《应用随机过程》第三次作业

24 2022010910017 谢卿云

2024 年 4 月 6 日

题目 1. （泊松过程的数字特征）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程。求: $N(t)$ 的均值函数、方差函数、协方差函数、和自相关函数。

解答. 回忆 Poisson 过程的定义,$N(t) \sim P(\lambda t)$. 不妨假设 $s \leq t$.

$$\mu_N(t) = E[N(t)] = \lambda t$$
$$D_N(t) = D[N(t)] = \lambda t$$

$$R_N(s,t) = E[N(s)N(t)] = E[N(s)(N(s) + N(t) - N(s))]$$
$$= E[N^2(s)] + E[N(s)]E[N(t) - N((s))]$$
$$= \lambda s + \lambda^2 s^2 + \lambda s(\lambda(t-s))$$
$$= \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$$
$$\gamma_N(s,t) = R_N(s,t) - E[N(s)]E[N(t)]$$
$$= \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st - \lambda^2 st = \lambda \min\{s,t\}$$

题目 2. 设某电话总机在 t 分钟内接到的电话呼叫数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是具有速率为 λ 的 Poisson 过程, 求:
(a) 3 分钟内接到 5 次呼叫的概率 p_1.

(b) 已知 3 分钟内接到 5 次呼叫，问第 5 次呼叫在第 2 到第 3 分钟之间到来的概率 p_2.

解答.

(a) 注意到 $N(t) \sim P(\lambda t)$. 由 Poisson 分布律

$$p_1 = P(\{N(3) = 5\}) = \frac{(3\lambda)^5}{5!} e^{-3\lambda}$$

(b) 记 T_n 为电话呼叫事件第 n 次发生的时刻.

$$\begin{aligned}
p_2 &= 1 - P(N(2) = 5 | N(3) = 5) \\
&= 1 - \frac{P(N(2) = 5) P(N(3) - N(2) = 0)}{P(N(3) = 5)} \\
&= 1 - \frac{\frac{(2\lambda)^5}{5!} e^{-2\lambda} \lambda^0 e^{-\lambda}}{\frac{(3\lambda)^5}{5!} e^{-3\lambda}} \\
&= 1 - (\frac{2}{3})^5
\end{aligned}$$

题目 3. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 求:

(a) $s > 0$ 时, $E[N(s)N(t+s)]$;

(b) $0 < s < t$ 时, $P(N(s) = k \mid N(t) = n)$;

(c) $s > 0$ 时, $P(N(t+s) = j \mid N(s) = j)$.

解答.

(a) 由泊松过程的独立增量性质.

$$
\begin{aligned}
&E[N(s)N(t+s)] = E[N(s)(N(t+s)-N(s)+N(s))] \\
&= E[N^2(s)] + E[N(s)]E[N(t+s)-N(s)] \\
&= E^2[N(s)] + D(N(s)) + E[N(s)]E[N(t+s)-N(s)] \\
&= \lambda^2 s^2 + \lambda s + \lambda^2 st
\end{aligned}
$$

(b) 假设 $k \le n$.(否则为平凡情况，概率为 0). 利用泊松过程的独立增量性质.

$$
\begin{aligned}
&P(N(s)=k \mid N(t)=n) \\
&= \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

(c) 由泊松过程的独立增量性质，

$$
\begin{aligned}
&P(N(t+s)=j \mid N(s)=j) \\
&= P(N(t+s)-N(s)=0 \mid N(s)=j) \\
&= P(N(t+s)-N(s)=0) = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

题目 3 的注记. 我们在 (b) 中实际证明引理 1: 已知 $s<t, k \le n, N(t)=n$, 则 $N(s) \sim B(n, \frac{s}{t})$

题目 4. 设 $\{N_1(t), t \ge 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \ge 0\}$ 分别是参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程, 且这两个过程相互独立。对 $0 \le k \le n$, 证明下列成立:
(a) $P\left(N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\right) = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$;
(b) $E\left[N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)=n\right] = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$;

解答.

(a) 不难根据全概率公式得出

$$
\begin{aligned}
&P\left(\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n)=k \mid N(t)=n\}\right) \\
&=\frac{P(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)}{P(N_1(t)+N_2(t)=n)} \\
&=\frac{P(N_1(t)=k)P(N(2)=n-k)}{\sum_{k=0}^{n} P(N_1(t)=k)P(N(2)=n-k)} \\
&=\frac{\frac{\lambda_1 t^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\frac{\lambda_2 t^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2 t}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1 t^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\frac{\lambda_2 t^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2 t}} \\
&=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&E\left[N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)\right] \\
&=\sum_{k=0}^{n} kP\left(N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\right) \\
&=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-1} \\
&=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}
$$

题目 5. 假设 $[0,t]$ 内顾客到达商场的人数 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程, 且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为 p 和 $q, p+q=1$. 设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为 $[0,t]$ 内到达商场的男女顾客数。求 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的分布, 并证明它们相互独立.

解答. 断言：

$$N_1(t) \sim P(p\lambda), N(2) \sim P(q\lambda), N_1(t), N_2(t)\text{相互独立}$$

为此只需证明以下 Poisson 过程分流引理:设 $\{N(t)|t \geq 0\} \sim P(\lambda)$,$\{Y_j\}_{j\geq 0} \sim B(1,p)$, 相互独立且与 $N(t)$ 独立，令

$$N_1(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_j, N_1(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} (1 - Y_j)$$

则 $N_1(t) \sim P(\lambda p), N(2) \sim P(\lambda(1-p)), N_1(t), N_2(t)$相互独立
对于 $0 \leq s < t$,

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, t \geq 0$$

是 $(s,t]$ 内事件的到达数,仿照引理 1,我们可知已知 $N(s) = l, N(t) = k$ 的条件下 $M(t) - M(s) \sim B(k-l,p)$,也即 $E[I_{M(t)-M(s)=n}|N(s), N(t)] = g(N(t) - N(s), n)$ 两边取期望得 $P(M(t) - M(s) = n) = E[g(N(t) - N(s), n)]$, 由 $N(t)$ 的平稳性可知 $M(t)$ 为平稳增量过程.
再来证明独立增量性，对正整数 m 和 $0 = t_0 \leq t_1 < ... < t_m$ 和整数 $0 = n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$, 定义

$$\mathbf{N} = (N(t_1), ..., N(t_m)), \mathbf{n} = (n_1, ..., n_m)$$

注意到独立性：

$$
\begin{aligned}
&P(M(t_j)-M(t_{j-1})=k_j, 1\le j\le m \mid \boldsymbol{N}=\boldsymbol{n})\\
=&P\left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} Y_i=k_j, 1\le j\le m \mid \boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}\right)\\
=&P\left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} Y_i=k_j,\ 1\le j\le m\right)\\
=&\prod_{j=1}^{m} P\left(\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} Y_i=k_j\right)\\
=&\prod_{j=1}^{m} g(n_j-n_{j-1},k_j).
\end{aligned}
$$

于是

$$
E[I_{\{M(t_j)-M(t_{j-1})=k_j\}}|\mathbf{N}]=\prod_{j=1}^{m} g(N(t_j)-N(t_{j-1}),k_j)
$$

独立增量性得证，只需验证 $M(t)$ 服从参数为 $p\lambda t$ 的 Poisson 分布：

$$
\begin{aligned}
&P(M(t)=n)\\
=&E[g(N(t),n)]\\
=&\sum_{k=n}^{\infty} g(k,n)P(N(t)=k)\\
=&\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^n q^{k-n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
=&\frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-p\lambda}, n=0,1,\ldots.
\end{aligned}
$$

显然有 $M(t)=N_1(t)$，同理对 $N_2(t)$ 也成立，最后一步就要验证两过程的独立性：对正整数 n 和 $0=t_0\le t_1<...<t_n, 0=k_0\le k_1<...<k_n, 0=m_0\le m_1<...<m_n$, 记 $n_j=k_j+m_j, \mathbf{n}=(n_1,...,n_n)$, 随机变量

$$
\xi_j=\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} Y_i, j=1,2,...
$$

服从二项分布，相互独立，且与 $\{N(t)\}$ 独立，于是

$$
\begin{aligned}
&P(N_1(t_j)=k_j, N_2(t_j)=m_j, 1\le j\le n)\\
=&P(N_1(t_j)=k_j, N(t_j)=n_j, 1\le j\le n)\\
=&P(N_1(t_j)-N_1(t_{j-1})=k_j-k_{j-1}, N(t_j)=n_j, 1\le j\le n)\\
=&P(\xi_j=k_j-k_{j-1}, N(t_j)-N(t_{j-1})=n_j-n_{j-1}, 1\le j\le n)\\
=&P(\xi_j=k_j-k_{j-1}, 1\le j\le n)\\
&P(N(t_j)-N(t_{j-1})=n_j-n_{j-1}, 1\le j\le n)\\
=&\prod_{j=1}^{n}P(\xi_j=k_j-k_{j-1})P(N(t_j)-N(t_{j-1})=n_j-n_{j-1})\\
=&\prod_{j=1}^{n}\frac{(n_j-n_{j-1})!}{(k_j-k_{j-1})!(m_j-m_{j-1})!}p^{k_j-k_{j-1}}q^{m_j-m_{j-1}}\cdot\frac{[\lambda(t_j-t_{j-1})]^{n_j-n_{j-1}}}{(n_j-n_{j-1})!}e^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}\\
=&\prod_{j=1}^{n}\frac{[p\lambda(t_j-t_{j-1})]^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}\\
=&\prod_{j=1}^{n}\frac{[q\lambda(t_j-t_{j-1})]^{m_j-m_{j-1}}}{(m_j-m_{j-1})!}.
\end{aligned}
$$

因此两过程独立.

题目 5 的注记. 用归纳法不难推广到分解成多个相互独立的 Poisson 过程.

题目 6. 设某个汽车站有 A, B 两辆跑同一路线的长途汽车, 设到达该站的旅客数为一 Poisson 过程, 平均每 10 分钟到达 15 位旅客, 而每个旅客进入 A 或 B 的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. 设 $N_A(t)$, $N_B(t)$ 分别表示时段 $[0, t]$ 内进入 A 或 B 的旅客数, 求:

(a) $N_A(t), N_B(t)$ 的分布。

(b) 若 A 车旅客数达到 10 位即发车, B 车旅客数达到 15 位即发车, 求 A, B 的等待时间的分布, 并求 A 比 B 先开车的概率。(提示:若 $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ 且 α 为正整数, 则

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta x)^i}{i!} e^{-\beta x}$$

最终的概率无需算出具体值。)

解答. 定义随机变量 $X_i = \begin{cases} 1 & ,\text{第 i 名乘客进入 A 车} \\ 0 & ,\text{第 i 名乘客进入 B 车} \end{cases}$ $,Y_i = 1 - X_i, i = 0, 1, ...$

(1)注意到 $N_A(t) + N_B(t) \sim P(\frac{3}{2}t)$, 根据泊松过程分流引理,$\{N_A(t)|t \geq 0\}, \{N_B(t)|t \geq 0\}$ 均为泊松过程,参数分别为 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1, \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$,即 $N_A(t) \sim P(1), N_B(t) \sim P(0.5)$

(2)取 $T_A(n), T_B(n)$ 为第 n 个旅客进入 A,B 车的时刻. 则根据泊松过程相关分布的性质,$T_A(n) \sim \Gamma(n, 1), T_B(n) \sim \Gamma(n, 0.5)$

那么 A 的等待时间服从 $\Gamma(10, 1)$,B 车的等待时间服从 $\Gamma(15, 0, 5)$,A 比 B 先开车的概率为

$$P(T_A(10) \leq T_B(15)) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(T_A(10) \leq x \mid T_B(15) = x) dP(T_B(15) = x)$$

$$= \int_x^{+\infty} (1 - \sum_{i=0}^{9} \frac{x^i}{i!} e^{-x}) \frac{1}{2^n \Gamma(15)} x^1 4 e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

题目 7. 设某医院专家门诊从早上 $8:00$ 开始就已有无数患者等候, 而每次专家只能为一名患者服务,服务的平均时间为 20 分钟,且每名患者接受服务的时间服从独立的指数分布。求从 8:00 到 12:00 门诊结束时接受过治疗的患者在医院停留的平均时间。

解答. 默认 8:00 为 0 时刻,记 T_n 表示第 n 位患者离开的时刻,S_n 表示第 n 位患者接收服务的时长,由题意,$S_n \sim Exp(\frac{1}{20})$, 注意到,$T_n = \sum_{i=1}^n S_i, T_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{20})$, 患者的离开是一个 Poisson 过程,换言之,记 $(0, t]$ 内离开的患者

数为 $N(t)$,$N(t)\sim P(\frac{1}{20})$. 注意到 $\sum_{i=1}^{n}T_i\sim\Gamma(\frac{n(n+1)}{2},\frac{1}{20})\Gamma E(\frac{\sum_{i=1}^{n}T_i}{n})$ 由全期望公式和 Γ 分布的性质：

$$E[\frac{\sum_{i=1}^{N(240)}T_i}{N(240)}]=E[E(\frac{\sum_{i=1}^{N(240)}T_i}{N(240)})|N(240)]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E(\frac{\sum_{i=1}^{N(240)}T_i}{N(240)}\mid N(240)=n)P(N(240)=n)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot 20}{n}(\frac{240\cdot\frac{1}{20}}{n!}e^{-240\cdot\frac{1}{20}}))=\frac{130e^{12}-10}{e^{12}}$$

题目 8. 设每天经过某路口的车辆数为: 早上 $7:00$ 到 $8:00, 11:00$ 到 $12:00$ 为平均每分钟 2 辆, 其他时间平均每分钟 1 辆。则早上 $7:30$ 到中午 $11:20$ 平均有多少辆汽车经过此路口? 这段时间经过此路口的车辆数超过 500 辆的概率是多少?

解答. 我们默认 7：00 为 0 时刻，记 $(0,t]$ 内路口经过的车辆数为 $N(t)$, 容易写出强度函数 $\lambda(t)=\begin{cases}2 & ,t\in[0,60]\\ 1 & ,t\in(60,240]\\ 2 & ,t\in(2400,300]\end{cases}$ 注意到 $\int_{30}^{260}\lambda(t)dt=30\times 2+180\times 1+2\times 20=280$, 则 $N(260)-N(30)\sim P(280)$
则早上 $7:30$ 到中午 $11:20$ 平均有 $E[N(260)-N(30)]=280$ 辆车经过，超过 500 辆的概率为 $P(N(260)-N(30)>500)=\sum_{k=501}^{+\infty}\frac{280^n}{n!}e^{-280}$

题目 9. 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, $X_1,X_2,\cdots$ 是事件之间的时间间隔，问:

(a) X_i 之间是否相互独立?

(b) X_i 之间是否同分布?（提示：求 X_1 和 X_2 的分布）

解答. 记 $m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$.

(1) $P(X_2>t|X_1=u)=P(N(t)-N(u)=0 \mid X_1=s)=P(N(t)-N(u)=0)=e^{\int_u^{t+u}\lambda(s)ds}=e^{m(u+t)-m(u)}$ 与 u 有关，从而 X_i 并不相互独立.

(2) 注意到 $P(X_1>t)=e^{-m(t)}$

$$
\begin{aligned}
P(X_2>t) &= \int_0^\infty P(X_2>t \mid X_1=u)dP(X_1=u) \\
= \int_0^\infty & e^{m(u+t)-m(u)}\lambda(u)e^{-m(u)}du = \int_0^\infty e^{m(u+t)}\lambda(u)du
\end{aligned}
$$

因此 X_i 并不同分布.

题目 10. 设 $\{N_1(t),t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t),t\geq 0\}$ 分别是参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程, 且这两个过程相互独立。问: $\{N_1(t)-N_2(t),t\geq 0\}$ 是否为复合 Poisson 过程?

解答. 结论是肯定的，只需考察特征函数：令 $X(t)=N_1(t)-N_2(t)$

$$
\begin{aligned}
&\psi_{X(t)}(u)=E[e^{-iuX(t)}]=E[e^{-iuN_1(t)}]E[e^{iuN_2(t)}] \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 te^{-iu})^n}{n!}e^{-\lambda_1 t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 te^{iu})^n}{n!}e^{-\lambda_2 t} \\
&=e^{\lambda_1 t(e^{-iu}-1)}e^{\lambda_2 t(e^{iu}-1)} \\
&=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-iu}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{iu}-1\right)}
\end{aligned}
$$

由特征函数和分布唯一确定定理，$\{N_1(t)-N_2(t),t\geq 0\}$ 为复合 Poisson 过程.

题目 11. 设某飞机场到达的客机数是一个 Poisson 过程, 平均每小时到达 10 架。客机共有三种类型, 能承载的乘客数分别为 200 人, 150 人, 100 人, 且三种飞机出现的概率为 $1/6,1/2,1/3$ 。令 X 表示 5 小时内到达该机场的乘客数，求 X 的期望和方差。

解答. 根据泊松过程分流引理,三种飞机在 $(0,t]$ 的到达的数量 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 均为泊松过程，换言之，$N_1(t) \sim P(\frac{10}{6}), N_2(t) \sim P(\frac{10}{2}), N_3(t) \sim P(\frac{10}{3})$

$$E(X) = E[200N_1(5) + 150N_2(5) + 100N_3(5)]$$
$$= 200E[N_1(5)] + 150E[N_2(5)] + 100E[N_3(5)] = \frac{3350}{3}$$
$$D(X) = D[200N_1(5) + 150N_2(5) + 100N_3(5)]$$
$$= 200^2D[N_1(5)] + 150^2D[N_2(5)] + 100^2D[N_3(5)] = 182500$$