Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

Definition 1.1.1 (Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j $(j = 1, \ldots, k)$ der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j \coloneqq x_j - x_{j-1} \eqqcolon |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung)**.** Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z:

$$\Delta(Z) \coloneqq \max(|I_1|, |I_2|, \ldots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3. Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I.

Definition 1.1.4 (Riemannsche Zwischensumme)**.** In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ als Stützstelle und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) \coloneqq \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Definition 1.1.5 (Ober- und Untersumme)**.** Für $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir außerdem

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\coloneqq \inf_{I_j} f = \inf \{ f(x) : x \in I_j \} \\
\overline{m}_j &\coloneqq \sup_{I_j} f = \sup \{ f(x) : x \in I_j \} \\
\overline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\
\underline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned}
&\underline{m}_j \le f(x) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow\ &\underline{m}_j \le f(\xi_j) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow\ &\underline{S}_Z(f) \le S_Z(f, \xi) \le \overline{S}_Z(f) \qquad (1.1.1)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Zerlegung Z nun systematisch verfeinern.

Definition 1.1.6 (Verfeinerung einer Zerlegung)**.**

(a) Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I, falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

(b) Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I, deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z, nur mehr.

Schritt 1: Wir nehmen an Z^* enthielte genau einen Teilpunkt (y_{l+1}) mehr als Z. Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall\, 0 \leq j \leq l \\ x_l < y_{l+1} &< x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall\, l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \quad \forall\, 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1}(x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

Schritt 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z. Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s. Dann gilt nach Schritt 1, dass $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \cdots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \cdots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

Schritt 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^*. Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I. Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \qquad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$ □

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I. Somit sind

$$\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\}$$

und

$$\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral)**.** Es sei $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$. Wir definieren

$$\overline{J}(f) \coloneqq \inf \left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$
$$\underline{J}(f) \coloneqq \sup \{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup \{\underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{\overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I\right\} \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$ □

Definition 1.1.12 (Integral)**.** Es sei $I = [a, b]$. $f \in \mathcal{B}(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) \coloneqq \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das (bestimmte) Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}x \eqqcolon J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{B}(I)$ nennen wir $\mathcal{R}(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion)**.** $f(x) \coloneqq c$ auf $[a,b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

Beispiel 1.1.14 (Dirichlet-Funktion)**.** Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

Übung 1.1.15. Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von $\underline{J}(f)$ und $\overline{J}(f)$.

1.2 [*] Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium)**.** Es sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „$\Leftarrow$" Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$ " Angenommen $f \in \mathcal{R}(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z \coloneqq Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.2 (2. Kriterium)**.** Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \text{Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „⇐" wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„⇒ " Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x_0', x_1', \ldots, x_l' = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^*. Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x_ν' (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \varnothing \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z'. Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l.

$$\begin{aligned}
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot \left|I_j^*\right| \\
&= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t : I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\
&= \sum_j \sum_{t : I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f) &= \sum_j \sum_{t : I_t^*} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\
&= \sum_j \sum_{t : I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
&\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$
$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$
$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned}\underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l\delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta\end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta\left(\|f\|_\infty + 1\right) \cdot l}$

$$\Rightarrow \ \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta\left(\|f\| + 1\right) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Es sei $(Z_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ξ_n seien die Zwischenpunkt von Zerlegung $Z_n = \left(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right)$. Die Riemannnsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f\left(\xi_j^n\right) \cdot \left|I_j^n\right|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen $J(f)$ falls $f \in \mathcal{R}(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme)**.** Seien $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z, sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j| \qquad (I_j = [x_j - 1, x_j])$$

linear in Bezug zu f. Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des $\mathcal{R}(I)$ später in Satz 1.2.6 noch beweisen.

Korollar 1.2.5. Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \qquad (I = [a, b])$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall\, \text{Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt außerdem

$$\Rightarrow\; \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{Z_n}(f) \leq \underline{J}(f) = \overline{J}(f) \leq \overline{S}_{Z_n}(f) \\
\underline{S}_{Z_n}(f) \leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \overline{S}_{Z_n}(f) \\
\Rightarrow\; |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N
\end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

„$\Leftarrow$“ Schritt 1: Angenommen $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \to 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n.
Seien $\left(Z_n^1\right)_n$, $\left(Z_n^2\right)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $\left(\xi_n^1\right)_n$, $\left(\xi_n^2\right)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I, wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^2}\left(f, \xi_n^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^1}\left(f, \xi_n^1\right)
\end{aligned}$$

Schritt 2: (Später) □

Satz 1.2.6 ($\mathcal{R}(I)$ als Vektorraum)**.** Der Raum $\mathcal{R}(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum und $J : \mathcal{R}(I) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$ ist eine lineare Abbildung. Für $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt also $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. Teil 1: Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und Z eine Zerlegung von I mit zugehörigen Intervallen Ij. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j = \sup_{x \in I_j} h(x) \quad \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
\Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
\Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) && (1)
\end{aligned}$$

Wir wählen $h = \alpha f + \beta g$, wobei $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
\Rightarrow \ |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| && (2) \\
\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&\overset{(1)}{=} \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
&\overset{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
&= |\alpha| \cdot \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) + |\beta| \cdot \Big(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\Big) \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)]\Big) \cdot |I_j| \\
&\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\Big) \cdot |I_j| \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot \Big(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\Big) + |\beta| \cdot \Big(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\Big) && (3)
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von f und g gilt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
\end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$ und verwende (3)

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ damit Riemann-integrierbar.

Teil 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h,\xi) = \sum_{j=1}^{k} h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f,\xi) + \beta \cdot S_Z(g,\xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(h,\xi_n) && (\Delta(Z_n) \to 0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot S_{Z_n}(f,\xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g,\xi_n)\right) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f,\xi_n) + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(g,\xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.7 (Kompositionen von integrierbaren Funktionen)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt

(i) $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$

(ii) $|f| \in \mathcal{R}(I)$

(iii) Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis.

(i) Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \tag{1}$$

Sei Z Zerlegung von I und I_j die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)\right) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x,y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\overset{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot \left(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\right) + \|f\|_\infty \cdot \left(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\right) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right) + \|f\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\right) \end{aligned}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei $Z \coloneqq Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ nach Satz 1.2.1.

(ii) Für $|f|$ verwenden wir $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x,y \in I_j} (|f(x) - f(y)|) \\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\end{aligned}$$

wie vorher folgt also $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

(iii) Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)|$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \left(\overline{m}_j(y) - \underline{m}_j(y)\right)$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung. □

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto e^{\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_k^n)$ mit $x_j^n = a + j \cdot h_n$, wobei $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$. Da f streng monoton wachsend ist gilt

$$\overline{m}_j = \sup_{I_j} f = f(x_j) = f\left(x_j^n\right) = e^{\alpha x_j}$$

$$\underline{m}_j = \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f\left(x_{j-1}^n\right) = e^{\alpha x_{j-1}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{S}_Z(f) = \overline{S}_{Z_n}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha x_j} \cdot h \\ &= h \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha h}\right)^{j-1} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{\left(e^{\alpha h}\right)^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} && \text{(Geometr. Summe)} \\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot \left(e^{\alpha h \cdot n} - 1\right) \\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha$ sowie $\lim_{n\to\infty} e^{\alpha h_n} = 1$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha x_{j-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha h}\right)^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\alpha h}\right)^{j} \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \frac{\left(e^{\alpha h}\right)^{n} - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
&= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot \left(e^{\alpha(b-a)} - 1\right) \to \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)
\end{aligned}
$$

Also gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ sowie

$$
\int_a^b e^{\alpha x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)
$$

Beispiel 1.2.9 (Polynome)**.** Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$. Dann $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$
\int_a^b x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1} \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right)
$$

Beweisansatz. Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n)$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$
\begin{aligned}
|I_j| = \Delta x_j = x_j - x_{j-1} &= a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
&= a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$
\overline{m}_j = \sup_{I_j} f = (x_j)^\alpha = \left(a \cdot q^j\right)^\alpha \qquad \text{(Nach Monotonie)}
$$

$$
\underline{m}_j = \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^\alpha = \left(a \cdot q^{j-1}\right)^\alpha
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_Z(f) = \underline{S}_{Z_n}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(a \cdot q^{j-1}\right)^\alpha \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \\
&= (q - 1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} q^{(\alpha+1)\cdot(j-1)}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. $\square$

Übung 1.2.10. Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

Satz 1.2.11 (Monotonie des Integrals)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq g(x)$, dann folgt

$$
\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.2.1}
$$

(ii) Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{R}(I)$ beliebig

$$
\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \tag{1.2.2}
$$

(iii) Sowie

$$\left|\int_a^b f \cdot g \, \mathrm{d}x\right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, \mathrm{d}x$$

Beweis.

(i) Sei $h = g - f \geq 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.6 $h \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_a^b h \, \mathrm{d}x \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \leq \int_a^b h \, \mathrm{d}x &= \int_a^b g \, \mathrm{d}x + \int_a^b (-f) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g \, \mathrm{d}x - \int_a^b f \, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_a^b f \, \mathrm{d}x &\leq \int_a^b g \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\pm f \leq |f|$. Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \, \mathrm{d}x &\leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \left|\int_a^b f \, \mathrm{d}x\right| &= \max\left(\int_a^b f \, \mathrm{d}x, -\int_a^b f \, \mathrm{d}x\right) \leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left|\int_a^b fg \, \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |fg| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\sup_I |f|\right) |g| \, \mathrm{d}x = \sup_I(|f|) \cdot \int_a^b |g| \, \mathrm{d}x \qquad \square$$

Satz 1.2.12 (Cauchy-Schwarz)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b fg \,\mathrm{d}x\right|^2 &\leq \left(\int_a^b |fg| \,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |g|^2 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \,\mathrm{d}x} \\ \Rightarrow \left|\int fg \,\mathrm{d}x\right| &\leq \|f\| \cdot g\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \ \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)\end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned}|\alpha\beta| &= \left|t\alpha - \frac{\beta}{t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2\right) \\ \left|\int_a^b fg \,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\,|g(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\left(t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}_{A} + \frac{1}{t}\underbrace{\int_a^b |g|^2 \,\mathrm{d}x}_{B}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t}\,|g(x)|^2\right) = \frac{1}{2}\left(tA + \frac{1}{t}B\right)\end{aligned}$$

Frage: Welches $t > 0$ maximiert h?

$$\begin{aligned}A = 0 \Rightarrow h(t) &= \frac{1}{2t}B \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ B = 0 \Rightarrow h(t) &= \frac{1}{2}A \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ \Rightarrow \lim_{t\to} h(t) &= \infty, \lim_{t \searrow 0} h(t) = \infty\end{aligned}$$

Minimum existiert für ein $t_0 > 0$ und es gilt $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= \frac{1}{2}\left(A - \frac{1}{t_0}B\right) \\ \Rightarrow \ (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{b}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0,\infty)} h(t) &= \frac{1}{2}t_0\left(A + \frac{1}{t_0^2}B\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{A}}\left(A + \frac{A}{B}B\right) = \sqrt{AB}\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.13.

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2\,\mathrm{d}x} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow\ |\langle f,g\rangle| &\le \|f\|\,\|g\|\end{aligned}$$

Satz 1.2.14. Sei $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a,b])$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem $I = [a,b]$. Es gilt $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Beweis. $I = [a,b]$ ist kompakt und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ |f(x) - f(y)| < \delta \qquad \forall\, x,y \in I \text{ mit } |x-y| < \delta$$

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\Delta(Z) < \delta$. $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{y\in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x,y\in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y\in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da $|x-y| \le |I_j| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\le \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{m}_j - \underline{m}_j\right) \cdot |I_j| \\ &\le \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b-a) \\ \Rightarrow 0 \le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\le \varepsilon\,(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.15. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I = [a,b]$ heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ von I gibt so, dass f auf jedem der offenen Intervalle (x_{j-1}, x_j) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x\to a+} f(x), f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x\to x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x\to x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, k-1$ existieren.
$f((x_{j-1}, x_j))$ können zu stetigen Funktionen auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen $\mathcal{PC}(I)$[1].

[1] Piecewise continuos function in I

Satz 1.2.16. Es gilt $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. $I = [a, b]$. Ist $Z = (x_0, \ldots, x_k)$ eine Zerlegung von $f \in \mathcal{PC}(I)$ und f stetig auf $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall\, j$ und f_j eine stetige Fortsetzung von $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. So gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{k} \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Arbeite auf $I_l = [x_{l-1}, x_l]$ dann ist f_l stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen). □

Bemerkung 1.2.17 (Treppenfunktion)**.** Ist f stückweise konstant auf I. Das heißt es existiert eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_\nu)$ von I mit f ist konstant auf $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall\, k = 1, \ldots, \nu$. So heißt f Treppenfunktion. Schreiben $\mathcal{J}(I)$ für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) In jedem Punkt $x \in (a, b)$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.

(b) In a existiert der rechtsseitige und in b der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$.
Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

Bemerkung 1.2.19. Insbesondere erfüllt $PC(I)$ die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

Lemma 1.2.20. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Treppenfunktionen $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ Treppenfunktion } \varphi : I \to \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Beweis. (Später) □

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18 verlangt und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir definieren $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$, $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$ auch als Treppenfunktionen. Dann gilt $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$ und $\Psi_2 \geq f$. Für alle Zerlegungen Z von I mit

$$\begin{aligned} &\underline{S}_Z(\Psi_1) \leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow\ &\underline{S}_Z(f) \geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da φ eine Treppenfunktion ist, ist $\varphi \in \mathcal{PC}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. Also existiert eine Folge $(z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

(sofern $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left(\underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a)\right) \\
&= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon\,(b-a) \\
&\to_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon\,(b-a) \\
&= \varepsilon\,(b-a) \\
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon\,(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\
\Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\
\Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.21. Welche $f \in \mathcal{B}(I)$ sind genau Riemann-integrierbar?

Definition 1.2.22 (Nullmenge)**.** Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \qquad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

Beispiel 1.2.23. $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$$

Nehme $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu q_j nehme $I_J = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned}
q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\
\sum_{j\in\mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\
&= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Definition 1.2.24. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt fast überall stetig auf I, falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist.

1.2.25 (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium)**.** $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

Bemerkung 1.2.26. Sei f wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von f höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.
Ist $f \in \mathcal{PC}(I)$ so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

Beweis von Lemma 1.2.20. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sowie ein $f : I \to \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{ Treppenfunktionen } \varphi : I \to \mathbb{R} \colon \; \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

Schritt 1: $I_1 = [a, b]$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge $(I_n)_n$ von Intervallschachtelungen $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_n| = b - a \to 0$ für $n \to \infty$ mit

$$\sup_{x\in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \qquad (*)$$

Beweis: Angenommen $I_n = [a_n, b_n]$ ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$M_N = \frac{b_n + a_n}{2}$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in[a_n,M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x\in[M_n,b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$$
$$\text{(Für alle Treppenfunktionen } \varphi)$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = M_n$. Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also $a_{n+1} = M_n$, $b_{n+1} = b_n$. Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n}(b - a) \to 0$$

Nehme $c_n \subseteq I_n$

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 = b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} b_n \text{ texistiert aufgrund der monotonen Konvergenz}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \xi \qquad \text{(da } b_n - a_n \to 0)$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq \xi \leq b_n$$
$$\Rightarrow a_n \leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Analog ergibt sich

$$b_n \geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \xi \in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

Schritt 2: Angenommen $a < \xi < b$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x\to\xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x\to\xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 \quad \xi - \delta \le x \le \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 \quad \xi < x \le \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi + \delta \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi-\delta<x\le\xi+\delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \tag{**}$$

Aber $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für n groß genug ist (**) im Widerspruch zu (*). Damit folgt die Aussage des Lemmas. $\square$

Satz 1.2.27. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$???.

Lemma 1.2.28. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und gebe es eine Menge $G \subseteq I$ welche in I dicht liegt und für die $f(x) = g(x) \ \ \forall x \in G$ gilt. Dann folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

1.3 [*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

Definition 1.3.1. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann ist

$$⨍_I f(x)\,\mathrm{d}x = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert als der Mittelwert von f über I. Wir schreiben auch

$$\overline{f}_I = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 1.3.2. Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\exists\,\xi\colon a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$\begin{aligned} \underline{m} \leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}\,(b-a) = \int_a^b \underline{m}\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \overline{m}\,\mathrm{d}x = \overline{m}\,(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} \leq ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{m} \end{aligned}$$

Ist $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$ ist konstant auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und $\forall a < \xi < b$ ist $f(x) = \underline{m}$. Damit gilt die Behauptung. Sei also $\underline{m} < \overline{m}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass x_1 und x_2 in I existieren, sodass $f(x_1) = \underline{m}$ und $f(x_2) = \overline{m}$ mit $x_1 \neq x_2$. Außerdem folgt aus $\underline{m} < \overline{m}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ auch

$$\underline{m} \leq ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \ \exists\, \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(x) = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$ □

[30. Apr] **Satz 1.3.3** (Verallgemeinerung des vorherigen Satzes)**.** Es sei $I = [a,b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$, $p \in \mathcal{R}(I)$. Falls $p \geq 0$ folgt $\exists \xi$ mit $a < \xi < b$ und

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.3.1}$$

Beweis. Angenommen $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup_{x \in I} \int_a^b |p(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

Damit gilt (1.3.1) für alle $a < \xi < b$.
Ist $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x > 0$, dann definieren wir ein neues Mittel:

$$\mathrm{Mittel}(f) \coloneqq \frac{1}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x$$

Durch scharfes Hinschauen folgt dann die Aussage aus dem Beweis des vorherigen Satzes. □

2 [*] Das orientierte Riemann-Integral

Sei $I = [a,b]$ und $a', b' \in I$ mit $a' < b'$ und $I' = [a', b']$. Wenn $f \in \mathcal{R}(I)$, ist dann auch $f \in \mathcal{R}(I')$? Ist also die Einschränkung $\varphi := f|_{I'} : I' \to \mathbb{R}\ x \mapsto f(x)$ Riemann-integrierbar?

Satz 2.1.1. Ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und $I' = [a', b'] \subseteq I = [a,b]$, so ist $f|_I' \in \mathcal{R}(I)$:

Beweis. Schritt 1: Angenomen $I' = [a, b']$ (also $a' = a$). Dann folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von f und Satz 1.2.18, dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \tag{1}$$

Sei $Z_0 := (a, b', b')$ eine Zerlegung und $Z_1 = Z_0 \vee Z$ die gemeinsame Verfeinerung mit $Z_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Dann gilt $x_0 = a$, $x_k = b$ und $\exists l \in \{1, \ldots, k-1\} : x_l = b'$. Dann ist $Z' = (x_0, x_1, \ldots, x_l)$ eine Zerlegung von I' mit zugehörigen Intervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ für $(j = 1, \ldots, l)$. Wir definieren $\varphi = f|_{I'}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j(f) &= \sup_I f = \sup_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \le j \le l \\
\underline{m}_j(f) &= \inf_I f = \inf_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \le j \le l \\
\overline{S}_Z(\varphi) = \underline{S}_Z(\varphi) &= \sum_{j=1}^{l} \Big(\overline{m}_j(\varphi) - \underline{m}_j(\varphi)\Big) \cdot |I_j| \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) \cdot |I_j| = \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für $I' = [a, b']$.

Schritt 2: Sei $b' = b$, $a < a' < b$. Dann kopiere den Beweis von Schritt 1.

Schritt 3: Sei $a < a' < b' < b : f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann folgt aus Schritt 1, dass $\varphi_1 := f|_{[a,b']} \in \mathcal{R}([a,b'])$. Außerdem gilt nach Schritt 2, dass $\varphi_2 := \varphi_1|_{[a',b']} \in \mathcal{R}([a',b'])$. Damit gilt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. ☐

Bemerkung 2.1.2. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $I = [a,b]$ und $I' = [a', b'] \subseteq I$. Dann folgt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. Und wir definieren

$$\int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $\varphi := f|_{[a',b']}$.

Satz 2.1.3. Sei $I = [a,b]$ zerlegt in endlich viele Intervalle I_j $j = 1, \ldots, m$, die höchstens die Randpunkt gemeinsam haben. Also

$$I = \bigcup_{j=1}^{m} I_j \quad I_j = [a_j, b_j]$$

also $\operatorname{Int}(I_j) \cap \operatorname{Int}(I_k) = (a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = \varnothing$ für $j \neq k$. Dann gilt

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $(Z'_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z'_n) \to 0$ für $n \to \infty$ sowie $Z_0 = \bigcup_j [a_j, b_j]$. Wir betrachten die Verfeinerung $Z_n \coloneqq Z'_n \vee Z_n$ mit $\Delta(Z_n) \to 0$. Wir haben Zwischenpunkte ξ_n zu Z_n.
Z_n lässt sich in Zerlegung Z_n^j von I_j aufteilen. Dann gilt auch, dass $\Delta\big(Z_n^j\big) \to 0\ \forall j = 1, \dots, m$. Die Zwischenpunkte ξ_n lassen sich aufteilen in ξ_n von Z_n^j.

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \sum_{j=1}^{k} f\left(\xi_n^j\right) \cdot \left|I_j^n\right| \\ &= \sum_{j=1}^{m} S_{Z_n}(f, \xi_j)\end{aligned}$$

□

Definition 2.1.4 (Orientiertes Riemann-Integral)**.** Sei $\alpha, \beta \in I = [a, b]$, $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &\coloneqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x && \varphi \coloneqq f|_{[\alpha,\beta]} \\ \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &\coloneqq -\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x && \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &\coloneqq 0 && \text{falls } \alpha = \beta\end{aligned}$$

Satz 2.1.5. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in I = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.1.1}$$

Beweis. Sind mindestens 2 Punkte α, β, γ gleich, so stimmt die Aussage. Also seien o.B.d.A. α, β, γ paarweise verschieden. Dann ist (2.1.1) äquivalent zu

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Diese Gleichung ist invariant unter zyklischem Vertauschen von α, β, γ. (Also zum Beispiel γ, α, β oder β, γ, α).
Fall 1: Sei $\alpha < \beta < \gamma$. Dann folgt die Aussage aus Satz 2.1.3.

Fall 2: Sei $\beta < \alpha < \gamma$. Dann folgt aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned}\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x \\ = -\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Die restlichen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von Fall 1 oder zyklischem Vertauschen von Fall 2. Damit gilt die Gleichung für alle Fälle. □

2.2 Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen

Sei $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_j(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(Komponentenfunktionen)}$$

Definition 2.2.1.

(a) Sei $f : I \to \mathbb{C}$ $x \mapsto f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) + \mathrm{Im}(f(x))$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C}) &:= \{f : I \to \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{B}(I)\} \\ \mathcal{R}(I,\mathbb{C}) &:= \{f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C}) : \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in R(I)\} \\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &:= \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + i \cdot \int_a^b \mathrm{Im}(f(x]))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$ oder C^d. Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}\left(I, \mathbb{K}^d\right)$ Riemann-integrierbar, falls alle Komponentenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_d$ R-integrierbar auf I sind.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.2.2. Das Konzept lässt sich auch auf Matrizen übertragen. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}^{n \times m}$ ist R-integrierbar, falls jede Komponentenfunktoin R-integrierbar ist. Das Integral wird analog zu Vektoren definiert.

Bemerkung 2.2.3. Außerdem ist auch $\mathcal{R}\left(I, \mathbb{R}^d\right)$ ein reeller Vektorraum und $\mathcal{R}\left(I, \mathbb{C}^d\right)$ ein komplexer Vektorraum und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

alle Rechenregeln und Sätze gelten entsprechend!

3 [*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

3.1 Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Wie rechnet man das Integral dann praktisch aus?
Erinnerung: F ist eine Stammfunkton von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$.

Satz 3.1.1 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)**.** Sei $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann ist für jedes $c \in [a, b]$ die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in I)$$

stetig differenzierbar und $F' = f$. Das heißt $F'(x) = f(x) \ \ \forall\, x \in I$.

Beweis. (Später) □

Korollar 3.1.2. Sei $G \in \mathcal{C}^1(I)$ (stetig differenzierbaren Funktionen auf I) eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) =: G|_a^b := [G]_a^b = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Beweis. Wir nehmen $c = a$ aus Satz 3.1.1 und $F : I \to \mathbb{R}$ $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ erfüllt $F' = f$ auf I nach Satz 3.1.1.

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ h(t) &:= F(t) - G(t) \\ h' &= F' - G' = f - f = 0 \text{ auf } I \end{aligned}$$

Damit ist h konstant, d.h. $h(x) = k$ für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) - G(x) &= k \\ k &= F(a) - G(a) = -G(a) \\ F(x) - G(x) &= -G(a) \\ F(x) &= G(x) - G(a) \\ \Rightarrow F(b) &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

□

[3. Mai] *Beweis von Satz 3.1.1.* Sei $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ und $h \neq 0$. Wir wollen über den Differenzenquotient zeigen, dass $F' = f$. Wir berechnen zuerst den Zähler

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Das können wir in den Differenzenquotienten einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &\leq \begin{cases} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t & h>0 \\ \frac{1}{-h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t & h<0 \end{cases} \\
&\leq \frac{1}{|h|}\cdot \sup_{x\leq t\leq x+h} |f(t)-f(x)|\cdot|h|
\end{aligned}
$$

Wir definieren $I_h(x) = [x, x+h]$, falls $h > 0$ und ansonsten $I_h(x) = [x+h, x]$

$$
\leq \sup_{t\in I_h(x)} |f(t)-f(x)|
$$

Da f stetig in x ist, folgt

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in I_h(x)} |f(x)-f(x)| \to 0 \text{ für } h\to 0 \\
\Rightarrow &\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 3.1.3. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat f die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{p+1}\cdot x^{p+1}$. Damit folgt

$$
\int_a^b x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}\cdot\left[b^{p+1} - a^{p+1}\right] \quad \forall a,b\in\mathbb{R}
$$

Beispiel 3.1.4. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $f(x) = x^{-p}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}$. Damit folgt

$$
\int_a^b x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\cdot\left[b^{1-p} - a^{1-p}\right] \quad \forall\, a,b<0 \text{ oder } a,b>0
$$

Beispiel 3.1.5. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\cdot\ln(x)}$, $x > 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}$. Damit gilt

$$
\int_a^b x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\cdot\left[b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right] \quad \forall a,b>0
$$

Beispiel 3.1.6. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \ln|x|$.

Beweis. Falls $x > 0$. Dann ist $F(x) = \ln x$ und $F'(x) = \frac{1}{x}$.
Falls $x < 0$. Dann ist $F(x) = \ln -x$ und $F'(x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. □

Damit gilt

$$
\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right| \quad \forall a,b<0 \text{ oder } a,b>0
$$

Beispiel 3.1.7. Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Damit gilt

$$\int_a^b \cos x \,\mathrm{d}x = \sin b - \sin a$$
$$\int_a^b \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_a^b - \cos b + \cos a$$

Beispiel 3.1.8. Es gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. $(|x| < \frac{\pi}{2})$. Damit folgt $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Das heißt

$$\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = [\tan x]_0^{\varphi} = \tan(\varphi) \quad \forall\, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 3.1.9. Wir wollen das Integral $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. $\sqrt{1-x^2}$ hat die Stammfunktion $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$, weil

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right) \qquad ((\arcsin(x))' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}})\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}\\
\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)\right]_a^b \qquad -1 \le a, b \le 1
\end{aligned}$$

Geometrisch gesehen können wir damit auch die Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises berechnen

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin 1 + 0 - \arcsin -1 - 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung 3.1.10. Satz 3.1.1 gilt auch für Funktionen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$. Wir nennen

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f oder das unbestimmte Integral. Genauer gilt, wenn Φ eine Stammfunktion von f ist

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\Phi + k : k \text{ Konstante}\}$$

3.2 Integrationstechniken

Satz 3.2.1 (Partielle Integration)**.** Seien $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$ (oder $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beweis. Wir wenden die Produktregel der Ableitung an. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$.

$$\int_a^b (fg)' \,\mathrm{d}x = \int_a^b f'g \,\mathrm{d}x + \int_a^b fg' \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b (fg)' \,\mathrm{d}x = [fg]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \tag{2}$$

Wir setzen (1) und (2) gleich

$$\int_a^b f'g \,\mathrm{d}x + \int_a^b fg' \,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \square$$

Beispiel 3.2.2 (Anwendung von partieller Integration)**.**

$$\begin{aligned} \int \ln x \,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln x - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\ \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \end{aligned}$$

Übung 3.2.3. Beweisen Sie analog zum vorherigen Beispiel mittels partieller Integration, dass $\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x \right)$ und $\int \sqrt{x^2-1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arccosh} x \right)$

Beispiel 3.2.4.

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) \,\mathrm{d}x = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos(bx) \right) - \int \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx) \,\mathrm{d}x$$

Wir wenden nochmal partielle Integration an und erahlten

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \int e^{4x} \cos(bx) \,\mathrm{d}x \right\} \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) \,\mathrm{d}x \right\} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \sin(bx) \\ \Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2+b^2} \left(e^{ax} \left(a \sin(bx) - b \cos(bx) \right) \right) + const. \end{aligned}$$

[07. Mai] **Beispiel 3.2.5.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [-\cos(x)\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras wissen wir außerdem, dass

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Beispiel 3.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos(x)\cos^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + \int \sin(x)\,(n-1)\cos^{n-2}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Rekursionsformel)}$$

Analog lässt sich zeigen, dass $\int \sin^n(x)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$. Wir nutzen nun die Rekursionsformel, um einen Wert für alle n zu ermitteln

$$\begin{aligned}c_n &\coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{n-1}{n}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x}_{=c_{n-2}}\\ \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n}c_{n-2} \quad \forall n \geq 2\\ c_0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \\
c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot c_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-j-1}{n-j} \cdot c_{n-2j-2} \qquad \forall j : n-2j-2 \geq 1
\end{aligned}$$

Damit folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
c_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Satz 3.2.7 (Wallisches Produkt)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

Beweis. Aus der Definition von c_n aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $0 \leq \cos(x) \leq 1$. Damit folgt $\cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x) \leq \cos^{2n-}2(x)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow c_{2n} &\leq c_{2n-1} \leq c_{2n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Nach Def. gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \\
\Rightarrow \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} &= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j}}{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j}} = \frac{2\,(n+1)-1}{2\,(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned}
1 = \frac{c_{2n}}{c_{2n}} &\geq \left| \frac{c_{2n+1}}{c_2 n} \right| \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \\
\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_n} &= 1
\end{aligned}$$

□

Außerdem

$$
\begin{aligned}
W_n &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{2n+1} \\
\Rightarrow \sqrt{W_n} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \\
\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
&= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot \sqrt{2n}} \\
&= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Rightarrow \sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Satz 3.2.8 (Substitutionsregel)**.** Seien $I = [a,b]$ und I^* kompakte Intervalle und $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I^*,\mathbb{R})$ sowie $\varphi(I^*) \subseteq I$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in I^*$

$$
\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t
$$

Beweis. Sei F die Stammfunktion von f ($F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$). Wir definieren $h(t) := F(\varphi(t)) \Rightarrow h \in \mathcal{C}^1(I^*,\mathbb{C})$ (Kettenregel).

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
\int_\alpha^\beta h'(t)\,\mathrm{d}t &= [h(t)]_\alpha^\beta = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

□

Erste Lesart: $\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t$ ausrechnen. Annahme: Es existiert eine Substitution $x = \varphi(t)$ und $f(x)$, sodass $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ist.

$$
\Rightarrow \int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (b = \varphi(\beta),\ a = \varphi(\alpha))
$$

Beispiel 3.2.9. Wir betrachten des Integral $\int_\alpha^\beta g(t+c)\,\mathrm{d}t$. Wir definieren $\varphi(t) = t + c$ und $f(x) = g(x)$. Dann gilt $\varphi'(t) = 1$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_\alpha^\beta g(t+c)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{a+c}^{b+c} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Translation)}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.2.10. Wir betrachten $\int_a^b g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$ mit $a, b > 0$ und definieren $\varphi(t) = \ln(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} g(t) \cdot \frac{1}{t} &= g(t) \cdot \varphi'(t) \\ &= g\Big(e^{\varphi(t)}\Big) \cdot \varphi'(t) \\ f'(x) &= g(e^x) \\ \Rightarrow \int_a^b g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\ln a}^{\ln b} g(e^x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.11. Wir betrachten $\int_0^1 \left(1+t^2\right)^n \cdot (t\,\mathrm{d}x.\ t = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1+t^2\right).\ \left(1+t^2\right)^n = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1+t^2\right).$
$\varphi(t) = 1 + t^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^n$.
Dann gilt $\left(1+t^2\right)^n = \frac{1}{2}f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

[10. Mai] **3.2.12.** Ziel: Berechne $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wir führen eine Variablentransformation durch: $x = \varphi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \int_\alpha^\beta h(t)\,\mathrm{d}x & \qquad (h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dazu benötigt man $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ist invertierbar. (Also zum Beispiel $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf ganz $[\alpha, \beta]$)

Notation 3.2.13 (Leibnitz'sche Schreibweise). $x = \varphi(t)$ $\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ (informell).
$\mathrm{d}x$ „=" $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{„="} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r \cdot \cos t) \\ &= r^2 \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4 [*] Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir immer nur Integrale auf kompakten Intervalle I berechnet und dabei waren alle Funktionen $f \in \mathcal{R}(I)$ insbesondere beschränkt.
Frage: Was ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$? Was ist $\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t$?

$$\int_a^b e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_a^b = e^{-0} - e^{-b} = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b} \to 1 \text{ für } b \to \infty$$

4.1 Uneigentliche Integrale: Fall I

Es sei $I = [a, \infty)$, $f : I \to \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ $\forall a < b < \infty$ sowie $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definition 4.1.1 (Fall)**.** Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sofern der Grenzwert existiert nennen wir das das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$. Wenn der Grenzwert existiert, sagen wir das Integral konvergiert.
Divergiert das Integral und gilt $F(b) \to \infty$ für $b \to \infty$ (oder $F(b) \to -\infty$ für $b \to \infty$), so nennen wir das Integral bestimmt divergent und schreiben

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

oder

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$$

Satz 4.1.2. Das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, R \geq a\colon\ |F(b_2) - F(b_1)| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R$$

Beweis. Wir wollen die Existenz von $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ für $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dann folgt der Satz aus dem Cauchy-Kriterium für Grenzwerte. □

Definition 4.1.3 (Absolut konvergente uneigentliche Integrale)**.** Das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt absolut konvergent, falls

$$\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

konvergiert.

Satz 4.1.4. Ist das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent. Das heißt ist $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Wir setzen $G(b) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ und $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wir nehmen an, dass $\lim\limits_{b\to\infty} G(b)$ existiert, das heißt

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists\, R \geq a\colon\ |G(b_2) - G(b_1)| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R\\ \Rightarrow |F(b_2) - F(b_1)| &= \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = G(b_2) - G(b_1)\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2. □

Satz 4.1.5. Sei $\varphi : [a, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

une es existiert ein $R_0 \geq 0$, sodass

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq R_0$$

Dann ist

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

absolut konvergent.

Beweis. Für $b_2 \geq b_1 \geq R_0$ gilt

$$\begin{aligned}|F(b_2) - F(b_1)| &= \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \text{ für } b_1 \to \infty\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.6. Das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Wir definieren

$$f(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x \neq 0\\ 1 & x = 0\end{cases}$$

Damit ist f stetig auf $(-\infty, \infty)$ und damit folgt $f \in \mathcal{R}([a, b])\ \forall a, b \in \mathbb{R}$. Insbesondere existiert

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\cos + \frac{1}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ mit

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \to 1$$

Außerdem gilt

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Damit ist das Integral nach dem Majorantenkriterium konvergent. Um einzusehen, dass es nicht absolut konvergent ist, betrachten wir für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{\pi}\right|\mathrm{d}x &= \int_{N\pi}^{|N+1|\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{\pi\,(N+1)} \cdot \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_0^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{k} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{n=0}^{k} \frac{2}{\pi\,(n+1)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} \to \infty\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.7. Analog zu $[a,\infty)$ wollen wir auch die Integrale in $(-\infty,b]$ betrachten. Wir setzen

$$F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sofern der Grenzwert existiert. Alle Aussagen für $[a,\infty)$ gelten analog auch für $(-\infty,b]$.

Definition 4.1.8. Sei $f : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}([a,b])\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. Dann nehmen wir $c \in \mathbb{R}$ beliebig und definieren, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, falls

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d} \text{ und } \int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

beide konvergieren. Und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Übung 4.1.9. Weisen Sie nach, dass sowohl die Konvergenz, als auch der Wert des Integrals in der vorherigen Definition unabhängig von der Wahl von c ist.

Bemerkung 4.1.10. Es ist allerdings zu beachten, dass

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \mathrm{d}x \neq \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

Das heißt die Integrale müssen tatsächlich getrennt betrachtet werden. Zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = x$ geht $\int_{-R}^R x\,\mathrm{d}x \to 0$, aber ist eigentlich nicht auf $(-\infty,\infty)$ integrierbar, da sich bei der Trennung in zwei Integrale kein Grenzwert ergibt.

4.2 Uneigentliche Integrale: Fall II

Es sei $I = [a,b)$ (oder $I = (a,b]$) und $f : I \to \mathbb{R}$ unbeschränkt bei $x = a$ (oder $x = b$). Außerdem $f \in \mathcal{R}([a,c])$ $\forall a < c < b$ (oder $f \in \mathcal{R}([c,b])$ $\forall a < c < b$)

Definition 4.2.1. Existiert

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\text{oder } \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\text{oder } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

und sagen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert.

Satz 4.2.2. Ist $|f(x)| \leq \varphi(x)$ $\forall x \in [a,b)$ (oder $\forall x \in (a,b]$) und konvergiert $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, so konvergiert auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Beispiel 4.2.3. Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann gilt $F(x) = 2\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c} \to 2$$

4.3 Uneigentliche Integrale Fall III

[14. Mai] f hat eine Singularität in ξ im Inneren von $[a,b]$.

Beispiel 4.3.1. $f(x) = \frac{1}{|\sqrt{x}|}$ auf $[-1,0) \cup (0,1]$.

Definition 4.3.2. Wir sagen, dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert/konvergiert, falls die uneigentlichen Integrale

$$\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ und } \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergieren. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.3.1}$$

Bemerkung 4.3.3. (4.3.1) ist stärker als die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \searrow} \int_{I_\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $I = [a,b]$ und $I_\varepsilon := I \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) = [a, \xi - \varepsilon] \cup [\xi + \varepsilon, b]$. (Cauchyscher Hauptwert).

Beispiel 4.3.4. Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = [-1, 1]$. Dann existiert der Cauchysche Hauptwert, aber nicht (4.3.1).

4.4 Uneigentliche Integrale Fall IV

Definition 4.4.1. Man hat Singularitäten in $\mathbb{R}$ für f oder/und $b = +\infty$, $a = -\infty$. Dann zerlege $[a, \infty)$ oder $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$ in endlich viele Intervalle, wobei die Singularitäten die Randpunkte sind (oder $-\infty$, ∞). Dann existiert das Integral, falls die endlich vielen uneigentlichen Integrale existieren. Dann nehme Summe aller dieser uneigentlichen Integrale

Satz 4.4.2 (Integralvergleichskriterium)**.** Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Beweis. Siehe Saalübung. □

Beispiel 4.4.3. Es sei $f(x) = x^{-p}$ mit $p \neq 1$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{1-p} x^{1-p}$ für $F' = f$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^R$$

existiert nach Satz 4.4.2 für $p > 1$.

Beispiel 4.4.4. $f(x) = \log_2(x) = \log(\log(x))$, $x > 1$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_2(x) &= \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\log_2(x))^{1-s} &= \frac{1-s}{(\log x)^s} \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log^s n)^s} \text{ konvergiert } &\Leftrightarrow s > 1 \end{aligned}$$

Beispiel 4.4.5 (Gamma-Funktion)**.**

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

(a)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \forall t > 0$$

(b)

$$\begin{aligned} t^{x-1} e^{-t} &= t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall t \geq 1 \qquad (c_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}) \end{aligned}$$

$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ ist beschränkt auf $[1,\infty)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{x}t^x\right]_c^1 \\
&= \lim_{c\to 0^+}\frac{1}{x}\left(1-e^x\right) \\
0 &\leq \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \\
&\leq \lim_{b\to\infty} c_x \int_a^b e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t < \infty \\
\int_a^b e^{-\frac{t}{2}} = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_1^b &= 2\left(e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}\right) \to 2e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Satz 4.4.6 (Funktionalgleichung der Γ-Funktion)**.** Es gilt $\Gamma(n+1)=n!$ und $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ für alle $x>0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir integrieren partiell. Sei $0<a<b<\infty$

$$\begin{aligned}
\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + \int_a^b x t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= a^x e^{-b} - b^x e^{-b} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int_a^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= a^x e^{-a} + x\int_a^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}x = x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Wir betrachten außerdem

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) \\
&= n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

□

Anwendung 4.4.7. Nach Substitution mit $t^2=x$ gilt $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int_a^\xi e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int e^{-x}\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_?^b s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} \,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

für $b \to \infty$ und $a \searrow 0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} \,\mathrm{d}s \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ später.

5 [*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz

Sei $I = [a,b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. Wenn die Funktionenfolge $(f_n)_n$ „irgendwie" gegen f konvergiert. Wann gilt dann

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ für } n \to \infty\ ?$$

Wir werden in diesem Kapitel einsehen, dass punktweise Konvergenz dafür nicht ausreichend ist, sondern wir gleichmäßige Konvergenz fordern müssen.

Beispiel 5.1.1 (Punktweise Konvergenz)**.** Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion ($f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ $\forall x \in [0,1]$). Außerdem gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n} = 1$$

Das Integral über die Nullfunktion ist aber 0. Das heißt punktweise Konvergenz ist kein ausreichendes Kriterium, damit die Integrale gleich sind.

Satz 5.1.2. Seien $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}, \dots$) und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiere $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f auf $[a,b]$ und $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ groß genug. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)} \\ \Rightarrow f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)} \le f(x) \le f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)} \quad \forall n \ge N \end{aligned} \tag{1}$$

Halte N fest und nehme Zerlegung Z von $I = [a,b]$ mit $\overline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt jeweils nach (1)

$$\overline{S}_Z(f) \le \overline{S}_Z\left(f_N + \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right) = \overline{S}_Z(f_N) + \overline{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right) = \overline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\underline{S}_Z(f) \ge \underline{S}_Z\left(f_N - \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\le \overline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(\underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \\ &= \overline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt $f \in \mathcal{R}(I)$. Wir beweisen die Gleichheit der Integrale.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4} &= \int_a^b \left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right)\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \ge N
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4} \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

□

[17. Mai] **Beispiel 5.1.3** (Integral von Potenzreihen)**.** Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

mit Konvergenzradius $R > 0$ und

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Wir erhalten also eine Funktion $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Die Stammfunktion zu $a_n \left(x - x_0\right)^n$ ist $\frac{a_n}{n+1} \left(x - x_0\right)^{n+1}$. Wir definieren also eine Funktion F analog

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(x - x_0\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n \qquad (c_n \coloneqq \tfrac{a_{n-1}}{n})$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(|c_n|\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n-1}}{n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|a_{n-1}|}{n}\right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \left(|a_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Das heißt F hat denselben Konvergenzradius wie f. Unsere Hoffnung ist also, dass F eine Stammfunktion von f ist oder

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$$

Das gilt tatsächlich und lässt sich folgendermaßen zeigen. Wir definieren eine Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x - x_0\right)^k$$

Wir wissen $\forall \delta > 0$ klein genug (konkret heißt das $\delta < R$) konvergiert f_n gleichmäßig gegen f auf dem Intervall $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$. Dann gilt nach Satz 5.1.2 für $x \in [x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ fest

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} \,\mathrm{d}x = F(x) \\
\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{k+1} (t-x_0)^{k-1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{k+1} xk + 1
\end{aligned}
$$

Satz 5.1.4. Sei $I = [a,b]$ sowie $f_n : I \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und die folgenden Voraussetzungen gelten

(i) $\exists x_0 \in I\colon f_n(x_0)$ konvergiert gegen $f(x_0)$

(ii) $(f_n')_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g

(iii) f_n' ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $f(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in I$ und f ist stetig differenzierbar mit Ableitung $f' = g$.

Beweis. Sei $x \in I$. Da alle Ableitungen von f_n stetig sind, können wir den Hauptsatz verwenden und es gilt

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - f_n(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow f_n(x) &= \underbrace{f_n(x_0)}_{\to f(x_0)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t}_{\to \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow f(x) &\coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert } \forall x \in I \text{ und} \\
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Nach dem Hauptsatz gilt, dass f stetig differenzierbar ist mit $f' = g$. □

Anwendung 5.1.5.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_N (x-x_0)^n \\
R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} > 0 \\
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \\
\Rightarrow f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
f_n'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\limsup_{n\to\infty} |(n+1)\, a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}
$$

Nach dem vorherigen Satz gilt damit

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \left(x - x_0\right)^{k-1}$$

konvergiert auch auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ und gleichmäßig auf $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$. Also konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = (x)$$

und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \left(x - x_0\right)^{n-1}$$

Also ist jede Potenzreihe differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

Korollar 5.1.6. Jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

Beweis. Nach Anwendung 5.1.5 ist eine Potenzreihe einmal differenzierbar mit einer Potenzreihe als Ableitung. Damit folgt induktiv die Behauptung. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot \left(x - x_0\right)^{n-1} \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot \left(x - x_0\right)^{n-2} \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot \left(x - x_0\right)^{n-k} \\
\Rightarrow f^{(k)}(x_0) &= k! \cdot a_k \\
\Leftrightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.7. Wir wissen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} && (|x| < 1) \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\
&= x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{1-x} \\
&= x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.8 (Taylorreihe)**.**

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) \, \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(f'(t) - f'(x_0) + f'(x_0)\right)\mathrm{d}x \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(f'(t) - f'(x_0)\right)\mathrm{d}t + f'(x_0)\cdot \int_{x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}t \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \left(f'(t) - f'(x_0)\right)\mathrm{d}t}_{=:R_{x_0}(x)}
\end{aligned}$$

Wir können den Fehler abschätzen und erhalten für ein $\varepsilon(x) \coloneqq \sup_{t\in(x_0,x)} |f'(t) - f'(x_0)|$

$$\begin{aligned}
|R_{x_0}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f'(t) - f'(x_0)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon(x)\cdot|x - x_0| \\
\frac{|R_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} &= \varepsilon(x) \to 0 \text{ für } x \to x_0
\end{aligned}$$

6 [*] Taylors Theorem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1.1}$$

[28. Mai] **Satz 6.1.1.** Sei $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}((a,b))$ ($n+1$ mal stetig differenzierbar auf (a,b)). Dann gilt für alle $x, x_0 \in (a,b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + R_n(f,x_0,x) \end{aligned}$$

mit

$$R_n(f,x_0,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis. Wir verwenden Induktion. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist gerade der Hauptsatz.

Induktionsschritt: Angenommen $f \in \mathcal{C}^{(n+2)}$. Dann gilt nach Induktionsannahme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(f,x_0,x) \tag{1}$$

$$R_n(f,x_0,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir integrieren partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!}\left(\left[-\frac{1}{n+1}\,(x-t)^{n+1}\, f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n+1}\,(x-t)^{n+1}\, f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

Nach (1) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1}\cdot f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t}_{=R_{n+1}(f,x_0,x)}$$ □

Korollar 6.1.2. Sei $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$. Dann gilt $\forall x, x_0 \in (a,b)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \overline{R}_n(f,x_0,x)$$

mit

$$\overline{R}_n(f,x_0,x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\cdot\left[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x)\right]\mathrm{d}t$$

Beweis. Nach Satz 6.1.1 gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + \overline{R}_{n-1}(f,x_0,x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_{n-1}(f,x_0,x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \\
(n-1)! \cdot R_{n-1}(f,x_0,x) &= \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\, f(n)(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} \cdot \left[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 6.1.3.

$$
\begin{aligned}
n! \cdot \left|\frac{R_n(f,x_0,x)}{(x-x_0)^n}\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^n} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \left|\frac{x-t}{x-x_0}\right|^n \cdot \left|f^{(n+1)}(t)\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \mathrm{d}t \to 0
\end{aligned}
$$

Definition 6.1.4. Sei $f \in \mathcal{C}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Wir definieren

$$
T_n(f,x_0)(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \qquad (n\text{-tes Taylorpolynom})
$$

Ist f unendlich oft differenzierbar, so nennen wir

$$
T(f,x_0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n
$$

Taylorreihe (von f im Entwicklungspunkt x_0).

Bemerkung 6.1.5.

(i) Die Taylorreihe kann Konvergenzradius $R > 0$ haben

(ii) Ist eine Taylorreihe konvergent, so muss sie nicht unbedingt gegen f konvergieren

Beispiel 6.1.6. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$
x \mapsto f(x) \coloneqq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$

Dann ist f unendlich oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Schritt 1: Sei $x \neq 0$. Dann existiert $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom p_n, sodass

$$
f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{n}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}
$$

Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion.
I-Anfang Es ist $n = 0$. Wir wählen $p_0(x) = 1$.

I-Schritt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(n)}(x)\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\\
&= p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\\
&= \underbrace{\left(-p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2} + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^3}\right)}_{=:p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\\
p_{n+1}(t) &:= -p_n'(t)\cdot t^2 + 2t^3\cdot p_n(t)
\end{aligned}$$

Schritt 2: $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir nutzen wieder Induktion. Der Induktionsanfang ist klar.

I-Schritt Angenommen $f^{(n)}(0) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{|R|\to\infty}\left(R\cdot p_n(R)\cdot e^{-R^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

□

Satz 6.1.7. Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist die Taylorreihe von f gleich dieser Potenzreihe.

Beweis. Folgt aus Korollar 5.1.6 und Gleichung ??. □

Beispiel 6.1.8.

$$\begin{aligned}
\sum_{n==}^{\infty}\frac{(cx)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\cdot x^n\\
\exp(cx) &= \exp(cx_0 + c(x - x_0))\\
&= \exp(cx_0)\cdot\exp(c(x - x_0))\\
&= \exp(cx_0)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}(x - x_0)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ??
\end{aligned}$$

Satz 6.1.9 (Restglieddarstellung von Schlömilch)**.** Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + R_n(f, x_0, x)$$

mit

????

Bemerkung 6.1.10. Ist $p = n + 1$, dann haben wir die Lagrangsche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1} \, (\xi)$$

und wenn $p = 1$, dann haben wir die Cauchysche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0)$$

für das Restglied.

Satz 6.1.11 (Logarithmus)**.** Für die Logarithmusreihe $f_n : -1 \leq x \leq 1$ gilt

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1 + x) \\
f'(x) &= (1 + x)^{-1} \\
f''(x) &= -1 \cdot (1 + x)^{-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1 + x)^{-n} \\
T_n(f, 0)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(k-1)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}
\end{aligned}$$

Schritt 1: Aus Satz 6.1.9 folgt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + R_n(f, 0, x) \\
R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{pn!} \cdot f^{(n+1)}(x) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^p \\
&= n! \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 + \xi)^{-(n+1)} \\
\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{pn!} \cdot n! \cdot (1 + \xi)^{-n-1} \cdot |x - \xi|^{n+1-p} \cdot |x|^p
\end{aligned}$$

Angenommen $0 \leq x \leq 1$. $0 < \xi < x$, wir wählen $p = n + 1$

[31. Mai]

$$\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Angenommen $-1 \leq x \leq 0$. Dann gibt es ein ξ zwischen 0 und x, das heißt $\xi = \Theta x$ mit $0 < \Theta < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{p} \cdot (-1)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (x - \Theta x)^{n+1-p} \cdot x^p \\
\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot |x|^{n+1-p} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^p
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot (1+\Theta x)^{-(n+1)} \cdot (1-\Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1}$$

Da $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \Theta x = 1 - \Theta \cdot |x| \geq 1 - \Theta > 0 \\ \Rightarrow\ &(1+\Theta x)^{-n} \leq (1-\Theta)^{-n} \\ \Rightarrow\ &|R_n(f,0,x)| \leq \frac{1}{p} \cdot (1-\Theta)^{-n} \cdot (1-|x|)^{-1} \cdot (1-\Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1} \end{aligned}$$

Wähle $p = 1$

$$\Rightarrow |R_n(f,0,x)| \leq (1-\Theta)^{-n} \cdot (1-\Theta)^{n} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$$

Schritt 2: Wir wollen zeigen, dass die Taylorreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ für alle $-1 \leq x \leq 1$ konvergiert. Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \right| \leq \frac{1}{n} \cdot |x|^n \leq |x|^n$$

Damit folgt die Konvergenz aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Das gleiche Prinzip lässt sich für $0 \leq x < 1$ anwenden. Für $x = 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ eine alternierende monotone Reihe, die damit nach Leibniz konvergiert.
Aus Schritt 1 und Schritt 2 folgt damit die Behauptung. □

Korollar 6.1.12. Für $a > 0$ und $0 < x \leq 2a$ folgt

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot a^n} (x-a)^n$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log x &= \log(a + (x-a)) = \log\left(a \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right) \\ &= \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.1.13. Es gilt

$$\log 2 = \log(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{(konvergiert langsam)}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$$

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\Rightarrow \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n \text{ ungerade}} \left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n} \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Für ein $y > 1$ mit $y = \frac{1+x}{1-x}$ gilt

$$(1-x) \cdot y = 1 + x$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow y-1 &= x\cdot(y+1)\\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-1}{y+1}\end{aligned}$$

Für $y=2$ gilt also $x=\frac{1}{3}$. Das heißt

$$\begin{aligned}\log y &= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k+1}\\ \Rightarrow\ \log 2 &= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} && \text{(konvergiert schneller)}\end{aligned}$$

Satz 6.1.14 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** Angenommen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann ist die Potenzreihe $f(x) \coloneqq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$

(i) konvergent für alle $-1<x\leq 1$

(ii) stetig in $x=1$ und

(iii) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf allen Intervallen $[a,1]$ mit $-1<a<1$. (Das heißt sie konvergiert lokal gleichmäßig auf $[-1,1]$). Insbesondere in jeder ε-Umgebung um $x=1$.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zunächst (ii) und setzen dafür

$$A_n \coloneqq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0 \text{ für } n\to\infty$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geq 0}|A_n|<\infty\\ \Rightarrow\ &\sup_{n\geq k+1}|A_n|\to 0 \text{ für } k\to\infty\\ &a_n = A_{n-1}-A_n && \text{(Wir setzen } A_{-1}=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n)\end{aligned}$$

Für ein $L\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{L} a_n\cdot x^n &= \sum_{n=0}^{L}(A_{n-1}-A_n)\cdot x^n\\ &= \sum_{n=0}^{L}A_{n-1}\cdot x^n - \sum_{n=0}^{L}A_n\cdot x^n\\ &= \sum_{j=-1}^{L-1}A_j\cdot x^{j+1} - \sum_{j=0}^{L}A_j\cdot x^j\\ &= A_{-1}\cdot x^0 - A_L\cdot x^L + \sum_{n=0}^{L}A_n\cdot\left(x^{n+1}-x^n\right)\\ &= f(1) - A_L\cdot x^L + (x-1)\cdot\sum_{n=0}^{L-1}A_n\cdot x^n\end{aligned}$$

Es gilt $\left|A_L \cdot x^L\right| \leq |A_L|$ und $|A_n| \leq C$ für eine Konstante C. Das heißt für $|x| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \text{ hat Limes für } L \to \infty$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{L} a_n \cdot x^n = f(1) + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n$$

$$\Rightarrow |f(1) - f(x)| = (1-x) \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n\right| \leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| \cdot x^n$$

Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f(1) - f(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{K} |A_n| \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \\
&\leq \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n\geq 0}(|A_n|) \cdot \sum_{n=0}^{K} x^n}_{=:I_K(x)} + \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n\geq K+1}(|A_n|) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n}_{=:J_K(x)}
\end{aligned}$$

Für ein festes $K \in \mathbb{N}$ geht $I_K \to 0$ für $x \to 1-$ und es gilt

$$J_K(x) = \sup_{n\geq K+1}(|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n$$

Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned}
&= \sup_{n\geq K+1}(|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \frac{x^{K+1}}{1-x} \\
&\leq \sup_{n\geq K+1}(|A_n|) \to 0 \text{ für } L \to \infty \qquad \text{(gleichmäßig in } 0 \leq x < 1) \\
\Rightarrow \limsup_{x\to 1-} |f(1) - f(x)| &\leq 0 + \limsup_{x\to 1-} J_K(x) \\
&\leq \sup_{n\geq K+1}(|A_n|) \to 0 \text{ für } K \to \infty \quad \forall K \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \limsup_{x\to 1-} |f(1) - f(x)| &= 0 \\
\Rightarrow \lim_{x\to 1-} f(x) &= f(1)
\end{aligned}$$

Schritt 2: $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) - f_n(x) &= (x-1) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \cdot x^k - A_n \cdot x^n \\
\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \cdot x^k + |A_n| \cdot x^n \qquad (0 \leq x < 1) \\
&\leq (1-x) \cdot \sup_{k\geq n+1}(|A_k|) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k + |A_n| \\
&\leq \sup_{k\geq n+1}(|A_k|) \cdot (1-x) \cdot x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k + |A_n|
\end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n}(|A_k|)$$

Mit (ii) folgt $\forall\, 0 \leq x \leq 1$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2 \cdot \sup_{k \geq n}(|A_k|)$$
$$\Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1}(|f(x) - f_n(x)|) \leq 2 \cdot \sup_{k \geq n}(|A_k|)$$

Das heißt $(A_n)_n$ ist eine Nullfolge. Damit gilt gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1]$.
$f(x)$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen innerhalb des Konvergenzradius und $\sum a_n$ konvergiert mit Konvergenzradius $R \geq 1$. Das heißt $f(x)$ konvergiert gleichmäßig auf allen $[-\delta, \delta]$ für $0 < \delta < 1$. □

Satz 6.1.15 (Arctan Reihe)**.** Für $|x| \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $f(x) = \arctan x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \cdot \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ falls } |x| < 1 \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konvergiert nach Leibniz} \end{aligned}$$

Das heißt aus Satz 6.1.14 folgt die gleichmäßige Konvergenz von dieser Reihe für alle $|x| \leq 1$. Das heißt aus der Stetigkeit von arctan bei ± 1 und dem Satz folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall\, |x| \leq 1 \qquad \square$$

[04. Jun] **Bemerkung 6.1.16** (Reihendarstellung von π)**.** Es gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und damit $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. So ergibt sich mit dem Arctan eine Reihendarstellung von π

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Diese Reihe konvergiert für die tatsächliche Anwendung allerdings zu langsam. Viel schneller ist die Berechnung über die *Machinsche Formel*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Satz 6.1.17 (Binomische Reihe)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|x| < 1$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad ([2])$$

wobei wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizient verwenden

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &\coloneqq \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} \\ \binom{\alpha}{n} &\coloneqq 0 \text{ für } n \geq \alpha + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt der speziellere Binomische Lehrsatz für $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot x^n$$

Beweis. Schritt 1: Sei $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ für $x > -1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1-x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Das heißt die Taylorreihe für f in 0 ist

$$\begin{aligned} T(f,0)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \end{aligned}$$

[2]Gefunden von Newton 1665

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die obige Taylorreihe konvergiert

$$
\begin{aligned}
a_n &:= \binom{a}{n} x^n \qquad |x| < 1 \\
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} \cdot x^n}\right| \\
&= |x| \cdot \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \underset{n\to\infty}{\to} |x| < 1 \\
\Rightarrow \exists x < 1, N_0 \in \mathbb{N}\colon \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &\le x < 1 \quad \forall n \ge N_0 \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ ist absolut konvergent}
\end{aligned}
$$

SCHRITT 3: Der Restterm soll verschwinden. Sei $0 < \Theta < 1$ und $\xi = \Theta x$, sowie $1 \le p \le n+1$

$$
R_n(f,0,x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)} \cdot (\Theta x) \cdot (x - \Theta x)^{n+1-p} \cdot x^p \tag{Schlömilch}
$$

Für $p = 1$ ergibt sich die Restglieddarstellung von Cauchy

$$
\begin{aligned}
R_n(f,0,x) &= \frac{1}{n!} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (\alpha - n) \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \cdot (x - \Theta x)^n \cdot x \\
&= \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \\
\Rightarrow |R_n(f,0,x)| &= \underbrace{\left|\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}\right|}_{\to 0 \text{ nach SCHRITT 2}} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \\
(1 + \Theta x)^{-(n+1)} &= \frac{1}{(1 + \Theta x)^{-n+1}} \\
&= \frac{1}{1 + \Theta x} \cdot \frac{1}{(1 + \Theta x)^n} \\
&\le \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{(1 - \Theta)^n} \\
\Rightarrow |R_n(f,0,x)| &\le \left|\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}\right| \cdot \frac{1 - \Theta^n}{1 - \Theta} \cdot \frac{1}{1 - |x|} \\
&= \left|\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}\right| \cdot \frac{1}{1 - |x|} \underset{n\to\infty}{\to}
\end{aligned}
$$

Das heißt nach dem Satz von Taylor gilt

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \qquad \square
$$

7 [*] Die Gamma-Funktion

Erinnerung: Die Γ-Funktion ist für $x > 0$ definiert als

$$\Gamma(x) \coloneqq \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Das funktioniert bei 0, da $-x-1 > -1$ und es funktioniert bei ∞, da

$$\begin{aligned} t^{x-1} \cdot e^{-t} &= t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \\ &= C_x \cdot e^{-\frac{t}{2}} && (C_x \coloneqq \sup_{t\geq 1} t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} < \infty) \\ \Rightarrow \Gamma(x) &= \lim_{a\searrow 0} \lim_{b\to\infty} \int_a^b t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \text{ existiert } \forall x > 0 \end{aligned}$$

Wir hatten außerdem

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x > 0$$

Definition 7.1.1 (Konvexität[3])**.** Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ – wobei I ein Intervall ist ($I = [0,\infty)$ ist dabei erlaubt) – heißt konvex, falls $\forall x, y \in I$ und für alle $0 \leq \Theta \leq 1$ gilt

$$F(\Theta x + (1-\Theta)\, y) \leq \Theta F(x) + (1-\Theta)\, F(y)$$

Skizze 7.1.2 (Konvexe Funktion)**.** Wähle ein $\Theta \in (0,1)$ und formuliere die Interpolation $\Theta x + (1-\Theta) \cdot y$.

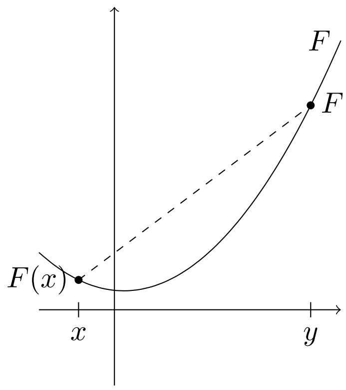

Abbildung 1: Konvexe Funktion mit eingezeichneter Sekante

Beispiel 7.1.3. Die Funktionen $F(t) = e^t$ und $F(t) = e^{-t}$ sind konvex auf $\mathbb{R}$. (Übung)

Definition 7.1.4. Eine Funktion F heißt konkav, falls $-F$ konvex ist. Das heißt

$$F(\Theta x + (1-\Theta)\, y) \geq \Theta F(x) + (1-\Theta)\, F(y) \quad \forall\, 0 \leq \Theta < 1 \;\forall\, x, y \in I$$

Definition 7.1.5 (Logarithmische Konvexität)**.** Eine Funktion F heißt logarithmisch konvex, falls $\log \circ F = \log(F)$ konvex ist. Das heißt

$$\begin{aligned} \log F(\Theta x + (1-\Theta)\, y) &\leq \Theta \log F(x) + (1-\Theta) \cdot \log F(y) \\ &= \log\Big(F(x)^\Theta\Big) + \log\Big(F(y)^{1-\Theta}\Big) \end{aligned}$$

[3]Siehe auch Skript Ana I, Kapitel 19

$$
\begin{aligned}
&= \log\Big(F(x)^{\Theta} \cdot F(y)^{1-\Theta}\Big) \\
\Leftrightarrow F(\Theta x + (1-\Theta)\, y) &\leq F(x)^{\Theta} \cdot F(y)^{1-\Theta} \qquad \forall\, x, y \in I \;\forall\, 0 \leq \Theta \leq 1
\end{aligned}
$$

dann ist F logarithmisch konvex.

Satz 7.1.6. Die Γ-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)\,, x \mapsto F(x)$ ist logarithmisch konvex.

Beweis. (Übung) □

Satz 7.1.7 (Bohr, Mollerup)**.** Ist $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion mit

(a) $F(1) = 1$

(b) $F(x+1) = x \cdot F(x)$ und

(c) F ist logarithmisch konvex

Dann gilt $F = \Gamma$, das heißt $F(x) = \Gamma(x)\ \forall x > 0$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die obigen Eigenschaften die Funktion F eindeutig bestimmen, da wir bereits wissen, dass Γ die Eigenschaften erfüllt.

Schritt 1:

$$
\begin{aligned}
F(x+n) &\overset{\text{(b)}}{=} (x+n-1) \cdot F(x+n-1) \\
&= (x+n-1) \cdot (x-n-2) \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x \cdot F(x) \quad \forall x > 0
\end{aligned}
$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= n! \cdot F(1) = n! \\
\Rightarrow F(n) &= \Gamma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Das heißt es reicht zu zeigen, dass $F(x)$ bei $0 < x < 1$ eindeutig bestimmt ist.
Schritt 2: Sei $0 < x < 1$

$$
\begin{aligned}
s + n &= (1-x) \cdot n + x \cdot (n+1) && (\Theta = 1 - x) \\
\overset{\text{(c)}}{\Rightarrow} F(x+n) &= F((1-x)\cot n + x \cdot (n+1)) \\
&\leq F(n)^{1-x} \cdot F(n-1)^{x} = F(n)^{1-x} \cdot (n \cdot F(n))^{x} \\
&= F(n) \cdot n^{x} = (n-1)! \cdot n^{x} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n + 1 &= x \cdot (n+x) + (1-x) \cdot (n+1+x) && (1) \\
\Rightarrow F(n+x) &\leq F(n+x)^{x} \cdot F(n+1+x)^{1-x} \\
&= F(n+x) \cdot (n+x)^{1-x} && (2)
\end{aligned}
$$

Durch die Kombination von (1) und (2) folgt

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow n! \cdot (n+x)^{x-1} &\leq F(n+x) \leq (n-1)! \cdot x^{n} \\
F(n+x) &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) \cdot F(x) \\
\Rightarrow \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)} &\leq F(x) \leq \frac{(n-1)! \cdot n^{x}}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)} \\
a_n(x) &\coloneqq \frac{n! \cdot (x+n)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n(x) &:= \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x-n-1)} \\
\Rightarrow a_n(x) &\le F(x) \le b_n(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}\, \forall\, 0 < x < 1 \\
\Rightarrow \frac{a_n(x)}{b_n(x)} &\le \frac{F(x)}{b_n(x)} \le 1 \\
\frac{b_n(x)}{a_n(x)} &= \frac{n^x}{n \cdot (n+x)^{x-1}} = \frac{(n+x) \cdot n^x}{n \cdot (n+x)^x} \\
&= \frac{n+x}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+x}\right)^x \underset{n\to\infty}{\to} 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\to F(x) &= \lim_{n\to\infty} b_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (1+x) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)}
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

also ist $F(x)$ eindeutig bestimmt. □

Korollar 7.1.8 (Gaußsche Darstellung von Γ)**.**

$$
\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot x^n}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} \tag{7.1.2}
$$

Beweis. Da $\frac{n}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt die Behauptung for $0 < x < 1$ direkt aus (7.1.1). Für $x = 1$ rechnet sich die Formel leicht nach. Also ist noch zu zeigen: Gilt (7.1.2) für ein x, so gilt die Aussage auch für $y = x + 1$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(y) &= \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \\
&= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{y-1}}{y \cdot (y+1) \cdot \ldots \cdot (y+n-1)}
\end{aligned}
$$

Multiplikation im Zähler mit n und im Nenner mit $y + n$ (was sich für $n \to \infty$ entspricht) liefert

$$
= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^y}{y \cdot (y+1) \cdot \ldots \cdot (y+n-1) \cdot (y+n)}
$$

□

Satz 7.1.9.

$$
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(2-\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n+1-\frac{1}{2}\right)} \\
\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(2+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(2-\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{2}} = \pi \qquad \text{(Wallisches Produkt)}$$

$\square$

8 [*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume

8.1 [*] Metrische Räume

[07. Jun] Frage: Wie definiert man Abstand?

Beispiel 8.1.1 (Abstände zweier reeller Zahlen)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir definieren den Abstand über den Betrag. Das heißt $d(x, y) \coloneqq |x - y|$. Der Abstand hat in diesem Fall die Eigenschaften

(i) $|x - y| \geq 0$ und $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $|x - y| = |y - x|$

(iii) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}$

Definition 8.1.2 (Metrik)**.** Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$

In diesem Fall nennen wir d eine Metrik auf X.

Beispiel 8.1.3.

1. Auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definieren wir $d(x, y) \coloneqq |x - y|$
2. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definieren wir zum Beispiel die euklidische Metrik $d(x, y) \coloneqq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
3. Sei (X, d) ein metrischer Raum (das heißt wir haben bereits eine Metrik d auf X definiert) und sei $A \subseteq X$. Dann definieren wir die *induzierte Metrik* $d_A : A \times A \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto d(x, y)$
4. Die *diskrete Metrik* ist definiert durch $d(x, y) \coloneqq \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
5. Die französische Eisenbahnmetrik im $\mathbb{R}^2$ ist definiert durch $d(x, y) \coloneqq \sqrt{x_1^1 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Die Metrik setzt sich also jeweils zusammen aus der euklidischen Distanz von x und y zum Koordinatenursprung
6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann können wir eine Metrik d_1 definieren durch
$$d_1(x, y) \coloneqq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
Dass d_1 die Eigenschaften (i) und (ii) im Sinne der Definition erfüllt, rechnet sich leicht nach. Für (iii) gilt für ein $z \in X$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$
Außerdem gilt für $t \in \mathbb{R}$
$$\frac{t}{1 + t} = 1 - \frac{1}{t + 1} \qquad \text{(monoton steigend)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = d_1(x,z) + d_1(z,y)
\end{aligned}$$

8.2 [*] Normierte Vektorräume

Definition 8.2.1 (Vektorraum)**.** Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ist eine Menge auf der es eine Vektoraddition

$$\begin{aligned}
+ : V \times V &\to V \\
(x,y) &\mapsto x+y
\end{aligned}$$

und eine (skalare) Multiplikation

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\
(\alpha,x) &\mapsto \alpha \cdot x
\end{aligned}$$

gibt, welche den üblichen Axiomen aus der Algebra genügen (z.B. $x+y = y+x$, $\alpha\,(x+y) = \alpha x + \alpha y$ oder $(\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x$).

Definition 8.2.2 (Norm)**.** Eine Norm auf einem VR V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}\ x \mapsto \|x\|$ mit den Eigenschaften

(i) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \forall x \in V$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ \forall x,y \in V$

Definition 8.2.3 (Normierter Vektorraum)**.** Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ aus einem VR V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Satz 8.2.4. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR, so wird durch $d(x,y) \coloneqq \|x-y\|$ eine Metrik auf V definiert.

Beweis. Die Axiome der Metrik folgen unmittelbar aus den Axiomen der Norm. □

Bemerkung 8.2.5. Gelten für eine Abbildung die Norm-Eigenschaften (ii) und (ii), aber statt (i) nur $\|x\| \geq 0\ \forall x \in V$. Dann heißt $\|\cdot\|$ eine *Halbnorm*. Eine Beispiel dafür im $\mathbb{R}^2$ wäre die Abbildung $(x_1\ x_2) \mapsto x_1$.

Beispiel 8.2.6.

1. Ist V ein euklidischer reeller VR mit symmetrischem, positiv-definitem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm.

2. Ähnlich, wenn V ein komplexer VR mit positiv-definiter sesquilinearer Bilinearformen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist. Das heißt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ hat die Eigenschaften

   (i) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ und $\langle x,x\rangle \geq 0\ \forall x,y \in V$ ([4])

[4]Die Forderung $\langle x,x\rangle \geq 0$ ist wohldefiniert, weil durch die anderen Eigenschaften folgt, dass $\forall x \in V\colon\ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$

(ii) $\langle x, u+w\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, w\rangle$ sowie $\langle u+w, y\rangle = \langle u, y\rangle + \langle w, y\rangle$

(iii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ sowie $\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle$ ([5])

Dann definieren wir eine Norm durch $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

3. Im $\mathbb{R}^d$ definieren wir für zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$ ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{j=1}^{d} x_j \cdot y_j$$

Und eine Norm durch

$$\|x\| \coloneqq \|x\|_2 \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}$$

4. Wir definieren die Maximums-Norm auf $\mathbb{R}^d$ durch $\|x\|_\infty \coloneqq \max_{1\leq j\leq d} |x_j|$. Daraus folgt auch $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \cdot \|x\|_\infty$.

5. Wir definieren die Manhattan-Norm auf $\mathbb{R}^d$ durch

$$\|x\|_1 \coloneqq \sum_{j=1}^{d} |x_j|$$

und es gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \cdot \|x\|_\infty$

6. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{B}(X)$ der Vektorraum der reellwertigen beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\|f\|_{L^\infty(x)} \coloneqq \sup \{|f(x)| : x \in X\} = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

als eine Norm auf $\mathcal{B}(x)$. Das ist eine Verallgemeinerung der Maximumsnorm.

8.3 [*] Umgebungen und offene Mengen

Definition 8.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum

(a) Für $a \in X$, $r > 0$ heißt $B_r(a) \coloneqq \{x \in X : d(a, x) < r\}$ die (offene) Kugel um a mit dem Radius r und dem Mittelpunkt a.

(b) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Insbesondere ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x. Wir nennen $B_\varepsilon(x)$ die ε-Umgebung von x.

Satz 8.3.2 (Hausdorffsches Trennungsaxiom)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existieren zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ε-Umgebungen V von y und U von x mit $U \cap V = \varnothing$.

Beweis. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) > 0$. Angenommen $\exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\varepsilon = d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

[5] Physiker-Konvention, anders herum als in der Vorlesung Lineare Algebra I/II

[11. Jun] **Definition 8.3.3** (Offene Menge, Hausdorff 1914)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn $\forall x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Beispiel 8.3.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

1. Dann sind (a, b), (a, ∞), $(-\infty, a)$ offen.
2. Die Mengen $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ sind nicht offen, weil für den ersten Fall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \nsubseteq [a, b)$.
3. In jedem metrischen Raum (X, d) ist für beliebige $a \in X$, $r > 0$ die Menge $B_r(a)$ offen. Deshalb heißt $B_r(a)$ die offene Kugel um a mit Radius r.
4. In $\mathbb{R}^d$ gilt $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ist offen bezüglich $\|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow U$ ist offen bezüglich $\|\cdot\|_2$

Beweis für 3. Sei $x \in B_r(a)$ und $\varepsilon := r - d(a, x) > 0$. Sei $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(a,z) &\leq d(a,x) + d(x,z) < d(a,x) + r - d(a,x) = r \\ &\Rightarrow d(a,z) < r \\ &\Rightarrow z \in B_r(a) \end{aligned}$$

□

Beweis für 4. Sei $B_\varepsilon^\infty(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_\infty < \varepsilon \right\}$ und $B_\varepsilon^{(2)}(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_2 < \varepsilon \right\}$. Für ein $y \in B^{(2)}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2} &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2 &< \frac{\varepsilon^2}{d} \\ \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| &< \varepsilon \\ &\Rightarrow y \in B_\varepsilon^\infty(x) \end{aligned}$$

Außerdem lässt sich zeigen, dass daraus auch folgt, dass $y \in B_\varepsilon^{(2)}(x)$. Das heißt

$$B^{(2)}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}(x) \subseteq B_\varepsilon^\infty(x) \subseteq B_\varepsilon^{(2)}(x)$$

□

Satz 8.3.5. Für die offenen Mengen eines metrischen Raums (X, d) gilt

(a) $\varnothing$ und X sind offen

(b) Sind U und V offen, so ist auch $U \cap V$ offen

(c) Ist I eine beliebige Indexmenge und $(U_j)_{j \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X. So ist $\bigcup_{j \in I} U_j$ offen.

Beweis von (b). Sei $x \in U \cap V$. Da U und V offen sind, gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$, $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U \wedge B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Damit gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$. □

Beweis von (c). Sei $x \in \bigcup_{j \in I} U_j \Rightarrow \exists j_0\colon x \in U_{j_0}$. U_{j_0} ist offen. Das heißt $\exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subseteq U_{j_0} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{j \in I} U_j$. □

Bemerkung 8.3.6. Seien $U_1, \dots, U_k$ offen. Dann folgt aus Satz 8.3.5, dass $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ offen ist. Das gilt allerdings nur für $k < \infty$.

Beispiel 8.3.7 (Schnitt über unendlich viele offene Mengen)**.** Sei $U_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Dann ist U_n offen $\forall n \in \mathbb{N}$. Allerdings ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0,1]$ nicht offen.

Definition 8.3.8 (Abgeschlossene Menge)**.** In einem metrischen Raum (X, d) nennen wir eine Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^C := X \setminus A = \{y \in X : y \notin A\}$ offen ist.

Bemerkung 8.3.9. Eine andere Definition von Abgeschlossenheit wurde 1884 von Cantor gegeben. Diese Definition benutzt Folgen.

Definition 8.3.10 (Konvergenz in metrischen Räumen)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n \subseteq X$ konvergiert gegen den Punkt $a \in X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon d(a, x_n) < \varepsilon \quad \forall n > N$$

das heißt

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon x_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } x_n \in B_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \end{aligned}$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Definition 8.3.11 (Folgen-Abgeschlossenheit)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ ist Folgen-abgeschlossen, falls für jede Folge $(x_n)_n \subseteq A$, die gegen einen Punkt $a \in X$ konvergiert, auch gilt $a \in A$.

Beispiel 8.3.12. Wir betrachten die Menge $(0, 1]$ und die Folge $x_n = \frac{1}{n}$. Dann liegt der Grenzwert von $(x_n)_n$ nicht in $(0, 1]$. Das heißt $(0, 1]$ ist nicht Folgen-abgeschlossen. Die Menge $[0, 1]$ hingegen schon.

Satz 8.3.13. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ gilt A ist genau dann abgeschlossen, wenn A Folgen-abgeschlossen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst noch folgende Lemmata

Lemma 8.3.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $U \subseteq X$ offen, so ist U^C Folgen-abgeschlossen.

Beweis. Angenommen es gibt eine Folge $(x_n)_n \subseteq U^C$ mit $x_n \to a$, aber $a \notin U^C$. Das heißt $a \in U$. Da U offen ist, existiert eine Kugel $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ (für ein $\varepsilon > 0$). Da $x_n \to a$ für $n \to \infty$ $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $d(a, x_n) < \varepsilon \; \forall n > N \Leftrightarrow x_n \in B_\varepsilon(a) \; \forall n > N$. Damit gilt $x_n \notin U^C \; \forall n > N$. Widerspruch. □

Lemma 8.3.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt A ist Folgen-abgeschlossen $\Rightarrow A^C$ ist offen.

Beweis. Angenommen A^C ist nicht offen. Das heißt $\exists x_0 \in A^C$, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ nicht ganz in A^C enthalten ist. Das heißt $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing \; \forall \varepsilon > 0$. Wir wählen $x_n \in A$ mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Also gilt $x_n \to x_0 \in A^C$. Das heißt A ist nicht Folgen-abgeschlossen. Widerspruch. □

Beweis von Satz 8.3.13.
„⇒ “ Wenn A abgeschlossen ist, dann gilt nach Definition, dass A^C offen ist. Mit Lemma 8.3.14 folgt dann, dass A Folgen-abgeschlossen ist.
„⇐“ Sei A Folgen-abgeschlossen. Dann folgt direkt aus Lemma 8.3.15, dass A abgeschlossen. □