Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему «Класи множин»

Виконав:	студент групи МП41, спеціальність 113 – Прикладна математика, освітньо-професійна програма «Прикладна математика» Петренко І.В.
Науковий керівник:	доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри прикладної математики Іваненко П.К.
Рецензент:	кандидат техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету радіоелектроніки Стеценко М.В.

Київ — 2025 рік

Анотації

Петренко Іван Васильович. Класи множин. Будь ласка, помістіть тут текст вашої анотації українською. Текст анотації не повинен містити формул або посилань на текст роботи (тобто бути повністю автономним). Це потрібно для того, щоб анотацію можна було завантажити в інтернет і читати окремо від роботи.

Ключові слова: множина, кільце, алгебра, сигма-алгебра, борельова множина

Petrenko Ivan. Classes of Sets. Please, put the text of your abstract in English here. The text of the abstract should not contain formulae or references (i.e. it should be completely autonomous). This is necessary for loading it on the Internet and for reading it separately from the work.

Keywords: set, ring, algebra, sigma-algebra, Borel set.

Зміст

Вступ

Цей приклад оформлення математичного тексту за допомогою системи LaTeX, який може бути використаним для оформлення курсової або кваліфікаційної роботи, було розроблено Л.В. Фардиголою, професором кафедри прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

Де взяти LaTeX?

LaTeX для Windows, macOS, Linux

MikTeX	https://miktex.org/
MacTeX	https://tug.org/mactex/
TeXLive	https://www.tug.org/texlive/
TeXstudio	https://www.texstudio.org/
TeXmaker	https://www.xm1math.net/texmaker/

LaTeX online (без встановлення на комп'ютер)

Overleaf	https://www.overleaf.com/

LaTeX : довідкові ресурси

Overleaf	https://www.overleaf.com/learn
WIKIBOOKS: LaTeX	https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX

Структура документа

Цей документ набраний за допомогою системи LaTeX. Він складається з головного файлу thesis.tex, який завантажує і монтує текст з файлів, які містять частини тексту. Розбиття тексту на частини не є обов'язковим, але це є дуже зручним, зокрема, допомагає в навігації в тексті і надає змогу працювати з лише частиною файлів, а, отже, і з відповідною частиною тексту. Крім головного файлу при побудові цього документу використовуються такі файли:

(i) titlepage*.tex,
(ii) abstracts.tex,
(iii) intro.tex,
(iv) chap-1.tex,
(v) chap-2.tex,
(vi) chap-3.tex,
(vii) conclusions.tex,
(viii) bibliography.tex,
(ix) файли fig*.pdf, які містять рисунки (розташовані в теці pictures).

Усі ці файли, а також допоміжний файл th-sty.sty, треба помістити в одну і ту саму теку. Рисунки можна зібрати в окрему підтеку, і в цьому разі треба в преамбулі (тобто в тексті перед \begin{document}) явно вказати путь до цієї підтеки командою \graphicspath{ {<path>/} }, де замість <path> підставити відповідну путь, наприклад, в даному випадку рисунки зібрано у теці pictures, тому ця команда виглядає так: \graphicspath{ {pictures/} } (див. преамбулу головного файлу thesis.tex). Іноді редактор, який ви використовуєте для набору та виправлення файлів, може самостійно визначати головний файл, але це відбувається не завжди, тому краще в налаштуваннях примусово зафіксувати цей файл на початку роботи. У разі роботи на overleaf.com усі ці файли (з підтекою рисунків включно) треба запакувати в zip-архів і завантажити як новий проєкт на overleaf.com.

Для правильного оформлення роботи треба вибрати титульну сторінку. Для студентів 4 курсу треба прибрати знак відсотку (%) перед командою \input{titlepage-BACHELOR} при цьому перед іншими двома командами мають стояти знаки відсотку (%). Для студентів 6 курсу ОПП треба прибрати знак відсотку (%) перед командою \input{titlepage-OPP} при цьому перед іншими двома командами мають стояти знаки відсотку (%). Для студентів 6 курсу ОНП треба прибрати знак відсотку (%) перед командою \input{titlepage-ONP} при цьому перед іншими двома командами мають стояти знаки відсотку (%). Свої дані (прізвища та ініціали автора (студента), наукового керівника та рецензента, а також пов'язану з ними інформацію) треба набрати в той файл, перед командою завантаження якого не стоїть знак відсотку (%), тобто у файл titlepage-BACHELOR.tex для студентів 4 курсу, у файл titlepage-OPP.tex для студентів 6 курсу ОПП, у файл titlepage-ONP.tex для студентів 6 курсу ОНП.

Зверніть увагу на те, що зміст формується автоматично при правильному наборі заголовків частин тексту. Для заголовків не слід використовувати ручне форматування, наприклад, за допомогою команд центрування, масштабування та зміни шрифту. Ключовою вимогою правильної побудови документа є використання для заголовків спеціальних команд:

1) \chapter{<text>},
2) \section{<text>},
3) \subsection{<text>},
4) \subsubsection{<text>},
5) \paragraph{<text>}.

Кожна з наведених вище команд форматування заголовків має варіант із "зірочкою" (до прикладу, \section*{<text>}). У цьому разі такий підрозділ не отримає номера. У розділі, який Ви зараз читаєте (тобто у вступі), було використано саме такі команди для заголовків. Далі в основному тексті використано варіанти команд без "зірочки" для форматування заголовків.

Для того, щоб почати новий абзац, треба вставити хоча б один порожній рядок (кількість рядків ні на що не впливає), і в жодному разі не слід використовувати команду \\.

Для набору тверджень типу теорем, лем, означень тощо слід використовувати спеціальні оточення: {theorem} для теорем, {corollary} для наслідків, {statement} для тверджень, {lemma} для лем, {definition} для означень, {problem} для задач, {remark} для зауважень, {example} для прикладів. До прикладу, набір теореми може виглядати так:

```
\begin{theorem}[Піфагора]
\label{pith}
Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.
\end{theorem}
```

що в тексті має такий вигляд:

Теорема 0.1 (Піфагора). Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

Текст в квадратних дужках і, власне, самі дужки не є обов'язковими і додаються за необхідності додати заголовок теореми. Інші приклади набору теорем, лем, наслідків тощо та використання перехресних посилань щодо них див. у розділах 1 і 2.

Для посилання на всі нумеровані об'єкти використовуються команди \ref{<label>} і \eqref{<label>} (остання для посилання на формули), які разом з командою \label{<label>} генерують перехресні посилання, після клацання на які здійснюється перехід на цитований об'єкт. Тут <label> є унікальною міткою (мітки не повинні повторюватися впродовж усього тексту), якою ми маркуємо кожен нумерований об'єкт і яку використовуємо для посилання на нього. Для створення міток використовуються довільні послідовності латинських літер і арабських цифр. До прикладу, в теоремі Піфагора було створено мітку pith командою \label{pith}, тому для посилання на цю теорему ми використовуємо такий текст:

Розглянемо теорему Піфагора (див. теорему \ref{pith}).

що в тексті має такий вигляд:
Розглянемо теорему Піфагора (див. теорему 0.1).

Список літератури оформлюється за зразком, наведеним у файлі bibliography.tex. Кожний елемент цього списку повинен починатися командою \bibitem{<cite-label>}, де мітка <cite-label> є унікальною і не повинна збігатися ані з мітками інших елементів списку літератури, ані з мітками інших нумерованих об'єктів впродовж усього тексту. Для посилання на елемент цього списку використовується команда \cite{<cite-label>}. До прикладу, для посилання на підручник В.М. Радченка, який в списку літератури задається командою \bibitem{VR}, використовуємо команду \cite{VR}, що в результаті дає такий текст: [3]. Інші приклади використання перехресних посилань див. у розділах 1 і 2.

Перед початком роботи в LaTeX дуже бажано ознайомитися с основними принципами створення документів, наприклад, на https://www.overleaf.com/learn або https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX.

Розділ 1

Основні класи множин

Нехай X є фіксованою непорожньою множиною, яку називатимемо універсальною. Через 2^X позначимо множину усіх підмножин X (включаючи порожню множину і саму множину X).

1.1. Означення основних класів множин

Означення 1.1. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається кільцем, якщо

(i) $\forall A \in \mathcal{H}\ \forall B \in \mathcal{H} \quad A \cup B \in \mathcal{H}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{H}\ \forall B \in \mathcal{H} \quad A \setminus B \in \mathcal{H}$.

Означення 1.2. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається алгеброю, якщо

(i) $\mathcal{H}$ є кільцем;

(ii) $X \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.3. $\mathcal{H} = 2^X$ є алгеброю.

Приклад 1.4. Нехай X є довільною нескінченною множиною. Тоді клас усіх її скінченних підмножин є кільцем.

Приклад 1.5. Нехай X є довільною нескінченною множиною. Тоді клас усіх її скінченних підмножин та їх доповнень є алгеброю.

Наступне твердження дає нам деякі властивості кілець.

Твердження 1.6. Нехай $\mathcal{K}$ є кільцем. Тоді

1. $\varnothing \in \mathcal{K}$;
2. $\forall A \in \mathcal{H}\ \forall B \in \mathcal{H} \quad A \cap B \in \mathcal{H}$;
3. $\forall \{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{K} \quad \left(\bigcup\limits_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}\ \wedge\ \bigcap\limits_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K} \right)$.

Доведення. 1. Оскільки $\mathcal{K} \neq \varnothing$, то знайдеться $A \in \mathcal{K}$, отже, $\varnothing = A \setminus A \in \mathcal{K}$ за умовою (ii) означення 1.1.

2. Маємо $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. За умовою (ii) означення 1.1 різниця елементів кільця належить кільцю (див. рис. 1.1).

3 одразу випливає з умови (i) означення 1.1 і щойно доведеної властивості 2. $\square$

Означення 1.7. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається півкільцем, якщо

(i) $\forall A \in \mathcal{H}\ \forall B \in \mathcal{H} \quad A \cap B \in \mathcal{H}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{H} \forall B \in \mathcal{H}\ \exists \{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H} \quad \left(A \setminus B = \bigcup\limits_{k=1}^n C_k\ \wedge\ \{C_k\}_{k=1}^n \text{ є неперетинними} \right)$.

Ми називаємо множини $\{C_k\}_{k=1}^n \subset X$ неперетинними, якщо

$$\forall k = \overline{1,n}\ \forall p = \overline{1,n} \quad \left(k \neq p \Rightarrow C_k \cap C_p = \varnothing \right).$$

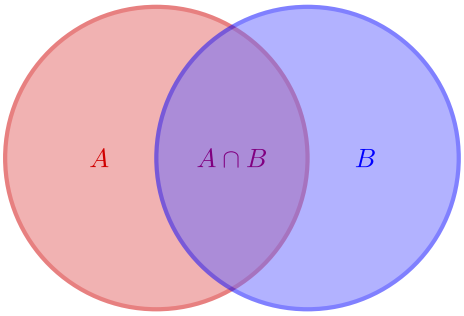

Рис. 1.1: Подання $A \cap B$.

Означення 1.8. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається півалгеброю, якщо

(i) $\mathcal{H}$ є півкільцем;

(ii) $X \in \mathcal{H}$.

Зазначимо, що якщо $\mathcal{P} \subset 2^X$ є півкільцем, то $\varnothing \in \mathcal{P}$. Дійсно, для довільної множини $A \in \mathcal{P}$ існують неперетинні множини $\{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{P}$, для яких

$$\varnothing = A \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} C_k,$$

що можливо лише для $C_k = \varnothing$, $k = \overline{1, n}$.

Приклад 1.9. Нехай

$$\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{P}_1$ є півкільцем для $X = \mathbb{R}$.

Зауваження 1.10. Для інтервалу $(a, b]$ завжди вважатимемо, що $a \leq b$ і $(a, a] = \varnothing$.

Розглянемо теорему про добуток кілець.

Теорема 1.11. Нехай X_1, X_2, ..., X_d є основними множинами і $\mathcal{H}_1 \subset 2^{X_1}$, $\mathcal{H}_2 \subset 2^{X_2}$, ..., $\mathcal{H}_d \subset 2^{X_d}$ є півкільцями. Тоді клас множин

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_d \\ &= \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d \mid A_1 \in \mathcal{H}_1 \wedge A_2 \in \mathcal{H}_2 \wedge \cdots \wedge A_d \in \mathcal{H}_d\} \end{aligned}$$

є півкільцем підмножин множини $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$.

Доведення. Перевіримо виконання умов означення 1.7 для $d = 2$. Клас $\mathcal{H}$ є непорожнім, оскільки непорожніми є класи $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$.

Нехай $A \in \mathcal{H}$ і $B \in \mathcal{H}$. Тоді $A = A_1 \times A_2$ і $B = B_1 \times B_2$, де $A_1 \in \mathcal{H}_1$, $A_2 \in \mathcal{H}_2$, $B_1 \in \mathcal{H}_1$, $B_2 \in \mathcal{H}_2$.

(i) Оскільки $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$ є півкільцями, то за означенням 1.7 маємо

$$A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Маємо (див. рис. 1.2)

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

отже, $A \cap B \in \mathcal{H}$.

(ii) Оскільки $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$ є півкільцями, то за означенням 1.7

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{k=1}^{n} C_k, \quad A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{i=1}^{j} D_i,$$

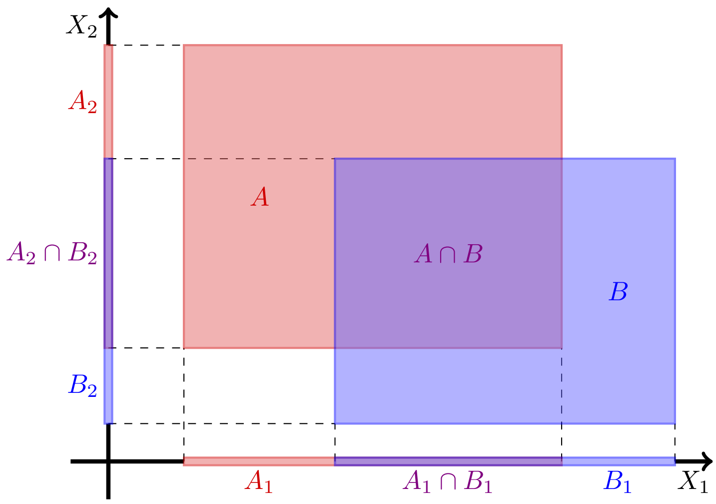

Рис. 1.2: Подання $A \cap B$.

де $\{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}_1$ і $\{D_i\}_{i=1}^j \subset \mathcal{H}_2$ є неперетинними. Оскільки (див. рис. 1.3)

$$A \setminus B = (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = \big((A_1 \setminus B_1) \times A_2\big) \cup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big),$$

то

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} (C_k \times A_2)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} \big((A_1 \cap B_1) \times D_i\big)\right)$$

Усі декартові добутки у правій частині цієї рівності належать $\mathcal{H}$ і є неперетинними, оскільки множини

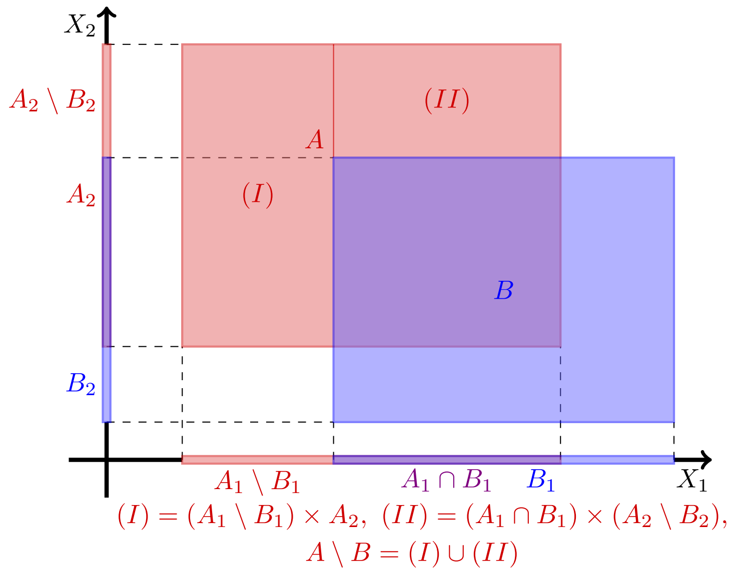

Рис. 1.3: Подання $A \setminus B$.

$\{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}_1$ і $\{D_i\}_{i=1}^j \subset \mathcal{H}_2$ є неперетинними.

Таким чином, ми перевірили виконання умов (i) і (ii) означення 1.7 для $d = 2$. Звідси одразу випливає і загальний випадок для довільного d. Теорему доведено. $\square$

Приклад 1.12. Нехай

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \bigtimes_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \,\middle|\, \forall k = \overline{1,d} \quad a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Клас $\mathcal{P}_d$ є півкільцем підмножин множини $X = \mathbb{R}^d$ за теоремою 1.11 про добуток кілець, оскільки $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_1$ (див. приклад 1.3).

Розглянуті класи множин пов'язані зі скінченними об'єднаннями і перетинами множин. Далі нам знадобляться ще й класи множин, пов'язані зі зліченними об'єднаннями і перетинами.

Означення 1.13. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається σ-кільцем, якщо

(i) $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H} \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{H}\ \forall B \in \mathcal{H} \quad A \setminus B \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.14. Нехай X є довільною нескінченною множиною. Тоді клас усіх її скінченних і зліченних підмножин є σ-кільцем.

Означення 1.15. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ називається σ-алгеброю, якщо

(i) $\mathcal{H}$ є σ-кільцем;

(ii) $X \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.16. Нехай X є довільною нескінченною множиною. Тоді клас усіх її скінченних і зліченних підмножин та їх доповнень є σ-алгеброю.

Приклад 1.17. Нехай X є довільною множиною. Тоді клас $\mathcal{H} = \{\varnothing, X\}$ є σ-алгеброю (її називають тривіальною).

Наступне твердження дає нам деякі властивості σ-кілець.

Твердження 1.18. Нехай $\mathcal{S}$ є σ-кільцем. Тоді

1. $\mathcal{S}$ є кільцем;
2. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S} \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Доведення. Для доведення властивості 1 маємо перевірити умову (i) означення 1.1. Для $A \in \mathcal{S}$ і $B \in \mathcal{S}$ за умовою (i) означення 1.15 маємо

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \cdots \in \mathcal{S}.$$

Оскільки другі умови в означеннях 1.1 і 1.15 збігаються, звідси випливає, що $\mathcal{S}$ є кільцем.

Властивість 2 випливає з умови (ii) означення 1.15 і подання (див. рис. 1.4)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \right) \in \mathcal{S}.$$

Теорему доведено. □

Означення 1.19. Послідовність множин $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається неспадною, якщо

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1}.$$

Це позначатимемо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$ і покладемо

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.1}$$

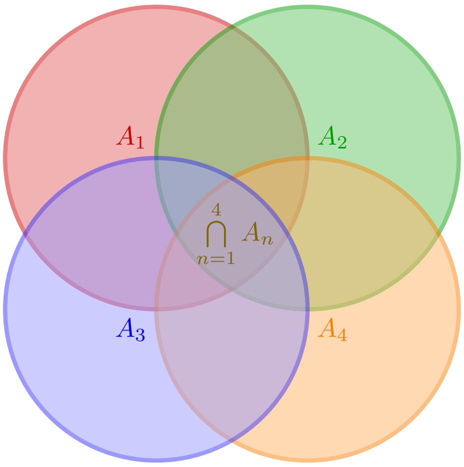

Рис. 1.4: Подання перетину множин.

Означення 1.20. Послідовність множин $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається незростальною, якщо

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \supset A_{n+1}.$$

Це позначатимемо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ і покладемо

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.2}$$

Означення 1.21. Послідовність множин називається монотонною, якщо вона є незростальною або неспадною.

Означення 1.22. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset X$ називається монотонним класом, якщо для будь-якої послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{H}$.

Розглянемо теорему про зв'язок між кільцем і монотонним класом.

Теорема 1.23. Нехай клас $\mathcal{H} \subset 2^X$ є кільцем і монотонним класом. Тоді $\mathcal{H}$ є σ-кільцем.

Доведення. Порівнюючи означення 1.1 (кільця) і 1.15 (σ-кільця) бачимо, що для доведення теореми досить довести виконання умови (i) означення 1.15. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$. Позначимо

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Маємо $B_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, тому, що $\mathcal{H}$ є кільцем. За побудовою

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n \subset B_{n+1}.$$

тобто $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$. Оскільки $\mathcal{H}$ є монотонним класом, маємо

$$\mathcal{H} \ni \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Остання рівність виконується за побудовою послідовності $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. Таким чином, теорему доведено. $\square$

Розділ 2

Породжені класи множин

2.1. Означення і елементарні властивості породжених класів множин

Спочатку розглянемо означення породжених класів множин.

Означення 2.1. Нехай $\mathcal{H} \subset 2^X$ є непорожнім класом множин. Клас

$$k(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ є кільцем}}} \mathcal{K}_\alpha \tag{2.1}$$

називається кільцем, породженим класом $\mathcal{H}$; клас

$$a(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\alpha \text{ є алгеброю}}} \mathcal{A}_\alpha \tag{2.2}$$

називається алгеброю, породженою класом $\mathcal{H}$; клас

$$\sigma k(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ є } \sigma\text{-кільцем}}} \mathcal{K}_\alpha \tag{2.3}$$

називається σ-кільцем, породженим класом $\mathcal{H}$; клас

$$\sigma a(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\alpha \text{ є } \sigma\text{-алгеброю}}} \mathcal{A}_\alpha \tag{2.4}$$

називається σ-алгеброю, породженою класом $\mathcal{H}$; клас

$$m(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_\alpha \text{ є монотонним} \\ \text{класом}}} \mathcal{M}_\alpha \tag{2.5}$$

називається монотонним класом, породженим класом $\mathcal{H}$.

Доведемо, що породжені класи множин зберігають структуру класів, які їх утворюють.

Твердження 2.2. Справедливі наступні твердження:

1. $k(\mathcal{H})$ є кільцем;
2. $a(\mathcal{H})$ є алгеброю;
3. $\sigma k(\mathcal{H})$ є σ-кільцем;
4. $\sigma a(\mathcal{H})$ є σ-алгеброю;
5. $m(\mathcal{H})$ є монотонним класом.

Доведення. Усі наведені твердження доводяться цілком аналогічно. Тому ми доводимо лише твердження 1. Скористаємося означенням кільця (див. означення 1.1). Клас $k(\mathcal{H})$ містить клас $\mathcal{H}$, який є непорожнім за означенням. Отже, $k(\mathcal{H}) \neq \varnothing$. Нехай $A \in k(\mathcal{H})$ і $B \in k(\mathcal{H})$. Тоді $A \in \mathcal{K}_\alpha$ і $B \in \mathcal{K}_\alpha$, де $\mathcal{K}_\alpha$ є довільним кільцем, що містить клас $\mathcal{H}$. За означенням кільця (див. означення 1.1) маємо $A \cup B \in \mathcal{K}_\alpha$ і

$A \setminus B \in \mathcal{K}_\alpha$. Оскільки $\mathcal{K}_\alpha$ є довільним кільцем, що містить клас $\mathcal{H}$, за означенням кільця, породженого цим класом, маємо $A \cup B \in k(\mathcal{H})$ і $A \setminus B \in k(\mathcal{H})$. □

Доведене твердження дає підставу називати $k(\mathcal{H})$ мінімальним кільцем, що містить клас $\mathcal{H}$, $a(\mathcal{H})$ мінімальною алгеброю, що містить клас $\mathcal{H}$, $\sigma k(\mathcal{H})$ мінімальним σ-кільцем, що містить клас $\mathcal{H}$, $\sigma a(\mathcal{H})$ мінімальною σ-алгеброю, що містить клас $\mathcal{H}$, $m(\mathcal{H})$ мінімальним монотонним класом, що містить клас $\mathcal{H}$.

Приклад 2.3. Нехай X є довільною нескінченною множиною, $\mathcal{H}$ є класом усіх одноточкових підмножин X. Тоді $k(\mathcal{H})$ складається з усіх скінченних підмножин X.

Наступна теорема про структуру кільця, породженого півкільцем, узагальнює цей приклад.

Теорема 2.4. Нехай $\mathcal{P} \subset 2^X$ є півкільцем. Тоді

$$k(\mathcal{P}) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge \mathcal{P} \supset \{A_k\}_{k=1}^{n} \text{ є неперетинними} \right\}. \tag{2.6}$$

Доведення. Клас множин у правій частині (2.6) позначимо через $\mathcal{L}$. Доведемо, що $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$ і $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$.

Спочатку доведемо, що $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$. Нехай $A \in \mathcal{L}$. Тоді існує набір неперетинних множин $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{P}$ такий, що $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Оскільки $\mathcal{P} \subset k(\mathcal{P})$ і $k(\mathcal{P})$ є кільцем, то за умовою (i) означення кільця (див. означення 1.1) маємо $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in k(\mathcal{P})$. Отже, $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$.

Тепер доведемо, що $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$. Оскільки $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, то досить довести, що $\mathcal{L}$ є кільцем і скористатися означенням кільця, породженого заданим класом множин (див. означення 2.1).

Нехай $A \in \mathcal{L}$ і $B \in \mathcal{L}$. Тоді існує набір неперетинних множин $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{P}$ і набір неперетинних множин $\{B_i\}_{i=1}^{j} \subset \mathcal{P}$ такі, що

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{і} \quad B = \bigcup_{i=1}^{j} B_i.$$

Розіб'ємо подальше доведення на чотири кроки.

Крок 1. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то $A_k \cap B_i = \varnothing$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,j}$,70.37pt

$$A \cup B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i \right) \in \mathcal{L}$$

як об'єднання неперетинних елементів $\mathcal{P}$.

Крок 2. Оскільки $\mathcal{P}$ є півкільцем, $A_k \cap B_i \in \mathcal{P}$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,j}$. Крім того, множини $\{A_k \cap B_i\}_{\substack{k=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,j}}}$ є неперетинними. Тому

$$A \cap B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{j} (A_k \cap B_i) \in \mathcal{L}$$

як об'єднання неперетинних елементів $\mathcal{P}$ (див. рис. 2.1).

Крок 3. Маємо (див. рис. 2.1)

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus B), \tag{2.7}$$

$$A_k \setminus B = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{j} (A_k \setminus B_i), \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.8}$$

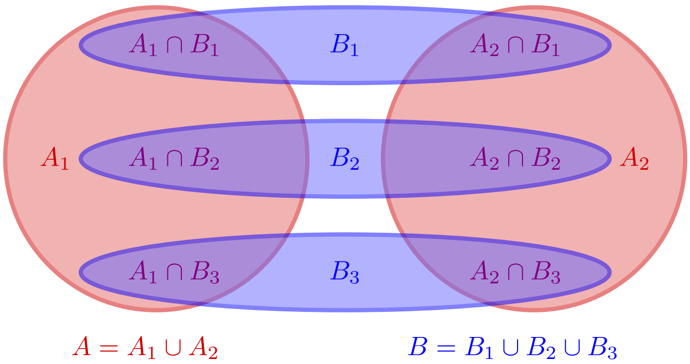

Рис. 2.1: Подання множин A і B.

Для будь-яких $k = \overline{1, n}$ і $i = \overline{1, j}$ маємо $A_k \in \mathcal{P}$ і $B_i \in \mathcal{P}$, тому

$$A_k \setminus B_i = \bigcup_{r=1}^{s} C_r^{ki},$$

де $\mathcal{P} \supset \{C_r^{ki}\}_{r=1}^{s}$ є неперетинними. Отже, $A_k \setminus B_i \in \mathcal{L}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, j}$. Ураховуючи (2.8), згідно з кроком 2 маємо $A_k \setminus B \in \mathcal{L}$, $k = \overline{1, n}$. Оскільки $\{A_k \setminus B\}_{k=1}^{n}$ є неперетинними, беручи до уваги крок 1 і (2.7), одержуємо $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

Крок 4. Маємо

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

де $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ є неперетинними. Згідно з кроком 2 $A \cap B \in \mathcal{L}$, а згідно з кроком 3 $A \setminus B \in \mathcal{L}$ і $B \setminus A \in \mathcal{L}$. Тому, беручи до уваги крок 1, одержуємо $A \cup B \in \mathcal{L}$.

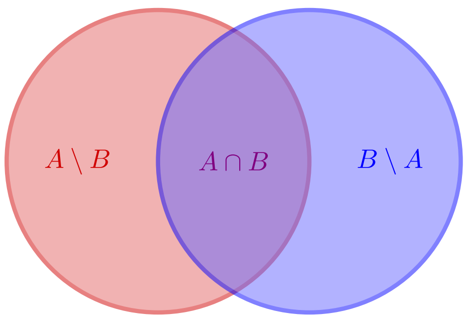

Рис. 2.2: Подання об'єднання множин A і B.

Таким чином, $\mathcal{L}$ є кільцем. Оскільки $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ за побудовою, скориставшись означенням кільця, породженого заданим класом множин (див. означення 2.1), одержуємо $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$. Крім того, ми вже довели, що $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$. Отже, $\mathcal{L} = k(\mathcal{P})$, тобто (2.6) виконано. Теорему доведено. $\square$

Приклад 2.5. Згідно з цією теоремою для півкільця $\mathcal{P}_1$ з прикладу 1.9 маємо

$$k(\mathcal{P}_1) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{R} \supset \{(a_k, b_k]\}_{k=1}^{n} \text{ є неперетинними} \right\}.$$

Приклад 2.6. Згідно з цією теоремою для півкільця $\mathcal{P}_d$ з прикладу 1.12 маємо

$$k(\mathcal{P}_d) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigtimes_{m=1}^{d} (a_m^k, b_m^k] \right) \,\middle|\right.$$

$$n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \mathbb{R}^d \supset \left\{ \left\{ \bigtimes_{m=1}^{d} \left(a_m^k, b_m^k\right] \right\}_{k=1}^{n} \text{ є неперетинними} \right\}.$$

2.2. Дві теореми про породжені класи

Означення 2.7. Нехай $B \subset X$ і $\mathcal{H} \subset 2^X$. Позначимо

$$\mathcal{H} \cap B = \{a \cap B \mid A \in \mathcal{H}\}.$$

Розглянемо теорему про перетин σ-кільця.

Теорема 2.8. Нехай $B \subset X$ і $\mathcal{H} \subset 2^X$. Тоді

$$\sigma k(\mathcal{H} \cap B) = \sigma k(\mathcal{H}) \cap B.$$

Доведення. Доведення цієї рівності розіб'ємо на дві частини: $\sigma k(\mathcal{H} \cap B) \subset \sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ і $\sigma k(\mathcal{H} \cap B) \supset \sigma k(\mathcal{H}) \cap B$.

Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma k(\mathcal{H})$. Маємо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma k(\mathcal{H})$, $A_1 \setminus A_1 \in \sigma k(\mathcal{H})$, $\{A_n \cap B\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ і (див. рис. 2.3)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B \in \sigma k(\mathcal{H}) \cap B,$$
$$(A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) = (A_1 \setminus A_2) \cap B \in \sigma k(\mathcal{H}) \cap B.$$

Тому $\sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ є σ-кільцем. Оскільки $\mathcal{H} \subset \sigma k(\mathcal{H})$, маємо $\mathcal{H} \cap B \subset \sigma k(\mathcal{H}) \cap B$. Отже, $\sigma k(\mathcal{H} \cap B) \subset$

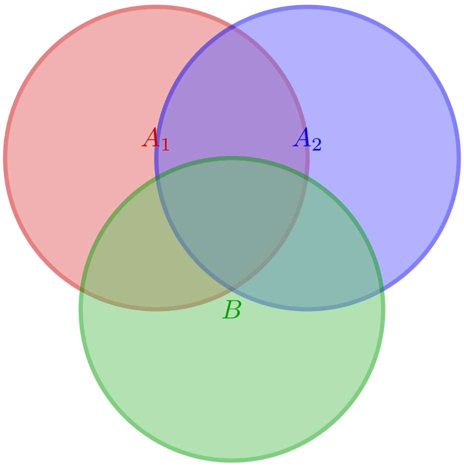

Рис. 2.3: Подання об'єднання множин A і B.

$\sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ тому, що $\sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ є σ-кільцем.

Далі розглянемо клас множин

$$\mathcal{L} = \left\{ A \cup (C \setminus B) \mid A \in \sigma k(\mathcal{H} \cap B) \wedge C \in \sigma k(\mathcal{H}) \right\}. \tag{2.9}$$

Перевіримо, що $\mathcal{L}$ є σ-кільцем. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma k(\mathcal{H} \cap B)$, $C \in \sigma k(\mathcal{H})$. Тоді $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma k(\mathcal{H} \cap B)$, $A_1 \setminus A_2 \in \sigma k(\mathcal{H} \cap B)$, $\{A_n \cup (C \setminus B)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$ і

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup (C \setminus B)) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{L},$$

$$(A_1 \cup (C \setminus B)) \setminus (A_2 \cup (C \setminus B)) = (A_1 \setminus A_2) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{L}$$

(див. рис. 2.3, де в якості множини B розглядається $C \setminus B$). Тому $\mathcal{L}$ є σ-кільцем. Для $D \in \mathcal{H}$ маємо $D \in \sigma k(\mathcal{H})$ і

$$D = (D \cap B) \cup (D \setminus B).$$

Оскільки $D \cap B \subset \mathcal{H} \cap B \subset \sigma k(\mathcal{H} \cap B)$, маємо $D \in \mathcal{L}$. Отже, $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$. З того, що $\mathcal{L}$ є σ-кільцем випливає $\sigma k(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}$. Тому $\sigma k(\mathcal{H}) \cap B \subset \mathcal{L} \cap B = \sigma k(\mathcal{H} \cap B)$ в останній рівності враховано співвідношення (2.9). Теорему доведено. □

Розглянемо теорему про рівність монотонного класу і σ-кільця, породженого кільцем.

Теорема 2.9. Нехай $\mathcal{K} \subset 2^X$ є кільцем. Тоді $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$.

Доведення. Оскільки клас $\sigma k(\mathcal{K})$ є σ-кільцем, цей клас є замкненим відносно взяття нескінченного об'єднання (за означенням 1.13) і нескінченного перетину (за теоремою 1.18) тому він є монотонним класом. Ураховуючи те, що $\mathcal{K} \subset \sigma k(\mathcal{K})$, одержуємо $m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K})$.

Доведемо тепер протилежне включення. Спочатку доведемо, що $m(\mathcal{K})$ є кільцем.

Зафіксуємо довільну множину $D \in m(\mathcal{K})$ і розглянемо клас множин

$$\mathcal{L}(D) = \big\{C \in X \mid D \cup C \in m(\mathcal{K}) \wedge D \setminus C \in m(\mathcal{K}) \wedge C \setminus D \in m(\mathcal{K})\big\}.$$

Перевіримо, що $\mathcal{L}(D)$ є монотонним класом. Нехай $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow\subset \mathcal{L}(D)$ і

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Маємо $\{D \cup C_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow\subset m(\mathcal{K})$, $\{D \setminus C_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow\subset m(\mathcal{K})$, $\{C_n \setminus D\}_{n=1}^{\infty} \uparrow\subset m(\mathcal{K})$. Оскільки $m(\mathcal{K})$ є монотонним класом, маємо

$$D \cup C = D \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D \cup C_n) \in m(\mathcal{K}),$$
$$D \setminus C = D \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (D \setminus C_n) \in m(\mathcal{K}),$$
$$C \setminus D = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus D) \in m(\mathcal{K}),$$

тобто $C \in \mathcal{L}(D)$. Цілком аналогічно перевіряємо, що для $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow\subset \mathcal{L}(D)$ і

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{L}(D).$$

Отже, $\mathcal{L}(D)$ є монотонним класом.

Якщо $E \in \mathcal{K}$ і $F \in \mathcal{K}$, то

$$E \cup F \in \mathcal{K} \subset m(\mathcal{K}), \quad E \setminus F \in \mathcal{K} \subset m(\mathcal{K}), \quad F \setminus E \in \mathcal{K} \subset m(\mathcal{K})$$

тому, що $\mathcal{K}$ є кільцем. Отже, $F \in \mathcal{L}(E)$ і $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(E)$ оскільки $F \in \mathcal{K}$ вибрано довільним. З того, що $\mathcal{L}(E)$ є монотонним класом випливає $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(E)$ для $E \in \mathcal{K}$.

Отже, для будь-якої множини $B \in m(\mathcal{K})$ маємо $B \in \mathcal{L}(E)$, тому

$$E \cup B \in m(\mathcal{K}), \quad E \setminus B \in m(\mathcal{K}), \quad B \setminus E \in m(\mathcal{K}).$$

Це означає, що $E \in \mathcal{L}(B)$. Отже, $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$ оскільки $E \in \mathcal{K}$ вибрано довільним. З того, що $\mathcal{L}(B)$ є монотонним класом випливає $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$ тепер вже для $B \in m(\mathcal{K})$.

Нехай $A \in m(\mathcal{K})$ і $B \in m(\mathcal{K})$. Тоді $A \in \mathcal{L}(B)$ і

$$A \cup B \in m(\mathcal{K}), \quad A \setminus B \in m(\mathcal{K}), \quad B \setminus A \in m(\mathcal{K}).$$

Отже, $m(\mathcal{K})$ є кільцем. Оскільки $m(\mathcal{K})$ є монотонним класом і кільцем одночасно, то за теоремою 1.23 про зв'язок між кільцем і монотонним класом $m(\mathcal{K})$ є σ-кільцем. З того, що $\mathcal{K} \subset m(\mathcal{K})$ випливає $\sigma k(\mathcal{K}) \subset m(\mathcal{K})$. Оскільки протилежне включення також є вірним, то $\sigma k(\mathcal{K}) = m(\mathcal{K})$. Теорему доведено. □

2.3. Борельові множини

Клас борельових множин є одним з найважливіших прикладів породжених σ-алгебр. Нехай на множині X задано метрику ρ. Розглянемо метричний простір (X, ρ) і позначимо через $\mathscr{G}_X$ клас усіх відкритих підмножин X.

Означення 2.10. Борельовою σ-алгеброю в Y (позначається $\mathcal{B}(X)$) називається $\sigma a(\mathscr{G}_X)$. Множини з $\mathcal{B}(X)$ називаються борельовими.

Приклад 2.11. Будь-яка відкрита множина $U \subset X$ є борельовою тому, що $U \in \mathscr{G}_X \subset \sigma a(\mathscr{G}_X) = \mathcal{B}(X)$.

Приклад 2.12. Будь-яка замкнена множина F є болельовою. Дійсно, $X \setminus F$ є відкритою і $X \setminus F \in \mathscr{G}_X \subset \mathcal{B}(X)$. Оскільки $\mathcal{B}(X)$ є σ-алгеброю, маємо $F = X \setminus (X \setminus F)$.

Приклад 2.13. Одноточкова множина є борельовою, оскільки вона є замкненою.

Приклад 2.14. Усі скінченні, зліченні множини та їх доповнення є борельовими, оскільки їх можна подати увигляді скінченного або зліченного об'єднання одноточкових множин та їх доповнення, а σ-алгебра є замкненою відносно цих операцій.

Розглянемо теорему про подання борельової σ-алгебри підмножин $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2.15. Для півкільця підмножин $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \bigtimes_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \,\middle|\, \forall k = \overline{1, d} \ -\infty < a_k \leq b_k < +\infty \right\}$$

маємо

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d,$$

маємо $\mathbb{R}^d \in \sigma k(\mathcal{P}_d)$, отже,

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d). \tag{2.10}$$

Нехай

$$A = \bigtimes_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \in \mathcal{P}_d, \quad A_n = \bigtimes_{k=1}^{d} \left(a_k, b_k + \frac{1}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді A_n є відкритою множиною тому $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, і $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Отже, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ тому $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Звідси випливає

$$\sigma a(\mathcal{P}_d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{2.11}$$

Залишилося довести протилежне включення. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^d$. Тоді

$$U = \bigcup_{(p,q)\in\mathcal{Q}} \bigtimes_{k=1}^{d} (p_k, q_k], \tag{2.12}$$

де

$$\mathcal{Q} = \left\{ (u,v) = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right) \in \overline{\mathbb{Q}}^d \times \overline{\mathbb{Q}}^d \;\middle|\; \bigtimes_{k=1}^{d} (u_k, v_k] \subset U \wedge \left(\forall k = \overline{1,d}\ u_k < v_k\right) \right\}.$$

Зрозуміло, що права частина (2.12) є об'єднанням підмножин U, тому сама є підмножиною U. З іншого боку, кожна точка відкритої множини U має окіл вигляду $\bigtimes_{k=1}^{d} (p_k, q_k]$, $p_k \in \mathbb{Q}$, $q_k \in \mathbb{Q}$, $k = \overline{1,d}$, який міститься в U. Тому U міститься об'єднанні, що стоїть у правій частині (2.12). Таким чином рівність (2.12) має місце.

Об'єднання в правій частині (2.12) є зліченним, тому $U \in \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Отже, $\mathscr{G}_{\mathbb{R}} \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$, тому

$$\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma a\big(\mathscr{G}_{\mathbb{R}}\big) \subset \sigma a\big(\mathcal{P}_d\big). \tag{2.13}$$

Зі співвідношень (2.10), (2.11) і (2.13) випливає твердження теореми. $\square$

Розділ 3

Приклади лістингів

У цьому розділі наведено приклади лістингів. Вони наведені суто для прикладу включення таких елементів.

Перший лістинг.

Лістинг 3.1: Попередня обробка даних

```
#Last column is garbage, so we drop it:
dataset.drop(5409, axis=1, inplace=True)
#Transform our data from string to numbers or Nan:
dataset.iloc[:,:-1] = dataset.iloc[:,:-1].apply(pd.to_numeric, errors='
    coerce')
#Drop Nan values:
dataset.dropna(inplace=True)
#Change our output to numerical: 'inactive' --> 0 and 'active' --> 1:
dataset.replace({'inactive': 0, 'active': 1}, inplace=True)
```

Тепер другий лістинг.

Лістинг 3.2: Підготовка необхідних елементів для аналізу

```
#Output column extraction:
test = pd.DataFrame(dataset[5408])

#Computation of correlation of the input columns with output column:
corr_with_res = []

for i in range(5408):
corr_with_res.append((test.join(dataset[i])).astype(float).corr()[5408][i])

whole_corr = pd.DataFrame(corr_with_res)

#Collecting "active" rows:
active = dataset[dataset[5408] == 1]
```

І, нарешті, третій.

Лістинг 3.3: Функція для здійснення аналізу

```
def corr_mean(alpha = 0, beta = 0.4, drop = pd.Index([])):
signif_col = (whole_corr[whole_corr[0].abs() > alpha].index &\\
whole_corr[whole_corr[0].abs() \\
< beta].index).difference(drop)
active_signif = active[signif_col]
active_signif_corr = active_signif.T.astype(float).corr()
mean = 0
```

```
for i in range(len(active_signif_corr) - 1):
sum_row_corr = active_signif_corr.iloc[i:i+1,i+1:].T.abs().sum().values[0]
mean += sum_row_corr
mean = mean/(((len(active_signif_corr) - 1)*len(active_signif_corr))/2)
return mean, signif_col
```

Висновки

Тут ви можете навести висновки до своєї роботи.

Список використаних джерел

[1] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ : Либідь, 1993.

[2] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2. Київ : Либідь, 1994.

[3] Радченко В.М. Теорія міри та інтеграла. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012.

[4] Korobov V.I. Time optimality for systems with multidimensional control and vector moment min-problem. Journal of Dynamical and Control Systems. 2020. V. 26(3). P. 525–550.