ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ηλεκτρομαγνητικά πεδία Β

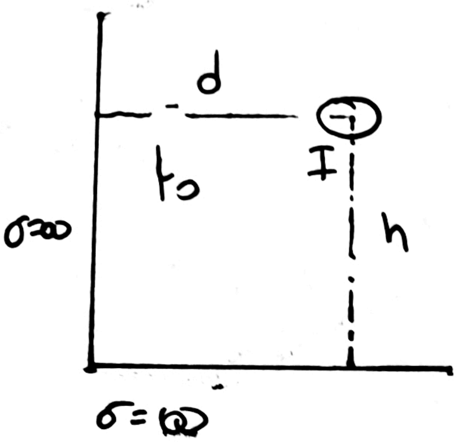
5ο εξάμηνο, Ακαδημαϊκή περίοδος 2020 – 2021

3η σειρά ασκήσεων

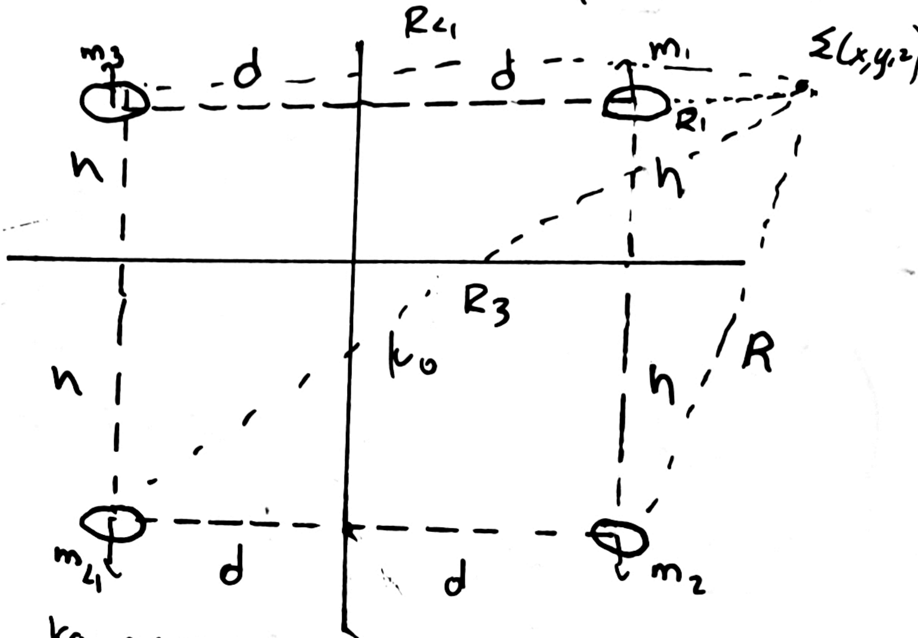
Όνομα : Κυριάκος Παναγιωτίδης (kyriakos.8p@gmail.com)

ΑΜ: 03117206

Ασκηση 8



Για την επιλυση του προβληματος πρεπει να το αναγουμε στο ισοδυναμο του χρησιμοποιωντας την θεωρια του κατοπτρισμου. (Θεωρια ειδωλων)



Εστω Σ ενα τυχαιο σημειο του χωρου οι αντιστοιχες αποστασεις προκυπτουν γεωμετρικα

$$R_1 = \sqrt{(x-d)^2+(y-h)^2+z^2}$$
$$R_2 = \sqrt{(x-d)^2+(y+h)^2+z^2}$$
$$R_3 = \sqrt{(x+d)^2+(y-h)^2+z^2}$$
$$R_4 = \sqrt{(x+d)^2+(y+h)^2+z^2}$$

και αντιστοιχα τα διανυσματα του:

$$\vec{R}_1 = (x-d)\cdot i_x + (y-h)\, i_y + z\cdot i_z \;\ldots$$

α) Εφοσον στο ισοδυναμο προβλημα εχουμε 4 μαγνητικα διπολα το συνολικο διανυσματικο δυναμικο θα ειναι:

$$A(x>0,y>0,z>0) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Επισης επειδη το διπολο εχει την μορφη της περιφερειας ενος κυκλου το αντιστοιχο $\vec{m} = \pi a^2 I\, i_y$ Αρα. ξερουμε οτι

$$A_1 = \frac{\mu_0 \cdot \vec{m} \times \vec{R}}{4\pi R_1^3} = \frac{\mu_0 \cdot \pi a^2 I}{4\pi R_1^3} \cdot \left(-(x-d)\cdot \overbrace{(i_x \times i_y)}^{i_z} + z\cdot \overbrace{(i_z \times i_y)}^{i_x}\right)$$

$* \; i_y \times i_y = 0$

Αντιστοιχα υπολογιζονται και τα υπολοιπα αρα το συνολικο δυναμικο θα ειναι

$$A = \frac{\mu_0 \cdot \pi a^2 \cdot I}{4\pi}\left[\left(\frac{z}{R_1^3} - \frac{z}{R_2^3} + \frac{z}{R_3^3} - \frac{z}{R_4^3}\right) i_x + \left(-\frac{x-d}{R_1^3} + \frac{x-d}{R_2^3} - \frac{x+d}{R_3^3} + \frac{x-d}{R_4^3}\right)\right.$$

(B) Αντιστοιχα με πριν παρεχουμε 4 διπολα τα οποια δρουν παραλληλα στο συνολικο μαγνητικο πεδιο. Θα ειναι:

$$H(x>0, y>0, z>0) = H_1 + H_2 + H_3 + H_4.$$

Αρα για το καθε ενα ξεχωριστα θα εχουμε:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{i}_R)\hat{i}_R - \vec{m}}{R_1^3}\right)}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot R_1^3} \cdot \left(3 \cdot (\vec{m} \cdot i_R) i_R - \vec{m}\right) *$$

* Απο τα παραπανω γνωριζουμε οτι για $\pi a^2 I = m_0$

$$i_R = \left[\frac{x-d}{R_1} i_x + \frac{y-h}{R_1} i_y + \frac{z}{R_1} i_z\right]$$

$$\vec{m} \cdot i_R = \cancel{\frac{m_0 \cdot (y+h)}{R_1}} \quad m_0 \cdot i_y \cdot i_R = \frac{m_0 \cdot (y-h)}{R_1} + 0 + 0$$

$$\vec{m} = m_0 i_y$$

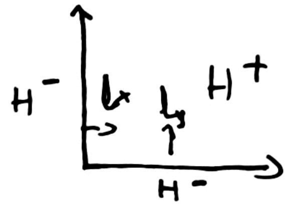
Αρα τελικα εχουμε

$$H_1 = \frac{1}{4\pi R_1^3} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{m_0 \cdot (y-h)}{R_1}\right) \cdot \left[\frac{x-d}{R_1} i_x + \frac{y-h}{R_1} i_y + \frac{z}{R_1} i_z\right] - m_0 i_y\right)$$

Με αντιστοιχο τροπο (και τα σωστα προσημα λογω ακτινων) προκυπτουν και τα υπολοιπα H_2, H_3, H_4.

$$H_2 = \frac{1}{4\pi R_2^3}\left(3\left(-\frac{m_0 (y-h)}{R_2}\right) \cdot \left[\frac{x-d}{R_2} i_x + \frac{y+h}{R_2} i_y + \frac{z}{R_2} i_z\right] + m_0 i_y\right)$$

γ) Γνωρίζουμε ότι από την οριακή συνθήκη του μαγνητικού πεδίου θα ισχύει ότι: $\vec{i}_n \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{K}$



Επίσης έχουμε 2 επιφάνειες

$$\left.\begin{aligned} &\text{Επιφάνεια } x=0 \Rightarrow \vec{i}_n = \vec{i}_x,\ \vec{K}_1 \\ &\text{Επιφάνεια } y=0 \Rightarrow i_n = i_y,\ \vec{K}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος}$$

Άρα ισχύει ότι:

$$\vec{K}_1 = \vec{i}_x \times (\vec{H}(x=0,y,z))$$

$$\vec{K}_2 = \vec{i}_y \times (\vec{H}(x,y=0,z))$$

Επιπλέον υπολογίζουμε τις αποστάσεις ανάμεσα στα δίπολα οι οποίες θα επηρεάζουν τα K ανάλογα την θέση τους σε σχέση με τα $\hat{J}_x, \hat{J}_y$

Για την $\vec{K}_1$:

$$R_{13} = \sqrt{d^2 + (y-h)^2 + z^2}$$

$$R_{24} = \sqrt{d^2 + (y+h)^2 + z^2}$$

Για την $\vec{K}_2$:

$$R_{12} = \sqrt{(x-d)^2 + h^2 + z^2}$$

$$R_{34} = \sqrt{(x+d)^2 + h^2 + z^2}$$

Επομένως

$$\vec{K}_1 = \vec{i}_x \times (H_1 + H_2 + H_3 + H_4) \Rightarrow$$

$$\vec{K}_1 = (H_{1y} + H_{2y} + H_{3y} + H_{4y})\hat{i}_z - (H_{1z} + H_{2z} + H_{3z} + H_{4z}) i_y$$

$$H_{1y} = \frac{1}{4\pi R_1^3}\left[3\frac{m_0(y-h)}{R_1}\frac{y-h}{R_1} - m_0\right) \qquad H_{1z} = \frac{1}{4\pi R_1^3}\left(3\frac{m_0(y-h)}{R_1}\frac{z}{R_1}\right)$$

$\vdots$

υπολογίζονται και τα υπόλοιπα αντίστοιχως

Άρα συνολικά

$$\vec{K}_1 = \left\{\frac{2}{4\pi R_{13}^2}\left[\frac{3m_0(y-h)^2}{R_{13}^2} - m_0\right] + \frac{2}{4\pi R_{24}^3}\left[-3\frac{m_0(y+h)^2}{R_{24}^2} + m_0\right]\right\}\hat{i}_z -$$

$$-\left\{\frac{2}{4\pi R_{13}^2}\cdot 3\frac{m_0(y-h)}{R_{13}}\cdot\frac{z}{R_{13}} - \frac{2}{4\pi R_{24}^3}\cdot 3\frac{m_0(y+h)}{R_{24}}\frac{z}{R_{24}}\right\}\hat{i}_y$$

Με αντιστοιχο τροπο υπολογιζουμε και το K_z

$$K_z = (H_{1z} + H_{2z} + H_{3z} + H_{4z})\hat{i}_x - (H_{1x} + H_{2x} + H_{3x} + H_{4x})\hat{i}_z$$

και παλι αντιστοιχα με πριν προκυπτει

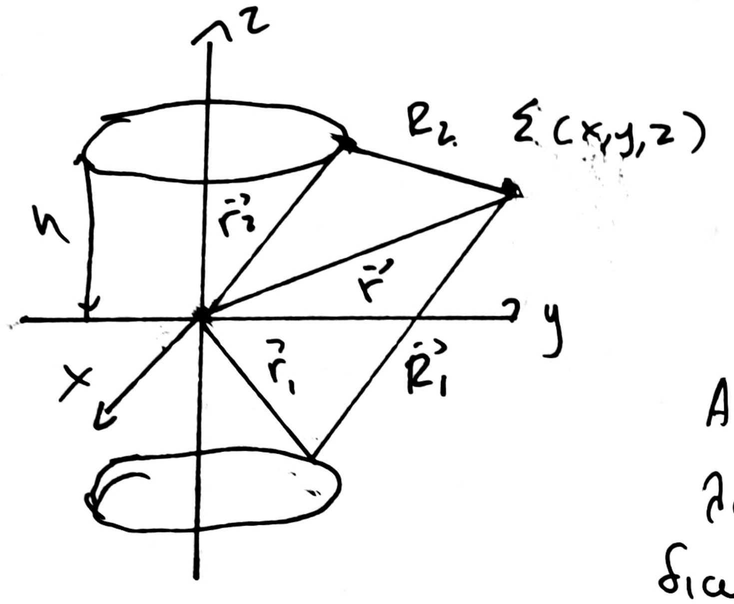
$$H_{1z} = \frac{1}{4\pi R_1}\frac{3m_0(y-h)}{R_1}\cdot\frac{z}{R_1} \quad \text{και} \quad H_{1x} = \frac{1}{4\pi R_1^3}3\cdot\frac{m_0(y-h)}{R_1}\frac{(x-d)}{R_1}$$

$\vdots$ κτλ

Οποτε το K_z συνολικα επειτα απο πραξεις προκυπτει:

$$\vec{K}_z = \frac{3m_0\cdot 2h}{4\pi}\left[\left(\frac{x-d}{R_{12}^5} + \frac{x+d}{R_{34}^5}\right)\hat{i}_z - \left(\frac{z}{R_{12}^5} + \frac{z}{R_{34}^5}\right)\hat{i}_x\right)$$

Ασκηση 9



Γενικα γνωριζουμε απο την θεωρια το δυναμικο για εναν κυκλικο αγωγο ειναι $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_C \frac{I\,dl}{R}$

Αρα στην δικη μας περιπτωση λογω επαλληλιας το συνολικο διανυσματικο δυναμικο θα ειναι $A = A_1 + A_2$

a)

Επισης απο το σχημα παρατηρουμε οτι

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1 &= a\cos\varphi\,\hat{i}_x + a\sin\varphi\,\hat{i}_y - h\hat{i}_z \\ \vec{r}_2 &= a\cos\varphi\,\hat{i}_x + a\sin\varphi\,\hat{i}_y + h\hat{i}_z\end{aligned}\right\} r_\not{}$$

$$\vec{r} = x\,i_x + y\,i_y + z\,i_z$$

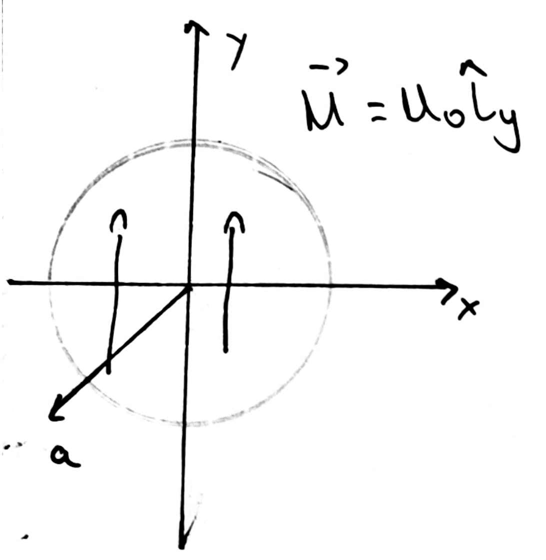
$$R_1 = \sqrt{(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2+(z+h)^2} \Rightarrow \vec{R}_1 = (x-a\cos\varphi)\,i_x + (y-a\sin\varphi)\,i_y + (z+h)\,i_z$$

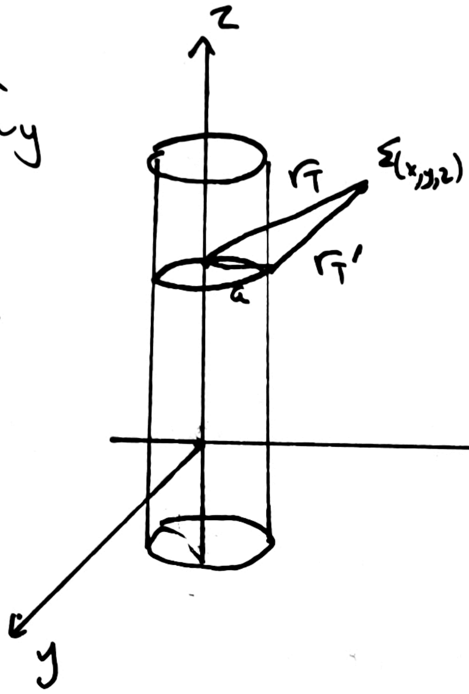
$$R_2 = \sqrt{(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2+(z-h)^2} \Rightarrow \vec{R}_2 = \dots$$

Αρα το τελικο δυναμικο θα ειναι

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I a \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\sin\varphi\, i_x + \cos\varphi\, i_y)\,d\varphi}{R_1} + \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi\,\hat{i}_y - \sin\varphi\,\hat{i}_x)\,d\varphi}{R_2} \right]$$

Ασκηση 10





Εχουμε κυλινδρικο μαγνητη μαγνητισμενη. Σκοπος μας ειναι και αναγουμε το προβλημα σε ενα ηδη γνωστο για την επιλυση του.

Στο προβλημα μας ενδιαφερουν μονο για τα επιφανειακα ρευματα που αναπτυσσονται και οχι για το εσωτερικο. Εφοσον εχουμε απειρο κυλινδρο $\vec{K}_m = -M_0(\hat{i}_{r_T} \times \hat{i}_\varphi)$ ομως λογω της συμπληρωματικοτητας των γωνιων $K_m = -M_0 \cos\varphi' \hat{i}_z$. (παραλληλος ως προς z)

Η αναγωγη του προβληματος θα γινει αν χωρισουμε τον κυλινδρο σε πολλες μικρες φετες και ~~...~~ ξεροντας το ~~ρευμα~~ πεδιο σε καθε μια απο αυτες, να τις προσθεσουμε για το τελικο αποτελεσμα.

Σχηματικα με τα τοπολογικα διανυσματα ξερουμε οτι

$$r_T' = \sqrt{r_T^2 + a^2 - 2ar_T\cos(\varphi - \varphi')}$$ και αντιστοιχα $\vec{r}_T = \dots$

Για την μια φετα τωρα το προβλημα ειναι γνωστο

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r_T}\right)$$ Επομενως συνολικα θα εχουμε

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{2\pi}(K_m dl)\ln\left[\frac{a}{r_T}\right]\hat{i}_z - \frac{\mu_0 M_0 a}{2\pi}\cos\varphi' d\varphi' \ln\left(\frac{a}{r_T}\right)\hat{i}_z$$

Άρα το συνολικό A. ~~θα είναι~~ για όλο το κύλινδρο θα είναι:

$$\vec{A} = \int d\vec{A} = -\frac{\mu_0 M_0 a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi' \ln\left[\frac{a}{r_T'}\right] d\varphi'$$

B) Εφόσον γνωρίζουμε το δυναμικό A το πεδίο B υπολογίζεται ως $B = \nabla \times A$. Το z δεν επηρεάζει άρα

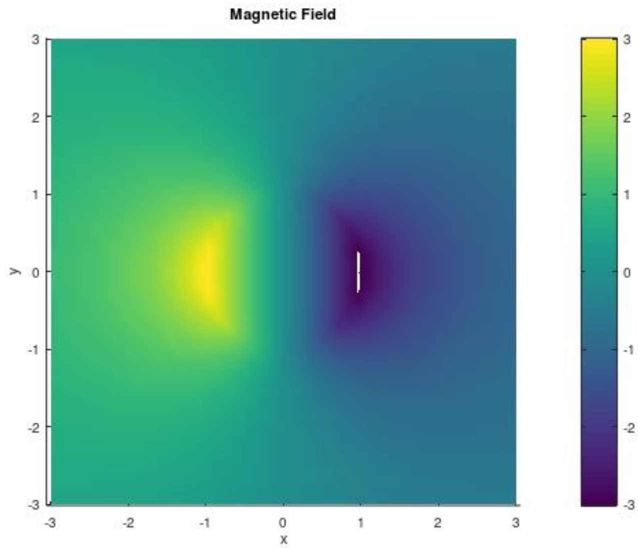
$$(1)\quad B = \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{i}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{i}_y.$$ με A_z το παρακάτω:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 M_0 a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left[-\frac{(y - a\sin\varphi')}{r_T^2}\right] d\varphi'$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\mu_0 M_0 a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left[\frac{x - a\cos\varphi}{r_T^2}\right] d\varphi'$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε την τελική μορφή του B.

c)Παρακάτω παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις και οι αντίστοιχοι κώδικες που τις παράγουν :



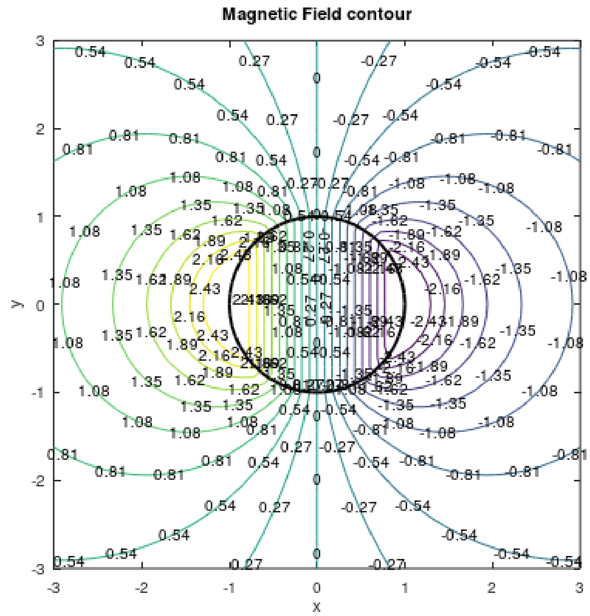

```
%Given
a=1;
M0=1;
m0=4*pi*10^-7;

X=6*a/50;
Y=6*a/50;
xa=-3*a:X:3*a;
ya=-3*a:Y:3*a;
[X,Y]=meshgrid(xa,ya);

for i=1:length(xa)
    for j=1:length(ya)
        x=X(i,j);
        y=Y(i,j);
        [TH,R,Z]=cart2pol(x,y,1);
        A(i,j)=-a*integral(@(phi2) fun(phi2,a,R,TH),0,2*pi);
    end
end

th=0:2*pi/50:2*pi;
xc=a*cos(th);
yc=a*sin(th);
```

```
% surface
figure(1)
surface(X,Y,A);
hold on
shading interp
colorbar
axis equal
title('Magnetic Field')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

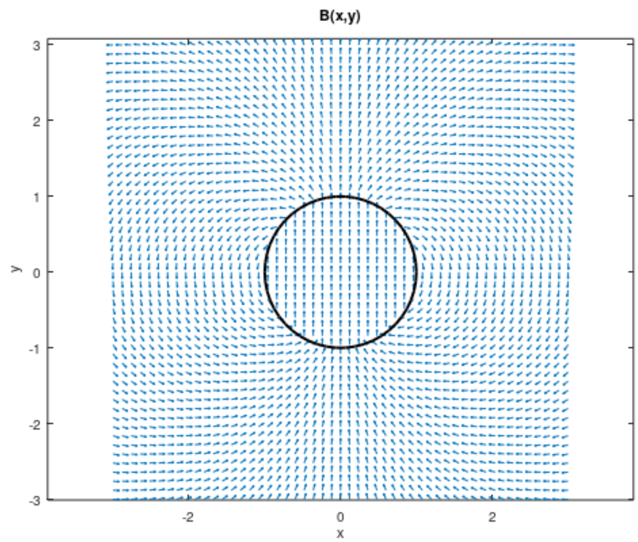



```
%contour
figure(2)
cont=2.7*[-0.9:0.1:0.9]
[Conhelp,H]=contour(X,Y,A,cont,'LineWidth',1);
axis equal
hold on
plot(xc,yc,'LineWidth',2,'Color','k')
title('Magnetic Field contour')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Η συνάρτηση Fun που αναφέρεται είναι σε ξεχωριστό αρχείο :

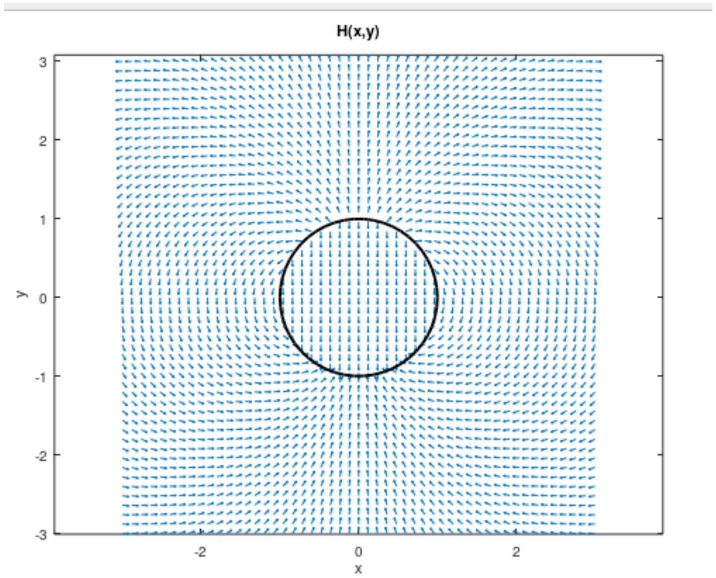
```
function y=fun(phi2,a,rt,phi)
y=cos(phi2).*log(a./(rt.^2 +a^2 -2.*rt.*a*cos(phi-phi2)).^(1/2));
end
```

d) Παρακάτω παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις και οι αντίστοιχοι κώδικες που τις παράγουν :




```
%d erwthma
for i=1:length(xa)
    for j=1:length(ya)
        x=X(i,j);
        y=Y(i,j);
        [TH,R,Z]=cart2pol(x,y,1);
        Fieldx(i,j)=(m0*M0/(2*pi))*a*integral(@(phi2) dhelpx(phi2,a,R,TH,y),0,2*pi);
        Fieldy(i,j)=-(m0*M0/(2*pi))*a*integral(@(phi2) dhelpy(phi2,a,R,TH,x),0,2*pi);
        if (R>a)
            Hx(i,j)=Fieldx(i,j)/m0;
            Hy(i,j)=Fieldy(i,j)/m0;
        else Hx(i,j)=Fieldx(i,j)/m0;
            Hy(i,j)=Fieldy(i,j)/m0-M0;
        end
    end
end
```

```
%quiver
figure(3)
RR=sqrt(Fieldx.^2+Fieldy.^2);
q=quiver(X,Y,Fieldx./RR,Fieldy./RR,0.5);
axis equal
hold on
plot (xc,yc,'LineWidth',2,'Color','k')
title('B(x,y)')
xlabel('x')
ylabel('y')
hold off
```




```
%2nd quiver
figure(4)
RR=sqrt(Hx.^2+Hy.^2);
q=quiver(X,Y,Hx./RR,Hy./RR,0.5);
axis equal
hold on
plot (xc,yc,'LineWidth',2,'Color','k')
title('H(x,y)')
xlabel('x')
ylabel('y')
hold off
```

Οι συναρτήσεις Dhelpx, Dhelpy που αναφέρονται είναι σε ξεχωριστά αρχεία :

```
function y=dhelpx(phi2,a,rt,phi,yy)
y=((yy-a.*sin(phi2)).*cos(phi2))./(rt.^2+a^2-2.*rt.*a.*cos(phi-phi2));
end
```

```
function y=dhelpy(phi2,a,rt,phi,xx)
y=((xx-a.*cos(phi2)).*cos(phi2))./(rt.^2+a^2-2.*rt.*a.*cos(phi-phi2));
end
```