

Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Das eindimensionale Riemann-Integral	3
1.1	Der Integralbegriff nach Riemann	3
1.2	[*] Integrabilitätskriterien	6
1.3	[*] Mittelwertsätze der Integralrechnung	20
2	[*] Das orientierte Riemann-Integral	22
2.2	Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen	24
3	[*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung	25
3.1	Hauptsatz der Integralrechnung	25
3.2	Integrationstechniken	27
4	[*] Uneigentliche Integrale	33
4.1	Uneigentliche Integrale: Fall I	33
4.2	Uneigentliche Integrale: Fall II	36
4.3	Uneigentliche Integrale Fall III	36
4.4	Uneigentliche Integrale Fall IV	37
5	[*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz	40
6	[*] Taylors Theorem	45
7	[*] Die Gamma-Funktion	55
8	[*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume	59
8.1	[*] Metrische Räume	59
8.2	[*] Normierte Vektorräume	60
8.3	[*] Umgebungen und offene Mengen	61

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

Definition 1.1.1 (Zerlegung). Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z :

$$\Delta(Z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3. Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I .

Definition 1.1.4 (Riemannsche Zwischensumme). In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ als Stützstelle und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Definition 1.1.5 (Ober- und Untersumme). Für $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir außerdem

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &:= \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{m}_j &:= \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\ \underline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)} \end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Wir wollen die Zerlegung Z nun systematisch verfeinern.

Definition 1.1.6 (Verfeinerung einer Zerlegung).

- (a) Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I , falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.
- (b) Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z , nur mehr.

SCHRITT 1: Wir nehmen an Z^* enthielte genau einen Teilpunkt (y_{l+1}) mehr als Z . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* & \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^* . Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von \mathbb{R} . Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral). Es sei $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$. Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I \} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

Definition 1.1.12 (Integral). Es sei $I = [a, b]$. $f \in \mathcal{B}(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das (bestimmte) Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f dx = \int_I f(x) dx = \int_I f dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{B}(I)$ nennen wir $\mathcal{R}(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion). $f(x) := c$ auf $[a, b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a)$$

Beispiel 1.1.14 (Dirichlet-Funktion). Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

Übung 1.1.15. Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von $\underline{J}(f)$ und $\overline{J}(f)$.

1.2 [*] Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium). Es sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „ \Leftarrow “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ Angenommen $f \in \mathcal{R}(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Satz 1.2.2 (2. Kriterium). Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

Beweis. „ \Leftarrow “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ \Rightarrow “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* . Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x'_ν (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z' . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$

$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Es sei $(Z_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. ξ_n seien die Zwischenpunkt von Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$. Die Riemannsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen $J(f)$ falls $f \in \mathcal{R}(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme). Seien $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z , sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j| \quad (I_j = [x_{j-1}, x_j])$$

linear in Bezug zu f . Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des $\mathcal{R}(I)$ später in Satz 1.2.6 noch beweisen.

Korollar 1.2.5. Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \quad (I = [a, b])$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt außerdem

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq \underline{J}(f) = \bar{J}(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f dx$$

„ \Leftarrow “ SCHRITT 1: Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n .

Seien $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I , wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

Satz 1.2.6 ($\mathcal{R}(I)$ als Vektorraum). Der Raum $\mathcal{R}(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum und $J : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$ ist eine lineare Abbildung. Für $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt also $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. TEIL 1: Sei $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und Z eine Zerlegung von I mit zugehörigen Intervallen I_j . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) & \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
\Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
&= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
&= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
&= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
\Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \tag{1}
\end{aligned}$$

Wir wählen $h = \alpha f + \beta g$, wobei $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
\Rightarrow |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| \tag{2} \\
\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&\stackrel{(1)}{=} \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
&\stackrel{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
&= |\alpha| \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + |\beta| \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\
&\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \cdot |I_j| \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + |\beta| \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \tag{3}
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von f und g gilt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 : \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
\forall \varepsilon > 0 \exists Z_2 : \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
\end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$ und verwende (3)

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ damit Riemann-integrierbar.

TEIL 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h, \xi) = \sum_{j=1}^k h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f, \xi) + \beta \cdot S_Z(g, \xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) & (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g, \xi_n)) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 1.2.7 (Kompositionen von integrierbaren Funktionen). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt

- (i) $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$
- (ii) $|f| \in \mathcal{R}(I)$
- (iii) Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis.

- (i) Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \quad (1)$$

Sei Z Zerlegung von I und I_j die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \end{aligned}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1: \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2: \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ nach Satz 1.2.1.

(ii) Für $|f|$ verwenden wir $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x,y \in I_j} (|f(x) - f(y)|) \\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \end{aligned}$$

wie vorher folgt also $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

(iii) Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{c^2} \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung. \square

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto e^{\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_k^n)$ mit $x_j^n = a + j \cdot h_n$, wobei $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$. Da f streng monoton wachsend ist gilt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = f(x_j) = f(x_j^n) = e^{\alpha x_j} \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f(x_{j-1}^n) = e^{\alpha x_{j-1}} \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &= \overline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n e^{\alpha x_j} \cdot h \\ &= h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \quad (\text{Geometr. Summe}) \\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha h \cdot n} - 1) \\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha h_n} = 1$. Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha x_{j-1}})$$

$$\begin{aligned}
 &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
 &= h \cdot e^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
 &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha(b-a)} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})
 \end{aligned}$$

Also gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ sowie

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Beispiel 1.2.9 (Polynome). Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \neq -1$). Dann $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

Beweisansatz. Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n)$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$\begin{aligned}
 |I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
 &= a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\begin{aligned}
 \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = (x_j)^\alpha = (a \cdot q^j)^\alpha && \text{(Nach Monotonie)} \\
 \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^\alpha = (a \cdot q^{j-1})^\alpha \\
 \underline{S}_Z(f) &= \underline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n (a \cdot q^{j-1})^\alpha \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \\
 &= (q - 1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^n q^{(\alpha+1) \cdot (j-1)}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. □

Übung 1.2.10. Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

Satz 1.2.11 (Monotonie des Integrals). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq g(x)$, dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (1.2.1)$$

(ii) Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{R}(I)$ beliebig

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.2.2)$$

(iii) Sowie

$$\left| \int_a^b f \cdot g \, dx \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, dx$$

Beweis.

(i) Sei $h = g - f \geq 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.6 $h \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_a^b h \, dx \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \int_a^b h \, dx = \int_a^b g \, dx + \int_a^b (-f) \, dx = \int_a^b g \, dx - \int_a^b f \, dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\pm f \leq |f|$. Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \, dx &\leq \int_a^b |f| \, dx \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \max \left(\int_a^b f \, dx, -\int_a^b f \, dx \right) \leq \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leq \int_a^b |fg| \, dx \leq \int_a^b \left(\sup_I |f| \right) |g| \, dx = \sup_I (|f|) \cdot \int_a^b |g| \, dx \quad \square$$

Satz 1.2.12 (Cauchy-Schwarz). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg \, dx \right|^2 &\leq \left(\int_a^b |fg| \, dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \\ \Rightarrow \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \left| t\alpha - \frac{\beta}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2 \right) \\ \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left(t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}_A + \frac{1}{t} \underbrace{\int_a^b |g|^2 \, dx}_B \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t} |g(x)|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(tA + \frac{1}{t}B \right) \end{aligned}$$

Frage: Welches $t > 0$ maximiert h ?

$$\begin{aligned} A = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2t}B \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \\ B = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}A \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \end{aligned}$$

Minimum existiert für ein $t_0 > 0$ und es gilt $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0, \infty)} h(t) &= \frac{1}{2} t_0 \left(A + \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \left(A + \frac{A}{B}B \right) = \sqrt{AB} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.13.

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

Satz 1.2.14. Sei $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a, b])$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem $I = [a, b]$. Es gilt $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Beweis. $I = [a, b]$ ist kompakt und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta$$

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\Delta(Z) < \delta$. $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ und $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{y \in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da $|x - y| \leq |I_j| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (\overline{m}_j - \underline{m}_j) \cdot |I_j| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\leq \varepsilon (b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.15. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I = [a, b]$ heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ von I gibt so, dass f auf jedem der offenen Intervalle (x_{j-1}, x_j) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x \rightarrow x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, k - 1$ existieren.

$f((x_{j-1}, x_j))$ können zu stetigen Funktionen auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen $\mathcal{PC}(I)$ ¹.

¹Piecewise continuous function in I

Satz 1.2.16. Es gilt $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. $I = [a, b]$. Ist $Z = (x_0, \dots, x_k)$ eine Zerlegung von $f \in \mathcal{PC}(I)$ und f stetig auf $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall j$ und f_j eine stetige Fortsetzung von $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. So gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x) dx$$

Beweis. Arbeite auf $I_l = [x_{l-1}, x_l]$ dann ist f_l stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen). \square

Bemerkung 1.2.17 (Treppenfunktion). Ist f stückweise konstant auf I . Das heißt es existiert eine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_\nu)$ von I mit f ist konstant auf $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, \nu$. So heißt f Treppenfunktion. Schreiben $\mathcal{J}(I)$ für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

- (a) In jedem Punkt $x \in (a, b)$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.
- (b) In a existiert der rechtsseitige und in b der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

Bemerkung 1.2.19. Insbesondere erfüllt $PC(I)$ die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

Lemma 1.2.20. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Treppenfunktionen $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Treppenfunktion } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Beweis. (Später) \square

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18 verlangt und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir definieren $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$, $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$ auch als Treppenfunktionen. Dann gilt $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$ und $\Psi_2 \geq f$. Für alle Zerlegungen Z von I mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(\Psi_1) &\leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da φ eine Treppenfunktion ist, ist $\varphi \in PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. Also existiert eine Folge $(z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

(sofern $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left(\underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \right) \\ &= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon(b-a) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx + \varepsilon(b-a) \\ &= \varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.21. Welche $f \in \mathcal{B}(I)$ sind genau Riemann-integrierbar?

Definition 1.2.22 (Nullmenge). Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle I_1, I_2, \dots existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \quad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

Beispiel 1.2.23. \mathbb{Q} ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Nehme $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu q_j nehme $I_j = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned} q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Definition 1.2.24. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt fast überall stetig auf I , falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist.

1.2.25 (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium). $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

Bemerkung 1.2.26. Sei f wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von f höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.

Ist $f \in PC(I)$ so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

Beweis von Lemma 1.2.20. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sowie ein $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{Treppenfunktionen } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

SCHRITT 1: $I_1 = [a, b]$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge $(I_n)_n$ von Intervallschachtelungen $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_n| = b - a \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ mit

$$\sup_{x \in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \quad (*)$$

Beweis: Angenommen $I_n = [a_n, b_n]$ ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{b_n + a_n}{2} \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a_n, M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x \in [M_n, b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{Für alle Treppenfunktionen } \varphi)$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = M_n$. Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also $a_{n+1} = M_n$, $b_{n+1} = b_n$. Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0$$

Nehme $c_n \subseteq I_n$

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert aufgrund der monotonen Konvergenz} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \xi & (\text{da } b_n - a_n \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n &\leq \xi \leq b_n \\ \Rightarrow a_n &\leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &\geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \xi &\in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

SCHRITT 2: Angenommen $a < \xi < b$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 & \xi - \delta \leq x \leq \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 & \xi < x \leq \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi - \delta < x \leq \xi + \delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \quad (**)$$

Aber $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für n groß genug ist (**) im Widerspruch zu (*). Damit folgt die Aussage des Lemmas. \square

Satz 1.2.27. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$???.

Lemma 1.2.28. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und gebe es eine Menge $G \subseteq I$ welche in I dicht liegt und für die $f(x) = g(x) \quad \forall x \in G$ gilt. Dann folgt $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

1.3 [*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

Definition 1.3.1. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert als der Mittelwert von f über I . Wir schreiben auch

$$\bar{f}_I = \int_a^b f(x) dx$$

Satz 1.3.2. Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\exists \xi : a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$\begin{aligned}\underline{m} &\leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}(b-a) &= \int_a^b \underline{m} \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \overline{m} \, dx = \overline{m}(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{m}\end{aligned}$$

Ist $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$ ist konstant auf $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = \int_a^b f(x) \, dx$$

und $\forall a < \xi < b$ ist $f(x) = \underline{m}$. Damit gilt die Behauptung. Sei also $\underline{m} < \overline{m}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f , dass x_1 und x_2 in I existieren, sodass $f(x_1) = \underline{m}$ und $f(x_2) = \overline{m}$ mit $x_1 \neq x_2$. Außerdem folgt aus $\underline{m} < \overline{m}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ auch

$$\underline{m} < \int_a^b f(x) \, dx < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$

[30. Apr] **Satz 1.3.3** (Verallgemeinerung des vorherigen Satzes). Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$, $p \in \mathcal{R}(I)$. Falls $p \geq 0$ folgt $\exists \xi$ mit $a < \xi < b$ und

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x) \, dx \quad (1.3.1)$$

Beweis. Angenommen $\int_a^b p(x) \, dx = 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)p(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in I} \int_a^b |p(x)| \, dx = 0$$

Damit gilt (1.3.1) für alle $a < \xi < b$.

Ist $\int_a^b p(x) \, dx > 0$, dann definieren wir ein neues Mittel:

$$\text{Mittel}(f) := \frac{1}{\int_a^b p(x) \, dx} \cdot \int_a^b f(x)p(x) \, dx$$

Durch scharfes Hinschauen folgt dann die Aussage aus dem Beweis des vorherigen Satzes. \square

2 [*] Das orientierte Riemann-Integral

Sei $I = [a, b]$ und $a', b' \in I$ mit $a' < b'$ und $I' = [a', b']$. Wenn $f \in \mathcal{R}(I)$, ist dann auch $f \in \mathcal{R}(I')$? Ist also die Einschränkung $\varphi := f|_{I'} : I' \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto f(x)$ Riemann-integrierbar?

Satz 2.1.1. Ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und $I' = [a', b'] \subseteq I = [a, b]$, so ist $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$:

Beweis. SCHRITT 1: Angenommen $I' = [a, b']$ (also $a' = a$). Dann folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von f und Satz 1.2.18, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I : \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad (1)$$

Sei $Z_0 := (a, b', b')$ eine Zerlegung und $Z_1 = Z_0 \vee Z$ die gemeinsame Verfeinerung mit $Z_1 = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Dann gilt $x_0 = a$, $x_k = b$ und $\exists l \in \{1, \dots, k-1\} : x_l = b'$. Dann ist $Z' = (x_0, x_1, \dots, x_l)$ eine Zerlegung von I' mit zugehörigen Intervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ für $(j = 1, \dots, l)$. Wir definieren $\varphi = f|_{I'}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j(f) &= \sup_I f = \sup_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j(f) &= \inf_I f = \inf_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \overline{S}_Z(\varphi) &= \underline{S}_Z(\varphi) = \sum_{j=1}^l (\overline{m}_j(\varphi) - \underline{m}_j(\varphi)) \cdot |I_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| = \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für $I' = [a, b']$.

SCHRITT 2: Sei $b' = b$, $a < a' < b$. Dann kopiere den Beweis von SCHRITT 1.

SCHRITT 3: Sei $a < a' < b' < b : f \in \mathcal{R}([a, b])$. Dann folgt aus SCHRITT 1, dass $\varphi_1 := f|_{[a, b']} \in \mathcal{R}([a, b'])$. Außerdem gilt nach SCHRITT 2, dass $\varphi_2 := \varphi_1|_{[a', b']} \in \mathcal{R}([a', b'])$. Damit gilt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. \square

Bemerkung 2.1.2. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $I = [a, b]$ und $I' = [a', b'] \subseteq I$. Dann folgt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. Und wir definieren

$$\int_a^{b'} f(x) \, dx := \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \, dx$$

mit $\varphi := f|_{[a', b']}$.

Satz 2.1.3. Sei $I = [a, b]$ zerlegt in endlich viele Intervalle I_j $j = 1, \dots, m$, die höchstens die Randpunkt gemeinsam haben. Also

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad I_j = [a_j, b_j]$$

also $\text{Int}(I_j) \cap \text{Int}(I_k) = (a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = \emptyset$ für $j \neq k$. Dann gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x) \, dx$$

Beweis. Sei $(Z'_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z'_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $Z_0 = \bigcup_j [a_j, b_j]$. Wir betrachten die Verfeinerung $Z_n := Z'_n \vee Z_n$ mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$. Wir haben Zwischenpunkte ξ_n zu Z_n .

Z_n lässt sich in Zerlegung Z_n^j von I_j aufteilen. Dann gilt auch, dass $\Delta(Z_n^j) \rightarrow 0 \forall j = 1, \dots, m$. Die Zwischenpunkte ξ_n lassen sich aufteilen in ξ_n von Z_n^j .

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \sum_{j=1}^k f(\xi_n^j) \cdot |I_j^n| \\ &= \sum_{j=1}^m S_{Z_n}(f, \xi_j) \end{aligned} \quad \square$$

Definition 2.1.4 (Orientiertes Riemann-Integral). Sei $\alpha, \beta \in I = [a, b]$, $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx & \varphi &:= f|_{[\alpha, \beta]} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx & \text{falls } \alpha &\neq \beta \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= 0 & \text{falls } \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Satz 2.1.5. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in I = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \quad (2.1.1)$$

Beweis. Sind mindestens 2 Punkte α, β, γ gleich, so stimmt die Aussage. Also seien o.B.d.A. α, β, γ paarweise verschieden. Dann ist (2.1.1) äquivalent zu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

Diese Gleichung ist invariant unter zyklischem Vertauschen von α, β, γ . (Also zum Beispiel γ, α, β oder β, γ, α).

FALL 1: Sei $\alpha < \beta < \gamma$. Dann folgt die Aussage aus Satz 2.1.3.

FALL 2: Sei $\beta < \alpha < \gamma$. Dann folgt aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx &= \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von FALL 1 oder zyklischem Vertauschen von FALL 2. Damit gilt die Gleichung für alle Fälle. \square

2.2 Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen

Sei $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Komponentenfunktionen})$$

Definition 2.2.1.

(a) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ $x \mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{B}(I)\} \\ \mathcal{R}(I, \mathbb{C}) &:= \{f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) : \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{R}(I)\} \\ \int_a^b f(x) \, dx &:= \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) \, dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) \, dx \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$ oder \mathbb{C}^d . Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}^d)$ Riemann-integrierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_1, f_2, \dots, f_d \mathbb{R} -integrierbar auf I sind.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) \, dx \\ \int_a^b f_2(x) \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(x) \, dx \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.2.2. Das Konzept lässt sich auch auf Matrizen übertragen. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}$ ist \mathbb{R} -integrierbar, falls jede Komponentenfunktion \mathbb{R} -integrierbar ist. Das Integral wird analog zu Vektoren definiert.

Bemerkung 2.2.3. Außerdem ist auch $\mathcal{R}(I, \mathbb{R}^d)$ ein reeller Vektorraum und $\mathcal{R}(I, \mathbb{C}^d)$ ein komplexer Vektorraum und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

alle Rechenregeln und Sätze gelten entsprechend!

3 [*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

3.1 Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Wie rechnet man das Integral dann praktisch aus?

Erinnerung: F ist eine Stammfunktion von f , falls F differenzierbar ist und $F' = f$.

Satz 3.1.1 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Sei $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann ist für jedes $c \in [a, b]$ die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t) \, dt \quad (x \in I)$$

stetig differenzierbar und $F' = f$. Das heißt $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Beweis. (Später) □

Korollar 3.1.2. Sei $G \in \mathcal{C}^1(I)$ (stetig differenzierbaren Funktionen auf I) eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) =: G|_a^b := [G]_a^b = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Beweis. Wir nehmen $c = a$ aus Satz 3.1.1 und $F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ erfüllt $F' = f$ auf I nach Satz 3.1.1.

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t) \, dt \\ h(t) &:= F(t) - G(t) \\ h' &= F' - G' = f - f = 0 \text{ auf } I \end{aligned}$$

Damit ist h konstant, d.h. $h(x) = k$ für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) - G(x) &= k \\ k &= F(a) - G(a) = -G(a) \\ F(x) - G(x) &= -G(a) \\ F(x) &= G(x) - G(a) \\ \Rightarrow F(b) &= G(b) - G(a) \end{aligned} \quad \square$$

[3. Mai] *Beweis von Satz 3.1.1.* Sei $F(x) = \int_c^x f(t) \, dt$ und $h \neq 0$. Wir wollen über den Differenzenquotient zeigen, dass $F' = f$. Wir berechnen zuerst den Zähler

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t) \, dt - \int_c^x f(t) \, dt = \int_x^{x+h} f(t) \, dt$$

Das können wir in den Differenzenquotienten einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) \, dt \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) \, dt - f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dt \\
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &\leq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h > 0 \\ \frac{1}{-h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h < 0 \end{cases} \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| \cdot |h|
 \end{aligned}$$

Wir definieren $I_h(x) = [x, x+h]$, falls $h > 0$ und ansonsten $I_h(x) = [x+h, x]$

$$\leq \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)|$$

Da f stetig in x ist, folgt

$$\begin{aligned}
 &\sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= f(x) \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.3. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat f die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1}$. Damit folgt

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot [b^{p+1} - a^{p+1}] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.1.4. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $f(x) = x^{-p}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}$. Damit folgt

$$\int_a^b x^{-p} \, dx = \frac{1}{1-p} \cdot [b^{1-p} - a^{1-p}] \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

Beispiel 3.1.5. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$, $x > 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$. Damit gilt

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}] \quad \forall a, b > 0$$

Beispiel 3.1.6. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \ln|x|$.

Beweis. Falls $x > 0$. Dann ist $F(x) = \ln x$ und $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Falls $x < 0$. Dann ist $F(x) = \ln -x$ und $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. \square

Damit gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right| \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

Beispiel 3.1.7. Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x \, dx &= \sin b - \sin a \\ \int_a^b \sin x \, dx &= [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.8. Es gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. ($|x| < \frac{\pi}{2}$). Damit folgt $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Das heißt

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^\varphi = \tan(\varphi) \quad \forall |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 3.1.9. Wir wollen das Integral $\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$ berechnen. $\sqrt{1-x^2}$ hat die Stammfunktion $\phi(x) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2})$, weil

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) \right) \quad ((\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[\frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) \right]_a^b \quad -1 \leq a, b \leq 1\end{aligned}$$

Geometrisch gesehen können wir damit auch die Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises berechnen

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin 1 + 0 - \arcsin -1 - 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung 3.1.10. Satz 3.1.1 gilt auch für Funktionen in \mathbb{C} oder \mathbb{R}^d bzw. \mathbb{C}^d . Wir nennen

$$\int f(x) \, dx$$

die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f oder das unbestimmte Integral. Genauer gilt, wenn Φ eine Stammfunktion von f ist

$$\int f(x) \, dx = \{\Phi + k : k \text{ Konstante}\}$$

3.2 Integrationstechniken

Satz 3.2.1 (Partielle Integration). Seien $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$ (oder $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$). Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx\end{aligned}$$

Beweis. Wir wenden die Produktregel der Ableitung an. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$.

$$\int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b (fg)' dx = [fg]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (2)$$

Wir setzen (1) und (2) gleich

$$\int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \square$$

Beispiel 3.2.2 (Anwendung von partieller Integration).

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - x \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} dx &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\ \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \end{aligned}$$

Übung 3.2.3. Beweisen Sie analog zum vorherigen Beispiel mittels partieller Integration, dass $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x)$ und $\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arccosh} x)$

Beispiel 3.2.4.

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos(bx)\right) - \int \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx) dx$$

Wir wenden nochmal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \int e^{ax} \cos(bx) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right\} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \sin(bx) \\ \Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx))) + \text{const.} \end{aligned}$$

[07. Mai] **Beispiel 3.2.5.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(x) \, dx \\
&= [-\cos(x) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) \, dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras wissen wir außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int \cos^n(x) \, dx &= \int \cos(x) \cos^{n-1}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \int \sin(x) (n-1) \cos^{n-2}(x) \sin(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int \cos^n(x) \, dx \\
\int \cos^n(x) \, dx &= \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) \, dx \quad (\text{Rekursionsformel})
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass $\int \sin^n(x) \, dx = \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx$. Wir nutzen nun die Rekursionsformel, um einen Wert für alle n zu ermitteln

$$\begin{aligned}
c_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \frac{n-1}{n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx}_{=c_{n-2}} \\
\Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} c_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
c_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \\
c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot c_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-j-1}{n-j} \cdot c_{n-2j-2} \quad \forall j : n-2j-2 \geq 1
\end{aligned}$$

Damit folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
&= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
c_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \, dx \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Satz 3.2.7 (Wallisches Produkt). Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

Beweis. Aus der Definition von c_n aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $0 \leq \cos(x) \leq 1$. Damit folgt $\cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x) \leq \cos^{2n-2}(x)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x) \, dx \\
&\Rightarrow c_{2n} \leq c_{2n-1} \leq c_{2n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Nach Def. gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j} \\
\Rightarrow \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} &= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j}}{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{c_{2n}}{c_{2n}} \geq \left| \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \right| \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1
\end{aligned}$$

□

Außerdem

$$\begin{aligned}
 W_n &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{2n+1} \\
 \Rightarrow \sqrt{W_n} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot \sqrt{2n}} \\
 &= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Satz 3.2.8 (Substitutionsregel). Seien $I = [a, b]$ und I^* kompakte Intervalle und $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{R})$ sowie $\varphi(I^*) \subseteq I$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in I^*$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

Beweis. Sei F die Stammfunktion von f ($F'(x) = f(x) \, \forall x \in I$). Wir definieren $h(t) := F(\varphi(t)) \Rightarrow h \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{C})$ (Kettenregel).

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{d}{dt} h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
 \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) \, dt &= [h(t)]_{\alpha}^{\beta} = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x) \, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx \quad \square
 \end{aligned}$$

ERSTE LESART: $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt$ ausrechnen. Annahme: Es existiert eine Substitution $x = \varphi(t)$ und $f(x)$, sodass $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ist.

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx \quad (b = \varphi(\beta), a = \varphi(\alpha))$$

Beispiel 3.2.9. Wir betrachten des Integral $\int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt$. Wir definieren $\varphi(t) = t+c$ und $f(x) = g(x)$. Dann gilt $\varphi'(t) = 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt &= \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) \, dx \\
 &= \int_{a+c}^{b+c} g(x) \, dx \quad (\text{Translation})
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.10. Wir betrachten $\int_a^b g(t) \frac{dt}{t}$ mit $a, b > 0$ und definieren $\varphi(t) = \ln(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} g(t) \cdot \frac{1}{t} &= g(t) \cdot \varphi'(t) \\ &= g(e^{\varphi(t)}) \cdot \varphi'(t) \\ f'(x) &= g(e^x) \\ \Rightarrow \int_a^b g(t) \frac{dt}{t} &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) dx \\ &= \int_{\ln a}^{\ln b} g(e^x) dx \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.11. Wir betrachten $\int_0^1 (1+t^2)^n \cdot (t dx. t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (1+t^2). (1+t^2)^n = \frac{1}{2} (1+t^2)^n \frac{d}{dt} (1+t^2).$
 $\varphi(t) = 1+t^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^n$.
 Dann gilt $(1+t^2)^n = \frac{1}{2}f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

[10. Mai] **3.2.12.** Ziel: Berechne $\int_a^b f(x) dx$. Wir führen eine Variablentransformation durch: $x = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(t) dt & (h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} h(t) dt \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

Dazu benötigt man $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ist invertierbar. (Also zum Beispiel $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf ganz $[\alpha, \beta]$)

Notation 3.2.13 (Leibnitz'sche Schreibweise). $x = \varphi(t)$ $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ (informell).
 dx „=“ $\varphi'(t) dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f(x) dx &\text{„=“} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ \int_0^1 \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt & (\frac{dx}{dt} = r \cdot \cos t) \\ &= r^2 \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4 [*] Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir immer nur Integrale auf kompakten Intervalle I berechnet und dabei waren alle Funktionen $f \in \mathcal{R}(I)$ insbesondere beschränkt.

Frage: Was ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$? Was ist $\int_0^\infty e^{-t} dt$?

$$\int_a^b e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_a^b = e^{-0} - e^{-b} = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b} \rightarrow 1 \text{ für } b \rightarrow \infty$$

4.1 Uneigentliche Integrale: Fall I

Es sei $I = [a, \infty)$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}([a, b]) \forall a < b < \infty$ sowie $F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

Definition 4.1.1 (Fall). Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

sofern der Grenzwert existiert nennen wir das das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$. Wenn der Grenzwert existiert, sagen wir das Integral konvergiert.

Divergiert das Integral und gilt $F(b) \rightarrow \infty$ für $b \rightarrow \infty$ (oder $F(b) \rightarrow -\infty$ für $b \rightarrow \infty$), so nennen wir das Integral bestimmt divergent und schreiben

$$\int_a^\infty f(x) dx = +\infty$$

oder

$$\int_a^\infty f(x) dx = -\infty$$

Satz 4.1.2. Das Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |F(b_2) - F(b_1)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R$$

Beweis. Wir wollen die Existenz von $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ für $F(b) = \int_a^b f(x) dx$. Dann folgt der Satz aus dem Cauchy-Kriterium für Grenzwerte. \square

Definition 4.1.3 (Absolut konvergente uneigentliche Integrale). Das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

heißt absolut konvergent, falls

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

konvergiert.

Satz 4.1.4. Ist das Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent. Das heißt ist $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$.

Beweis. Wir setzen $G(b) = \int_a^b |f(x)| \, dx$ und $F(b) = \int_a^b f(x) \, dx$. Wir nehmen an, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} G(b)$ existiert, das heißt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |G(b_2) - G(b_1)| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R \\ \Rightarrow |F(b_2) - F(b_1)| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \, dx = G(b_2) - G(b_1) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2. □

Satz 4.1.5. Sei $\varphi : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\int_a^\infty \varphi(x) \, dx < \infty$$

und es existiert ein $R_0 \geq 0$, sodass

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq R_0$$

Dann ist

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

absolut konvergent.

Beweis. Für $b_2 \geq b_1 \geq R_0$ gilt

$$\begin{aligned} |F(b_2) - F(b_1)| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \, dx < \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \, dx \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{für } b_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.6. Das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Wir definieren

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Damit ist f stetig auf $(-\infty, \infty)$ und damit folgt $f \in \mathcal{R}([a, b]) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Insbesondere existiert

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx &= \int_a^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx \\
\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\cos + \frac{1}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ mit

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$$

Außerdem gilt

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Damit ist das Integral nach dem Majorantenkriterium konvergent. Um einzusehen, dass es nicht absolut konvergent ist, betrachten wir für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \int_{N\pi}^{|N+1|\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \frac{1}{\pi(N+1)} \cdot \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} |\sin x| dx \\
\Rightarrow \int_0^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{n=0}^k \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \sum_{n=0}^k \frac{2}{\pi(n+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n+1} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.7. Analog zu $[a, \infty)$ wollen wir auch die Integrale in $(-\infty, b]$ betrachten. Wir setzen

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_a^b f(x) dx \\
\int_{-\infty}^b f(x) dx &:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx
\end{aligned}$$

sofern der Grenzwert existiert. Alle Aussagen für $[a, \infty)$ gelten analog auch für $(-\infty, b]$.

Definition 4.1.8. Sei $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}([a, b]) \forall a, b \in \mathbb{R}$. Dann nehmen wir $c \in \mathbb{R}$ beliebig und definieren, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert, falls

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \text{ und } \int_c^{\infty} f(x) dx$$

beide konvergieren. Und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

Übung 4.1.9. Weisen Sie nach, dass sowohl die Konvergenz, als auch der Wert des Integrals in der vorherigen Definition unabhängig von der Wahl von c ist.

Bemerkung 4.1.10. Es ist allerdings zu beachten, dass

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b dx \neq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx$$

Das heißt die Integrale müssen tatsächlich getrennt betrachtet werden. Zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = x$ geht $\int_{-R}^R x \, dx \rightarrow 0$, aber ist eigentlich nicht auf $(-\infty, \infty)$ integrierbar, da sich bei der Trennung in zwei Integrale kein Grenzwert ergibt.

4.2 Uneigentliche Integrale: Fall II

Es sei $I = [a, b)$ (oder $I = (a, b]$) und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt bei $x = a$ (oder $x = b$). Außerdem $f \in \mathcal{R}([a, c]) \, \forall a < c < b$ (oder $f \in \mathcal{R}([c, b]) \, \forall a < c < b$)

Definition 4.2.1. Existiert

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left(\text{oder} \quad \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

so setzen wir

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left(\text{oder} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

und sagen

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

konvergiert.

Satz 4.2.2. Ist $|f(x)| \leq \varphi(x) \, \forall x \in [a, b)$ (oder $\forall x \in (a, b]$) und konvergiert $\int_a^b \varphi(x) \, dx$, so konvergiert auch $\int_a^b f(x) \, dx$

Beispiel 4.2.3. Sei $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann gilt $F(x) = 2\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = [2\sqrt{x}]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c} \rightarrow 2$$

4.3 Uneigentliche Integrale Fall III

[14. Mai] f hat eine Singularität in ξ im Inneren von $[a, b]$.

Beispiel 4.3.1. $f(x) = \frac{1}{|\sqrt{x}|}$ auf $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

Definition 4.3.2. Wir sagen, dass

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert/konvergiert, falls die uneigentlichen Integrale

$$\int_{\xi}^b f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^{\xi} f(x) \, dx$$

konvergieren. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^{\xi} f(x) \, dx + \int_{\xi}^b f(x) \, dx \quad (4.3.1)$$

Bemerkung 4.3.3. (4.3.1) ist stärker als die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{I_\varepsilon} f(x) \, dx$$

mit $I = [a, b]$ und $I_\varepsilon := I \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) = [a, \xi - \varepsilon] \cup [\xi + \varepsilon, b]$. (Cauchyscher Hauptwert).

Beispiel 4.3.4. Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = [-1, 1]$. Dann existiert der Cauchysche Hauptwert, aber nicht (4.3.1).

4.4 Uneigentliche Integrale Fall IV

Definition 4.4.1. Man hat Singularitäten in \mathbb{R} für f oder/und $b = +\infty$, $a = -\infty$. Dann zerlege $[a, \infty)$ oder $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$ in endlich viele Intervalle, wobei die Singularitäten die Randpunkte sind (oder $-\infty, \infty$). Dann existiert das Integral, falls die endlich vielen uneigentlichen Integrale existieren. Dann nehme Summe aller dieser uneigentlichen Integrale

Satz 4.4.2 (Integralvergleichskriterium). Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) \, dx \text{ existiert}$$

Beweis. Siehe Saalübung. □

Beispiel 4.4.3. Es sei $f(x) = x^{-p}$ mit $p \neq 1$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{1-p} x^{1-p}$ für $F' = f$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^R$$

existiert nach Satz 4.4.2 für $p > 1$.

Beispiel 4.4.4. $f(x) = \log_2(x) = \log(\log(x))$, $x > 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_2(x) &= \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} (\log_2(x))^{1-s} &= \frac{1-s}{(\log x)^s} \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log^s n)^s} \text{ konvergiert} &\Leftrightarrow s > 1 \end{aligned}$$

Beispiel 4.4.5 (Gamma-Funktion).

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad (x > 0)$$

(a)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \forall t > 0$$

(b)

$$\begin{aligned} t^{x-1} e^{-t} &= t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall t \geq 1 \end{aligned} \quad (c_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}})$$

$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ ist beschränkt auf $[1, \infty)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt &\leq \int_0^1 t^{x-1} dt \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} t^x \right]_c^1 \\
 &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 - e^x) \\
 0 &\leq \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \\
 &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} c_x \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} dt < \infty \\
 \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} &= \left[-2e^{-\frac{t}{2}} \right]_1^b = 2 \left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right) \rightarrow 2e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Satz 4.4.6 (Funktionalgleichung der Γ -Funktion). Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ und $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt
 \end{aligned}$$

Wir integrieren partiell. Sei $0 < a < b < \infty$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b t^x e^{-t} dt &= \left[-t^x e^{-t} \right]_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= a^x e^{-b} - b^x e^{-b} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
 \Rightarrow \int_a^\infty t^x e^{-t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^x e^{-t} dt \\
 &= a^x e^{-a} + x \int_a^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
 \Rightarrow \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dx = x\Gamma(x)
 \end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Wir betrachten außerdem

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) \\
 &= n(n-1)\Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\
 &= n!
 \end{aligned}$$

□

Anwendung 4.4.7. Nach Substitution mit $t^2 = x$ gilt $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int_a^\xi e^{-t^2} dt = \int e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

4 [*] Uneigentliche Integrale

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_?^b s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds
 \end{aligned}$$

für $b \rightarrow \infty$ und $a \searrow 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dx &= \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \\
 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ später.

5 [*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz

Sei $I = [a, b]$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn die Funktionenfolge $(f_n)_n$ „irgendwie“ gegen f konvergiert. Wann gilt dann

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ für } n \rightarrow \infty ?$$

Wir werden in diesem Kapitel einsehen, dass punktweise Konvergenz dafür nicht ausreichend ist, sondern wir gleichmäßige Konvergenz fordern müssen.

Beispiel 5.1.1 (Punktweise Konvergenz). Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion ($f_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty \forall x \in [0, 1]$). Außerdem gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = \frac{n}{n} = 1$$

Das Integral über die Nullfunktion ist aber 0. Das heißt punktweise Konvergenz ist kein ausreichendes Kriterium, damit die Integrale gleich sind.

Satz 5.1.2. Seien $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}, \dots) und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiere $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f auf $[a, b]$ und $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ groß genug. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \\ \Rightarrow f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} &\leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \quad \forall n \geq N \end{aligned} \quad (1)$$

Halte N fest und nehme Zerlegung Z von $I = [a, b]$ mit $\bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt jeweils nach (1)

$$\begin{aligned} \bar{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z\left(f_N + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \bar{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(f_N - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4} \\ \Rightarrow \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(\underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \\ &= \bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt $f \in \mathcal{R}(I)$. Wir beweisen die Gleichheit der Integrale.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &= \int_a^b \left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&= \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq N \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx \quad \square
\end{aligned}$$

[17. Mai] **Beispiel 5.1.3** (Integral von Potenzreihen). Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit Konvergenzradius $R > 0$ und

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Wir erhalten also eine Funktion $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Die Stammfunktion zu $a_n (x - x_0)^n$ ist $\frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$. Wir definieren also eine Funktion F analog

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (c_n := \frac{a_{n-1}}{n}) \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} \right|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|a_{n-1}|}{n} \right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \left(|a_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Das heißt F hat denselben Konvergenzradius wie f . Unsere Hoffnung ist also, dass F eine Stammfunktion von f ist oder

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = F(x)$$

Das gilt tatsächlich und lässt sich folgendermaßen zeigen. Wir definieren eine Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Wir wissen $\forall \delta > 0$ klein genug (konkret heißt das $\delta < R$) konvergiert f_n gleichmäßig gegen f auf dem Intervall $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$. Dann gilt nach Satz 5.1.2 für $x \in [x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ fest

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) \, dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} dx = F(x) \\
 \int_{x_0}^x f_n(t) dt &= \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{x_0}^x (t-x_0)^k dt \\
 &= \left[\frac{1}{k+1} (t-x_0)^{k+1} \right]_{x_0}^x = \frac{1}{k+1} x^{k+1} - \frac{1}{k+1} x_0^{k+1}
 \end{aligned}$$

Satz 5.1.4. Sei $I = [a, b]$ sowie $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) und die folgenden Voraussetzungen gelten

- (i) $\exists x_0 \in I : f_n(x_0)$ konvergiert gegen $f(x_0)$
- (ii) $(f'_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g
- (iii) f'_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in I$ und f ist stetig differenzierbar mit Ableitung $f' = g$.

Beweis. Sei $x \in I$. Da alle Ableitungen von f_n stetig sind, können wir den Hauptsatz verwenden und es gilt

$$\begin{aligned}
 f_n(x) - f_n(x_0) &= \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \\
 \Rightarrow f_n(x) &= \underbrace{f_n(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} + \underbrace{\int_{x_0}^x f'_n(t) dt}_{\rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt} \\
 \Rightarrow f(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert } \forall x \in I \text{ und} \\
 f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt
 \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt, dass f stetig differenzierbar ist mit $f' = g$. □

Anwendung 5.1.5.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\
 R &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} > 0 \\
 f_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \\
 \Rightarrow f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\
 f'_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(n+1) a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$$

Nach dem vorherigen Satz gilt damit

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$$

konvergiert auch auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ und gleichmäßig auf $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$. Also konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$$

und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Also ist jede Potenzreihe differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

Korollar 5.1.6. Jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

Beweis. Nach Anwendung 5.1.5 ist eine Potenzreihe einmal differenzierbar mit einer Potenzreihe als Ableitung. Damit folgt induktiv die Behauptung. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-k} \\ \Rightarrow f^{(k)}(x_0) &= k! \cdot a_k \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.7. Wir wissen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} & (|x| < 1) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.8 (Taylorreihe).

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) \, dt \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0) + f'(x_0)) \, dx \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt + f'(x_0) \cdot \int_{x_0}^x 1 \, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt}_{=: R_{x_0}(x)}
\end{aligned}$$

Wir können den Fehler abschätzen und erhalten für ein $\varepsilon(x) := \sup_{t \in (x_0, x)} |f'(t) - f'(x_0)|$

$$\begin{aligned}
|R_{x_0}(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f'(t) - f'(x_0)| \, dt \leq \varepsilon(x) \cdot |x - x_0| \\
\frac{|R_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} &= \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0
\end{aligned}$$

6 [*] Taylors Theorem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (6.1.1)$$

[28. Mai] **Satz 6.1.1.** Sei $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}((a, b))$ ($n+1$ mal stetig differenzierbar auf (a, b)). Dann gilt für alle $x, x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x_0, x)$$

mit

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Beweis. Wir verwenden Induktion. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist gerade der Hauptsatz.

Induktionsschritt: Angenommen $f \in \mathcal{C}^{(n+2)}$. Dann gilt nach Induktionsannahme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f, x_0, x) \quad (1)$$

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Wir integrieren partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \left(\left[-\frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dt} (x - t)^{n+1} \end{aligned}$$

Nach (1) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt}_{=R_{n+1}(f, x_0, x)} \quad \square$$

Korollar 6.1.2. Sei $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$. Dann gilt $\forall x, x_0 \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \bar{R}_n(f, x_0, x)$$

mit

$$\bar{R}_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x)] dt$$

Beweis. Nach Satz 6.1.1 gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \bar{R}_{n-1}(f, x_0, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n-1}(f, x_0, x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\
(n-1)! \cdot R_{n-1}(f, x_0, x) &= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt - \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.1.3.

$$\begin{aligned}
n! \cdot \left| \frac{R_n(f, x_0, x)}{(x - x_0)^n} \right| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^n} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{x-t}{x-x_0} \right|^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| dt \\
&\leq \int_{x_0}^x |f^{(n+1)}(t)| dt \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Definition 6.1.4. Sei $f \in \mathcal{C}((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$. Wir definieren

$$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (n\text{-tes Taylorpolynom})$$

Ist f unendlich oft differenzierbar, so nennen wir

$$T(f, x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Taylorreihe (von f im Entwicklungspunkt x_0).

Bemerkung 6.1.5.

- (i) Die Taylorreihe kann Konvergenzradius $R > 0$ haben
- (ii) Ist eine Taylorreihe konvergent, so muss sie nicht unbedingt gegen f konvergieren

Beispiel 6.1.6. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f unendlich oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. SCHRITT 1: Sei $x \neq 0$. Dann existiert $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom p_n , sodass

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion.

I-Anfang Es ist $n = 0$. Wir wählen $p_0(x) = 1$.

I-Schritt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(f^{(n)}(x) \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(p_n \left(\frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= p_n' \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n \left(\frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\
&= \underbrace{\left(-p_n' \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^2} + 2p_n \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^3} \right)}_{=: p_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\
p_{n+1}(t) &:= -p_n'(t) \cdot t^2 + 2t^3 \cdot p_n(t)
\end{aligned}$$

SCHRITT 2: $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir nutzen wieder Induktion. Der Induktionsanfang ist klar.

I-Schritt Angenommen $f^{(n)}(0) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot p_n \left(\frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{|R| \rightarrow \infty} \left(R \cdot p_n(R) \cdot e^{-R^2} \right) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 6.1.7. Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist die Taylorreihe von f gleich dieser Potenzreihe.

Beweis. Folgt aus Korollar 5.1.6 und Gleichung ??.

□

Beispiel 6.1.8.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \cdot x^n \\
\exp(cx) &= \exp(cx_0 + c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \exp(c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} (x - x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ??
\end{aligned}$$

Satz 6.1.9 (Restglieddarstellung von Schlömilch). Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + R_n(f, x_0, x)$$

mit

????

Bemerkung 6.1.10. Ist $p = n + 1$, dann haben wir die Lagrangsche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}(\xi)$$

und wenn $p = 1$, dann haben wir die Cauchysche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0)$$

für das Restglied.

Satz 6.1.11 (Logarithmus). Für die Logarithmusreihe $f_n : -1 \leq x \leq 1$ gilt

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \\ T_n(f, 0)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

SCHRITT 1: Aus Satz 6.1.9 folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + R_n(f, 0, x) \\ R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{pn!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^p \\ &= n! \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 + \xi)^{-(n+1)} \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{pn!} \cdot n! \cdot (1 + \xi)^{-n-1} \cdot |x - \xi|^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$

Angenommen $0 \leq x \leq 1$. $0 < \xi < x$, wir wählen $p = n + 1$

$$[31. \text{ Mai}] \quad \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

Angenommen $-1 \leq x \leq 0$. Dann gibt es ein ξ zwischen 0 und x , das heißt $\xi = \Theta x$ mit $0 < \Theta < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{p} \cdot (-1)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (x - \Theta x)^{n+1-p} \cdot x^p \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot |x|^{n+1-p} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$

6 [*] Taylors Theorem

$$= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1}$$

Da $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \Theta x = 1 - \Theta \cdot |x| \geq 1 - \Theta > 0 \\ &\Rightarrow (1 + \Theta x)^{-n} \leq (1 - \Theta)^{-n} \\ &\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} \cdot (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - |x|)^{-1} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1} \end{aligned}$$

Wähle $p = 1$

$$\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} \rightarrow 0$$

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die Taylorreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ für alle $-1 \leq x \leq 1$ konvergiert. Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \right| \leq \frac{1}{n} \cdot |x|^n \leq |x|^n$$

Damit folgt die Konvergenz aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Das gleiche Prinzip lässt sich für $0 \leq x < 1$ anwenden. Für $x = 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ eine alternierende monotone Reihe, die damit nach Leibniz konvergiert.

Aus SCHRITT 1 und SCHRITT 2 folgt damit die Behauptung. \square

Korollar 6.1.12. Für $a > 0$ und $0 < x \leq 2a$ folgt

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot a^n} (x - a)^n$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log x &= \log(a + (x - a)) = \log\left(a \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right) \\ &= \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 6.1.13. Es gilt

$$\begin{aligned} \log 2 &= \log(1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} && \text{(konvergiert langsam)} \\ \log(1 + x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \\ \log(1 - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \Rightarrow \log(1 + x) - \log(1 - x) &= \sum_{n \text{ ungerade}} \left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n} \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Für ein $y > 1$ mit $y = \frac{1+x}{1-x}$ gilt

$$(1 - x) \cdot y = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = x \cdot (y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{y + 1}$$

Für $y = 2$ gilt also $x = \frac{1}{3}$. Das heißt

$$\log y = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \log 2 = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{2k+1} \quad (\text{konvergiert schneller})$$

Satz 6.1.14 (Abelscher Grenzwertsatz). Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann ist die Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

- (i) konvergent für alle $-1 < x \leq 1$
- (ii) stetig in $x = 1$ und
- (iii) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf allen Intervallen $[a, 1]$ mit $-1 < a < 1$. (Das heißt sie konvergiert lokal gleichmäßig auf $[-1, 1]$). Insbesondere in jeder ε -Umgebung um $x = 1$.

Beweis. SCHRITT 1: Wir zeigen zunächst (ii) und setzen dafür

$$A_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Insbesondere ist

$$\sup_{n \geq 0} |A_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq k+1} |A_n| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$a_n = A_{n-1} - A_n \quad (\text{Wir setzen } A_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n)$$

Für ein $L \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n &= \sum_{n=0}^L (A_{n-1} - A_n) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^L A_{n-1} \cdot x^n - \sum_{n=0}^L A_n \cdot x^n \\ &= \sum_{j=-1}^{L-1} A_j \cdot x^{j+1} - \sum_{j=0}^L A_j \cdot x^j \\ &= A_{-1} \cdot x^0 - A_L \cdot x^L + \sum_{n=0}^L A_n \cdot (x^{n+1} - x^n) \\ &= f(1) - A_L \cdot x^L + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{L-1} A_n \cdot x^n \end{aligned}$$

6 [*] Taylors Theorem

Es gilt $|A_L \cdot x^L| \leq |A_L|$ und $|A_n| \leq C$ für eine Konstante C . Das heißt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \text{ hat Limes für } L \rightarrow \infty \\ \Rightarrow f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n = f(1) + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(1) - f(x)| = (1-x) \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \right| \leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \end{aligned}$$

Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(1) - f(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^K |A_n| \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \\ &\leq \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq 0} (|A_n|) \cdot \sum_{n=0}^K x^n}_{=: I_K(x)} + \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n}_{=: J_K(x)} \end{aligned}$$

Für ein festes $K \in \mathbb{N}$ geht $I_K \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 1-$ und es gilt

$$J_K(x) = \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n$$

Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned} &= \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \frac{x^{K+1}}{1-x} \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } L \rightarrow \infty \quad (\text{gleichmäßig in } 0 \leq x < 1) \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &\leq 0 + \limsup_{x \rightarrow 1-} J_K(x) \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } K \rightarrow \infty \quad \forall K \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= f(1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) - f_n(x) &= (x-1) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \cdot x^k - A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \cdot x^k + |A_n| \cdot x^n \quad (0 \leq x < 1) \\ &\leq (1-x) \cdot \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k + |A_n| \\ &\leq \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot (1-x) \cdot x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k + |A_n| \end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|)$$

Mit (ii) folgt $\forall 0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \\ \Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} (|f(x) - f_n(x)|) &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \end{aligned}$$

Das heißt $(A_n)_n$ ist eine Nullfolge. Damit gilt gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1]$.

$f(x)$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen innerhalb des Konvergenzradius und $\sum a_n$ konvergiert mit Konvergenzradius $R \geq 1$. Das heißt $f(x)$ konvergiert gleichmäßig auf allen $[-\delta, \delta]$ für $0 < \delta < 1$. \square

Satz 6.1.15 (Arctan Reihe). Für $|x| \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $f(x) = \arctan x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ falls } |x| < 1 \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konvergiert nach Leibniz} \end{aligned}$$

Das heißt aus Satz 6.1.14 folgt die gleichmäßige Konvergenz von dieser Reihe für alle $|x| \leq 1$.
Das heißt aus der Stetigkeit von \arctan bei ± 1 und dem Satz folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall |x| \leq 1 \quad \square$$

[04. Jun] **Bemerkung 6.1.16** (Reihendarstellung von π). Es gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und damit $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. So ergibt sich mit dem Arctan eine Reihendarstellung von π

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für die tatsächliche Anwendung allerdings zu langsam. Viel schneller ist die Berechnung über die *Machinsche Formel*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Satz 6.1.17 (Binomische Reihe). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (2)$$

wobei wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizient verwenden

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &:= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \\ \binom{\alpha}{n} &:= 0 \text{ für } n \geq \alpha + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt der speziellere Binomische Lehrsatz für $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot x^n$$

Beweis. SCHRITT 1: Sei $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $x > -1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Das heißt die Taylorreihe für f in 0 ist

$$\begin{aligned} T(f, 0)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \end{aligned}$$

²Gefunden von Newton 1665

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die obige Taylorreihe konvergiert

$$\begin{aligned}
 a_n &:= \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x| < 1 \\
 \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} \cdot x^n} \right| \\
 &= |x| \cdot \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| < 1 \\
 \Rightarrow \exists x < 1, N_0 \in \mathbb{N}: \quad &\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq x < 1 \quad \forall n \geq N_0 \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ ist absolut konvergent}
 \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Der Restterm soll verschwinden. Sei $0 < \Theta < 1$ und $\xi = \Theta x$, sowie $1 \leq p \leq n+1$

$$R_n(f, 0, x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot x^p \quad (\text{Schl\"omilch})$$

F\"ur $p = 1$ ergibt sich die Restglieddarstellung von Cauchy

$$\begin{aligned}
 R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{n!} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (\alpha - n) \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \cdot (x - \Theta x)^n \cdot x \\
 &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \underbrace{\left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ nach SCHRITT 2}} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \\
 (1 + \Theta x)^{-(n+1)} &= \frac{1}{(1 + \Theta x)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \Theta x} \cdot \frac{1}{(1 + \Theta x)^n} \\
 &\leq \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{(1 - \Theta)^n} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &\leq \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1 - \Theta^n}{1 - \Theta} \cdot \frac{1}{1 - |x|} \\
 &= \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1}{1 - |x|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Das hei\ss t nach dem Satz von Taylor gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

□

7 [*] Die Gamma-Funktion

Erinnerung: Die Γ -Funktion ist für $x > 0$ definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Das funktioniert bei 0, da $-x - 1 > -1$ und es funktioniert bei ∞ , da

$$\begin{aligned} t^{x-1} \cdot e^{-t} &= t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \\ &= C_x \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad (C_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} < \infty) \\ \Rightarrow \Gamma(x) &= \lim_{a \searrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \text{ existiert } \forall x > 0 \end{aligned}$$

Wir hatten außerdem

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x > 0$$

Definition 7.1.1 (Konvexität³). Eine Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ – wobei I ein Intervall ist ($I = [0, \infty)$ ist dabei erlaubt) – heißt konvex, falls $\forall x, y \in I$ und für alle $0 \leq \Theta \leq 1$ gilt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \leq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y)$$

Skizze 7.1.2 (Konvexe Funktion). Wähle ein $\Theta \in (0, 1)$ und formuliere die Interpolation $\Theta x + (1 - \Theta)y$.



Abbildung 1: Konvexe Funktion mit eingezeichneter Sekante

Beispiel 7.1.3. Die Funktionen $F(t) = e^t$ und $F(t) = e^{-t}$ sind konvex auf \mathbb{R} . (Übung)

Definition 7.1.4. Eine Funktion F heißt konkav, falls $-F$ konvex ist. Das heißt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \geq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y) \quad \forall 0 \leq \Theta < 1 \quad \forall x, y \in I$$

Definition 7.1.5 (Logarithmische Konvexität). Eine Funktion F heißt logarithmisch konvex, falls $\log \circ F = \log(F)$ konvex ist. Das heißt

$$\begin{aligned} \log F(\Theta x + (1 - \Theta)y) &\leq \Theta \log F(x) + (1 - \Theta) \cdot \log F(y) \\ &= \log(F(x)^\Theta) + \log(F(y)^{1-\Theta}) \end{aligned}$$

³Siehe auch Skript Ana I, Kapitel 19

$$\begin{aligned}
&= \log \left(F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta} \right) \\
&\Leftrightarrow F(\Theta x + (1-\Theta)y) \leq F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta} \quad \forall x, y \in I \quad \forall 0 \leq \Theta \leq 1
\end{aligned}$$

dann ist F logarithmisch konvex.

Satz 7.1.6. Die Γ -Funktion $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto F(x)$ ist logarithmisch konvex.

Beweis. (Übung) □

Satz 7.1.7 (Bohr, Mollerup). Ist $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine Funktion mit

- (a) $F(1) = 1$
- (b) $F(x+1) = x \cdot F(x)$ und
- (c) F ist logarithmisch konvex

Dann gilt $F = \Gamma$, das heißt $F(x) = \Gamma(x) \quad \forall x > 0$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die obigen Eigenschaften die Funktion F eindeutig bestimmen, da wir bereits wissen, dass Γ die Eigenschaften erfüllt.

SCHRITT 1:

$$\begin{aligned}
F(x+n) &\stackrel{(b)}{=} (x+n-1) \cdot F(x+n-1) \\
&= (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \dots \cdot (x-1) \cdot x \cdot F(x) \quad \forall x > 0
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
F(n+1) &= n! \cdot F(1) = n! \\
&\Rightarrow F(n) = \Gamma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Das heißt es reicht zu zeigen, dass $F(x)$ bei $0 < x < 1$ eindeutig bestimmt ist.

SCHRITT 2: Sei $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}
s+n &= (1-x) \cdot n + x \cdot (n+1) & (\Theta = 1-x) \\
\stackrel{(c)}{\Rightarrow} F(x+n) &= F((1-x) \cot n + x \cdot (n+1)) \\
&\leq F(n)^{1-x} \cdot F(n+1)^x = F(n)^{1-x} \cdot (n \cdot F(n))^x \\
&= F(n) \cdot n^x = (n-1)! \cdot n^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < x < 1 \\
n+1 &= x \cdot (n+x) + (1-x) \cdot (n+1+x) & (1) \\
\Rightarrow F(n+x) &\leq F(n+x)^x \cdot F(n+1+x)^{1-x} \\
&= F(n+x) \cdot (n+x)^{1-x} & (2)
\end{aligned}$$

Durch die Kombination von (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow n! \cdot (n+x)^{x-1} \leq F(n+x) \leq (n-1)! \cdot n^x \\
&F(n+x) = x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1) \cdot F(x) \\
&\Rightarrow \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \\
&a_n(x) := \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n(x) &:= \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x-n+1)} \\
\Rightarrow a_n(x) &\leq F(x) \leq b_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{N} \forall 0 < x < 1 \\
\Rightarrow \frac{a_n(x)}{b_n(x)} &\leq \frac{F(x)}{b_n(x)} \leq 1 \\
\frac{b_n(x)}{a_n(x)} &= \frac{n^x}{n \cdot (n+x)^{x-1}} = \frac{(n+x) \cdot n^x}{n \cdot (n+x)^x} \\
&= \frac{n+x}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+x} \right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\
\rightarrow F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (1+x) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \tag{7.1.1}
\end{aligned}$$

also ist $F(x)$ eindeutig bestimmt. \square

Korollar 7.1.8 (Gaußsche Darstellung von Γ).

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot x^n}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \tag{7.1.2}$$

Beweis. Da $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung für $0 < x < 1$ direkt aus (7.1.1). Für $x = 1$ rechnet sich die Formel leicht nach. Also ist noch zu zeigen: Gilt (7.1.2) für ein x , so gilt die Aussage auch für $y = x + 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \\
&= x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{y-1}}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1)}
\end{aligned}$$

Multiplikation im Zähler mit n und im Nenner mit $y+n$ (was sich für $n \rightarrow \infty$ entspricht) liefert

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^y}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1) \cdot (y+n)} \quad \square$$

Satz 7.1.9.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)} \\
\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{2}} = \pi
\end{aligned}$$

(Wallisches Produkt)

□

8 [*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume

8.1 [*] Metrische Räume

[07. Jun] Frage: Wie definiert man Abstand?

Beispiel 8.1.1 (Abstände zweier reeller Zahlen). Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir definieren den Abstand über den Betrag. Das heißt $d(x, y) := |x - y|$. Der Abstand hat in diesem Fall die Eigenschaften

- (i) $|x - y| \geq 0$ und $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $|x - y| = |y - x|$
- (iii) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}$

Definition 8.1.2 (Metrik). Sei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (i) $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$

In diesem Fall nennen wir d eine Metrik auf X .

Beispiel 8.1.3.

1. Auf \mathbb{R} oder \mathbb{C} definieren wir $d(x, y) := |x - y|$
2. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definieren wir zum Beispiel die euklidische Metrik $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
3. Sei (X, d) ein metrischer Raum (das heißt wir haben bereits eine Metrik d auf X definiert) und sei $A \subseteq X$. Dann definieren wir die *induzierte Metrik* $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$
4. Die *diskrete Metrik* ist definiert durch $d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
5. Die französische Eisenbahnmetrik im \mathbb{R}^2 ist definiert durch $d(x, y) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Die Metrik setzt sich also jeweils zusammen aus der euklidischen Distanz von x und y zum Koordinatenursprung
6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann können wir eine Metrik d_1 definieren durch

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Dass d_1 die Eigenschaften (i) und (ii) im Sinne der Definition erfüllt, rechnet sich leicht nach. Für (iii) gilt für ein $z \in X$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Außerdem gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{t+1} \quad (\text{monoton steigend})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d_1(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = d_1(x, z) + d_1(z, y)
\end{aligned}$$

8.2 [*] Normierte Vektorräume

Definition 8.2.1 (Vektorraum). Ein Vektorraum V über \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) ist eine Menge auf der es eine Vektoraddition

$$\begin{aligned}
+ : V \times V &\rightarrow V \\
(x, y) &\mapsto x + y
\end{aligned}$$

und eine (skalare) Multiplikation

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\
(\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x
\end{aligned}$$

gibt, welche den üblichen Axiomen aus der Algebra genügen (z.B. $x+y = y+x$, $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ oder $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$).

Definition 8.2.2 (Norm). Eine Norm auf einem VR V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \|x\|$ mit den Eigenschaften

- (i) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in V$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

Definition 8.2.3 (Normierter Vektorraum). Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ aus einem VR V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V .

Satz 8.2.4. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR, so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V definiert.

Beweis. Die Axiome der Metrik folgen unmittelbar aus den Axiomen der Norm. □

Bemerkung 8.2.5. Gelten für eine Abbildung die Norm-Eigenschaften (ii) und (iii), aber statt (i) nur $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$. Dann heißt $\|\cdot\|$ eine *Halbnorm*. Ein Beispiel dafür im \mathbb{R}^2 wäre die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Beispiel 8.2.6.

1. Ist V ein euklidischer reeller VR mit symmetrischem, positiv-definitem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm.
2. Ähnlich, wenn V ein komplexer VR mit positiv-definiter sesquilinearer Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist. Das heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ hat die Eigenschaften

$$(i) \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ und } \langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x, y \in V \quad (4)$$

⁴Die Forderung $\langle x, x \rangle \geq 0$ ist wohldefiniert, weil durch die anderen Eigenschaften folgt, dass $\forall x \in V: \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

- (ii) $\langle x, u + w \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, w \rangle$ sowie $\langle u + w, y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle w, y \rangle$
 (iii) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ sowie $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ ⁽⁵⁾

Dann definieren wir eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

3. Im \mathbb{R}^d definieren wir für zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$ ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^d x_j \cdot y_j$$

Und eine Norm durch

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$$

4. Wir definieren die Maximums-Norm auf \mathbb{R}^d durch $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$. Daraus folgt auch $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \cdot \|x\|_\infty$.
 5. Wir definieren die Manhattan-Norm auf \mathbb{R}^d durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$$

und es gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \cdot \|x\|_\infty$

6. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{B}(X)$ der Vektorraum der reellwertigen beschränkten Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \sup \{|f(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

als eine Norm auf $\mathcal{B}(X)$. Das ist eine Verallgemeinerung der Maximumsnorm.

8.3 [*] Umgebungen und offene Mengen

Definition 8.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum

- (a) Für $a \in X$, $r > 0$ heißt $B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$ die (offene) Kugel um a mit dem Radius r und dem Mittelpunkt a .
 (b) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Insbesondere ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x . Wir nennen $B_\varepsilon(x)$ die ε -Umgebung von x .

Satz 8.3.2 (Hausdorffsches Trennungsaxiom). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existieren zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ε -Umgebungen V von y und U von x mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) > 0$. Angenommen $\exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

⁵Physiker-Konvention, anders herum als in der Vorlesung LINEARE ALGEBRA I/II