《随机过程》第一次作业

1. 设Ω为样本空间，事件$A, B \in \Omega$, 集类$\mathcal{C} = \{A, B\}$。试写出由$\mathcal{C}$生成的σ代数，即$\sigma(\mathcal{C})$中的全部元素。

2. (期望的尾和公式) 设X为离散型随机变量且取值为非负整数，证明：
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

3. 设随机变量X服从参数为$1/2$的指数分布。求：（1）推导X的特征函数$\psi_X(t)$；（2）利用特征函数求$E(X)$和$D(X)$.

4. 设随机变量$X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p)$，且$X$与$Y$相互独立。求：（1）推导$X$的特征函数$\psi_X(t)$；（2）$X + Y$的分布。

5. 设随机变量X服从参数为n的卡方分布，即$X \sim \chi^2(n)$. 已知 $\psi_X(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$，求：（1）利用特征函数求$E(X)$和$D(X)$；（2）利用特征函数证明卡方分布具有可加性。

6. 设随机变量$X \sim U[0, \pi]$, $Y = \sin X$, 利用特征函数求$f_Y(y)$.

7. 已知二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
求：（1） $f_X(x), f_Y(y)$；（2）讨论X与Y的独立性和相关性；（3）求条件数学期望$E(X|Y = y)$ 和$E(Y|X = x)$.

8. 从$1, 2, \cdots, n$中任取一个数记为X，再从$1, 2, \cdots, X$中任取一个数记为Y，求$E(Y)$.

9. 盒中有编号为$1, 2, 3, 4, 5$的5个球，现从盒子中随即取出一球（假设每个球都是等可能地被取到）。若取到5号球，则得5分，且停止摸球；若取到i号球（$i = 1, 2, 3, 4$），则得i分，且将此球放回，重新摸球。依次循环下去，用随机变量X表示得到的总分数，试求$E(X)$。

10. 设在底层乘电梯的人数服从均值为10的泊松分布，又设此楼共有$N + 1$层，每一个乘客在每一层楼要求停下来离开是等可能的，而且与其余乘客是否在这层停下是相互独立的，求在所有乘客都走出电梯之前，该电梯停止次数的期望值.