ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ηλεκτρομαγνητικά πεδία Β

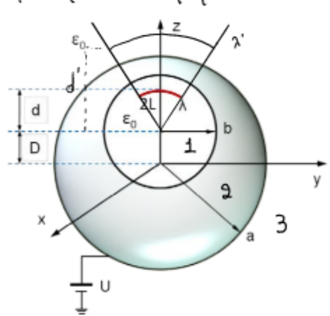
5ο εξάμηνο, Ακαδημαϊκή περίοδος 2020 – 2021

1η σειρά ασκήσεων

Όνομα : Κυριάκος Παναγιωτίδης (kyriakos.8p@gmail.com) **ΑΜ:** 03117206

Άσκηση 6

α) Χρησιμοποιωντας την μεθοδο των ειδωλων δημιουργουμε το ισοδυναμο προβλημα, το οποιο αποτελειται απο τρεις περιοχες με τρια διαφορετικα δυναμικα τα οποια υπολογιζονται παρακάτω.



Αρχικα εχουμε σιγουρα,

$$\Phi_2(x,y,z) = U \qquad r \le a \text{ και } r_\Sigma \ge b \quad (\text{Εκφώνηση})$$

$$\Phi_3(x,y,z) = U\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r > a$$

$$\boxed{r_\Sigma = \sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2}}$$

Για την περιοχη 1 θα εχουμε:

$$\Phi_1(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-d\sin\theta)^2+(z-d\cos\theta-D)^2}}d\theta + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+(y-d'\sin\theta)^2+(z-d'\cos\theta-D)^2}} + U \qquad r_\Sigma \le b$$

με $q = \lambda d$ και $q' = \lambda' d'$

Απο σχημα εχουμε ομως οτι $\lambda' = -\lambda\frac{d}{b}$ (αναστροφα λογω μεθοδο ειδωλων)

και $d' = \frac{b^2}{d}$. Αρα θα εχουμε:

$$\Phi_1(x,y,z) = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+(y-d\sin\theta)^2+(z-d\cos\theta-D)^2}} + \frac{(-\lambda b)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+(y-\frac{b^2}{d}\sin\theta)^2+(z-\frac{b^2}{d}\cos\theta-D)^2}} + V \quad r_\Sigma \leq b$$

B) Για το ηλεκτρικό πεδίο τώρα, παίρνοντας τις τιμές για λ', d', θ_{max} από πάνω θα έχουμε:

$$E_1(x,y,z) = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{(x\hat{i}_x+(y-d\sin\theta)\hat{i}_y+(z-d\cos\theta-D)\hat{i}_z)\cdot d\theta}{\left(\sqrt{x^2+(y-d\sin\theta)^2+(z-d\cos\theta-D)^2}\right)^3} + \frac{\lambda' d'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/d}^{+L/d}\frac{(x\hat{i}_x+(y-d'\sin\theta)\hat{i}_y+(z-d'\cos\theta-D)\hat{i}_z)d\theta}{\left(\sqrt{x^2+(y-d'\sin\theta)^2+(z-d\cos\theta-D)^2}\right)^3}$$

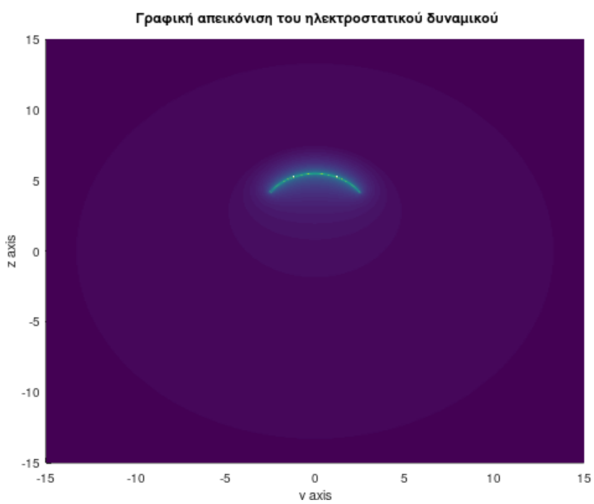
για $r_\Sigma \leq b$

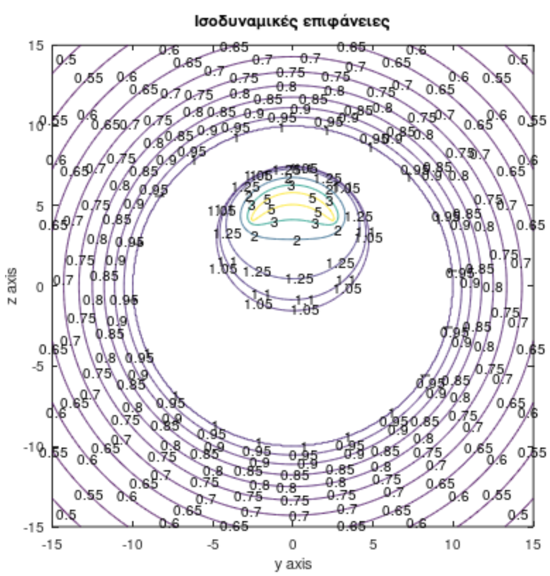
$E_2(x,y,z) = 0$ (εφόσον έχουμε σταθερό δυναμικό) για $r \leq a$ και $r_\Sigma \geq b$

$$E_3(x,y,z) = \frac{V_a}{r^3}\left(x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + z\hat{i}_z\right), \quad r > a$$

Με $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

γ) Οι δυο γραφικές παραστείς παρατίθενται παρακάτω:



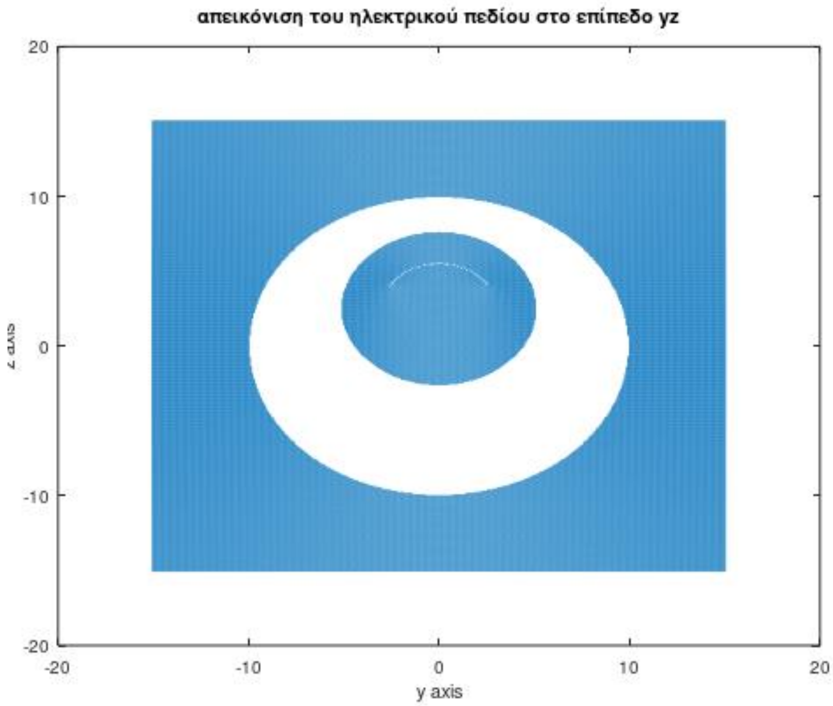


Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
#Set my values as given
a=10;
b=5;
d=3;
L=3;
D= 2.5;
U=1;
Theta = 1; #Theta = L/d =1

#create my linspaces
y=-15;
Y=15;
z=-15;
Z=15;
Dy=(Y-y)/400;
Dz=(Z-z)/400;
y1=y:Dy:Y;
z1=z:Dz:Z;
[Y,Z] = meshgrid(y1,z1);
Fdynamic = zeros(length(y1),length(z1));


#erwthma γ
#We create Φ
for i = 1:length(y1)
    for j = 1:length(z1)
        tempy=Y(i,j);
        tempz=Z(i,j);
        [func] = Fieldfunction(tempy,tempz,a,d,D,b,Theta);
        Fdynamic(i,j) = func;
    end
end
```

```
# surface
figure(U)
hold off
surface(Y,Z,Fdynamic), shading interp
xlabel('y axis');
ylabel('z axis');
title(' Γραφική απεικόνιση του ηλεκτροστατικού δυναμικού');
hold on

#contour
#take the values there were given
values=[0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1.0 1.05 1.10 1.25 2 3 5];
U=U+1;
figure(U);
hold off
[C,H] = contour(Y,Z,Fdynamic,values,'Linewidth',1);
clabel(C,H,values); # this is for labels
xlabel('y axis');
ylabel('z axis');
title('Ισοδυναμικές επιφάνειες');
axis equal
```

δ)



Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα με της χρήση της εντολής quiver:

```
#quiver
[Fieldx_help, Fieldy_help] = gradient(Fdynamic,Dy,Dz);
Fieldx = - Fieldx_help;
Fieldy = - Fieldy_help;

U = U+ 1;
figure(U)
hold off

Result = ((Fieldx).^2 + (Fieldy).^2).^(1/2);
quiver(Y,Z,Fieldx./Result,Fieldy./Result,0.5);
xlabel('y axis');
ylabel('z axis');
title('απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο yz');
```

Οι δυο συναρτήσεις Fieldfunction και Flieldfunction_help οι οποίες βρίσκονται σε ξεχωριστά αρχεία και καλούνται από τους παραπάνω κώδικες παρατίθενται παρακάτω:

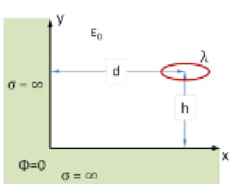
```
function [func] = Fieldfunction(yf,zf,a,d,D,b,Theta)
# That function creates our Φ
R = ((zf-D)^2+yf^2)^(1/2);
r  = (zf^2 + yf^2)^(1/2);
if (R<=b)
    func = integral(@(theta) Fieldfunction_help(theta,yf,zf,d,D,b),-Theta,Theta,'RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-12);
    func = func+1;
end

if (R>b && r<=a)
    func=1;
end
if (r>a)
    func=a/r;
end
endfunction
```

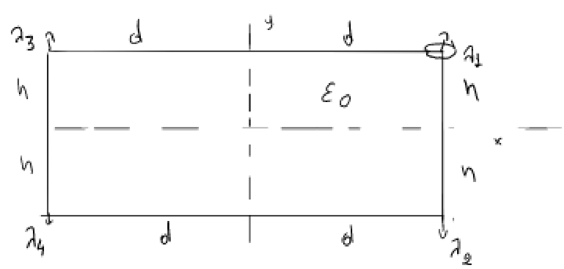
```
function [dphi]=Fieldfunction_help(theta,y,z,d,D,b)
ds=b^2/d;
R1 = ((y-d*sin(theta)).^2+(z-d*cos(theta)-D).^2).^(1/2);
R2= ((y-ds*sin(theta)).^2 + (z-ds*cos(theta)-D).^2).^(1/2);
dphi=d./R1 - b./R2;  % + 1;
endfunction
```

ε)

Άσκηση 7

Αρχικα σχεδιαζουμε το ισοδυναμο προβλημα χρησιμοποιωντας την μεθοδο των ειδωλων





α) $\vec{\Phi}_{(x,y,z)} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)d\varphi$

Οπου τα R_1, R_2, R_3, R_4 προκυπτουν αναλογα με την θεση των $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$:

$$R_1=\sqrt{(x-d)^2+(y-h)^2+z^2+a^2-2a[(x-d)\cos\varphi+z\sin\varphi]}$$

$$R_2=\sqrt{(x-d)^2+(y+h)^2+z^2+a^2-2a[(x-d)\cos\varphi+z\sin\varphi]}$$

$$R_3=\sqrt{(x+d)^2+(y+h)^2+z^2+a^2-2a[(x+d)\cos\varphi+z\sin\varphi]}$$

$$R_4=\sqrt{(x+d)^2+(y-h)^2+z^2+a^2-2a[(x+d)\cos\varphi+z\sin\varphi]}$$

β)

$$E(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z) = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\frac{1}{R_1^3}\int_0^{2\pi}\Big[(x-d-a\cos\varphi)i_x + (y-h)\,i_y + (z-a\sin\varphi)\,i_z\Big]d\varphi$$

$$+\frac{1}{R_2^3}\int_0^{2\pi}\Big[(x-d-a\cos\varphi)i_x + (y+h)\,i_y + (z-a\sin\varphi)\,i_z\Big]d\varphi$$

$$+\frac{1}{R_3^3}\int_0^{2\pi}\Big[(x+d-a\cos\varphi)i_x + (y+h)\,i_y + (z-a\sin\varphi)\,i_z\Big]d\varphi$$

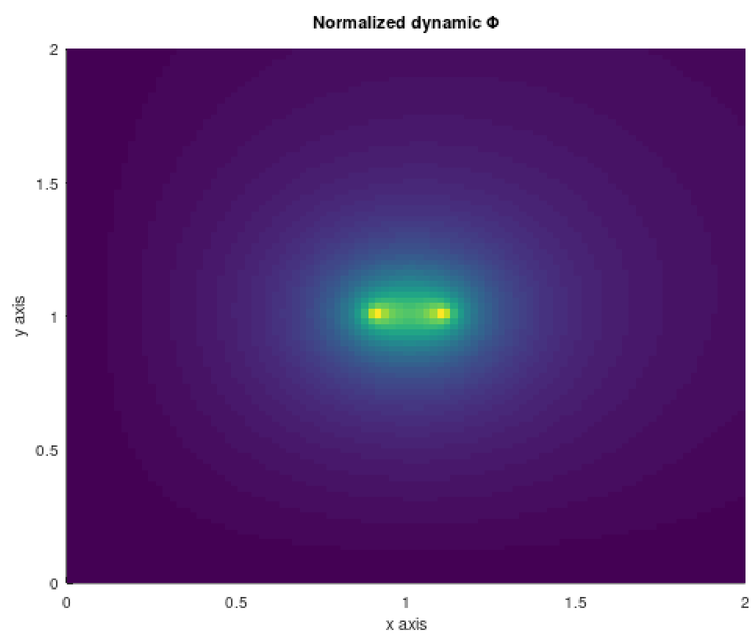
$$+\frac{1}{R_4^3}\int_0^{2\pi}\Big[(x+d-a\cos\varphi)i_x + (y+h)\,i_y + (z-a\sin\varphi)\,i_z\Big]d\varphi\Bigg]$$

Με R_1, R_2, R_3, R_4 οι προηγουμενες αμες

γ)

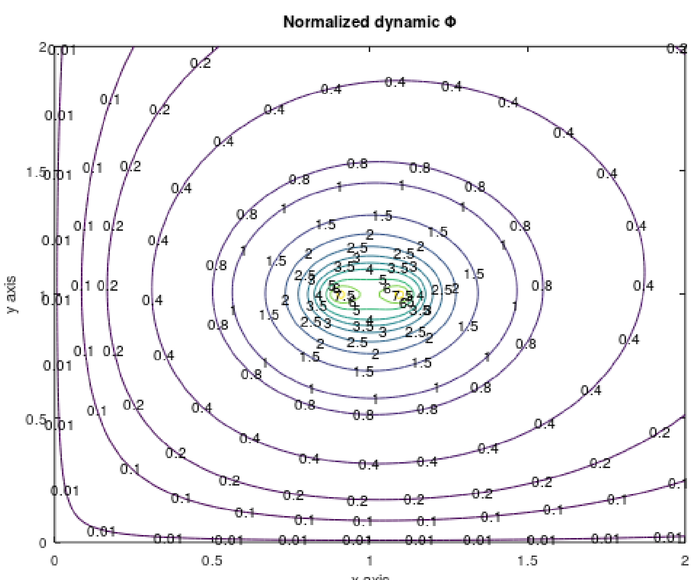
$$\sigma(x,z) = \varepsilon_0 E(x,z)^{y=0} = \frac{\lambda a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{h}{R_1^3} - \frac{h}{R_2^3} + \frac{h}{R_3^3} + \frac{h}{R_4^3}\Big]d\varphi$$

δ)



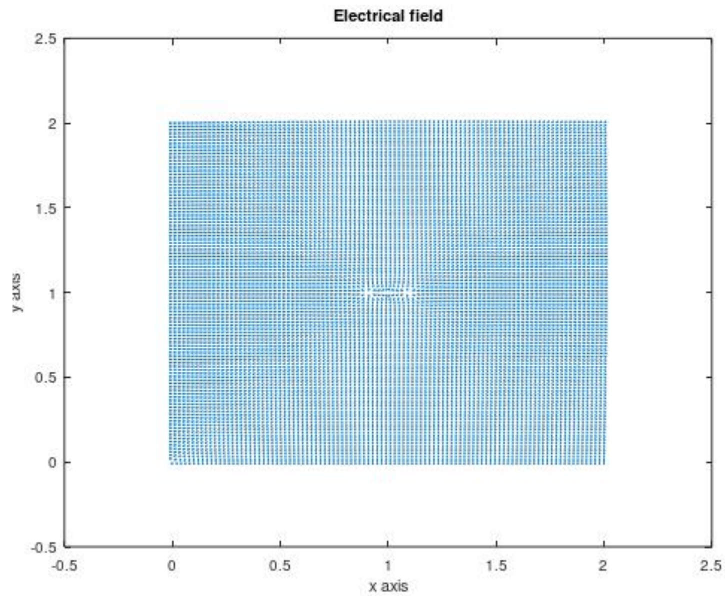
Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
a=0.1;
d=1;
h=1;
U=1;

#set my linspace
[X,Y] = meshgrid(linspace(0,2,100));

#4 integrals for every q and then add them to find Dynamic
D_1=a*integral(@(phi)1./Resitance(X,Y,d,h,a,phi,1),0,2*pi,'ArrayValued',true);
D_2=-a*integral(@(phi)1./Resitance(X,Y,d,-h,a,phi,1),0,2*pi,'ArrayValued',true);
D_3=a*integral(@(phi)1./Resitance(X,Y,-d,-h,a,phi,1),0,2*pi,'ArrayValued',true);
D_4=-a*integral(@(phi)1./Resitance(X,Y,-d,h,a,phi,1),0,2*pi,'ArrayValued',true);
D = D_1+D_2+D_3+D_4;

#prinf surface
hold off
figure(U)
surface(X,Y,D,'LineStyle','None');
xlabel('x axis');
ylabel('y axis');
title('Normalized dynamic Φ');
```



Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
#print contour
U=U+1;
figure(U)
#given values
cont = [0.01 0.1 0.2 0.4 0.8 1.0 1.5 2 2.5 3 3.5 4 5 6 7.5];
[C,H] = contour(X,Y,D,cont,'Linewidth',1);
xlabel('x axis');
ylabel('y axis');
title('Normalized dynamic Φ');
hold on;
clabel(C,H,cont);  #this is for labels in figure 2
hold on
```



Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον παρακάτω κώδικα:

```
#print quiver
[Fieldx_help,Fieldy_help]=gradient(D,0.01,0.01);
Fieldx = - Fieldx_help;
Fieldy = - Fieldy_help;

U = U + 1;           #inc U
figure(U)
hold off
Result = ((Fieldx).^2 + (Fieldy).^2).^(1/2);

quiver(X,Y,Fieldx./Result,Fieldy./Result,0.5)
xlabel('x axis');
ylabel('y axis');
title('Electrical field');
```

Η συνάρτηση Resistance η οποίες βρίσκετε σε ξεχωριστό αρχείο και καλείται από τους παραπάνω κώδικες παρατίθενται παρακάτω:

```
function R = Resitance(x,y,d,h,a,phi,p)

    R = (((x-d).^2+(y-h).^2+a^2-2*a.*(x-d).*cos(phi)).^(p/2));

endfunction
```

(δημιουργήθηκε για να διευκολύνει την δημιουργία του Φ)

*Οι συνολικοί κώδικες ως κείμενο και των δυο ασκήσεων παρατίθενται στα παρακάτω links

1: https://1drv.ms/t/s!AiX-uN5KrMaDiX9lHO8c4qADH4ek?e=tnPcZM

2: https://1drv.ms/t/s!AiX-uN5KrMaDigA8qkW5AYKJ7_O8?e=iIOZPd