείται $\beta = true$. Άρα indeed $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$.

(ii) Απόδειξη με Resolution

Βήματα: 1. Μεταφράζουμε $A \Rightarrow B$ σε CNF: $\neg A \lor B$. Αυτό είναι η υπόθεση. 2. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι από αυτήν την υπόθεση παράγεται $(C \to A) \to (C \to B)$. Δηλ. ότι η άρνηση της τελικής πρότασης μαζί με την υπόθεση οδηγεί σε αντίφαση.

Γράφουμε:

$$\neg\big[(C \to A) \to (C \to B)\big].$$

Η συνέχεια ακολουθεί παρόμοια λογική με το προηγούμενο παράδειγμα, φέρνοντας τη φόρμουλα σε CNF και εφαρμόζοντας resolution. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η κενή ρήτρα, που δείχνει ότι το $(C \to A) \to (C \to B)$ είναι λογικό επακόλουθο της υπόθεσης $A \Rightarrow B$.

(c) Η πρόταση $\neg\big((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\big)$ είναι μη ικανοποιήσιμη

(i) Απόδειξη με Πίνακα Αληθείας

Οπως στην (a), βλέπουμε ότι:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

είναι η λεγόμενη «αντιστροφή» της contrapositive ισοδυναμίας. Στην πραγματικότητα, $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$. Άρα $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ είναι πάλι αληθές για όλους τους συνδυασμούς A, B. Ο πίνακας αληθείας μοιάζει πολύ με της (a). Σε όλες τις γραμμές βγαίνει αληθής $\Rightarrow$ η άρνησή του είναι μη ικανοποιήσιμη.

(ii) Απόδειξη με Resolution

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην (a). Πράγματι, αν γράψουμε την άρνηση:

$$\neg\big[(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\big],$$

και το μετατρέψουμε σε CNF, θα πάρουμε ένα σύνολο ρητρών που οδηγεί σε αντίφαση.

Συνεπώς πράγματι $\neg\big((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\big)$ είναι μη ικανοποιήσιμη, οπότε $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ είναι έγκυρη.

2)

Γενικές Συμβάσεις – Λεξιλόγιο

- **Student(x):** ο x είναι φοιτητής.
- **KnowsPython(x):** ο x είναι γνώστης της γλώσσας Python.
- **CanPassAI(x):** ο x μπορεί να περάσει το μάθημα Τεχνητής Νοημοσύνης.
- **TakesAI(x):** ο x παρακολουθεί (παίρνει) το μάθημα Τεχνητής Νοημοσύνης.
- **SubmitsHW(x,h):** ο x έχει παραδώσει την εργασία h.
- **AllHW(x,c):** ο x έχει κάνει όλες τις εργασίες του μαθήματος c.
- **Passes(x,c):** ο x περνάει το μάθημα c.
- **Prof(x):** ο x είναι καθηγητής.
- **Likes(x,y):** ο x συμπαθεί τον y.
- **Friend(x,y):** ο x είναι φίλος με τον y.
- **GreekPolitician(x):** ο x είναι Ελληνας πολιτικός.
- **Party(x,p):** ο x ανήκει στο κόμμα p.
- **DifferentParty(p1,p2):** τα κόμματα p_1 και p_2 είναι διαφορετικά.

- **SaysSmartJoke(x, joke):** ο x λέει έξυπνο αστείο $joke$.
- **Drunk(x):** ο x είναι μεθυσμένος.
- **Hates(x,y):** ο x αντιπαθεί τον y.
- **Fool(x,y,t):** ο x κοροϊδεύει τον y τη στιγμή/φορά t.
- **Barber(x):** ο x είναι κουρέας.
- **Shaves(x,y):** ο x ξυρίζει τον y.
- **ShaveOneself(x):** ο x ξυρίζεται μόνος του.
- **Men(x):** ο x είναι άνδρας.
- **Woman(x):** η x είναι γυναίκα.
- **AreSisters(w1,w2):** οι γυναίκες w_1 και w_2 είναι αδερφές.
- **Married(x,y):** ο x είναι παντρεμένος με την/τον y.
- **Subset(A,B):** το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B.
- **ElementOf(a,A):** το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο A.
- **Polygon(x):** το x είναι πολύγωνο.
- **SideOf(x,s):** το s είναι πλευρά του x.
- **IsSegment(s):** το s είναι ευθύγραμμο τμήμα.
- **RightAngle(a):** η γωνία a είναι ορθή.
- **AngleOf(x,a):** η γωνία a ανήκει στο σχήμα x.
- **EqualSegments(s1,s2):** τα ευθύγραμμα τμήματα s_1 και s_2 έχουν ίσο μήκος.

Προτάσεις (a)–(o)

(a)

«Όποιος φοιτητής είναι γνώστης της γλώσσας Python μπορεί να περάσει το μάθημα της Τεχνητής Νοημοσύνης.»

$$\forall x \left[\big(Student(x) \ \wedge \ KnowsPython(x)\big) \ \rightarrow \ CanPassAI(x) \right].$$

(b)

«Κάθε φοιτητής που παίρνει Τεχνητή Νοημοσύνη, παραδίδει τουλάχιστον μία εργασία.»

$$\forall x \left[(Student(x) \ \wedge \ TakesAI(x)) \ \rightarrow \ \exists h \, SubmitsHW(x,h) \right].$$

(c)

«Υπάρχουν φοιτητές που παίρνουν Τεχνητή Νοημοσύνη και δεν έχουν παραδώσει καμία εργασία.»

$$\exists x \left[Student(x) \wedge TakesAI(x) \wedge \forall h \neg SubmitsHW(x,h) \right].$$

(d)

«Αν ένας φοιτητής κάνει όλες τις εργασίες ενός μαθήματος, θα το περάσει.»

$$\forall x \, \forall c \left[(Student(x) \wedge AllHW(x,c)) \rightarrow Passes(x,c) \right].$$

(e)

«Υπάρχει ένας καθηγητής που τον συμπαθούν όλοι οι φοιτητές.»

$$\exists p \left[Prof(p) \wedge \forall s \left(Student(s) \rightarrow Likes(s,p) \right) \right].$$

(f)

«Κάθε φοιτητής που έχει ένα φίλο ο οποίος έχει κάνει όλες τις εργασίες της Τεχνητής Νοημοσύνης, έχει και ένα φίλο που δεν έχει κάνει καμία εργασία.»

$$\forall x \left[\left(Student(x) \wedge \exists y \, (Friend(x,y) \wedge AllHW(y,\mathrm{AI})) \right) \rightarrow \exists z \, (Friend(x,z) \wedge \forall h \neg SubmitsHW(z,h)) \right].$$

(g)

$$\forall x \, \forall y \left[\left(GreekPolitician(x) \wedge GreekPolitician(y) \wedge DifferentParty(p_1,p_2) \wedge Party(x,p_1) \wedge Party(y,p_2) \wedge (x \neq y) \right) \rightarrow \neg Likes(x,y) \right].$$

(h)

«Κάποιοι άνθρωποι λένε έξυπνα αστεία μόνο όταν είναι μεθυσμένοι.»

$$\exists x \left[Person(x) \wedge \forall j \, (SaysSmartJoke(x,j) \rightarrow Drunk(x)) \right].$$

(i)

«Ο Γιάννης αντιπαθεί οποιονδήποτε αντιπαθεί τον εαυτό του.»

$$\forall u \left[Hates(u,u) \rightarrow Hates(\text{Giannis},u) \right].$$

(j)

«Οι πολιτικοί μπορούν να κοροϊδεύουν κάποιους ψηφοφόρους όλες τις φορές και όλους τους ψηφοφόρους μερικές φορές, αλλά δεν μπορούν να κοροϊδεύουν όλους τους ψηφοφόρους όλες τις φορές.»

1. $\forall x \left[Politician(x) \rightarrow \exists y (Voter(y) \wedge \forall t \, Fool(x,y,t)) \right].$
2. $\forall x \left[Politician(x) \rightarrow \exists t \, \forall y \, (Voter(y) \rightarrow Fool(x,y,t)) \right].$
3. $\neg \exists x \left[Politician(x) \wedge \forall y \, (Voter(y) \rightarrow \forall t \, Fool(x,y,t)) \right].$

(k)

«Δεν υπάρχει κουρέας που ξυρίζει ακριβώς αυτούς τους ανθρώπους που ξυρίζουν αυτούς που ξυρίζονται μόνοι τους.»

$$\neg\exists b\left[Barber(b)\,\wedge\,\forall p\left(Shaves(b,p)\leftrightarrow\left[\exists q\,(ShaveOneself(q))\wedge Shaves(p,q)\right]\right)\right].$$

(l)

«Δύο άνδρες λέγονται μπατζανάκηδες αν οι γυναίκες τους είναι αδελφές.»

$$\forall m_1\,\forall m_2\left[CoBrothersInLaw(m_1,m_2)\leftrightarrow\left(Men(m_1)\wedge Men(m_2)\wedge\exists w_1\,\exists w_2\,[Married(m_1,w_1)\wedge Married(m_2,w_2)\wedge AreSisters(w_1,w_2)]\right)\right].$$

(m)

«Ενα σύνολο είναι υποσύνολο κάποιου άλλου συνόλου αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι και στοιχείο του δεύτερου.»

$$\forall A\,\forall B\left[Subset(A,B)\leftrightarrow\left(\forall x\,[ElementOf(x,A)\rightarrow ElementOf(x,B)]\right)\right].$$

(n)

«Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ένα πολύγωνο που έχει τέσσερεις πλευρές που είναι ευθύγραμμα τμήματα και τέσσερεις ορθές γωνίες.»

$$\forall x\left[Rectangle(x)\leftrightarrow\left(Polygon(x)\wedge(\exists s_1,s_2,s_3,s_4\text{:όλα διακριτά}, \forall s\,[SideOf(x,s)\rightarrow(s=s_1\vee s=s_2\vee s=s_3\vee s=s_4)], \forall i\,IsSegment(s_i))\right.\right.$$
$$\left.\left.\wedge\exists a_1,a_2,a_3,a_4\text{:(4 διακριτές γωνίες)}\ldots\wedge\forall i\,RightAngle(a_i)\right)\right].$$

(o)

«Τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο και οι τέσσερεις πλευρές είναι ίσες.»

$$\forall x\left[Square(x)\leftrightarrow\left(Rectangle(x)\wedge\exists s_1,s_2,s_3,s_4\text{:(4 διακριτά segments)}, \forall i,j\in\{1,2,3,4\}\text{: }EqualSegments(s_i,s_j)\wedge\forall s\,[SideOf(x,s)\rightarrow\right.\right.$$
$$\left.\left.(s=s_1\vee s=s_2\vee s=s_3\vee s=s_4)]\right)\right].$$

3)

Ορισμός της Ερμηνείας ΙΙ

(α) Πεδίο Ορισμού (Domain)

Εστω το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}=\{p_1,p_2\}$, όπου θεωρούμε ότι:

- p_1: αναπαριστά τον άνδρα της σκηνής.
- p_2: αναπαριστά τη γυναίκα της σκηνής.

(β) Ερμηνεία των Κατηγορημάτων

1. $Man(x)$:
   - $Man(p_1) =$ true (ο p_1 είναι ο άνδρας).
   - $Man(p_2) =$ false (η p_2 δεν είναι άνδρας).
2. $Woman(x)$:
   - $Woman(p_1) =$ false.
   - $Woman(p_2) =$ true (η p_2 είναι η γυναίκα).
3. $Asleep(x)$:
   - $Asleep(p_1) =$ true (υποθέτουμε ότι ο άνδρας κοιμάται στην εικόνα).
   - $Asleep(p_2) =$ false (η γυναίκα είναι ξύπνια).

Οποιοδήποτε άλλο κατηγόρημα ($Man, Woman, Asleep$) σε άλλο στοιχείο της $\mathcal{D}$ δεν υπάρχει, γιατί το $\mathcal{D}$ έχει ακριβώς τα δύο άτομα $\{p_1, p_2\}$.

Ελεγχος Ικανοποίησης των ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

(α) $\phi_1 = \exists x[Man(x) \ \wedge \ Asleep(x)]$

Λεκτικά: «Υπάρχει κάποιος άνδρας που κοιμάται.»

- Μέσα στην ερμηνεία II, κοιτάμε τα p_1, p_2.
- Για p_1: $Man(p_1) =$ true, $Asleep(p_1) =$ true. Άρα $Man \wedge Asleep$ βγαίνει true.
- Συνεπώς υπάρχει τέτοιος x (συγκεκριμένα $x = p_1$) για τον οποίο $Man(x) \wedge Asleep(x)$ ισχύει.

Συμπέρασμα: ϕ_1 είναι αληθής στο II.

(β) $\phi_2 = \forall x[Man(x) \vee Woman(x)]$

Λεκτικά: «Κάθε άτομο είναι είτε άνδρας είτε γυναίκα.»

- Ελέγχουμε κάθε στοιχείο του domain:
  - $p_1 : Man(p_1) \vee Woman(p_1) \Rightarrow$ true $\vee$ false $=$ true.
  - $p_2 : Man(p_2) \vee Woman(p_2) \Rightarrow$ false $\vee$ true $=$ true.
- Για όλα τα $x \in \{p_1, p_2\}$, η έκφραση βγαίνει αληθής $\forall x, \phi_2$ ικανοποιείται.

Συμπέρασμα: ϕ_2 είναι επίσης αληθής στο II.

(γ) $\phi_3 = \exists x[Woman(x)\ \wedge\ Asleep(x)]$

Λεκτικά: «Υπάρχει κάποια γυναίκα που κοιμάται.»

- Εξετάζουμε πάλι: p_2 είναι η μοναδική γυναίκα. Αλλά $Asleep(p_2) =$ false.
- Άρα $(Woman(p_2) \wedge Asleep(p_2)) \equiv$ (true $\wedge$ false) $=$ false.
- Ο p_1 δεν είναι καν γυναίκα, οπότε απορρίπτεται ούτως ή άλλως.
- Δεν υπάρχει x να κάνει $Woman(x) \wedge Asleep(x)$ αληθές.

Συμπέρασμα: ϕ_3 είναι ψευδής στην ερμηνεία II.

4)

Μετάφραση σε Λογική Πρώτης Τάξης

Εστω:

- $R(x)$: «x είναι τριαντάφυλλο» (rose).
- $F(x)$: «x είναι λουλούδι» (flower).
- $Q(x)$: «x μαραίνεται γρήγορα» (fades quickly).

Προτάσεις:

1. «All roses are flowers.»
$$\forall x\,[R(x) \to F(x)].$$
2. «Some flowers fade quickly.»
$$\exists x\,[F(x) \wedge Q(x)].$$
3. (Συμπέρασμα) «Some roses fade quickly.»
$$\exists x\,[R(x) \wedge Q(x)].$$

Το ερώτημα είναι: συνεπάγονται οι (1) και (2) την (3);

Γιατί δεν συνεπάγεται: Παρουσίαση Αντιπαραδείγματος

Για να δείξουμε ότι δεν είναι έγκυρο το συμπέρασμα, αρκεί να βρούμε μια ερμηνεία (interpretation) ή μοντέλο που ικανοποιεί τις προτάσεις (1) και (2), αλλά παραβιάζει την (3).

Ιδέα: Κάποια λουλούδια μαραίνονται γρήγορα, αλλά δεν είναι τριαντάφυλλα.

Κατασκευή Ερμηνείας (μοντέλο)

- **Πεδίο ορισμού**: $\{a, b\}$.
- **Ορισμός**:
  1. $R(x)$:
     - $R(a) = \text{true}$, δηλαδή το a είναι τριαντάφυλλο.
     - $R(b) = \text{false}$.
  2. $F(x)$:
     - $F(a) = \text{true}$, δηλαδή το a είναι λουλούδι.
     - $F(b) = \text{true}$, δηλαδή το b είναι επίσης λουλούδι.
  3. $Q(x)$:
     - $Q(a) = \text{false}$, δηλαδή το a δεν μαραίνεται γρήγορα.
     - $Q(b) = \text{true}$, δηλαδή το b μαραίνεται γρήγορα.

Παρατηρήσεις

- Στο $\{a, b\}$, και τα δύο είναι λουλούδια.
- Μόνο το a είναι τριαντάφυλλο.
- Μόνο το b μαραίνεται γρήγορα.

Ελεγχος Ικανοποίησης των (1) & (2)

(1) $\forall x[R(x) \to F(x)]$**:**

- Το μόνο x που κάνει $R(x)$ αληθές είναι το a. Για το a, $F(a) = \text{true}$, συνεπώς $R(a) \to F(a)$ ισχύει.
- Για το b, το $R(b)$ είναι ψευδές, συνεπώς δεν υπάρχει πρόβλημα.

Συνεπώς, η (1) είναι ικανοποιημένη.

(2) $\exists x[F(x) \land Q(x)]$**:**

- Για το b: $F(b) = \text{true}$ και $Q(b) = \text{true}$. Άρα υπάρχει τέτοιο στοιχείο, συγκεκριμένα το b.

Συνεπώς, η (2) είναι ικανοποιημένη.

Αποτυχία της (3)

(3) $\exists x[R(x) \wedge Q(x)]$**:**

- Χρειαζόμαστε κάποιο στοιχείο που να είναι ταυτόχρονα τριαντάφυλλο και να μαραίνεται γρήγορα.
- Το μοναδικό τριαντάφυλλο είναι το a, αλλά $Q(a) = \text{false}$. Άρα $\neg(R(a) \wedge Q(a))$.
- Το b δεν είναι τριαντάφυλλο, συνεπώς δεν ικανοποιεί $(R(b) \wedge Q(b))$.

Δεν υπάρχει στοιχείο στο μοντέλο που κάνει αληθινή την (3).

Συμπέρασμα

Αφού βρήκαμε μια ερμηνεία (μοντέλο) όπου οι προτάσεις (1) & (2) είναι αληθείς, αλλά η πρόταση (3) είναι ψευδής, αποδεικνύεται ότι:

> Η (3) **ΔΕΝ** είναι λογικό συμπέρασμα των (1) και (2).

Με άλλα λόγια, η συνεπαγωγή «$(1) \wedge (2) \models (3)$» δεν ισχύει. Στη γλώσσα της λογικής πρώτης τάξης, λέμε ότι (3) δεν είναι έγκυρη συνέπεια των (1) και (2).

5)

Υπενθύμιση: Σημασιολογικός Ορισμός της «Εγκυρης» Πρότασης

Μια πρόταση φ της λογικής πρώτης τάξης λέμε ότι είναι έγκυρη (valid) αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία I (με όποιο πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ και όποια ερμηνεία των κατηγορημάτων), η φ βγαίνει αληθής (i.e., $\models \varphi$).

- Για να δείξουμε ότι είναι έγκυρη, συνήθως δίνουμε μια σημασιολογική απόδειξη (δείχνουμε ότι σε κάθε πιθανή ερμηνεία ικανοποιείται) ή βρίσκουμε μια τυπική απόδειξη.
- Για να δείξουμε ότι δεν είναι έγκυρη, βρίσκουμε αντιπαράδειγμα: μία ερμηνεία I τέτοια που καθιστά την πρόταση ψευδή.

Πρόταση (a)

$$\big(\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\forall x\, P(x)\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big).$$

Φράση: «Αν για κάθε x ισχύει $P(x)$ ή $Q(x)$, τότε ή για όλα τα x ισχύει $P(x)$ ή για όλα τα x ισχύει $Q(x)$.»

(a.1) Είναι Εγκυρη ή Όχι;

Στη συνήθη λογική πρώτης τάξης, αυτό δεν είναι έγκυρο. Συχνά αναφέρεται ως «λανθασμένη διανομή του '$\vee$' έξω από τον ποσοδείκτη $\forall x$». Γενικώς:

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \quad \not\models \quad (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)).$$

Όπως λέγεται, «αν κάθε στοιχείο του domain ικανοποιεί είτε P είτε Q, δεν σημαίνει ότι όλα ικανοποιούν το ίδιο (P ή Q).» Μπορεί κάποια στοιχεία να ικανοποιούν P, άλλα να ικανοποιούν Q.

(a.2) Παράδειγμα Αντιπαράδειγμα (Interpretation)

Ενα απλό domain είναι $\{a, b\}$. Ορίστε κατηγορήματα:

- $P(a) = \text{true}, Q(a) = \text{false}$.
- $P(b) = \text{false}, Q(b) = \text{true}$.

Άρα για κάθε στοιχείο:

- Το a «ανήκει» στο P αλλά όχι στο Q.
- Το b «ανήκει» στο Q αλλά όχι στο P.

Ελεγχος:

1. $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$: είναι αληθές, διότι:
   - Για $x = a$: $P(a) \vee Q(a) \equiv \text{true} \vee \text{false} = \text{true}$.
   - Για $x = b$: $P(b) \vee Q(b) \equiv \text{false} \vee \text{true} = \text{true}$.

   Άρα όντως σε κάθε x ισχύει $P(x) \vee Q(x)$.
2. $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$: ψευδές, γιατί
   - $\forall x\,P(x)$ είναι ψευδές (το b δεν ικανοποιεί P).
   - $\forall x\,Q(x)$ επίσης ψευδές (το a δεν ικανοποιεί Q).

Συνεπώς, στο συγκεκριμένο μοντέλο, η υπόθεση $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$ είναι αληθής, αλλά το συμπέρασμα $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ είναι ψευδές. Εχουμε αληθές $\Rightarrow$ ψευδές = ψευδής όλη η συνεπαγωγή. Άρα το (a) δεν είναι έγκυρο.

Πρόταση (b)

$$\big((\forall x)\,P(x)\big) \vee \big((\forall x)\,Q(x)\big) \quad \Rightarrow \quad (\forall x)\,[P(x) \vee Q(x)].$$

Φράση: «Αν ή όλοι οι x ικανοποιούν P, ή όλοι οι x ικανοποιούν Q, τότε για κάθε x ισχύει $P(x) \vee Q(x)$.»

(b.1) Είναι Εγκυρη ή Όχι;

Αυτή είναι έγκυρη. Εξηγείται εύκολα:

- Αν όλοι οι x είναι στο P, τότε οποιοδήποτε x πάρουμε, $P(x)$ είναι αληθές, άρα $P(x) \vee Q(x)$ είναι αληθές.
- Αν όλοι οι x είναι στο Q, ανάλογα ισχύει $\forall x\, Q(x) \implies \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.

Σε κάθε ερμηνεία, αν ισχύει $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$, εξάγουμε $\forall x(P(x) \vee Q(x))$. Δεν υπάρχει τρόπος να βγει ψευδές το συμπέρασμα.

(b.2) Σημασιολογική Απόδειξη

- Υποθέτουμε ότι σε μια ερμηνεία I η (b) βγαίνει ψευδής. Αυτό σημαίνει ότι $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ είναι αληθές και $\forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$ ψευδές.
- Αλλά για να είναι $\forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$ ψευδές, υπάρχει κάποιο στοιχείο a του domain ώστε $P(a) \vee Q(a) =$ false. Τότε $P(a) =$ false και $Q(a) =$ false.
- Την ίδια στιγμή, λέμε ότι ή $\forall x\, P(x)$ ή $\forall x\, Q(x)$ είναι αληθές. Αν $\forall x\, P(x)$ είναι αληθές, τότε $P(a) =$ true — αντίφαση με το προηγούμενο. Αν $\forall x\, Q(x)$ είναι αληθές, τότε $Q(a) =$ true — πάλι αντίφαση.

Οπότε τέτοια ερμηνεία δεν υπάρχει. Άρα σε καμία ερμηνεία δε βγαίνει ψευδής. Επομένως η (b) είναι έγκυρη.

6)

1. Περίληψη της Πρότασης

Η Φ γράφεται ως εξής:

$$\big[(\forall x)\, P(x)\big] \;\vee\; \big[(\forall x)\, Q(x)\big] \implies (\forall x)\, [\, P(x) \;\vee\; Q(x)\,].$$

Λεκτικά: «Αν είτε όλοι οι x ικανοποιούν P είτε όλοι οι x ικανοποιούν Q, τότε οπωσδήποτε κάθε x ικανοποιεί $P(x) \vee Q(x)$.»

Από την Ερώτηση 5(b) γνωρίζουμε (και με σημασιολογικά επιχειρήματα) ότι πράγματι είναι έγκυρη.

2. Στρατηγική Απόδειξης με Resolution

Στη λογική πρώτης τάξης, το συνηθισμένο «δείξε ότι πρόταση Φ είναι έγκυρη με resolution» γίνεται ως εξής:

1. Παίρνουμε την υπόθεση (αριστερή πλευρά της συνεπαγωγής).
2. Παίρνουμε την άρνηση της δεξιάς πλευράς (του συμπεράσματος).
3. Δείχνουμε ότι ο συνδυασμός $\{$υπόθεση$\} \cup \{\neg($συμπέρασμα$)$ οδηγεί σε $\perp$ (κενή ρήτρα) μέσω resolution.
4. Εφόσον δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί «υπόθεση & άρνηση συμπεράσματος», καταλήγουμε ότι η συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

3. Αναλυτική Μετατροπή των Τμημάτων σε CNF

3.1 Αριστερή πλευρά (Υπόθεση): $(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x)$. Δεν είναι τυπική απλή μορφή («ή» δύο καθολικών). Θα την ερμηνεύσουμε ως εξής:

- Ορίστε δύο προτασιακές σταθερές:
  - $A = (\forall x\, P(x))$
  - $B = (\forall x\, Q(x))$

  οπότε η πρόταση γράφεται: $A \vee B$.
- Εισάγουμε τους «κανόνες»:
  1. $A \vee B$. (προτασιακό επίπεδο)
  2. $\forall x\, (\neg A \vee P(x))$. (αν A είναι αληθές, τότε για κάθε x, $P(x)$ ισχύει)
  3. $\forall x\, (\neg B \vee Q(x))$. (αν B είναι αληθές, τότε για κάθε x, $Q(x)$ ισχύει)

3.2 Δεξιά πλευρά (Συμπέρασμα): $(\forall x)\, [P(x) \vee Q(x)]$. Η άρνησή της:

$$\neg\big[\forall x\, (P(x) \vee Q(x))\big] \;\equiv\; \exists x\, \big[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\big].$$

Με Skolemization, παίρνουμε ένα καινούργιο σταθερό c:

1. $\neg P(c)$.
2. $\neg Q(c)$.

4. Τελικό Σύνολο Ρητρών για Resolution

Το σύνολο CNF τοποθετούμε:

1. $A \vee B$.
2. $\forall x\, (\neg A \vee P(x))$.
3. $\forall x\, (\neg B \vee Q(x))$.
4. $\neg P(c)$.
5. $\neg Q(c)$.

Όπου (2) και (3) είναι καθολικές ρήτρες.

5. Βήματα Resolution – Εύρεση της Αντίφασης

Βήμα 1. Από (2) $\neg A \vee P(x)$, εξειδικεύουμε $x \mapsto c$. Παίρνουμε:

$$\neg A \vee P(c).$$

Το συνδυάζουμε με (4) $\neg P(c)$ σε resolution:

- $\neg A \vee P(c)$
- $\neg P(c)$

Εφαρμόζουμε resolution στο $P(c)$ και $\neg P(c)$. Παίρνουμε:

$$\neg A.$$

Βήμα 2. Από (3) $\neg B \vee Q(x)$, εξειδικεύουμε $x \mapsto c$. Παίρνουμε:

$$\neg B \vee Q(c).$$

Το συνδυάζουμε με (5) $\neg Q(c)$ σε resolution:

- $\neg B \vee Q(c)$
- $\neg Q(c)$

Εφαρμόζουμε resolution στο $Q(c)$ και $\neg Q(c)$. Παίρνουμε:

$$\neg B.$$

Βήμα 3. Τώρα έχουμε:

- $A \vee B$.
- $\neg A$.
- $\neg B$.

Κάνουμε resolution:

- Από $\neg A$ με $A \vee B$ προκύπτει B.
- Το B έρχεται σε αντίφαση με $\neg B$. Παίρνουμε κενή ρήτρα.

6. Συμπέρασμα

Με την ανάλυση (resolution) είδαμε ότι μόλις προσθέσουμε:

1. Το «αριστερό μέρος» $\Rightarrow$ ως υπόθεση ($A \vee B$, $\neg A \vee P(x)$, $\neg B \vee Q(x)$),
2. Την άρνηση του δεξιού μέρους ($\exists x\,[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \Rightarrow \neg P(c), \neg Q(c)$),

καταλήγουμε σε αντίφαση. Επομένως, δεν υπάρχει ερμηνεία που κάνει αληθές το αριστερό και ψευδές το δεξιό $\Rightarrow$ η συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

7)

(a)

Προσπαθούμε να ενοποιήσουμε:

$$P\big(x,\ F(y),\ A,\ w\big) \quad \text{και} \quad P\big(G(u),\ v,\ u,\ x\big).$$

Επειδή και στις δύο περιπτώσεις το κατηγορούμενο είναι το ίδιο (P) και έχει 4 ορίσματα, τα ενοποιούμε κατά θέση:

1. x με $G(u)$. $\sigma_1 : x \mapsto G(u)$.
2. $F(y)$ με v. $\sigma_2 : v \mapsto F(y)$.

3. A με u. $\sigma_3 : u \mapsto A$.

4. w με x. $\sigma_4 : w \mapsto x$.

Ωστόσο, πρέπει να τα «συγχωνεύσουμε» συνεπέστατα. Αφού $u \mapsto A$, τότε όπου είχαμε $G(u)$ γίνεται $G(A)$. Επιπλέον, από το 1ο βήμα $x \mapsto G(u)$, αλλά τώρα $u \mapsto A \Rightarrow x \mapsto G(A)$. Στο βήμα (4) βλέπουμε $w \mapsto x \mapsto G(A)$. Δεν υπάρχει σύγκρουση. Το y παραμένει ελεύθερο (κανείς δεν το δεσμεύει).

Τελική υποκατάσταση (mgu) μπορούμε να την καταγράψουμε ως:

$$\{\, u \mapsto A,\ x \mapsto G(A),\ v \mapsto F(y),\ w \mapsto G(A) \,\}.$$

(b)

Προσπαθούμε να ενοποιήσουμε:

$$Q\big(x,\, y,\, w,\, z\big) \quad \text{και} \quad Q\big(A,\, F(B),\, z,\, G(z)\big).$$

Κατά θέση:

1. x με A. $x \mapsto A$.

2. y με $F(B)$. $y \mapsto F(B)$.

3. w με z. $w \mapsto z$.

4. z με $G(z)$. Εδώ ελέγχουμε occurs-check: προσπαθούμε να κάνουμε $z = G(z)$.

Αυτό αποτυγχάνει λόγω occurs-check, διότι το z εμφανίζεται μέσα στο $G(z)$. Δεν μπορεί μία μεταβλητή z να «ισούται» με μια δομή $G(z)$ που περιέχει την ίδια μεταβλητή. Θα συνεπαγόταν άπειρη αναδίπλωση (π.χ. $z = G(G(G(\dots)))$).

Συμπέρασμα: Κανένας ενοποιητής δεν υπάρχει. Δεν ενοποιούνται.

(c)

Να ενοποιήσουμε:

$$R\big(F(x),\ G(y),\ z,\ d\big) \quad \text{και} \quad R\big(u,\ v,\ H(u),\ v\big).$$

Κατά θέση:

1. $F(x)$ με u. $u \mapsto F(x)$.

2. $G(y)$ με v. $v \mapsto G(y)$.

3. z με $H(u)$. Αλλά $u \mapsto F(x) \Rightarrow H(u) \mapsto H(F(x))$. Άρα $z \mapsto H(F(x))$.

4. d με v. Όμως $v \mapsto G(y)$. Άρα πρέπει το $G(y)$ να ενοποιηθεί με το d. Δηλαδή $d = G(y)$. Αλλά d είναι σταθερά και $G(\dots)$ είναι εφαρμογή συνάρτησης.

Αποτυχία: δεν υπάρχει ενοποιητής. Διότι θα σήμαινε $G(y) = d$, κάτι αδύνατο.

(d)

Να ενοποιήσουμε:

$$S\big(x,\, y,\, z,\, e\big) \quad \text{και} \quad S\big(F(w),\, w,\, G(w),\, H(w)\big).$$

Κατά θέση:

1. x με $F(w)$. $\quad x \mapsto F(w)$.
2. y με w. $\quad y \mapsto w$.
3. z με $G(w)$. $\quad z \mapsto G(w)$.
4. e με $H(w)$. Εδώ όμως ελέγχουμε: αν το e είναι σταθερά και το H είναι συνάρτηση, τότε η κορυφή e δεν ταιριάζει με $H(...)$. Συνεπώς καμία λύση.

(e)

Να ενοποιήσουμε:

$$T\big(x,\, A,\, y,\, w\big) \quad \text{και} \quad T\big(G(z),\, z,\, H(w),\, K\big).$$

Κατά θέση:

1. x με $G(z)$. $\quad x \mapsto G(z)$.
2. A με z. Εδώ A είναι σταθερά και z μεταβλητή. $\quad z \mapsto A$.
3. y με $H(w)$. $\quad y \mapsto H(w)$.
4. w με K. Υποθέτουμε K είναι σταθερά. $\quad w \mapsto K$.

   Γυρίζουμε πίσω στο βήμα (3): $y \mapsto H(w)$ αλλά $w \mapsto K \Rightarrow y \mapsto H(K)$.
   Καμία σύγκρουση. Άρα η υποκατάσταση που προκύπτει:

$$\{\, z \mapsto A,\ w \mapsto K,\ x \mapsto G(A),\ y \mapsto H(K)\,\}.$$

8)

(a) Μετατροπή των προτάσεων (i)–(vi) σε Λογική Πρώτης Τάξης

(i) «Ο Στέφανος, η Θεοδώρα και η Γιώτα είναι μέλη του πολιτικού κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ".»

$$\text{MemberOf(Stefanos, Tokaselaki)}, \quad \text{MemberOf(Theodora, Tokaselaki)}, \quad \text{MemberOf(Giota, Tokaselaki)}.$$

(ii) «Κάθε μέλος του κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ" που δεν είναι δεξιός, είναι φιλελεύθερος.»

$$\forall x \ \Big[\big(MemberOf(x, \text{Tokaselaki}) \wedge \neg Dexios(x)\big) \ \rightarrow \ Fileleftheros(x)\Big].$$

(iii) «Στους δεξιούς δεν αρέσει ο σοσιαλισμός.»

$$\forall x\ \big[Dexios(x)\ \rightarrow\ \neg Likes(x, \text{Socialism})\big].$$

(iv) «Σ' όποιον δεν αρέσει ο καπιταλισμός, δεν είναι φιλελεύθερος.»

$$\forall x\ \big[\neg Likes(x, \text{Capitalism})\ \rightarrow\ \neg Fileleftheros(x)\big].$$

(v) «Στον Στέφανο δεν αρέσει ό,τι αρέσει στη Θεοδώρα, και του αρέσει ό,τι δεν αρέσει στην Θεοδώρα.»

$$\forall I\ \big[\,Likes(\text{Theodora}, I)\ \rightarrow\ \neg Likes(\text{Stefanos}, I)\big],\quad \forall I\ \big[\neg Likes(\text{Theodora}, I)\ \rightarrow\ Likes(\text{Stefanos}, I)\big].$$

(vi) «Στη Θεοδώρα αρέσει ο σοσιαλισμός και ο καπιταλισμός.»

$$Likes(\text{Theodora, Socialism})\quad \text{και}\quad Likes(\text{Theodora, Capitalism}).$$

(b) Απόδειξη ότι KB φ με Resolution

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι KB $\models \phi$, δηλαδή ότι κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τις προτάσεις (i)–(vi) (KB) ικανοποιεί και τη (vii). Η, με resolution-style:

1. Παίρνουμε τις ρήτρες της KB (i.e., τις μετατροπές των (i)–(vi) σε CNF).
2. Παίρνουμε την άρνηση της ϕ:

$$\neg\phi = \neg\,\exists x\,[MemberOf(x, \text{Tokaselaki})\ \wedge\ Fileleftheros(x)\ \wedge\ \neg Dexios(x)] \equiv$$

$$\forall x\,[\neg MemberOf(x, \text{Tokaselaki})\ \vee\ \neg Fileleftheros(x)\ \vee\ Dexios(x)].$$

3. Ενώνουμε «KB $\cup$ $\neg\phi$ σε CNF» και δείχνουμε ότι από αυτό το σύνολο προκύπτει κενή ρήτρα (contradiction).

(c) Τροποποίηση Απόδειξης για Λεκτικά Απάντησης (Answer Literals)

Στη λογική προγραμματισμού, μπορούμε να προσθέσουμε ένα «λεκτικό απάντησης», π.χ., $Answer(x)$ στο τέλος, για να βρούμε ποιο είναι το μέλος που ικανοποιεί το (vii).

Με δυο λόγια:

1. Προσθέτουμε έναν κανόνα ή μια μεταβλητή «ψάχνουμε x τέτοιο που … και $Answer(x)$».
2. Το σύστημα resolution (π.χ., Prolog) όταν ολοκληρωθεί η απόδειξη, επιστρέφει το binding του x.

Πρακτικά, σε Prolog-στυλ θα γράφαμε:

$$?-\text{MemberOf}(X, \text{Tokaselaki}),\ \text{Fileleftheros}(X),\ \neg\text{Dexios}(X).$$

Και θα παίρναμε την απάντηση $X = \text{Giota}$ (ή κάποιον άλλον, αν τα συμπεράσματα βγουν έτσι). Αυτό είναι το «σκέλος (c)» της εκφώνησης: προσθέτουμε «lexical answer» λέγοντας $Answer(x)$ και μόλις ολοκληρωθεί η απόδειξη, εμφανίζεται ο υποψήφιος.

9)

Κατηγορήματα και Σταθερές

Για να αναπαραστήσουμε τις προτάσεις σε Horn clauses, ορίζουμε τα εξής:

- **Σταθερές (constants):**
  - `eleni`, `giannis`, `petros`, `timos`, `katerina`, `manolis`, κτλ.
- **Κατηγορήματα (predicates):**
  - `woman(X)`, `man(X)`: δηλώνουν το φύλο του X.
  - `beautiful(X)`: «ο/η X είναι όμορφος/όμορφη».
  - `rich(X)`: «ο/η X είναι πλούσιος/πλούσια».
  - `muscular(X)`: «ο X είναι μυώδης».
  - `polite(X)`: «ο X είναι ευγενικός».
  - `likes(X,Y)`: «ο X συμπαθεί/αρέσκεται στον Υ».
  - `happy(X)`: «ο X είναι ευτυχισμένος».

Μετατροπή των Προτάσεων σε Horn Clauses

(1) Η Ελένη είναι όμορφη.

```
beautiful(eleni).
```

(2) Ο Γιάννης είναι όμορφος και πλούσιος.

```
beautiful(giannis).    rich(giannis).
```

(3) Ο Πέτρος είναι μυώδης και πλούσιος.

```
muscular(petros).    rich(petros).
```

(4) Ο Τίμος είναι μυώδης και ευγενικός.

```
muscular(timos).    polite(timos).
```

(5) Σε όλους τους άνδρες αρέσουν οι όμορφες γυναίκες.

```
likes(M, W) :-
    man(M),
    woman(W),
    beautiful(W).
```

(6) Όλοι οι πλούσιοι είναι ευτυχισμένοι.

```
happy(X) :- rich(X).
```

(7) Όλοι οι άνδρες που τους αρέσει μια γυναίκα, στην οποία αρέσουν, είναι ευτυχισμένοι.

```
happy(M) :-
    man(M),
    woman(W),
    likes(M, W),
    likes(W, M).
```

(8) Όλες οι γυναίκες που τους αρέσει ένας άνδρας, στον οποίο αρέσουν, είναι ευτυχισμένες.

```
happy(W) :-
    woman(W),
    man(M),
    likes(W, M),
    likes(M, W).
```

(9) Στην Κατερίνα αρέσουν όλοι οι άνδρες, στους οποίους αρέσει η ίδια.

```
likes(katerina, M) :-
    man(M),
    likes(M, katerina).
```

(10) Στην Ελένη αρέσουν όλοι οι άνδρες που είναι ευγενικοί και πλούσιοι ή μυώδεις και όμορφοι.

```
likes(eleni, M) :-
    man(M),
    polite(M),
    rich(M).

likes(eleni, M) :-
    man(M),
    muscular(M),
    beautiful(M).
```

10)

1. Η αρχική πρόταση ϕ

Δίνεται:

$$\phi \;=\; \forall x \Big(\big[\exists y \, (P(x,y) \;\Rightarrow\; \exists z \, (Q(x,z) \;\Rightarrow\; \exists w \, R(x,w))\big] \Big).$$

Θέλουμε στο (a) να τη φέρουμε σε CNF.

1.1 Ξαναγράφουμε τις συνεπαγωγές $\Rightarrow$ ως $\neg(\dots) \vee (\dots)$

Υπενθύμιση:

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q.$$

Πρώτα μέσα στην παρένθεση:

$$P(x,y) \;\Rightarrow\; \exists z\,\big(Q(x,z) \;\Rightarrow\; \exists w\,R(x,w)\big)$$

ισοδύναμο με

$$\neg P(x,y) \vee \exists z\,\big[\neg Q(x,z) \vee \exists w\,R(x,w)\big].$$

Άρα η ϕ γίνεται:

$$\forall x\,\big(\exists y\,[\,\neg P(x,y) \;\vee\; \exists z\,(\neg Q(x,z) \;\vee\; \exists w\,R(x,w))]\big).$$

1.2 Ενοποίηση των υπαρκτικών ποσοδεικτών

Εχουμε:

$$\forall x\;\exists y\;\exists z\;\exists w\,\Big[\neg P(x,y) \;\vee\; \big(\neg Q(x,z) \;\vee R(x,w)\big)\Big].$$

Μετατρέπεται σε prenex μορφή:

$$\forall x\;\exists y \exists z \exists w\,\Big[\neg P(x,y) \;\vee\; \neg Q(x,z) \;\vee R(x,w)\Big].$$

1.3 Skolemization

Με Skolemization:

$$y = f(x),\; z = g(x),\; w = h(x).$$

Η πρόταση γίνεται:

$$\forall x\;\big[\neg P\big(x, f(x)\big) \;\vee\; \neg Q\big(x, g(x)\big) \;\vee\; R\big(x, h(x)\big)\big].$$

1.4 Μετατροπή σε CNF Ρήτρα

Η CNF μορφή:

$$\big[\neg P(x, f(x)) \;\vee\; \neg Q(x, g(x)) \;\vee\; R(x, h(x))\big].$$

2. Απόδειξη ότι από ϕ έπεται ψ

Δίνεται:

$$\psi \;=\; \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,\Big[P(x,y) \;\Rightarrow\; (Q(x,z) \;\Rightarrow\; R(x,w))\Big].$$

2.1 Αναδιατύπωση και Άρνηση

Η ψ είναι:

$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,\big[\neg P(x,y) \;\vee\; \neg Q(x,z) \;\vee\; R(x,w)\big].$$

Η άρνηση:

$$\neg\psi \;=\; \exists x\,\forall y, z, w\,\big[P(x,y) \;\wedge\; Q(x,z) \;\wedge\; \neg R(x,w)\big].$$

2.2 Resolution

Από την ϕ, έχουμε:

$$\neg P(x, f(x)) \vee \neg Q(x, g(x)) \vee R(x, h(x)).$$

Από την $\neg\psi$:

$$P(a, y),\ Q(a, z),\ \neg R(a, w).$$

Με resolution:

- Από $P(a, y)$ και $\neg P(a, f(a))$: $y = f(a)$, παράγουμε $\neg Q(a, g(a)) \vee R(a, h(a))$.
- Από $Q(a, z)$ και $\neg Q(a, g(a))$: $z = g(a)$, παράγουμε $R(a, h(a))$.
- Από $R(a, h(a))$ και $\neg R(a, w)$: $w = h(a)$, καταλήγουμε σε αντίφαση.

Άρα $\phi \models \psi$.

12)

1. (a) Αναπαράσταση σε Δομή Σχεσιακής Βάσης και Datalog

1.1 Πληροφορίες των Πινάκων

Teaches(Professor, Course)

- (Manolis, AI)
- (Manolis, Data Structures)
- (Yannis, DB)
- (Mema, System Programming)

Course_Semester(Course_Name, Semester)

- (Data Structures, 1)
- (AI, 3)
- (DB, 4)
- (System Programming, 6)

1.2 Ερώτηση

«Σε ποια εξάμηνα διδάσκει ο Μανόλης;»

1.3 Παράσταση σε Datalog

Ορίζουμε δύο σχέσεις Datalog, αντιστοιχώντας τους πίνακες:

```
% Γεγονόταaπότονπίνακα        Teaches:
Teaches(manolis, ai).
Teaches(manolis, data_structures).
Teaches(yannis, db).
Teaches(mema, system_programming).

% Γεγονόταaπότονπίνακα        Course_Semester:
Course_Semester(ai, 3).
Course_Semester(data_structures, 1).
Course_Semester(db, 4).
Course_Semester(system_programming, 6).
```

Στη συνέχεια, η ερώτηση σε Datalog στυλ:

```
?- SemesterOfManolis(S).
```

Και ορίζουμε έναν κανόνα για να συνδέσουμε το μάθημα με το εξάμηνο:

```
SemesterOfManolis(Sem) :-
    Teaches(manolis, C),
    Course_Semester(C, Sem).
```

Ετσι, η ερώτηση `?- SemesterOfManolis(S).` θα επιστρέψει όλα τα S τέτοια που `manolis` διδάσκει σε εξάμηνο S.

2. (b) Εφαρμογή Forward Chaining

Η τεχνική forward chaining (π.χ. bottom-up evaluation σε Datalog) λειτουργεί ως εξής:

1. Εχουμε τους πίνακες (σχέσεις) `Teaches` και `Course_Semester` ως σύνολα γεγονότων.
2. Ο κανόνας:

   SemesterOfManolis(S) :- Teaches(manolis,C), Course_Semester(C,S).

3. Ξεκινάμε με τις βάσεις `Teaches` και `Course_Semester`. Το forward chaining θα προσπαθήσει να "ενώσει" (join) τα γεγονότα όπου `manolis` διδάσκει κάποια C και βρίσκει σε ποιο S ανήκει το C.

2.1 Εφαρμογή Βήμα-Βήμα

- Από `Teaches(manolis, ai)` και `Course_Semester(ai, 3)` → παράγει `SemesterOfManolis(3)`.
- Από `Teaches(manolis, data_structures)` και `Course_Semester(data_structures, 1)` → παράγει `SemesterOfManolis(1)`.

- Οι άλλες εγγραφές `Teaches(yannis,db)`, `Teaches(mema,system_programming)` δεν έχουν `Professor=manolis`, οπότε δεν παράγουν νέα γεγονότα για `SemesterOfManolis(...)`.
- Εντούτοις, αν θέλαμε να ελέγξουμε διεξοδικά:
  - `Teaches(yannis, db)` ταιριάζει με `Course_Semester(db,4)`, άρα `SemesterOfYannis(4)`, αλλά δεν ενδιαφέρει εδώ γιατί ρωτάμε για `manolis`.
  - `Teaches(mema, system_programming)` ταιριάζει με `Course_Semester(system_programming,6)`, κ.λπ.

2.2 Συμπέρασμα Forward Chaining

Το σύστημα «πυροδοτεί» τον κανόνα:

```
SemesterOfManolis(S) :-
    Teaches(manolis, C),
    Course_Semester(C, S).
```

και παράγει τα τελικά γεγονότα:

- `SemesterOfManolis(3)`.
- `SemesterOfManolis(1)`.

Κανένα άλλο επειδή δεν υπάρχει αντιστοίχιση.

Απάντηση:

Η απάντηση στην ερώτηση «Σε ποια εξάμηνα διδάσκει ο Μανόλης;» είναι: **1 και 3**.