《随机过程》第二次作业

1. 设随机过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\} = \{X(t,\omega), -\infty < t < +\infty\}$只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1) = 2\cos(t), X(t,\omega_2) = -2\cos(t),$$

且 $P(\omega_1) = \frac{2}{3}, P(\omega_2) = \frac{1}{3}$. 求：（1）一维分布函数$F_0(x)$和$F_{\pi/4}(x)$；（2）二维分布函数$F_{0,\pi/4}(x,y)$；（3）均值函数$\mu_X(t)$；（3）协方差函数$\gamma_X(s,t)$.

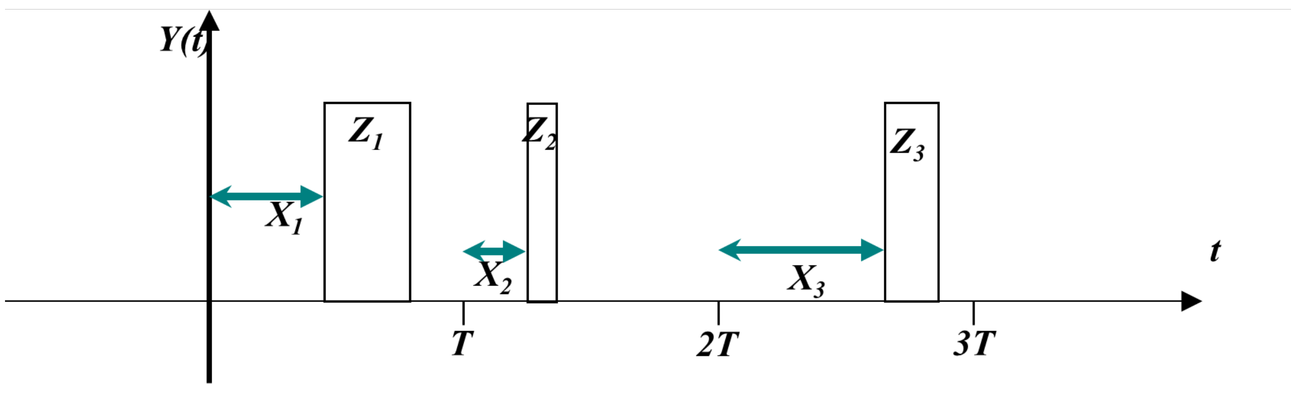
2. 考虑正弦波过程$X(t) = \xi\cos(\omega t)$fi$t \geq 0$，其中ω为正常数，$\xi \sim U[0,1]$. 求：（1）分别求$t = \frac{\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$ 时$X(t)$概率密度函数$f_t(x)$；（2）求$X(t)$的均值函数，方差函数，自相关函数，协方差函数。

3. 考虑随机游走模型$\{Y(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$,其中

$$Y(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k, Y(0) = 0.$$

X_k是相互独立同服从$N(0,\sigma^2)$的正态随机变量。求：（1）$Y(n)$的概率密度；
（2）$(Y(n), Y(m))$的联合概率密度$(m \geq n)$.

4. 一个通讯系统，以每T秒为一周期输出一个幅度为A的信号，A为常数，每个周期内信号输出时间$X_i \sim U[0, \frac{5}{6}T]$，持续时间$Z_i \sim U[0, \frac{1}{6}T]$，$X_i, Z_i$相互独立，且输出时间$X_i$相互独立，持续时间$Z_i$也相互独立，如下图所示，设$Y(t)$为$t$时刻接收到的信号幅度，求$\{Y(t), t \geq 0\}$的一维概率分布。



5. 通过连续重复抛掷一枚硬币确定随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \text{在}t\text{时刻抛掷硬币出现正面} \\ 2t, & \text{在}t\text{时刻抛掷硬币出现反面} \end{cases}$$

求：（1）一维分布函数$F_{1/2}(x)$和$F_t(x)$；（2）二维分布函数$F_{1/2,1}(x,y)$；

6. 设$X(t) = \sin(\Theta t)$，其中$\Theta \sim U[0, 2\pi]$，证明：（1）$\{X(t), t = 0, 1, 2, \ldots\}$是宽平稳序列；（2）而$\{X(t), t \geq 0, \ldots\}$不是宽平稳过程。

7. 设二阶矩过程$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$有均值函数$\mu_X(t) = \alpha + \beta t$,协方差函数$\gamma_X(s,t) = e^{-\lambda|t-s|}$，令

$$Y(t) = X(t+1) - X(t)$$

证明$\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$为宽平稳过程。

8. 设随机过程$\{X(t) = \xi\cos(\beta t + \eta), -\infty < t < +\infty\}$, 其中 $\xi \sim N(0,1), \eta \sim U[0,2\pi]$, ξ与η相互独立，β为正常数，证明$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为宽平稳过程，且均值具有遍历性。

9. 设随机过程$\{X(t) = A\cos(\omega t + \Theta), -\infty < t < +\infty\}$, 其中 A, ω, Θ为相互独立的随机变量。$E(A) = 2, D(A) = 4, E(A^4) = 8$, 且 $\omega \sim U[-5,5], \Theta \sim U[-\pi,\pi]$. 令$Z(t) = X(t)X(t+u)$这里$u > 0$为常数。讨论$\{Z(t), -\infty < t < +\infty\}$的宽平稳性和均值遍历性。

10. 若$Z_0, Z_1, \cdots$是独立同分布随机变量，定义$X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，证明$\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是平稳独立增量过程。