ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ηλεκτρομαγνητικά πεδία Β

5ο εξάμηνο, Ακαδημαϊκή περίοδος 2020 – 2021

2η σειρά ασκήσεων

Κυριάκος Παναγιωτίδης

(kyriakos.8p@gmail.com)

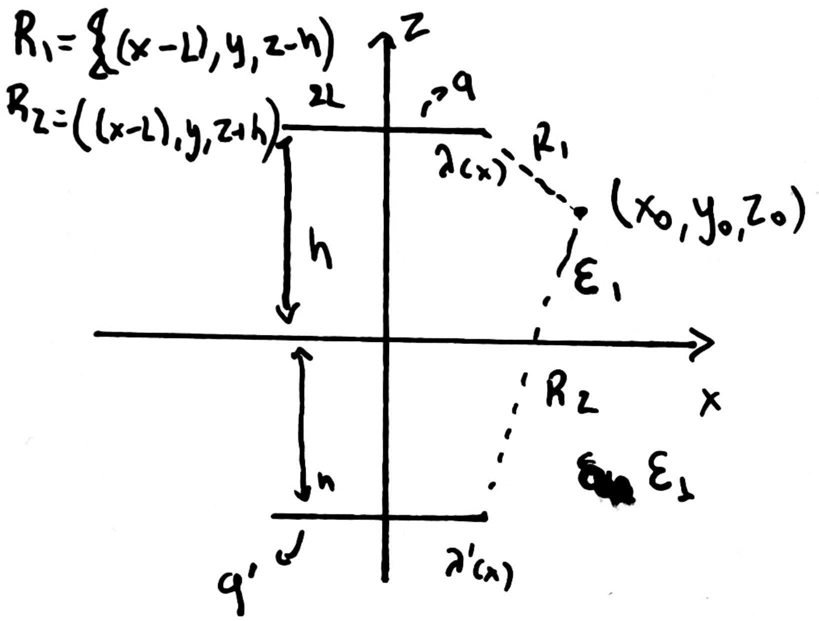
ΑΜ: 03117206

Ασκηση 7

α)

Το προβλημα λυνεται με την μεθοδο του κατοπτρισμου και ανάγεται σε δυο υποπροβλήματα για δυο περιοχες (για $z \leq 0$ και $z \geq 0$ αντιστοιχα)

Λυση πρωτου υποπροβληματος για την περιοχη $z \geq 0$:



Εστω τυχαιο σημείο με συνεταγμενες (x_0, y_0, z_0).

~~Για τα λ(x) ...~~

Για το q' απο την μεθοδο του κατοπτρισμου θα ισχυει οτι:

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

Οποτε για τον υπολογισμο του δυναμικου ~~με βαση~~ απο την μεθοδο της επαλληλιας θα εχουμε

$$\Phi(x, y, z \geq 0) = \Phi_1 + \Phi_1'$$

(αντιστοιχα με τα φορεια.)

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 \cdot R_1} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{R_1} \underset{\text{σχημα το } R_1 \text{ είναι}}{\overset{\text{Απο το}}{=\!=}} \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}} =$$

$$\underset{\text{Απο τα ολοκληρωματα που δινονται}}{=\!=} \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\left[\ln\left[x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}\right]\right]_{-L}^{L} \underset{\text{ιδιοτητα } \ln a - \ln b = \ln a/b}{\overset{\text{και απο}}{=\!=}}$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1} \cdot \ln\left[\frac{x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}}{x+L+\sqrt{(x+L)^2+y^2+(z-h)}}\right]$$

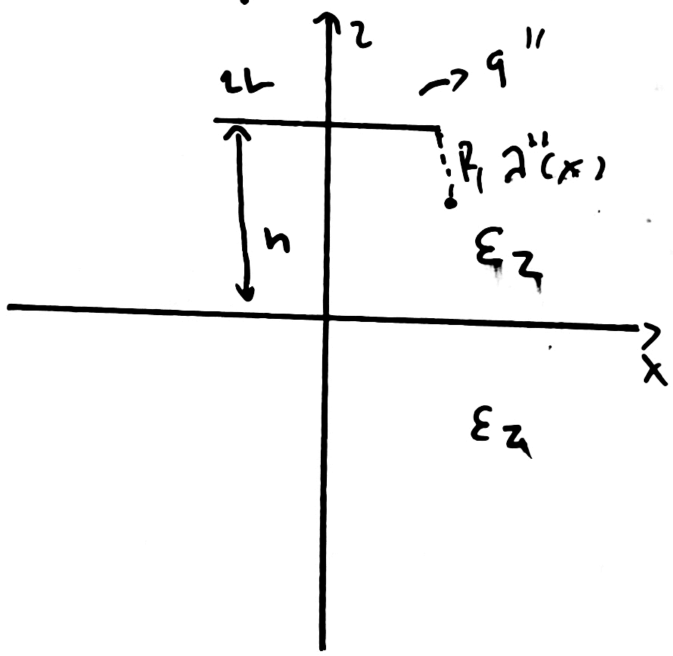
Αντίστοιχα για το φ_1'

$$\varphi_1' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R_2} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R_2} = \left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z+h)^2}} =$$

$$= \ldots = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \ln\left[\frac{x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z+h)^2}}{x+L+\sqrt{(x+L)^2+y^2+(z+h)^2}}\right]$$

με παρόμοιο τρόπο με πριν.

Αντίστοιχα η λύση του δεύτερου υποπροβλήματος για την περιοχή $z \le 0$:



Έστω Μ ξανά τυχαίο σημείο με $R_2 = \sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}$ πάλι από την μέθοδο του κατοπτρισμού για ~~...~~ το q'' θα ισχύει:

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot q$$

Οπότε το συνολικό δυναμικό θα είναι:

$$\varphi(x,y,z\le 0) = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \int_{-L}^{L}\frac{dx}{R_2} = \cancel{\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}[\ln} =$$

$$= \ldots = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \ln\left[\frac{x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}}{x+L+\sqrt{(x-L)^2+y^2+(z-h)^2}}\right]$$

με παρόμοιο τρόπο με πριν

B) Για τον υπολογισμο και για τις δυο παραπανω περιπτωσεις χρησιμοποιωντας την αρχη της επαλληλιας θα εχουμε:

Πρωτη Περιπτωση:

$$E_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\int \frac{dq}{R_1^2}\hat{R}_1 + \int \frac{dq'}{R_2^2}\hat{R}_2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\int \frac{dq}{R_1^3}\vec{R}_1 + \int \frac{dq}{R_2^3}\vec{R}_2\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\int_{-L}^{L} \frac{\lambda_0 \cdot dl \cdot ((x-l)i_x + y i_y + (z-h) i_z)}{\left(\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + (z-h)^2}\right)^3} + \right.$$

$$\left. + \int_{-L}^{L} \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{\lambda_0\, dl\, ((x-l) i_x + y i_y + (z-h) i_z)}{\left(\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + (z-h)^2}\right)^3}\right)$$

Εδω θελουμε να υπολογισουμε το E_2 για $z \geq 0$

$$E_2 = E(x=0, y=0, z\geq 0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\left(\int_{-L}^{L} \frac{dl \cdot (z-h)\hat{i}_z}{\left(\sqrt{l^2 + (z-h)^2}\right)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \int_{-L}^{L} \frac{dl \cdot (z+h)\hat{i}_z}{\left(\sqrt{l^2 + (z+h)^2}\right)^3}\right) \longrightarrow$$

Απο τα ολοκληρωματα της Εκφωνησης

$$\Rightarrow E_2 = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon}\left(\left[\frac{l}{(z-h)^2\sqrt{l^2+(z-h)^2}}\right]_{-L}^{L} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left[\frac{l}{(z+h)^2\sqrt{l^2+(z+h)^2}}\right]_{-L}^{L}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\left(\frac{2L}{(z-h)^2\sqrt{L^2+(z-h)^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{2L}{(z+h)^2\sqrt{L^2+(z+h)^2}}\right)}$$

Δευτερη Περιπτωση:

Με αντιστοιχο τροπο για την περιοχη $z \leq 0$

$$E_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\int \frac{dq}{R_2^3} R_1\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \int_{-L}^{L} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{\lambda_0\, dl\, \left((x-l)e_x + y e_y + (z-h)e_z\right)}{\sqrt{(x-l)^2+y^2+(z-h)^2}}$$

Αρα το $E_z = E(x=0, y=0, z\leq 0) \Rightarrow$

$$E_z = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \int_{-L}^{L} \frac{dl\,(z-h)}{\left(\sqrt{l^2+(z-h)^2}\right)^3} \xrightarrow[\text{που δινονται}]{\text{Απο τα ολοκληρωματα}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \left[\frac{l}{(z-h)^2\sqrt{l^2+(z-h)^2}}\right]_{-L}^{L} = \cancel{\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{2L}{(z-h)^2\sqrt{L^2+(z-h)^2}}}$$

$$\boxed{E_z = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{2L}{(z-h)^2 \cdot \sqrt{L^2+(z-h)^2}}}$$

γ) Χρησιμοποιωντας την μεθοδο των ροπων χωριζουμε την ραβδο μας σε μικρα κομματια. και υπολογιζουμε την τιμη μας (Φ, Q) σε εκεινο το κομματι και επειτα τα αθροιζουμε για να βρουμε την συνολικη τιμη.

Εφοσον ειναι γνωστο οτι το συνολικο φορτιο της ραβδου ειναι Q τοτε μπορουμε να γραψουμε:

$$Q = \int_{-L}^{+L} \lambda(x')\,dx' = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,\Delta x$$

Η παραπανω σχεση ισχυει με τις αντιστοιχες αποστασεις και για τα Q', Q'' που ορισαμε πριν $\left(Q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q \quad Q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q\right)$

Επισης ξερουμε ~~αιι~~ παλι απο πριν οτι το $\Phi(x,y,z>0)=\Phi_1+\Phi_1'$ και $\Phi(x,y,z\le 0)=\Phi_2$. Για τα Φ_1,Φ_1',Φ_2 με ~~τα~~ ιδια τα αντιστοιχα Q τους θα ισχυει οτι:

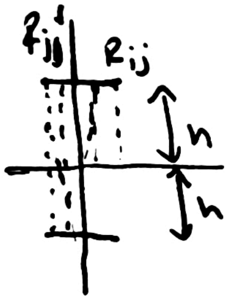
$\cancel{\Phi_1 = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\lambda_i}$, $\cancel{\Phi_1' = \sum_{j=}^{N}}$ $\quad \cancel{\Phi = \sum_{j=1}^{N} A}$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\lambda_j \rightsquigarrow [\Phi]=[A][\lambda] \quad (1)$$

Με τους πινακες A να διαφερουν για: Φ

$\Phi_1 \to A_{ij} = \dfrac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_1 R_{ij}}$, $\quad \Phi_1' \to A_{ij} = \dfrac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\dfrac{1}{R'_{ji}}$

$\Phi_2 \to A_{ij} = \dfrac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_1 R_{ij}}$ $\quad$ (* Με τα R_{ij}, R'_{ji} να προκυπτουν απο το σχημα ως)



$$R_{ij} = |x_j - x_i|$$

$$R_{ij} = \sqrt{(x_j-x_i)^2+(2h)^2}$$

Η τιμες που αναζητουμε $\lambda(x) = [\lambda]$ οποτε απο την εξισωση (1) θα εχουμε

$$[\lambda] = [A]^{-1}[\Phi] = [A]^{-1}\overset{[1,1,\ldots,1]^T}{[1]}\Phi.$$

Εστω οτι επιλεγουμε ενα τυχαιο $\Phi_0 = 1V$ τα αντιστοιχα λ_0 θα ειναι

$[\lambda_0] = [A]^{-1}[1]\Phi_0 \implies$ διαιρωντας κατα μελη $\implies [\lambda] = \Phi[\lambda_0]$ (2)

Επισης γνωριζουμε οτι:

το $Q = \Phi\cdot\sum_{j=1}^{N}\lambda_{0j}\Delta x$ (3)

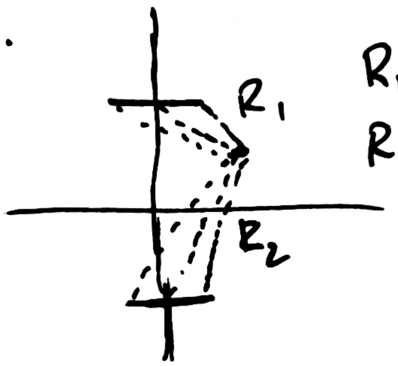
Οπότε από τις (7),(8) προκύπτει: $\lambda(x)=[\lambda]=\frac{Q}{\sum_{j=1}^{N}\lambda_{0j}\Delta x}[A]^{-1}[1]$

Με το $[A]$ να διαφέρει για κάθε ~~αρχικό~~ υποπρόβλημα

- $[A]_{①}=[A_1]+[A_1]'=\frac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{|x_j-x_i|}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{(x_j+x_i)^2+(2h)^2}}\right)$
- $[A]_{②}=\frac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{|x_j+x_i|}\right)\cdot\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ *

Σων τις περιπτώσεις A_{ii} για $i=j$ από τους τύπους

Για το δυναμικό τώρα ξέρουμε ότι $\Phi=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\lambda_i$. Οπότε έχουμε για τα δύο υποπροβλήματα με τα παραπάνω στοιχεία και τις ~~...~~ αποστάσεις R_1, R_2 ~~για κάθε σημείο στο~~ $R_1=$ (από το σχήμα) θα έχουμε.

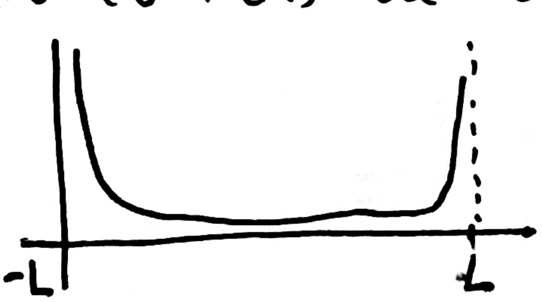


$$R_1=\sqrt{(x-x_j)^2+y^2+(z-h)^2}$$
$$R_2=\sqrt{(x-x_j)^2+y^2+(z+h)^2}$$

- $\Phi(x,y,z\geq 0)=\Phi_1+\Phi_1'=\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j\Delta x}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{R_2}\right)$

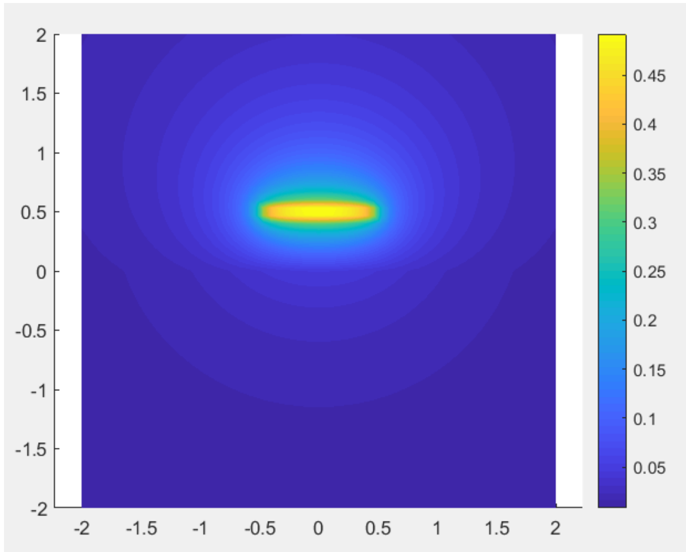
- $\Phi(x,y,z\leq 0)=\Phi_2=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\cdot\frac{\Delta x}{4\pi\varepsilon_2}\cdot\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{R_1}$

- Αναμένουμε το $\lambda(x)$ να έχει την παρακάτω μορφή

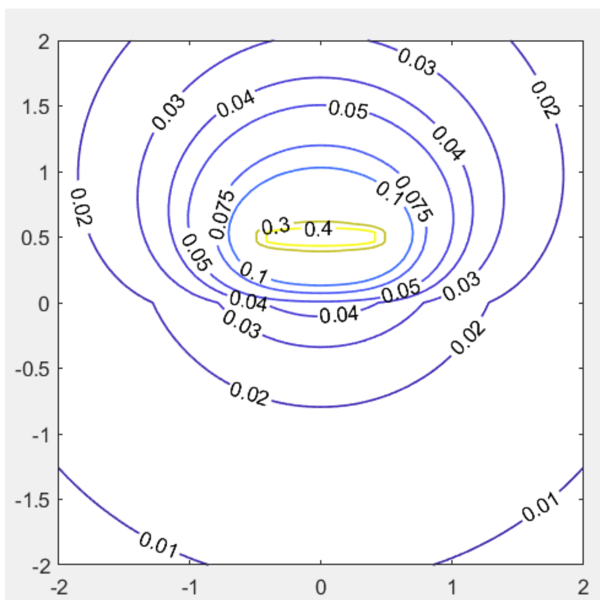


καθώς έχουμε περισσότερο φορτίο στα άκρα δ) Παρατίθενται οι τρεις γραφικές παραστείς παρατίθενται παρακάτω:

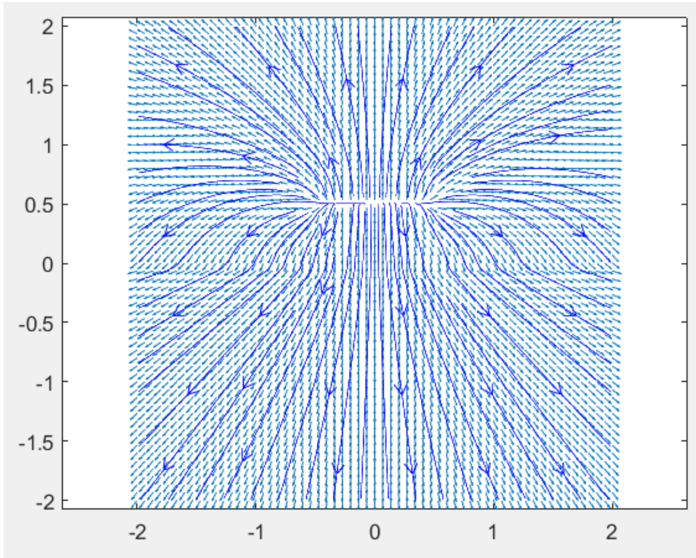
- surface(x,y,Φ)



- Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο xz με την βοήθεια της συνάρτησης contour



- Να γίνει και μια γραφική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xz για y=0 στον χώρο -2m ≤ x,z ≤ 2m Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού MatLab προτείνω την χρήση της συνάρτησης quiver.



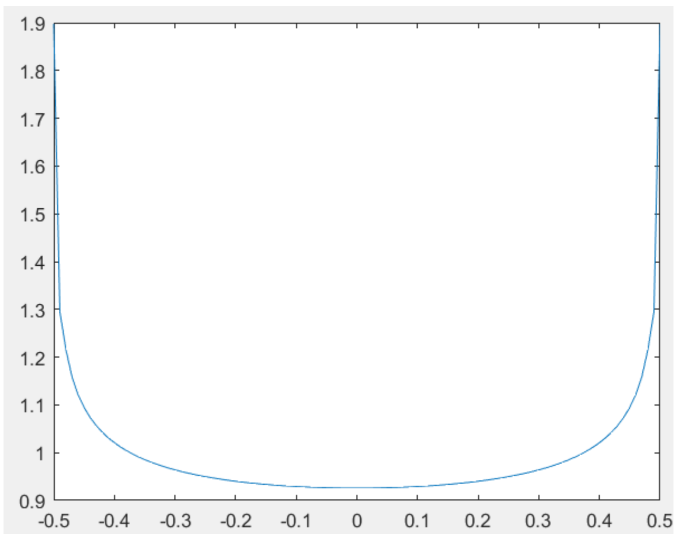
Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
h=0.5;
L=0.5;
e1 = 1;
e2 = 5;
xmin=-2;
xmax=2;
zmin=-2;
zmax=2;

DynamicX=(xmax-xmin)/60;
DynamicZ=(zmax-zmin)/60;

x1=xmin:(xmax-xmin)/60:xmax;
z1=zmin:(zmax-zmin)/60:zmax;
[X,Z] = meshgrid(x1,z1);
Dynamic_array = zeros(length(x1),length(z1));

for ix = 1:length(x1)
    for iz = 1:length(z1)
        xx1=X(ix,iz);
        zz1=Z(ix,iz);
        if (zz1>=0)
           Dynamic_array(ix,iz)=(1/(4*pi*e1))*log((L-xx1+((L-xx1)^2+(zz1-h)^2)^(1/2))/(-L-xx1+((L+xx1)^2+(zz1-h)^2)^(1/2)))
           +(1/(4*pi*e1))*((e1-e2)/(e1+e2))*log((L-xx1+((L-xx1)^2+(zz1+h)^2)^(1/2))/(-L-xx1+((L+xx1)^2+(zz1+h)^2)^(1/2)));
        continue
        end
        if (zz1<=0)
            Dynamic_array(ix,iz) = (1/(2*pi*(e1+e2)))*log((L-xx1+((L-xx1)^2+(zz1-h)^2)^(1/2))/(-L-xx1+((L+xx1)^2+(zz1-h)^2)^(1/2)));
        continue
        end
    end
end
%SURFACE
figure(1)
hold off
surface(X,Z,Dynamic_array), shading interp
colorbar
axis equal
hold on
cont =[0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.075 0.1 0.3 0.3 0.4 0.5];
figure(2);
hold off

%CONTOUR
[CS,H] = contour(X,Z,Dynamic_array,cont,'Linewidth',1);
clabel(CS,H,cont);
axis equal
```

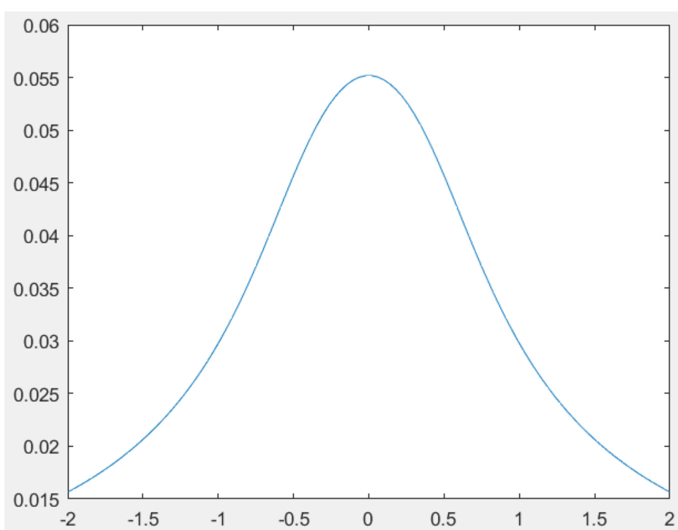
```
[Ex_array1, Ez_array1] = gradient(Dynamic_array,DynamicX,DynamicZ);
Ex_array = - Ex_array1;
Ez_array = - Ez_array1;

%Quiver
figure(3)
hold off
quiver(X,Z,Ex_array./((Ex_array).^2 + (Ez_array).^2).^(1/2),Ez_array./((Ex_array).^2 + (Ez_array).^2).^(1/2),0.8)
hold on
hs = streamslice(X,Z,Ex_array,Ez_array,0.8);
axis equal
hold off
```

ε) Οι δυο γραφικές παραστείς παρατίθενται παρακάτω:

- Να γίνει η γραφική παράσταση της κατανομής λ(x)/ε0 κατά μήκος του γραμμικού φορτίου:



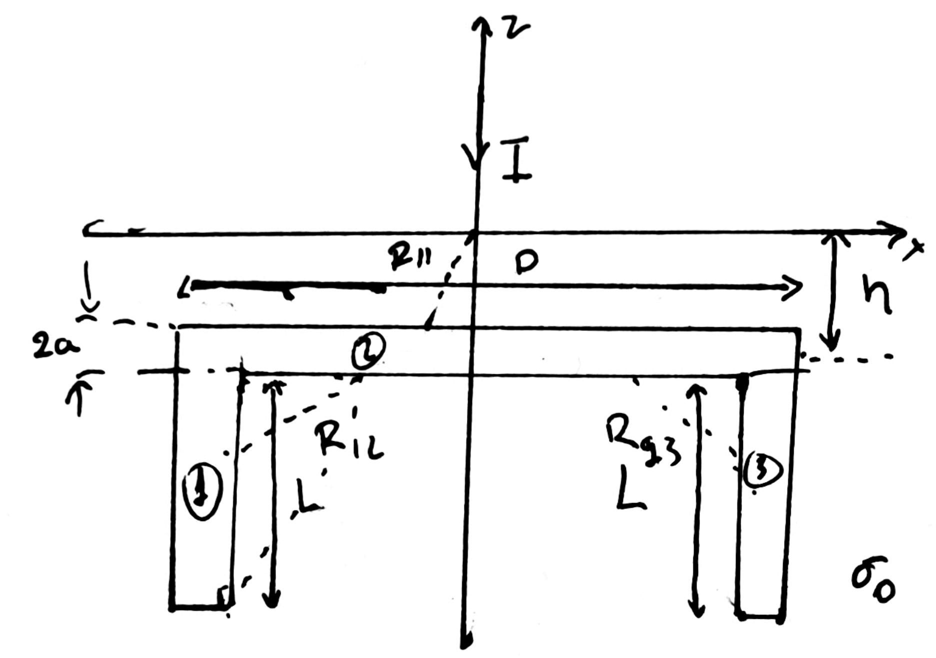
- Να υπολογιστεί το δυναμικό πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια (z = 0) για y = 0 και -2m ≤ x ≤ 2m και να γίνει η γραφική του παράσταση



Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
N=100;
DynamicX=2*L/N;
A = zeros(N,N);
a=0.0025;
one=ones(1,N); %[1,1,1..]T

e0=8.854e-12;
e1=e0;
e2=5*e0;
Q=e0;

for xi=1:N
    for xj=1:N
      Rji=abs(xj-xi)*DynamicX
      RJi=((abs(xj-xi)*DynamicX)^2 + 4*h^2)^(1/2)
        if (xi==xj)
           A(xi,xj)=1/(4*pi*e1)*(log(((DynamicX/2+(a^2+(DynamicX/2)^2)^(1/2))/(-DynamicX/2+(a^2+(DynamicX/2)^2)^(1/2)))+(e1-e2)/(e1+e2)*DynamicX/2*h));
           continue
        end
        A(xi,xj)=(DynamicX/(4*pi*e1))*(1/Rji+(e1-e2)/(e1+e2)*1/Rj2i);
    end
end

%Γραφικη αναπαραστηση φορτιου
%Φ0=1;
A_inv=inv(A);
l0=one*A_inv*1;

l=((Q/(sum(l0)*DynamicX))*1).*one*A_inv;
l=l./e0;

xaxis=[-0.5:1/(N-1):0.5]

figure(4)
plot(xaxis,l);


%δυναμικό πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια (z = 0)
DynamicF=zeros(1,N);
x_help=-2:4/(N-1):2
for ix=1:N;
   x=x_help(ix)
     for j=1:N;
         DynamicF(ix)=DynamicF(ix)+l0(j)*DynamicX*2/(4*pi*(e1+e2)*((x-((j-(N/2))*DynamicX-DynamicX/2))^2+h^2)^(1/2));
     end
end

figure(5)
plot(x_help,DynamicF);
```

Ασκηση 8



$R_{11} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + y^2 + (z-h)^2}$

$R_{12} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + y^2 + (z+h+z_j)}$

$R_{13} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + y^2 + (z_i - h + z_j)}$

α) Χωριζουμε τα 3 τμηματα του αγωγου (οριζοντιο και 2 καθετο) σε N στοιχεια. Χρησιμοποιωντας την μεθοδο των ροπων θα υπολογισουμε την τιμη του ρευματος σε καθε επιμερους τμημα και αθροιζοντας τες θα υπολογισουμε την συνολικη κατανομη. Για το το ~~δο~~ συνολικο του αγωγου ξερουμε οτι:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} VDF_{ij} I_j \rightsquigarrow [\Phi] = [VDF] \cdot [I]$$ ~~Αρα φαμε~~

Αρα ψαχνουμε το

$$[I] = [VDF]^{-1} [\Phi]$$

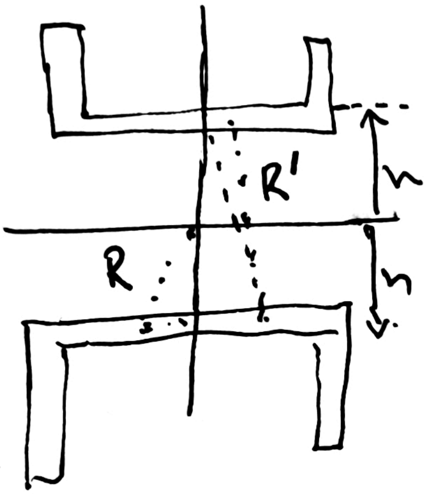
και πρεπει αρχικα να υπολογισουμε τον πινακα [VDF]

$$[VDF] = VDF_{1} + VDF_{2} + VDF_{3}$$

Για καθε τμημα απο τα 3 του αγωγου

Τα $VDF_{1,2,3}$ προκυπτουν αναλογα με την αποσταση των σημειων τους

Αρχικα για την επιλυση του προβληματος πρεπει να εφαρμοσουμε μεθοδο ειδωλων



Οποτε το δυναμικο καθε κομματιου N θα επηρεαζεται και απο τα δυο φορεια.

$R = |x_i - x_j|$

$R' = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (2h)^2}$

Αρα για τον υπολογισμο VDF_{ij} θα εχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} &VDF_{ij} = VDF_{①②③} + VDF'_{①②③} \qquad i \neq j \\ &\bullet\ VDF_{①} = \frac{\Delta x}{4\pi\sigma_0}\,\frac{1}{R} \qquad VDF_{①}' = \frac{\Delta x}{4\pi\sigma_0}\cdot\frac{1}{R'} \\ &\bullet\ VDF_{②③} = \frac{\Delta x}{4\pi\sigma_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x_i-x_j)^2 + y^2 + (z_i - z_j)^2}} \\ &VDF'_{②③} = \frac{\Delta x}{4\pi\sigma_0}\,\frac{1}{\sqrt{(x_i-x_j)^2 + y^2 + (z_j - z_j + 2h)^2}} \end{aligned}}$$

+ την περιπτωση $i = j$ απο τις διαφανειες

• Εχουμε την σχεση αρα $[I] = [VDF]^{-1}[\Phi]$ περνουμε

Έχοντας την σχέση $[I] = [VDF]^{-1}[\Phi]$ έχουμε

$$[I] = [VDF]^{-1}\cdot[I]\cdot\Phi$$

Θεωρώντας ένα γνωστό $\Phi_0 = 1$ θα έχουμε

$$[I_0] = [VDF]^{-1}[1]\Phi_0$$

$\rightsquigarrow$ Διαιρώντας κατά μέλη $\rightsquigarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} [I] &= \Phi\cdot[I_0] = \Phi\cdot[VDF]^{-1}[1] \\ \Phi &= \frac{I}{\sum_{j=1}^{N} I_{0j}\,\Delta_y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{[I] = \frac{I}{\sum_{j=1}^{N} I_{0j}\,\Delta_y}\cdot[VDF]^{-1}[1]}$$