《应用随机过程》第一次作业

谢卿云 2022010910017

2024 年 3 月 19 日

题目 1. 设 Ω 为样本空间, 事件 $A, B \in \Omega$, 集类 $\mathcal{C} = \{A, B\}$. 试写出由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数, 即 $\sigma(\mathcal{C})$ 中的全部元素.

解答. 断言:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, \Omega, \{A\}, \{B\}, \mathcal{C}, \overline{\{A\}}, \overline{\{B\}}, \overline{\mathcal{C}}\}$$

回忆最小 σ 代数的性质:

1. $\Omega \in \sigma(\mathcal{C})$.

2. $\sigma(\mathcal{C})$ 对可数并运算封闭.

3. $\sigma(\mathcal{C})$ 对补运算封闭.

4. $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap\{\mathcal{H} | \mathcal{H}\text{为包含}\mathcal{C}\text{的}\sigma\text{代数}\}$

若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 所谓生成的 σ 代数, 由性质 1,2,3, 显然 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. 由性质 4,$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ 那么 $\mathcal{C} = \mathcal{F}$. 故断言为真.

题目 2. (期望的尾和公式) 设 X 为离散型随机变量且取值为非负整数，证明：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$$

解答.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k[P(X>k-1)-P(X>k)]$$

$$=P(X>0)+\sum_{k=1}^{\infty}[k-(k-1)]P(X>k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$$

.

题目 3. 设随机变量 X 服从参数为 1/2 的指数分布. 求:(1) 推导 X 的特征函数 $X(t)$;(2) 利用特征函数求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解答.

(1) $\psi_X(t)=E(e^{itX})=\int_0^\infty e^{itx}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{2it-1}e^{(it-\frac{1}{2})x}|_0^\infty=\frac{1}{1-2it}$.

(2)$E(X)=(-i)\psi_X'(0)=(-i)\frac{2i}{(1-2it)^2}|_{t=0}=2$

$E(X^2)=(-i)^2\psi_X''(0)=-(-i)^2\frac{8}{(1-2it)^3}|_{t=0}=8$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=4$.

题目 4. 设随机变量 $X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$，且 X 与 Y 相互独立。求:(1) 推导 X 的特征函数 $\psi_X(t)$;(2)$X+Y$ 的分布。

解答.

(1)$\psi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{n}.e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(e^{it}p+1-p)^n$.

(2)$\psi_Y(t)=(e^{it}p+1-p)^m,\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\psi_Y(t)=(e^{it}p+1-p)^{m+n}$. 由特征函数与分布唯一对应定理，$X+Y\sim B(m+n,p)$.

题目 5. 设随机变量 X 服从参数为 n 的卡方分布, 即 $X \sim \chi^2(n)$. 已知 $\psi_X(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$, 求:(1) 利用特征函数求 $E(X)$ 和 $D(X)$;(2) 利用特征函数证明卡方分布具有可加性.

解答.
(1)$E(X) = (-i)\psi'_X(0) = (-i)in(1-2it)^{-\frac{n}{2}-1}|_{t=0} = n$.
$E(X^2) = (-i)^2\psi''_X(0) = (-i)^2 \cdot (-1)n(n+2)(1-2it)^{-\frac{n}{2}-2}|_{t=0} = n(n+2)$.
$D(X) = E(X^2) - E(x)^2 = 2n$.
(2) 不妨设 $Y \sim \chi^2(m), \psi_Y(t) = (1-2it)^{-\frac{m}{2}}$. 且 X, Y 相互独立.
$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(t) = (1-2it)^{-\frac{m+n}{2}}$.
根据特征函数和分布唯一对应定理，$X + Y \sim \chi^2(m+n)$.

题目 6. 设随机变量 $X \sim U[0,\pi], Y = sinX$, 利用特征函数求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解答. 断言：

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & ,0 < y < 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

对于 $E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f_X(y)dy = \int_0^{\pi} e^{itx}\frac{1}{\pi}dx$
那么对于 $Y = sinX$,$E(e^{itY}) = \int_0^{\pi} e^{itsinx}\frac{1}{\pi}dx = \int_0^{\pi/2} e^{itsinx}\frac{2}{\pi}dx$
$= \int_0^1 e^{ity}\frac{2}{\pi}darcsiny = \int_0^1 e^{ity}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f_Y(y)dy$. 断言为真.

题目 7. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x<1\\ 0 & else\end{cases}$$

求:(1)$f_X(x), f_Y(y)$;(2) 讨论 X 与 Y 的独立性和相关性;(3) 求条件数学期望 $E(X|Y=y)$ 和 $E(Y|X=x)$.

解答.

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1 & ,0<x<1\\ 0 & ,else\end{cases}=\begin{cases}2x & ,0<x<1\\ 0 & ,else\end{cases}$

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{x}1 & ,-1<y<1\\ 0 & ,else\end{cases}=\begin{cases}1-|y| & ,-1<y<1\\ 0 & ,else\end{cases}$

(2) 显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,X,Y 不独立.

$E(X)=\int_0^1 2xdx=1$

$E(Y)=\int_{-1}^{1}1-|y|dy=0$

$E(XY)=\int_0^1\int_{-x}^{x}xyf(x,y)=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1$，$X,Y$ 不相关.

(3) $f_{X|Y}(X|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|} & ,|y|<x<1\\ 0 & ,else\end{cases}$

$f_{Y|X}(Y|X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x} & ,|y|<x<1\\ 0 & ,else\end{cases}$

$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|Y=y)dx=\frac{1+|y|}{2}$

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|X=x)dy=0$

题目 8. 从 $1,2,...,n$ 中任取一个数记为 X，再从 $1,2,...,X$ 中任取一个数记为 Y，求 $E(Y)$.

解答. 注意到对 $1 \le x \le n$,$E(Y|X=x) = \sum_{y=1}^{x} \frac{1}{x} y = \frac{x+1}{2}$ 由全期望定理, $E(Y) = E[E(Y|X)] = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{x+1}{2} = \frac{n+3}{4}$.

题目 9. 盒中有编号为 $1,2,3,4,5$ 的 5 个球, 现从盒子中随即取出一球（假设每个球都是等可能地被取到）. 若取到 5 号球，则得 5 分，且停止摸球；若取到 i 号球 $i = 1,2,3,4$, 则得 i 分，且将此球放回, 重新摸球. 依次循环下去, 用随机变量 X 表示得到的总分数，试求 $E(X)$.

解答. 由全期望公式,$E(X) = E[E(X|Y)] = \frac{1}{5} \cdot 5 + \sum_{y=1}^{4} \frac{1}{5}(y + E(X))$, 解得 $E(X) = 15$.

题目 10. 设在底层乘电梯的人数服从均值为 10 的泊松分布，又设此楼共有 $N+1$ 层，每一个乘客在每一层楼要求停下来离开是等可能的，而且与其余乘客是否在这层停下是相互独立的，求在所有乘客都走出电梯之前，该电梯停止次数的期望值.

解答. 注意到对 $2 \le j \le N+1$, 记 $Y_j = \begin{cases} 1 & \text{, 第 j 层有人下} \\ 0 & \text{, 其他} \end{cases}$

$Y = \sum_{j=2}^{N+1} Y_j, E(Y_j|X=x) = 1 - P(Y_j = 0|X=x) = 1 - (1-\frac{1}{N})^x$

$E(Y|X=x) = \sum_{j=2}^{N+1} E(Y_j|X=x) = N(1-(1-\frac{1}{N})^x)$

由全期望公式，$E(Y) = E[E(Y|X)] = \sum_{x=0}^{\infty} N(1-(1-\frac{1}{N})^x)\frac{10^x}{x!}e^{-10} = N(1-e^{-\frac{10}{N}})$.