ЛА-МП-1. Матриці

1.1. Розв'яжіть систему матричних рівнянь

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}; \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \end{cases}$$

1.2. Дайте відповіді на запитання:

1. Скільки існує квадратних матриць порядку n, таких, що в кожному рядку і кожному стовпчику міститься рівно одна одиниця, а всі інші – нулі?

2. Скільки існує діагональних матриць порядку n над полем $\mathbb{Z}_p$?

3. Чи обов'язково сума двох верхньотрикутних матриць є верхньотрикутною матрицею?

4. У якому випадку сума верхньотрикутної та нижньотрикутної матриці є діагональною матрицею?

5. Скільки існує матриць порядку n над полем $\mathbb{Z}_2$: 1) усього; 2) симетричних; 3) верхньотрикутних; 4) скалярних; 5) діагональних?

1.3. Потренуйтеся множити матриці:

1) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3$;

4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^3$.

1.4. Обчисліть значення многочлена $f(x)=x^3-3x+2$ від матриці A, тобто обчисліть значення виразу $f(A)=A^3-3A+2I$.

1) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1.5. Виконайте множення матриць "стовпчиками".

1) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1.6. Виконайте множення матриць "рядками".

1) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

1.7. Знайдіть добуток матриць чотирма способами. Який найзручніший?

1) $\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

1.8. Як зміниться добуток матриць AB, якщо
1) переставити i -й та j-й рядки матриці A;
2) до i -го рядка матриці A додати j-ий рядок;
3) переставити i -й та j-й стовпці матриці B;
4) від i -го стовпчика матриці B відняти j-й стовпчик ?

1.9. Знайдіть усі матриці, які переставні (комутують) з матрицею

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

1.10. Слід матриці. Слідом (trace) матриці $A = (a_{ij})$ називається сума її діагональних елементів $TrA = \sum\limits_i a_{ii}$. Доведіть, що (у випадку коли має сенс про це говорити)
1) $Tr(A + B) = TrA + TrB$;
2) $Tr(AB) = Tr(BA)$.

1.11. Матричний челендж. Наведіть приклади таких матриць A, B, C, D, E, F порядку 2 з дійсними елементами, що
1) $A^2 = -I$;
2) $B^2 = O$, хоча $B \neq O$;
3) $CD = -DC$, при цьому $CD \neq O$;
4) $EF = 0$, при цьому жодна з матриць E, F не має нульових елементів.

1.12. Матричні одиниці та скалярні матриці

Матричними одиницями називають матриці E_{ij}, в яких елемент з індексами (i, j) дорівнює 1, а всі інші – нулі.

1. Доведіть, що $E_{ij}E_{pq} = \begin{cases} E_{iq}, & j = p; \\ O, \text{інакше.} \end{cases}$

2. Чому дорівнює добуток AE_{ij} для довільної матриці A? А добуток $E_{ij}A$?

3. Нехай A – квадратна матриця і $AE_{ii} = E_{ii}A$ для всіх i. Доведіть, що A – діагональна.

4. Доведіть, що коли матриця переставна (комутує) з усіма матрицями того ж порядку, то вона є скалярною. Вказівка: розгляньте добутки матриці з матричними одиницями.

1.13. Обертовність трикутника. Нехай A – обертовна верхньотрикутна матриця порядку 2. Чи обов'язково A^{-1} також верхньотрикутна?

1.14. Добутки і симетрія. Доведіть, що

1. Добуток AB двох симетричних матриць A, B є симетричною матрицею тоді й лише тоді, коли ці матриці переставні (тобто $AB = BA$).

2. Добуток AB двох кососиметричних матриць A, B є симетричною матрицею тоді й лише тоді, коли $AB = -BA$.

1.15. Стовпчик на рядок. Нехай u, v – вектори стовпчики однакової довжини і $H = uv^t$. Доведіть, що $H^2 = \lambda H$ для деякого λ.

ЛА-МП-2. Системи лінійних рівнянь

2.1. Розв'яжіть системи методом Гауса виключення змінних

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11; \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40; \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

2.2. Розв'яжіть системи над скінченним полем

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad \mathbb{Z}_5;$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \quad \mathbb{Z}_{17}.$

2.3. Розв'яжіть системи, задані матрицями (розширеними матрицями)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \\ 1 & 1 & 16 & 16 & 81 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

6) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right);$

7) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right);$

8) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right).$

2.4. Дослідіть систему, задану матрицею, знайдіть загальний розв'язок в залежності від параметра λ.

1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right);$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right);$

3) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array}\right);$

4) $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right).$

2.5. Знайдіть LU-розклад матриці A і розв'яжіть системи $Ax = b$:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -6 & 7 \\ 12 & -7 & 12 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2.6. За допомогою елементарних перетворень знайдіть обернені для наведених матриць:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. Розв'яжіть матричні рівняння

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.8. Матричне рівняння $AX = B$ можна розв'язати, подавши його як систему кількох систем лінійних рівнянь, у яких невідомими є стовпці матриці X. При цьому ліві частини всіх систем будуть мати ту саму матрицю A, а значить, їх можна розв'язувати за допомогою одного й того ж LU-розкладу. Знайдіть LU-розклад матриці A і, скориставшись зазначеним вище підходом, розв'яжіть матричне рівняння, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Аналогічний підхід використовують для знаходження обернених матриць (у цьому разі B – одинична матриця).

2.9. **Усім, крім одного.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0; \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n = 1; \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = n-1. \end{cases}$

2.10. **Як швидше?** Нехай дано визначену систему n рівнянь із n невідомими (тобто ця система має єдиний розв'язок). Ми хочемо написати програму, яка реалізує виключення Гауса. Будемо уявляти, що в ході реалізації програма виконує деяку кількість операцій вигляду "помножити-відняти". Наприклад, якщо ми виключаємо першу змінну з другого рівняння (або будь-якого іншого), потрібно помножити всі елементи першого рядка на відповідний множник і відняти їх з елементів другого рядка, тобто буде зроблено $n+1$ операцій "помножити-відняти". У якому зі способів виключення Гауса : за один прохід або з прямим і зворотним ходом програма виконає менше операцій "помножити-відняти"?

2.11. **Різнокольорові зустрічі.** На деякій планеті мешкають істоти трьох кольорів: 13 червоних, 15 синіх та 17 зелених. Коли дві істоти різних кольорів зустрічаються, вони обидві змінюють свій колір на третій (наприклад, після зустрічі зелений та синій кольори змінюються на червоний). Чи можливо, що після кількох таких зустрічей всі істоти стануть одного кольору? На які кількості різнокольорових істот (в конкретному випадку вище маємо 13, 15, 17) ви можете узагальнити результат задачі?

2.12. **Еврика!** Подейкують, що винайшовши свій славетний закон, Архімед, який у цей момент перебував у ванні, вискочив з неї та побіг Сиракузами (містом, у якому жив), вигукуючи "Еврика" (у перекладі "знайшов"). У цій задачі вам доведеться скористатися законом Архімеда для знаходження пропорцій сплаву, з якого зроблено металеву кулю. Сам Архімед, до речі, винайшов закон, розв'язуючи задачу, поставлену царем Сиракуз Гієроном. Цар хотів довідатися, скільки золота в його короні, та чи не підманув його ювелір, що цю корону виготовляв.

Отже, металевий сплав, з якого виготовлено суцільну позолочену кулю, містить один або декілька з наступних металів: алюміній, мідь, срібло, свинець. Вага металевої кулі в повітрі становить 7588г, а якщо зважити її відповідно у воді, бензині, спирті та гліцерині, то 6588г, 6688г, 6778г, 6328г. Густину речовин наведено в таблиці.

речовина	густина (g/cm^3)	речовина	густина (g/cm^3)
алюміній	2.7	вода	1.0
мідь	8.9	бензин	0.9
золото	19.3	спирт	0.81
свинець	11.3	гліцерин	1.26
срібло	10.8		

Визначте, яку частину кожного з металів (рахуючи й золото на поверхні), містить металева куля. Чи є відповідь однозначною?

ЛА-МП-3. Визначники

3.1. Виконайте множення підстановок

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ та в іншому порядку; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}^3$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ та в іншому порядку; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}^3$.

3.2. Знайдіть обернені до підстановок

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

3.3. Розкладіть підстановки у добуток незалежних циклів та у добуток транспозицій.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 & n+2 & \dots & 2n & n+1 \end{pmatrix}$.

3.4. Обчисліть

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 1 & 8 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{100}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 9 & 8 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{120}$.

3.5. Узагальніть попереднє завдання та запропонуйте алгоритм піднесення підстановки до степеня.

3.6. Знайти парність наступних підстановок трьома способами:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

3.7. У підстановці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ число інверсій дорівнює k. Скільки інверсій у підстановці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$?

3.8. Обчисліть такі визначники за означенням. Подумайте, яким із трьох підходів до означення визначника зручніше користуватися.

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

3.9. Як зміниться визначник, якщо

1) до кожного рядка, крім останнього, додати наступний рядок;

2) його рядки записати у зворотному порядку;

3) перший стовпець переставити на останнє місце, а решту пересунути вліво, не змінюючи їх розташування;

4) його матрицю повернути на 90^0 навколо центру?

3.10. Обчисліть визначники, зводячи їх до трикутного вигляду.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3.11. Обчисліть визначники, розкладаючи їх за рядком (стовпчиком).

1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & b \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

3.12. Обчисліть визначники, знижуючи їх порядок.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

2) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

3.13. Обчисліть визначники, використовуючи визначник Вандермонда

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 25 & 9 & 16 \\ 8 & 125 & -27 & 64 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & & n \\ 1 & 2^3 & & n^3 \\ 1 & 2^5 & & n^5 \\ & & \dots & \\ 1 & 2^{2n-3} & & n^{2n-3} \\ 1 & 2^{2n-1} & & n^{2n-1} \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 216 & 27 & 64 & 8 \\ 36 & 9 & 16 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & & (a-n)^{n-1} \\ & & \dots & \\ a & a-1 & & a-n \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$

3.14. Знайдіть обернені матриці для наступних матриць, побудувавши їх приєднані:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

3.15. Розв'яжіть системи за допомогою правил Крамера

1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1; \\ 3x_1 + 7x_2 = 2\ . \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 13 = 0; \\ 5x_1 + 8x_2 + 14 = 0\ . \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

3.16. Визначник ортогональної матриці. Матриця Q називається ортогональною, якщо $Q^t Q = I$. Чому може дорівнювати визначник ортогональної матриці?

3.17. Віднімання одиниці. Відомо, що сума елементів кожного рядка матриці A дорівнює 1. Доведіть, що $\det(A - I) = 0$. Чи вірно, що $\det A = 1$?

ЛА-МП-4. Лінійні простори

4.1. З'ясуйте, чи є лінійно незалежними системи векторів у вказаних просторах.
1) $a_1 = (5, 2, -3)$, $a_2 = (4, 1, -2)$, $a_3 = (1, 1, -1)$ в $\mathbb{R}^3$;
2) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$ в $\mathbb{R}^3$;
3) $p_1(t) = 5t^2 - 4t + 3, p_2(t) = 3t^2 + 3t + 2, p_3(t) = 8t^2 + t + 3$ в $\mathbb{R}[t]$;

4.2. При яких λ вектор $b = (7, -2, \lambda)$ є лінійною комбінацією векторів $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$?

4.3. Доведіть, що коли вектори a_1, a_2, a_3 є лінійно залежними і вектор a_3 не виражається лінійно через вектори a_1, a_2, то a_1 і a_2 відрізняються лише скалярним множником.

4.4. Доведіть, що коли вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є лінійно незалежними, а вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – лінійно залежні, то вектор b лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4.5. Доведіть, що вектори e_1, e_2, e_3 утворюють базис та знайдіть координати вектора x у цьому базисі.
1) $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$;
2) $e_1 = (-1, 3, 5)$, $e_2 = (6, 3, 2)$, $e_3 = (3, 1, 0)$, $x = (6, 0, 1)$.

4.6. Знайдіть матрицю переходу від базису e_1, e_2 до базису f_1, f_2 та зв'язок координат вектора в цих базисах.
1) $e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (2, 3), f_2 = (3, 2)$;
2) $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (2, 3), f_2 = (3, 2)$;
3) $e_1 = (3, 5), e_2 = (1, 2)$, $f_1 = (1, 0), f_2 = (1, 1)$.

4.7. Як зміниться матриця переходу від одного базису до іншого, якщо 1) поміняти місцями i-ий та j-ий вектори першого базису;
2) поміняти місцями i-ий та j-ий вектори другого базису;
3) записати вектори обох базисів у зворотному порядку.

4.8. Як пов'язані між собою базиси Δ і Δ' простору V, якщо матриця переходу від Δ до Δ' верхньотрикутна?

4.9. Дайте відповіді на запитання
1. Яка максимальна кількість векторів може бути в лінійно-незалежній системі в n-мірному просторі?
2. Якщо у просторі задано систему лінійно незалежних векторів, то чи можна доповнити її до базису простору?
3. Чи може система векторів бути лінійно незалежною над одним полем та лінійно залежною над іншим?

4.10. Встановіть ізоморфізм лінійних просторів
1) $\mathbb{F}_n[x]$ і $\mathbb{F}^{n+1}$;
2) $V = \{x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x_3 = x_1 + x_2\}$ і $\mathbb{R}^2$;
3) $\mathbb{C}$ (як лінійний простір над $\mathbb{R}$) і $\mathbb{R}^2$;

4.11. Знайдіть розмірність лінійної оболонки векторів і якийсь базис
1) $a_1 = (0, 2, -1)$, $a_2 = (3, 7, 1)$, $a_3 = (2, 0, 3)$, $a_4 = (5, 1, 8)$.
2) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 4, 2)$, $a_3 = (2, 2, 6)$, $a_4 = (1, 4, 5)$.

4.12. Перевірте, що множина векторів є лінійним підпростором $\mathbb{R}^n$ і знайдіть його базис і розмірність.

1) вектори, у яких перша координата збігається з останньою;
2) вектори, у яких сума координат дорівнює 0;
3) вектори, у яких остання координата нульова;
4) вектори, у яких остання координата дорівнює сумі інших.

Зверніть увагу на *лінійність* умов

4.13. Перевірте, що множина матриць утворює лінійний підпростір у просторі квадратних матриць порядку n з дійсними коефіцієнтами і знайдіть його базис і розмірність.

1) верхньотрикутні матриці;
2) симетричні матриці;
3) кососиметричні матриці;
4) діагональні матриці;
5) скалярні матриці.

4.14. Знайдіть суму та перетин підпросторів, які задано як лінійні оболонки векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно.

1) $a_1 = (1,2,1), a_2 = (1,1,-1), a_3 = (1,3,3)$; $b_1 = (2,3,-1), b_2 = (1,2,2), b_3 = (1,1,-3)$;
2) $a_1 = (1,2,1,-2), a_2 = (2,3,1,0), a_3 = (1,2,2,-3)$; $b_1 = (1,1,1,1), b_2 = (1,0,1,-1), b_2 = (1,3,0,-4)$.

4.15. Перевірте, що простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою підпросторів: L_1, заданого рівнянням $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ та L_2, заданого системою рівнянь $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Знайдіть проекції одиничних векторів на ці підпростори.

4.16. Перевірте, що простір усіх квадратних матриць порядку n є прямою сумою підпросторів симетричних та кососиметричних матриць. Знайдіть проекції матричних одиниць на ці підпростори.

4.17. Нехай U_1, U_2 – лінійні підпростори простору V, причому $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim(V)$. Доведіть, що перетин U_1, U_2 не є порожнім.

4.18. Знайдіть ранг матриць методом облямкових мінорів

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

4.19. Знайдіть ранг матриць за допомогою зведення до ступінчастої форми

1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) див. матриці з попередньої задачі.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

4.20. З'ясуйте, чому дорівнює ранг матриці в залежності від параметра λ

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4.21. Знайдіть базиси підпросторів $\mathbb{R}^3$, заданих системами рівнянь
1) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$; 2) $x_1 = x_2 = x_3$; 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.22. Знайдіть однорідні системи рівнянь, які задають лінійні оболонки $Lin(a_1, a_2, a_3)$ в $\mathbb{R}^3$.
1) $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 3)$;
2) $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (0, 1, -1), a_3 = (1, 2, -1)$.

4.23. Знайдіть основні простори матриць
1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.24. Доведіть, що коли добуток двох матриць $AB = O$, то простір стовпців матриці B міститься в нуль-просторі матриці A.

4.25. Чи вірно, що для квадратної матриці A виконано $N(A) = N\left(A^t\right)$?

4.26. **Скінченні лінійні простори.** Нехай $\mathbb{F}$ – скінченне поле з q елементів, а V – n-мірний лінійний простір над полем $\mathbb{F}$. Знайдіть кількість
1) елементів V;
2) базисів V;
3) базисів у деякому фіксованому k-мірному підпросторі $W < V$;
4) усіх k-мірному підпросторів V.

4.27. **Нерівності для рангів.**
1. Нехай A, B, X – матриці, причому X містить стільки ж рядків, скільки A, і стільки ж стовпців, скільки B. Доведіть, що
1) $rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rankA + rankB$;
2) $rank \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq rankA + rankB$.
2. Доведіть, що коли добуток матриць AB існує, то $rank(AB) \leq \min(rankA, rankB)$.
3. Доведіть, що коли матриці A, B мають однакові розміри, то $rank(A+B) \leq rankA+rankB$.
4. *Нерівність Сільвестра.* Якщо A, B – матриці порядку n, то $rank(AB) \geq rankA+rankB-n$.

4.28. **Ранг і транспонування.** Доведіть, що для довільної матриці A усі чотири матриці A, A^t, A^tA, AA^t мають один і той самий ранг.

ЛА-МП-5. Евклідові простори

5.1. Виконайте такі дії для наведених векторів.
1. Зайдіть скалярний добуток двох векторів та кут між ними.
2. Знайдіть норму кожного вектора та нормуйте вектори.
1) $x = (2, 1, -1, 2)$; $y = (3, -1, -2, 1)$;
2) $x = (1, 2, 1, -1)$; $y = (-2, 3, -5, -1)$.

5.2. Перевірте, чи вектори наступної системи попарно ортогональні і доповніть їх до ортогонального базису. Нормуйте вектори так, щоб базис став ортонормованим. Знайдіть координати вектора $x = (1, 1, 1, 1)$ в отриманому базисі, знайшовши його проекції на базисні вектори за допомогою скалярного добутку.
1) $a_1 = (1, -2, 2, -3), a_2 = (2, -3, 2, 4)$;
2) $a_1(1, 1, 1, -2), a_2 = (1, 2, 3, -3)$.

5.3. Лінійний простір U задано системою рівнянь. Знайдіть базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ та систему лінійних рівнянь, що задає $U^{\perp}$.

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

5.4. Для підпростору $U = Lin\{a_1, a_2, a_3\}$ побудуйте ортогональний базис за допомогою ортогоналізації Грама-Шмідта. Користуючись його результатами знайдіть також QR-розклад матриці A зі стовпцями a_1, a_2, a_3.
1) $a_1 = (1, 2, 2, -1), a_2 = (1, 1, -5, 3), a_3 = (3, 2, 8, -7)$;
2) $a_1 = (1, 1, -1, -2), a_2 = (5, 8, -2, -3), a_3 = (3, 9, 3, 8)$.

5.5. Знайдіть проекцію p вектора x на пряму, що проходить через вектор a. Перевірте, що ортогональна складова $x - p$ ортогональна a.
1) $x = (1, 2, 2)$, $a = (1, 1, 1)$;
2) $x = (1, 3, 1)$, $a = (1, -1, 0)$.

5.6. Знайдіть матрицю ортогональної проекції P на підпростір U, натягнутий на вектори a_1, a_2. Перевірте, що отримана матриця задовольняє властивості матриці ортогональної проекції: $P^2 = P^t = P$.
1) $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (0, 0, 1)$;
2) $a_1 = (2, 2, 1), a_2 = (1, 0, 0)$.

5.7. Знайдіть ортогональну проекцію p і ортогональну складову z вектора x на лінійний підпростір $U = Lin\{a_1, a_2, a_3\}$. Зробіть це двома способами: за допомогою матриці ортогональної проекції та за допомогою умов ортогональності базисним векторам підпростору.
1) $x = (4, -1, -3, 4)$; $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 2, -1), a_3 = (1, 0, 0, 3)$;
2) $x = (5, 2, -2, 2)$; $a_1 = (2, 1, 1, -1), a_2 = (1, 1, 3, 0), a_3 = (1, 2, 8, 1)$;

5.8. Відстанню від точки, заданої вектором x до лінійного підпростору U називається мінімум відстаней від цієї точки до точок підпростору U, тобто мінімум норм векторів $x - u$, де $u \in U$. Доведіть, що ця відстань дорівнює довжині ортогональної складової вектора x на підпростір U. Знайдіть відстані від x до U в умовах попередньої задачі. Також знайдіть кут між вектором x і підпростором U, як кут між x та його ортогональною проекцією на U.

5.9. Перевірте, що основні підпростори матриці A, знайдені в задачі 4.23 , розбиваються на пари взаємно ортогональних ($R(A) \perp N(A)$, $C(A) \perp N(A^t)$)

5.10. Перевірте, що такі матриці ортогональні:
1) матриці перестановок (для перестановки $\sigma \in S_n$ її матриця $P_\sigma = (a_{ij})$ задається умовами: $a_{\sigma(i)i} = 1$, інші елементи рівні 0) ;

2)матриці Адамара порядку $2^k, k \geq 0$, з нормуючим множником, які задаються рекурсивно: $H_1 = (1)$, $H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $H_{2^{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{2^k} & H_{2^k} \\ H_{2^k} & -H_{2^k} \end{pmatrix}$. Множник перед матрицею стоїть для нормування стовпців.

5.11. Модель лінійної регресії. У точках $x = (-1, 1, 2)$ виміряли величину y і отримали $y = (7, 7, 21)$. Ми будуватимемо і досліджуватимемо лінійну модель $\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x$ залежності y від x.

1. Намалюйте експериментальні точки на площині.

2. Підставивши значення x та y, отримайте систему $A\Theta = y$ ($\Theta = (\theta_0, \theta_1)$ – вектор невідомих параметрів моделі). Переконайтеся, що вона не має розв'язків.

3. Для того щоб знайти *найкращий* розв'язок системи $A\Theta = y$, спроектуйте вектор y на підпростір, натягнутий на стовпці A та отримайте вектори проекції p та помилки e: $y = p + e$. Переконайтеся, що p і e ортогональні. Переконайтеся, що проекція e (на той же підпростір) дорівнює 0.

4. Чому дорівнює вектор параметрів Θ? Намалюйте модель (тобто отриману пряму) на тій же площині, що й експериментальні точки. Чому відповідають компоненти вектора проекції p? Чому відповідають компоненти вектора помилки e?

5.12. Проекція на ортогональне доповнення.

Нехай P – матриця проекції на лінійний підпростір U. Якою буде матриця проекції на ортогональне доповнення $U^\perp$? Вказівка: розгляньте матрицю $I - P$. Проілюструйте отриманий результат, розглянувши проекції на координатні вісі в $\mathbb{R}^2$ та на координатну площину й ортогональну координатну вісь в $\mathbb{R}^3$.

5.13. Кососиметричність та ортогональність.

Доведіть, що коли матриця A кососиметрична, то $Ax \perp x$ для довільного вектора x, такого що Ax існує. Тобто множення на кососиметричну матрицю переводить вектор в ортогональний йому.

5.14. Нерівність для норм.

Нормою Фробеніуса матриці $A = (a_{ij})$ називається $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$.

Доведіть, що для довільного вектора x, такого що Ax існує, виконано $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Вказівка. Використайте нерівність Коші-Буняковського, щоб довести, що $(a_i^t x)^2 \leq \|a_i\|^2 \|x\|^2$, а потім додайте отримані нерівності (a_i – i-ий рядок матриці A).

5.15. 1+1=3.

Доведіть, що коли матриця має дві з наступних трьох властивостей:

1) симетричність;

2) ортогональність;

3) інволютивність (тобто $A^2 = I$),

то вона також має і третю властивість.

ЛА-МП-6. Лінійні оператори

6.1. Перевірте, чи є лінійним наступне перетворення. У випадку, якщо перетворення лінійне, знайдіть його матрицю в базисі, в якому дано координати вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1) $\varphi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
2) $\varphi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
3) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;
4) $\varphi(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

6.2. Задайте лінійне перетворення φ матрицею в стандартному базисі тривимірного простору, якщо
1) φ – це віддзеркалення відносно площини, натягнутої на вектори $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (0, 0, 1)$;
2) φ – це ортогональна проекція на площину, натягнуту на вектори $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (0, 0, 1)$;
3) φ – це обертання на кут α проти годинникової стрілки навколо осі $0X$;
4) $\varphi(x) = \langle x, a \rangle a$, де a – деякий фіксований вектор.

6.3. Дано матрицю A_e лінійного перетворення у базисі e_1, e_2, e_3. Знайдіть матрицю A_f цього перетворення у базисі f_1, f_2, f_3.

1) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, f_3 = e_1 + e_2 + e_3$;

2) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $f_1 = e_2, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = e_1 + 2e_3$.

6.4. Як зміниться матриця лінійного оператора, якщо переставити вектори базису в зворотному порядку?

6.5. 1) Знайдіть матрицю лінійного перетворення диференціювання, що діє з простору многочленів $\mathbb{R}_4[x]$ у $\mathbb{R}_3[x]$ у парі стандартних базисів, що складаються зі степенів x.

2) Знайдіть матрицю лінійного перетворення інтегрування $\int_0^x f(x)dx$, що діє з простору многочленів $\mathbb{R}_3[x]$ у $\mathbb{R}_4[x]$ у парі стандартних базисів, що складаються зі степенів x.

Як пов'язані матриці, що ви їх отримали?

6.6. 1. Нехай σ_x – віддзеркалення площини xOy відносно осі Ox, а σ_y – відносно осі Oy. Знайдіть композицію відображень $\sigma_x \circ \sigma_y$.

2. Узагальніть результат попереднього пункту. Нехай σ_α – віддзеркалення площини xOy відносно прямої, що нахилена до осі Ox під кутом α, а σ_β – відносно прямої, що нахилена до осі Ox під кутом β. Знайдіть композицію цих перетворень, використавши їх матриці.

6.7. Перетворення φ має в стандартному базисі $\mathbb{R}^2$ матрицю $\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, а перетворення ψ має в базисі $f_1 = (2, 1), f_2 = (1, 1)$ має матрицю $\Psi = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть в стандартному базисі та в базисі f_1, f_2 матриці операторів

1) $\phi + \psi$; 2) $\phi\psi$; 3) ϕ^{-1} 4) ψ^{-1}.

6.8. Знайдіть ядро та образ лінійного оператора в $\mathbb{R}^3$, заданого матрицею в деякому базисі.

1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

6.9. Знайдіть лінійне перетворення (наприклад, знайшовши його матрицю), яке переводить вектори $a_1 = (1, 1), a_2 = (2, 3)$ у $b_1 = (3, 4), b_2 = (1, 2)$ відповідно. Яке перетворення переводить $b_1 = (3, 4), b_2 = (1, 2)$ у $a_1 = (1, 1), a_2 = (2, 3)$? Вважайте, що координати всіх векторів задано в одному й тому ж базисі (наприклад, стандартному).

Виконайте те саме завдання для пар векторів:
1) $a_1 = (1, 0), a_2 = (0, 1)$ і $b_1 = (2, 5), b_2 = (1, 3)$; 2) $a_1 = (1, 3), a_2 = (2, 6)$ і $b_1 = (1, -3), b_2 = (4, 2)$.

Чи завжди існує перетворення, яке одну пару векторів переводить в іншу?

6.10. Знайдіть власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею. Зведіть матрицю до діагонального вигляду у базисі з власних векторів, якщо це можливо.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

6.11. 1. Відомо, що характеристичний многочлен матриці $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$. Чому дорівнює визначник цієї матриці? Слід цієї матриці?

2. Відомо, що для квадратної матриці A порядку 2 $\det A = TrA = 4$. Який характеристичний многочлен у цієї матриці? Чому дорівнюють власні значення?

6.12. Парадокс транспонування. Розглянемо у просторі усіх дійсних квадратних матриць порядку 2 перетворення $\varphi(A) = A^t$. Покажіть, що це перетворення лінійне. У лінійного перетворення має існувати матриця, тобто має існувати Φ, така що $\varphi(A) = A^t = \Phi \cdot A$. Доведіть, що такої матриці НЕ існує. Чи можете ви пояснити цю суперечність? Де помилка в наших міркуваннях?

6.13. Ще раз по ранги. Нехай А квадратна матриця $n \times n$. Доведіть, що $n - \text{rankA} \geqslant \text{rankA} - \text{rankA}^2$. Підказка: розгляньте оператор із матрицею A та його обмеження на свій власний образ.

6.14. Подібні матриці. Матриця A подібна до матриці B, якщо існує така невироджена матриця T, що $A = T^{-1}BT$ (тобто A є матрицею того ж лінійного оператора, що і B, але в іншому базисі).

1) покажіть, що відношення подібності матриць є відношенням еквівалентності;

2) покажіть, що подібні матриці мають ті самі власні значення (але взагалі кажучи різні власні вектори);

3) слід матриці (Tr) – це сума її елементів, що стоять на головній діагоналі. Покажіть, що подібні матриці мають однаковий слід. Скористайтеся тим, що $Tr(AB) = Tr(BA)$.

6.15. Невироджені оператори Лінійне перетворення у просторі $\mathbb{R}^n$ називається невиродженим, якщо його матриця у деякому базисі є невиродженою. Доведіть, що наступні умови еквівалентні.

1. φ – невироджене перетворення в $\mathbb{R}^n$.
2. Матриця φ є невиродженою в довільному базисі $\mathbb{R}^n$.
3. Для довільного вектора x з $\varphi x = 0$ випливає, що $x = 0$ (тобто $\text{Ker}\varphi = \{0\}$).
4. Під дією перетворення φ будь-який базис переходить у базис $\mathbb{R}^n$.
5. Для довільних векторів x_1, x_2 з $\varphi x_1 = \varphi x_2$ випливає, що $x_1 = x_2$ (тобто φ є ін'єктивним).
6. Для кожного $y \in \mathbb{R}^n$ знайдеться такий $x \in \mathbb{R}^n$, що $\varphi x = y$ (тобто φ є сюр'єктивним).
7. φ має обернене перетворення ψ (тобто таке перетворення, що для довільного вектора x з $\varphi(\psi x) = x$ і $\psi(\varphi x) = x$).

ЛА-МП-7. Квадратичні форми й симетричні матриці

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

7.7.

7.8.

7.9.

7.10.

7.11.

7.12.