《随机过程》第二次作业

24 2022010910017 谢卿云

2024 年 4 月 6 日

题目 1. 设随机过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\} = \{X(t,\omega), -\infty < t < +\infty\}$ 只有两条样本函数.

$$X(t,\omega_1) = 2\cos(t), X(t,\omega_2) = -2\cos(t),$$

且 $P(\omega_1) = \frac{2}{3}, P(\omega_2) = \frac{1}{3}$. 求:（1）一维分布函数 $F_0(x)$ 和 $F_{\pi/4}(x)$;（2）二维分布函数 $F_{0,\pi/4}(x,y)$;（3）均值函数 $\mu_X(t)$; (3) 协方差函数 $\gamma_X(s,t)$.

解答.

(1) 分别代入 $t = 0, \frac{\pi}{4}$ 得到

$$F_0(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 2 \\ \frac{1}{3} & , -2 \leq x < 2 \\ 0 & , x < -2 \end{cases}$$

$$F_{\pi/4}(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & , -\sqrt{2} \leq x < 2 \\ 0 & , x < -\sqrt{2} \end{cases}$$

(2) 注意到 $F_{0,\pi/4}(x,y)=F_0(x)F_{\pi/4}(y)$.

$$F_{0,\pi/4}(x,y)=\begin{cases}1 & ,x\geq 1,y\geq 1\\ \frac{1}{3} & ,x\geq 2,-\sqrt{2}\leq y<\sqrt{2}or-2\leq x<2,y\geq\sqrt{2}\\ \frac{1}{9} & ,-\sqrt{2}\leq y<\sqrt{2},-2\leq x<2\\ 0 & ,else.\end{cases}$$

(3)$\mu_X(t)=E(X(t))=2cos(t)\times\frac{2}{3}-2cos(t)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}cos(t)$

(4)$\gamma_X(s,t)=E[X(s)X(t)]-E[X(s)]E[X(t)]=[\frac{4}{9}\cdot 2cos(s)\cdot 2cos(t)-\frac{2}{9}\cdot 2cos(s)\cdot 2cos(t)-\frac{2}{9}\cdot 2cos(s)\cdot 2cos(t)+\frac{1}{9}\cdot 2cos(s)\cdot 2cos(t)]-\frac{2}{3}cos(s)\frac{2}{3}cos(t)=0$

题目 2. 考虑正弦波过程 $\{X(t)=\xi\cos(\omega t)|t\geq 0\}$, 其中 ω 为正常数, $\xi\sim U[0,1]$. 求: (1) 分别求 $t=\frac{\pi}{4\omega},\frac{\pi}{2\omega},\frac{3\pi}{4\omega},\frac{\pi}{\omega}$ 时 $X(t)$ 概率密度函数 $f_t(x)$; (2) 求 $X(t)$ 的均值函数, 方差函数, 自相关函数，协方差函数。

解答.

(1)$X(\frac{\pi}{4\omega})=\frac{\xi}{\sqrt{2}},f_{\pi/4\omega}(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & ,0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & ,else\end{cases}$

$X(\frac{\pi}{2\omega})=0,f_{\pi/3\omega}(x)=\delta(0)$, 也就是在 $x=0$ 处的 Dirac-δ 函数.

$X(\frac{3\pi}{4\omega})=-\frac{\xi}{\sqrt{2}},f_{3\pi/4\omega}(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & ,-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0\\ 0 & ,else\end{cases}$

$X(\frac{\pi}{\omega})=-\xi,f_{\pi/\omega}(x)=\begin{cases}1 & ,-1\leq x\leq 0\\ 0 & ,else\end{cases}$

(2)$\mu_X(t)=E[X(t)]=\int_0^1\xi cos(\omega t)d\xi=\frac{1}{2}cos(\omega t)$

$E[X^2(t)]=\int_0^1\xi^2cos^2(\omega t)d\xi=\frac{1}{3}cos^2(\omega t)$

$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2(X(t))=\frac{1}{12}cos^2(\omega t)$

$R(s,t)=E[X(s)X(t)]=\int_0^1\xi^2cos(\omega t)cos(\omega s)d\xi=\frac{1}{3}cos(\omega s)cos(\omega t)$

$R\gamma(s,t)=E[X(s)X(t)]-E[X(s)]E[X(t)]==\frac{1}{12}cos(\omega s)cos(\omega t)$

题目 3. 考虑随机游走模型 $\{Y(n),n=0,1,2,\cdots\}$, 其中

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X_k,Y(0)=0$$

X_k 是相互独立同服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的正态随机变量。求:（1）$Y(n)$ 的概率密度;

(2) $(Y(n),Y(m))$ 的联合概率密度 $(m\geq n)$.

解答.

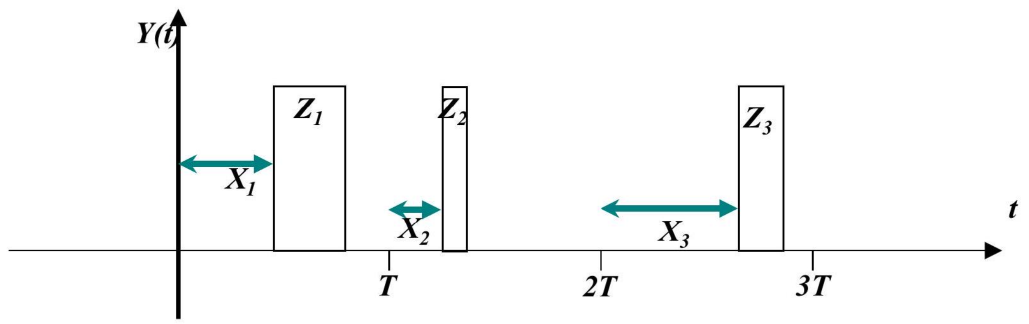
(1) 注意到 $\psi_Y(t)=E(e^{ity})=E(e^{it\sum_{i=1}^{n}X_i})=\prod_{i=1}^{n}E(e^{itX_k})=e^{-\frac{1}{2}n\sigma^2 t}$,

因此 $Y\sim N(0,n\sigma^2),f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}}$

(2) 对于 $m>n,f_{(Y(n),Y(m))}=f_{Y(n)}(x)f_{Y(m)|Y(n)}(y|x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2n\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(m-n)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(n-m)\sigma^2}}$

对于 $m=n,f_{(Y(n),Y(m))}=f_{Y(n)}(x)f_{Y(m)|Y(n)}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2n\sigma^2}} & ,y=x\\ 0 & ,else.\end{cases}$

题目 4. 一个通讯系统, 以每 T 秒为一周期输出一个幅度为 A 的信号, A 为常数, 每个周期内信号输出时间 $X_i\sim U\left[0,\frac{5}{6}T\right]$, 持续时间 $Z_i\sim U\left[0,\frac{1}{6}T\right]$, X_i,Z_i 相互独立, 且输出时间 X_i 相互独立, 持续时间 Z_i 也相互独立, 如下图所示, 设 $Y(t)$ 为 t 时刻接收到的信号幅度, 求 $\{Y(t),t\geq 0\}$ 的一维概率分布。



解答. 注意到令 $R = X_i + Z_i$,R 的概率密度为 $f_R(r) = \int_{-infty}^{\infty} f_X(x) f_Z(r-x)dx$, 也就是

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & ,r \le 0 \\ \frac{36r}{5T^2} & ,0 < r \le \frac{1}{6}T \\ \frac{6}{5T} & ,\frac{1}{6}T < r \le \frac{5}{6}T \\ \frac{36}{5T^2}(T-r) & ,\frac{5}{6}T < r < T \\ 0 & ,r \ge T \end{cases}$$

那么 R 的分布 $F_R(u) = \int_{-\infty}^{u} f_R(r)dr$

$$F_R(u) = \begin{cases} 0 & ,u \le 0 \\ \frac{18u^2}{5T^2} & ,0 < u \le \frac{1}{6}T \\ \frac{6u}{5T} - \frac{1}{10} & ,\frac{1}{6}T < u < \frac{5}{6}T \\ -\frac{13}{5} + \frac{36}{5T^2}(Tu - \frac{1}{2}u^2), & \frac{5}{6} \le u < T \\ 1 & ,u \ge T \end{cases}$$

记 $\delta = \{\frac{t}{T}\}T$, 则因为每个周期相互独立，只需要考虑一个周期内的情况

$$P(Y(t) = 0) = P(\delta < X_i) + P(\delta > X_i + Z_i)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{6\delta}{5T} & ,0 < \delta < \frac{5}{6}T \\ 0 & ,\delta > \frac{5}{6}T \end{cases} + \begin{cases} \frac{18\delta^2}{5T^2} & ,0 < \delta \leq \frac{1}{6}T \\ \frac{6\delta}{5T} - \frac{1}{10} & ,\frac{1}{6}T < \delta < \frac{5}{6}T \\ -\frac{13}{5} + \frac{36}{5T^2}(T\delta - \frac{1}{2}\delta^2), & \frac{5}{6}T \leq \delta < T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{6\delta}{5T} + \frac{18\delta^2}{5T^2} & ,0 < \delta \leq \frac{1}{6}T \\ \frac{9}{10} & ,\frac{1}{6}T < \delta < \frac{5}{6}T \\ -\frac{13}{5} + \frac{36}{5T^2}(T\delta - \frac{1}{2}\delta^2), & \frac{5}{6}T \leq \delta < T \end{cases}$$

显然 $P(Y(t) = A) = 1 - P(Y(t) = 0)$, 这里不再赘述.

题目 5. 通过连续重复抛郑一枚硬币确定随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$.

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \text{在}t\text{ 时刻抛掷硬币出现正面} \\ 2, & \text{在}t\text{ 时刻抛郑硬币出现反面} \end{cases}$$

求：(1）一维分布函数 $F_{1/2}(x)$ 和 $F_t(x)$; (2) 二维分布函数 $F_{1/2,1}(x, y)$;

解答.

(1) 由于硬币均匀，所以以下结论是平凡的：

$$F_t(x) = \begin{cases} 0 & ,x < cos\pi t \\ \frac{1}{2} & ,cos\pi t \leq x \leq 2 \\ 1 & ,x \geq 2 \end{cases}$$

代入 $t = \frac{1}{2}$, 我们有

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \frac{1}{2} & ,0 \leq x \leq 2 \\ 1 & ,x \geq 2 \end{cases}$$

(2) 我们默认不同时间投掷硬币的试验是相互独立的，$X(\frac{1}{2}), X(1)$ 的联合分布如下表所示，

表 1: 联合分布率

$X(\frac{1}{2})$ \ $X(1)$	-1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

不难得出分布函数如下所示

$$F_{\frac{1}{2},1}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ,0 < x < 2, -1 < y < 2 \\ \frac{1}{2} & ,0 < x < 2, y \geq 2 \ or x \geq 2, -1 < y < 2 \\ 1 & ,x \geq 2, y \geq 2 \\ 0 & ,else. \end{cases}$$

题目 6. 设 $X(t) = \sin(\Theta t)$, 其中 $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 证明: (1) $\{X(t), t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是宽平稳序列;（2）而 $\{X(t), t \geq 0, \ldots\}$ 不是宽平稳过程。

解答.

(1) 注意到 $E(X(t)) = \int_0^{2\pi} sin(\theta t)\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi t}cos(u)|_0^{2\pi t}$, 当 $t \in \mathbb{Z}, E(X(t)) = 0$ 为常数;

$\gamma(t,s) = E(X(s)X(t)) = E(sin(\theta s)sin(\theta t))$

$= \int_0^{2\pi} sin(\theta s)sin(\theta t)\frac{1}{2\pi}d\theta = \begin{cases} 0 & ,s \neq t \\ \frac{1}{2} & ,s = t \end{cases}$ 只和 $t - s$ 有关，故 $\{X(t), t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是宽平稳序列.

(2)$E(X(t)) = \int_0^{2\pi} sin(\theta t)\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi t}cos(u)|_0^{2\pi t}$, 对 $t \geq 0$ 不为常数，故 $\{X(t), t \geq 0, \ldots\}$ 不是宽平稳过程.

题目 7. 设二阶矩过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 有均值函数 $\mu_X(t) = \alpha + \beta t$, 协方差函数 $\gamma_X(s,t) = e^{-\lambda|t-s|}$, 令

$$Y(t) = X(t+1) - X(t)$$

证明 $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为宽平稳过程。

解答. $\mu_Y(t) = E[X(t+1) - X(t)] = E[X(t+1)] - E[(X(t))]$
$= \alpha + \beta(t+1) - \alpha - \beta t = \beta$ 为常数
注意到 $E[X(s)X(t)] = e^{-\lambda|t-s|} + (\alpha + \beta s)(\alpha + \beta t)$
故 $\gamma_Y(s,t) = E[Y(s)Y(t)] - E[Y(s)]E[Y(t)] = E[X(s+1)X(t+1)] + E[X(s)X(t)] - E[X(s+1)X(t)] - E[X(s)X(t+1)] - \beta^2 = \gamma_X(s+1, t+1) + \gamma_X(s,t) - \gamma_X(s+1,t) - \gamma_X(s,t+1)$ 只与 $|t-s|$ 有关，因此 $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为宽平稳过程.

题目 8. 设随机过程 $\{X(t) = \xi\cos(\beta t + \eta), -\infty < t < +\infty\}$, 其中 $\xi \sim N(0,1), \eta \sim U[0, 2\pi]$, ξ 与 η 相互独立, β 为正常数, 证明 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为宽平稳过程, 且均值具有遍历性。

解答. 只需验证以下三点即可：
（1）$E[X(t)] = E(\xi cos(\beta t + \eta)) = E(\xi)E(cos(\beta t + \eta)) = 0$ 为常数
（2）

$$\gamma_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = \frac{1}{2}(E^2(\xi) + D(\xi))(E[cos(\beta(s-t))] + E[cos(\beta(s+t) + 2\eta)])$$

$$= \frac{1}{2}cos(\beta(t-s)) + \int_0^{2\pi} cos[\beta(s+t) + 2\eta]\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2}cos(\beta(s-t))$$

只与 s-t 有关，改记 $\gamma(\tau)=\frac{1}{2}cos(\beta\tau)$.

(3)

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\gamma(\tau)d\tau=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T\beta}\left(\frac{sin\beta\tau(2T-\tau)}{2T}-\frac{1}{2T}\frac{cos\beta\tau}{\beta}\right)\Big|_0^{2T}=0$$

因此均值遍历性定理可知结论为真.

题目 9. 设随机过程 $\{X(t)=A\cos(\omega t+\Theta),-\infty<t<+\infty\}$, 其中 A,ω,Θ 为相互独立的随机变量。$E(A)=2,D(A)=4,E\left(A^4\right)=8$, 且 $\omega\sim U[-5,5],\Theta\sim U[-\pi,\pi]$. 令 $Z(t)=X(t)X(t+u)$ 这里 $u>0$ 为常数。讨论 $\{Z(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的宽平稳性和均值遍历性。

解答. $E[X(t)]=E(A)E[cos(\omega t+\theta)]=2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-5}^{5}cos(\omega t+\theta)=0$
$\gamma(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[A^2cos(\omega t+\theta)cos(\omega s+\theta)]=4\int_{-5}^{5}cos(\omega(t-s))\frac{1}{10}d\omega+4\int_{-5}^{5}\int_{-\pi}^{\pi}cos(\omega(t+s)+2\theta)\frac{1}{2\pi}\frac{1}{10}d\theta d\omega=\frac{4}{5(t-s)}sin5(t-s)$ 因此 $\mu_Z(t)=E[X(t)X(t+u)]=\frac{4sinu}{5u}$

$$R_Z(s,t)=E[X(s)X(t)X(s+u)X(t+u)]$$

$$=E(A^4)E[cos(\omega t+\theta)cos(\omega s+\theta)cos(\omega(s+u)+\theta)cos(\omega(t+u)+\theta)]$$

$$=2E[cos(\omega(s+t)+2\theta)]+2E[cos^2((\omega(s-t)))]=1+\frac{sin(10(s-t))}{10(s-t)}+\frac{sin10u}{10u}$$

$$\gamma_Z(s,t)=R_Z(s,t)-\mu_Z^2(t)=1+\frac{sin(10(s-t))}{10(s-t)}+\frac{sin10u}{10u}-\frac{16}{sin^2(5u)}25u^2$$

期望为常数，协方差函数只和 $s-t$ 有关，故 $\{Z(t),-\infty<t<+\infty\}$ 具有宽平稳性.

但 $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\gamma(\tau)d\tau=1+\frac{sin(10u)}{10u}-\frac{16sin5u}{25u^2}$ 不一定为 0，故不一定具备均值遍历性.

题目 10. 若 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程。

解答.

(1) 独立性: 注意到 $X(n) - X(n-1) = Z(n)$, 因为 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布，显然 $X(n)$ 也是独立增量过程.

(2) 平稳性: 注意到 $\psi_{X(n)}(a) = E(e^{ia\sum_{i=0}^{n} Z_i}) = \psi_Z^n(t)$ 显然 $\psi_{X(s+t)}(a) = \psi_{X(s)}(a)\psi_{X(t)}(a)$, 由平稳增量定理可知 $X(n)$ 也是平稳的.