

## 《随机过程》第三次作业

- （泊松过程的数字特征）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的泊松过程。求： $N(t)$ 的均值函数、方差函数、协方差函数、和自相关函数。
- 设某电话总机在 $t$ 分钟内接到的电话呼叫数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是具有速率为 $\lambda$ 的Poisson过程，求：
  - 3分钟内接到5次呼叫的概率 $p_1$ 。
  - 已知3分钟内接到5次呼叫，问第5次呼叫在第2到第3分钟之间到来的概率 $p_2$ 。
- 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的Poisson过程，求：
  - $s > 0$ 时， $E[N(s)N(t+s)]$ ;
  - $0 < s < t$ 时， $P(N(s) = k | N(t) = n)$ ;
  - $s > 0$ 时， $P(N(t+s) = j | N(s) = j)$ 。
- 设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 分别是参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的泊松过程，且这两个过程相互独立。对 $0 \leq k \leq n$ , 证明下列成立：
  - $P(N_1(t) = k | N_1(t) + N_2(t) = n) = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$ ;
  - $E[N_1(t) | N_1(t) + N_2(t) = n] = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ;
- 假设 $[0, t]$ 内顾客到达商场的人数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的Poisson过程，且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为 $p$ 和 $q$ ,  $p + q = 1$ 。设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为 $[0, t]$ 内到达商场的男女顾客数。求 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的分布，并证明它们相互独立。
- 设某个汽车站有 $A, B$ 两辆跑同一路线的长途汽车，设到达该站的旅客数为一Poisson过程，平均每10分钟到达15位旅客，而每个旅客进入 $A$ 或 $B$ 的概率分别为 $2/3, 1/3$ 。设 $N_A(t), N_B(t)$ 分别表示时段 $[0, t]$ 内进入 $A$ 或 $B$ 的旅客数，求：
  - $N_A(t), N_B(t)$ 的分布。
  - 若 $A$ 车旅客数达到10位即发车， $B$ 车旅客数达到15位即发车，求 $A, B$ 的等待时间的分布，并求 $A$ 比 $B$ 先开车的概率。（提示：若 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ 且 $\alpha$ 为正整数，则

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x) dx = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta x)^i}{i!} e^{-\beta x}.$$

最终的概率无需算出具体值。)

- 设某医院专家门诊从早上8:00开始就已有无数患者等候，而每次专家只能为一名患者服务，服务的平均时间为20分钟，且每名患者接受服务的时间服从独立的指数分布。求从8:00到12:00门诊结束时接受过治疗的患者在医院停留的平均时间。

8. 设每天经过某路口的车辆数为：早上7:00到8:00，11:00到12:00为平均每分钟2辆，其他时间平均每分钟1辆。则早上7:30到中午11:20平均有多少辆汽车经过此路口？这段时间经过此路口的车辆数超过500辆的概率是多少？
9. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次Poisson过程,  $X_1, X_2, \dots$ 是事件之间的时间间隔，问：
- (a)  $X_i$ 之间是否相互独立？
- (b)  $X_i$ 之间是否同分布？（提示：求 $X_1$ 和 $X_2$ 的分布）
10. 设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 分别是参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的泊松过程，且这两个过程相互独立。问： $\{N_1(t) - N_2(t), t \geq 0\}$ 是否为复合Poisson过程？
11. 设某飞机场到达的客机数是一个Poisson过程，平均每小时到达10架。客机共有三种类型，能承载的乘客数分别为200人，150人，100人，且三种飞机出现的概率为 $1/6, 1/2, 1/3$ 。令 $X$ 表示5小时内到达该机场的乘客数，求 $X$ 的期望和方差。